

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Научно-образовательный математический центр
Приволжского федерального округа

**XVI Международная Казанская школа-конференция
"Теория функций, ее приложения и смежные вопросы"**

Сборник трудов

(Казань, 22 – 27 августа 2023 г.)



Казанский (Приволжский) федеральный университет

2023

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа

ул. Кремлевская, 35, Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация

Издание осуществлено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2023-944.

УДК 517

ББК 22.16

Научный редактор: С. Р. Насыров.

**Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 66
XVI Международная Казанская школа-конференция
"Теория функций, ее приложения и смежные вопросы",
Сборник трудов. – Казань: КФУ, 2023. – Т. 66. – 310 с.**

В том вошли материалы XVI Международной Казанской школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", организованной на базе Института математики и механики им. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Конференция проходила в Казани с 22 по 27 августа 2023 года.

Материалы предназначены для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в различных областях математики и ее приложений.

© Научно-образовательный математический центр ПФО, 2023

© Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, 2023

© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2023

CONFORMAL MAPPINGS OF UNBOUNDED POLYGONS

M. M. Garifullin, S. R. Nasyrov

In many problems arising in complex analysis and applications, conformal mappings of the upper half-plane onto the exteriors of given bounded polygonal domains play an important role. The class of such mappings is realized through the generalized Schwarz-Christoffel integrals. Assuming that the preimages of the vertices are known, we have an equation to determine the pole of the conformal mapping. We study the problem of uniqueness of solution to the equation and show that in some cases it is unique and in some situations this is not the case.

Keywords: conformal mappings of polygons, generalized Schwarz-Christoffel integral, external inverse boundary value problems.

УДК 514.763

ОЦЕНКА ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ ЧЕРЕЗ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОБЛАСТИЛ. И. Гафиятуллина¹, Р. Г. Салахудинов²

¹ gafiyat@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

² rsalakhud@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Работа посвящена оценкам жесткости кручения через новые легковычислимые геометрические характеристики выпуклой области. В работе определены две новые характеристики области с конечной длиной границы, а также приведен алгоритм их вычисления и изучены их свойства.

Ключевые слова: выпуклая область, функция расстояния до границы области, изопериметрическое неравенство, жесткость кручения, экстремальная область.

Пусть G – односвязная область на плоскости. Одной из важных физических характеристик области в математической физике является функционал

$$P(G) := 2 \int_G u(x, G) dA,$$

называемый жесткостью кручения в теории упругости, а также потоком в гидродинамике. Здесь через dA обозначен дифференциальный элемент площади, $u(x, G)$ – функция напряжения, которая является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -2, & x \in G, \\ u = 0, & x \in \partial G. \end{cases}$$

Через $L(G)$ обозначим длину границы области G . Пусть

$$l(\mu, G) := L(G(\mu)), \quad l(\rho(G)) := \lim_{\mu \rightarrow \rho(G)} l(\mu, G).$$

Будем обозначать через Γ подмножество выпуклых областей, содержащее описанные около некоторой окружности многоугольники, а также круговые многоугольники, получаемые из описанных многоугольников заменой некоторых сторон или

их частей дугами максимальной вписанной окружности. Для областей D из Γ введем функционал

$$\mathbf{K}(D) := \sup_{\mu} (-l'(\mu)).$$

Пусть G — произвольная выпуклая область. Сопоставим области G область $D \in \Gamma$, которая содержит область G , имеет тот же самый радиус максимального круга и имеет наименьшую длину границы области.

Определим функционалы:

$$\mathbf{K}(G) := \mathbf{K}(D),$$

$$d(\rho(G)) := l(\rho(D)).$$

Теорема. Пусть G — выпуклая область на плоскости ограниченной площади. Тогда справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(G) \leq \frac{2\rho(G)^3}{3} (\mathbf{K}(G)\rho(G) + 2d(\rho(G)) - \pi\rho(G)).$$

Равенство достигается в пределе, например, для узких прямоугольников высота которых стремится к нулю.

Теорема. Пусть G — выпуклая область на плоскости конечной площади. Тогда для $q > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(G) \geq \frac{\rho(G)^3}{2(2+q)} (\mathbf{L}(G) + l(\rho(G))(q+1) + \pi q\rho(G)).$$

Литература

1. Полюа Г., Сегё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.
2. Салахудинов Р. Г. Некоторые свойства функционалов на множествах уровня // Уфимский математический журнал. – 2015. – № 7. – С. 1-12.
3. Salakhudinov R. G., Gafiyatullina L. I. Two-Sided Estimate for the Torsional Rigidity of Convex Domain Generalizing the Polya–Szego and Makai Inequalities // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – V. 43. – № 10. – P. 3020–3032.

ESTIMATES OF THE TORSIONAL RIGIDITY OF A CONVEX DOMAIN IN TERMS OF THE GEOMETRICAL CHARACTERISTICS OF THE DOMAIN

L. I. Gafiyatullina, R. G. Salakhudinov

The work is devoted to estimates of the torsional rigidity in terms of new easily computable geometric characteristics of a convex domain. The paper defines two new characteristics of a domain with a finite length of the boundary, as well as an algorithm for calculