

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСОВ В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ С ДИСПЕРСИЕЙ В ПРИСУТСТВИИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ

В.Ю. Белашов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
vybelashov@yahoo.com

Аналитически исследовано распространение импульсов ВТН в длинных линиях с нелинейностью и дисперсией в присутствии низкочастотных флуктуаций тока и напряжения, которые могут быть обусловлены влиянием внешних ЭМ полей, генерируемых близрасположенным электрооборудованием промышленного или энергетического объекта. Показано, что даже в пренебрежении потерями, под влиянием внешних по отношению к импульсу низкочастотных флуктуаций, он деформируется, причем, в процессе распространения, характерный размер импульса вдоль линии и его амплитуда изменяются как $t^{3/2}$ и $t^{-3/2}$, соответственно.

Основные уравнения и постановка задачи

Распространение в длинных линиях с распределенными параметрами нелинейных импульсов волн тока и напряжения (ВТН), возбуждаемых внешними источниками электромагнитного (ЭМ) поля изучалось теоретически и численно в работах [1, 2]. При этом в [1] для неоднородных телеграфных уравнений, описывающих ВТН в линиях с линейной нагрузкой были получены точные аналитические решения для источников типа удаленного разряда молнии, индуцирующих ВТН вследствие растекания зарядов, «подтянутых» электростатическим полем грозового облака. Для линий с нелинейной нагрузкой возникающая при этом система неоднородных уравнений Кортевега-де Вриза (КдВ) решалась численно с использованием развитых в [2, 3] методов численного интегрирования нелинейных систем. Однако и в том, и в другом случае предполагалось, что низкочастотные (по сравнению с характеристической длиной импульса) колебания тока и напряжения в линии изначально отсутствуют. Реально же практически всегда мы встречаемся на практике с ситуацией, когда на распространяющиеся в линиях сигналы (например, в сетях управления) оказывают свое влияние внешние ЭМ поля, генерируемые близрасположенным электрооборудованием промышленного или энергетического объекта, суммарное воздействие которых на линию носит хорошо выраженный хаотический характер. Такое воздействие, в результате, можно в достаточно хорошем приближении рассматривать как стохастические флуктуации индуцируемого в линии тока (и, соответственно, напряжения), частоты

которых (порядка промышленной частоты) существенно меньше характерных частот управляющих импульсов ВТН, распространяющихся по сети.

В настоящей работе изучается задача распространения импульсов ВТН, распространяющихся в длинных линиях, включающих нелинейные элементы (например, полупроводниковые (параметрические) диоды, варисторы или разрядники в качестве нелинейных емкостей и др.) с дисперсией, определяемой наличием в линии индуктивных элементов, в присутствии низкочастотных флуктуаций тока и напряжения. Для линии, элемент которой показан на рис. 1, уравнения, описывающие распространение ВТН, имеют вид системы уравнений КдВ, учитывающих возможные потери в линии [2]:

$$\begin{aligned} \partial_t I + (\alpha_1 I \partial_x U + \beta_1 \partial_x^3 U + RI) / L &= 0, \\ \partial_t U + (\alpha_2 U \partial_x I + \beta_2 \partial_x^3 I + GU) / C &= 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

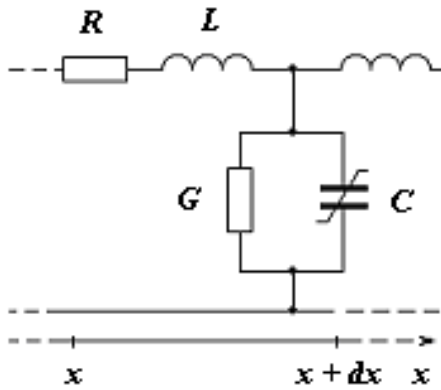


Рис. 1. Элемент длинной линии с магнитной связью

где R, C, L, G – распределенные параметры: сопротивление, емкость, индуктивность и коэффициент утечки (проводимость), рассчитанные на единицу длины; α_1, α_2 и β_1, β_2 – параметры, определяющие вклад соответственно нелинейных и дисперсионных эффектов. Следуя [3] перепишем уравнения (1) в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \partial_t I + \tilde{\alpha}_1 I \partial_x U + \tilde{\beta}_1 \partial_x^3 U + \tilde{\gamma}_1 I = 0, \\ \partial_t U + \tilde{\alpha}_2 U \partial_x I + \tilde{\beta}_2 \partial_x^3 I + \tilde{\gamma}_2 U = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где коэффициенты $\tilde{\alpha}_{1,2}, \tilde{\beta}_{1,2}, \tilde{\gamma}_{1,2}$ также являются безразмерными, и для упрощения анализа будем вначале предполагать, что потери в линии пренебрежимо малы: $\tilde{\gamma}_{1,2} \approx 0$, поскольку их наличие может при исследовании "маскировать" эффекты, обусловленные воздействием стохастических флуктуаций тока и напряжения на распространение импульса ВТН (влияние потерь обсудим в завершающей части работы). Рассмотрим одно (любое) из полученных таким образом уравнений и, опустив «тильды» и индексы при коэффициентах, а также предполагая, например, для первого уравнения системы (2), что на временах, много меньших характеристического периода флуктуаций, ток и напряжение связаны линейным соотношением $U = IR$, запишем:

$$\partial_t U + \alpha U \partial_x U + \beta \partial_x^3 U = 0,$$

где $\alpha = \tilde{\alpha}_1, \beta = \tilde{\beta}_1 R$. Для упрощения выполним замену $U \rightarrow -(6/\alpha)u$ и введем в уравнение член, описывающий стохастические флуктуации:

$$\partial_t u - 6u\partial_x u + \partial_x^3 u - \eta(t) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет собой так называемое «стохастическое» уравнение КдВ, впервые (безотносительно к типу среды) исследованное М. Вадати [4]. Из [3, 5] известно, что это уравнение при $\eta(t)=0$ описывает эволюцию нелинейных волн и солитонов в самых разнообразных средах с дисперсией. Для определенности будем исследовать влияние стохастических колебаний тока и напряжения в линии на солитон уравнения КдВ, поскольку при $\eta(t)=0$ он является устойчивым образованием и распространяется без изменения своей формы и скорости, хотя осуществляемый ниже подход является достаточно общим (так, в разд. 2 решается задача для волн любого типа, описываемых уравнением, в общей постановке).

В уравнении (3) $\eta(t)$ описывает внешний "шум", когда характеристические размеры солитона ВТН l_s много меньше когерентной длины шума l_n . Это является частным случаем более общего, когда внешний шум описывается членом вида $\eta(x, t)$. Однако, будучи более простым для аналитического изучения, рассматриваемый частный случай позволяет получить точный результат и дает нам информацию, которая является весьма полезной и для более общей ситуации, когда $l_s > l_n$.

Общее точное решение

Прежде всего, заметим, что уравнение (1) связано с уравнением КдВ

$$\partial_t V - 6V\partial_\xi V + \partial_\xi^3 V = 0$$

преобразованием Галилея

$$u(t, x) = V(t, \xi) + W(t), \quad W(t) = \int_0^t \eta(t) dt, \quad (4)$$

$$\xi = x + m(t), \quad m(t) = 6 \int_0^t W(t) dt$$

и, следовательно, является полностью интегрируемой системой и может быть проинтегрировано методом ОЗР [6]. Следуя анализу, выполненному в [4], будем предполагать, что внешний шум $\eta(t)$ является гауссовским

$$\begin{aligned} \langle \eta(t_1)\eta(t_2)\dots\eta(t_n) \rangle &= 0 && \text{(нечетные } n); \\ &= \Sigma\Pi \langle \eta(t_i)\eta(t_j) \rangle && \text{(четные } n) \end{aligned} \quad (5)$$

и белым $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\varepsilon\delta(t-t')$. Здесь угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают статистическое усреднение, а символы $\Sigma\Pi$, как и в работе [4], означают, что мы

выбираем $n/2$ пар (t_i, t_j) , умножаем $n/2$ раз $\langle \eta(t_i)\eta(t_j) \rangle$ и суммируем по всем различным $(n-1)!!$. В этом случае для $W(t)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \langle W(t) \rangle &= 0, & \langle W(t_1)W(t_2) \rangle &= 2\varepsilon \min(t_1, t_2), \\ \langle \exp [cW(t)] \rangle &= \exp \left[\frac{1}{2} c^2 \langle W^2(t) \rangle \right], & c &= \text{const.} \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим вначале задачу в наиболее общей постановке. Пусть функционал от $V(t, \xi)$ имеет следующий вид:

$$F[V(t, \xi)] = F[V(t, \xi), \partial_\xi V(t, \xi), \dots] = F(t, \xi). \quad (7)$$

Рассматривая преобразование Фурье

$$F(t, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{F}(t, k) e^{ik\xi}, \quad \hat{F}(t, k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx F(t, \xi) e^{-ik\xi},$$

с учетом флуктуаций координаты ξ получаем [3]

$$\hat{F}(t, k) = \hat{F}_0(t, k) \exp [ik m(t)], \quad (8)$$

где

$$\hat{F}_0(t, k) = \hat{F}(t, k) \Big|_{m=0} = \int_{-\infty}^{\infty} dx F(t, x) e^{-ikx}. \quad (9)$$

Статистически усредняя, будем иметь

$$\langle \hat{F}(t, k) \rangle = \hat{F}_0(t, k) \hat{G}(k), \quad (10)$$

где для $\hat{G}(k) = \langle \exp [ik m(t)] \rangle$, используя (5) и (6), можно записать

$$\hat{G}(k) = \exp \left[-\frac{1}{2} k^2 \langle m^2(t) \rangle \right], \quad \langle m^2(t) \rangle = 24\varepsilon t^3, \quad t > 0. \quad (11)$$

Уравнение (10) показывает, что усредненный спектр (8) функционала $F[V(t, \xi, y)]$ есть произведение $\hat{F}(t, k, y)$ в отсутствие шума (9) и гауссовского распределения (11). Таким образом, имеем

$$\langle F[V(t, \xi)] \rangle = \langle F(t, \xi) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{F}_0(t, k) \hat{G}(k) e^{ik\xi}. \quad (12)$$

Используя теорему о свертке, можно также получить из решения (12) [4]

$$\langle F[V(t, \xi)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds F[V(t, s)] G(x - s), \quad (13)$$

где

$$G(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{G}(k) e^{iks} = \left[2\pi \langle m^2(t) \rangle \right]^{-1/2} \exp \left[-s^2 / 2 \langle m^2(t) \rangle \right].$$

Полученные выражения (12) и (13) могут быть теперь использованы для исследования динамического поведения солитонов уравнения (3), которое мы

сейчас и рассмотрим.

Динамика солитонов ВТН

В качестве примера исследуем случай, когда $F[V(t, \xi)]$ (7) является функционалом односолитонного решения уравнения (3). Вычисляя $\hat{F}_0(t, k)$ и $\hat{G}(k)$ по формулам (9) и (11), можно легко найти $\langle \hat{F}(t, k) \rangle$ и затем получить $\langle u(t, x) \rangle$.

Воспользуемся, однако, более наглядным и простым способом, предложенным в [4]. Рассмотрим решение

$$V(t, x) = -2v^2 \operatorname{sech}^2 \left[v(x - x_0) - 4v^3 t \right] \quad (14)$$

(v – константа, имеющая смысл собственного значения, отвечающего солитону – см. [6]) и, учитывая замену $\xi = x + m(t)$ и формулы (4), запишем решение в виде

$$u(t, x) = W(t) - 2v^2 \operatorname{sech}^2 \left[v(x - x_0) - 4v^3 t + 6v \int_0^t W(t') dt' \right].$$

Далее, беря статистическое среднее и используя при этом формулы (5), (6), получим:

$$\begin{aligned} \langle u(t, x) \rangle &= -2v^2 \left\langle \operatorname{sech}^2 \left[v(x - x_0) - 4v^3 t + 6v \int_0^t W(t') dt' \right] \right\rangle = \\ &= 8v^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left\langle \exp \left[2n \left\{ v(x - x_0) - 4v^3 t + 6v \int_0^t W(t') dt' \right\} \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Второе и третье соотношения (6) дают [3]

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left\{ 12nk \int_0^t W(t') dt' \right\} \right\rangle &= \exp \left\{ \frac{1}{2} (12nk)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle W(t_1) W(t_2) \rangle \right\} = \\ &= \exp \left(48n^2 v^2 \varepsilon t^3 \right), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, будем иметь

$$\langle u(t, x) \rangle = 8v^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{na + n^2 b}, \quad (15)$$

где

$$a = 2 \left[v(x - x_0) - 4v^3 t \right], \quad b = 48v^2 \varepsilon t^3. \quad (16)$$

Отметим, что формула (15) получена в предположении, что "шум" является гауссовским. Для "шума", не являющегося белым, выражение для параметра b (16) будет более сложным. Следуя [3], из (15) получим

$$\partial_b \langle u(t, x) \rangle = \partial_a^2 \langle u(t, x) \rangle, \quad \langle u(t, x) \rangle|_{b=0} = -2v^2 \operatorname{sech}^2(a/2). \quad (17)$$

Из первого равенства (17) следует, что динамическое поведение солитона стохастического уравнения КдВ описывается уравнением диффузии, где роль времени

играет параметр b , а роль пространственной координаты – a . Заметим, что уравнение (15) может быть записано в форме преобразования Фурье, и тогда решение уравнений (17) примет вид

$$\langle u(t, x) \rangle = -8v^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi \sinh \pi k} \frac{\pi k}{e^{-bk^2}} e^{iak} . \quad (18)$$

Формула (18) дает спектральное представление решения стохастического уравнения КдВ при наличии стохастических гауссовских флуктуаций волнового поля, при этом преобразование Фурье статистического среднего $\langle u(t, x) \rangle$ представляет собой произведение чисто солитонной части $-8v^2 \pi k / \sinh \pi k$ и диффузионной части $\exp(-bk^2)$. Используя теорему о свертке, решение (18) можно переписать в форме [5]

$$\langle u(t, x) \rangle = -\frac{v^2}{\sqrt{\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \operatorname{sech}^2(s/2) \exp\left[-(a-s)^2/4b\right].$$

Основываясь на результате (18), рассмотрим теперь динамическое поведение солитона при наличии гауссовского "шума". Согласно [5] из (18) можно получить:

а) при $b \equiv 48v^2 \varepsilon t^3 < 1$

$$\langle u(t, x) \rangle = -2v^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b^n \frac{\partial^{2n}}{\partial a^{2n}} \operatorname{sech}^2(a/2), \quad (19a)$$

б) при $b > 1$

$$\langle u(t, x) \rangle = -\frac{4v^2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n} - 2) B_n \pi^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^n}{\partial b^n} \right) \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-a^2/4b}, \quad (19б)$$

где B_n – числа Бернулли. Выражения (19) показывают, что при $t = 0$ $\langle u(t, x) \rangle$ определяется правой частью формулы (14) с $t = 0$, а при $t \rightarrow \infty$

$$\langle u(t, x) \rangle = -\frac{v}{\sqrt{3\pi\varepsilon}} t^{-3/2} \exp\left[-\frac{(x-x_0-4v^2t)^2}{48\varepsilon t^3}\right].$$

Из последнего выражения видно, что при эволюции в результате воздействия внешнего "шума" солитон деформируется, причем, асимптотически, его характерный размер вдоль направления распространения и амплитуда изменяются, соответственно, как $t^{3/2}$ и $t^{-3/2}$, что не является следствием диффузионных или диссипативных эффектов, которые можно было бы связать с потерями, поскольку область, занимаемая солитоном, является инвариантом, т.е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \langle u(t, x) \rangle dx$ сохраняется. Это легко проверить прямым вычислением:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle u(t, x) \rangle dx = -8v^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\pi k}{\sinh \pi k} e^{-bk^2} e^{iak} =$$

$$= -8v^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\pi k}{\sinh \pi k} e^{-bk^2} 2\pi \delta(2vk) = -4v.$$

В заключение заметим, что выше мы рассмотрели влияние на структуру и эволюцию солитона уравнения КдВ, описывающего импульс ВТН, стохастических колебаний, присутствующих в системе (в нашем случае, в линии), – внешнего (по отношению к распространяющемуся в линии импульсу) белого "шума" вида $\eta(t)$. В более общем случае уравнение КдВ может принимать вид [4]

$$\partial_t u - bu \partial_x u + \partial_x^3 u + \gamma u - \eta(t, x) = 0, \quad (20)$$

(причем четвертый член – ср. (20) с уравнениями (2) – описывает потери в линии), однако проведенный анализ остается справедливым, когда характеристическое время $t_s \ll 1/\gamma$ и характеристический размер солитона $l_s \ll l_n$ (l_n – когерентная "длина" шума). В случае, когда $l_s \sim l_n$, преобразование Галилея (4) оказывается уже неверным и необходимо обобщить метод обратной задачи рассеяния, как это было сделано, например, для уравнения КдВ в работах [7, 8]. Получить же точные (аналитические) решения уравнения (20) не представляется возможным и единственным путем исследования динамики его решений остается численное интегрирование, которое может быть успешно осуществлено с использованием методов, развитых в [2, 3, 5].

Список литературы

1. **Белашов В.Ю., Белашова Е.С., Денисова А.Р.** Исследование распространения ВТН в электрических линиях с линейной и нелинейной нагрузкой // Изв. вузов. Проблемы энергетики. – 2006. – № 11-12. – С. 25-34.
2. **Белашова Е.С.** Математическое моделирование распространения нелинейных импульсов в линиях с дисперсией и потерями // Изв. вузов. Проблемы энергетики. – 2007. – № 5-6. – С. 35-40.
3. **Белашова Е.С., Белашов В.Ю.** Солитоны как математические и физические объекты. – Казань: КГЭУ, 2006. – 205 с.
4. **Wadati M.** Stochastic Korteweg-de Vries equation // J. Phys. Soc. Jap. – 1983. – V. 52. – Pp. 2642-2648.
5. **Belashov V.Yu., Vladimirov S.V.** Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory, Simulation, Applications. – Springer-Verlag GmbH & Co. KG Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 2005. – 303 p.
6. **Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.** Теория солитонов: Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 319 с.

7. **Белашов В.Ю.** Эволюция солитонов КдВ на “этапе нестационарности”: Препринт. – Магадан: СВКНИИ ДВНЦ АН СССР, 1984. – 11 с.
8. **Мозес Г.** Обобщение обратной задачи рассеяния для одномерного уравнения Шредингера и соответствующие приложения к уравнению Кортевега-де Вриза. Вариационный принцип // В кн.: Солитоны в действии / Пер. с англ. под ред. А.В. Гапонова-Грехова. – М.: Мир, 1981. – С. 2-44.

Список литературы и сведения об авторе на англ. языке

References

1. **Belashov V.Yu., Belashova E.S., Denisova A.R.** Study of propagation of the current and voltage waves in the electric lines with linear and nonlinear load. *Izv. vuzov. Problemy energetiki*, 2006. N 11-12. P. 25-34.
2. **Belashova E.S.** Mathematical modelling of propagation of nonlinear pulses in lines with a dispersion and losses. *Izv. vuzov. Problemy energetiki*, 2007. N 5-6. P. 35-40.
3. **Belashova E.S., Belashov V.Yu.** Solitons as mathematical and physical objects. Kazan: KSPEU, 2006. 205 pp.
4. **Wadati M.** Stochastic Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Jap.*, 1983. V. 52. P. 2642-2648.
5. **Belashov V.Yu., Vladimirov S.V.** Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory, Simulation, Applications. Springer-Verlag GmbH & Co. KG Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 2005. 303 p.
6. **Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevsky L.P.** Theory of solitons. Inverse scattering method. Moscow: Nauka, 1980. 319 pp.
7. **Belashov V.Yu.** Evolution of the KdV solitons on “nonstationary stage”: Preprint. Magadan: NEISRI FEB Acad. Sci. of the USSR, 1984. 11 pp.
8. **Moses H.** Generalization of the inverse scattering problem for the one-dimensional Schrodinger equation and corresponding applications to the Korteweg-de Vries equation. Variation principle. In: Solitons in action. Moscow: Mir, 1981. P. 2-44.

Author:

Vasily Yu. Belashov, Chair of Radiophysics, Kazan Federal University (KFU), Chief Researcher, Doctor of Sci. in Radiophysics, Professor. Address: Institute of Physics, KFU, Kremlyovskaya 16a, Kazan 420018, Russia. Tel. +7(843) 518 80 77. E-mail: vybelashov@yahoo.com.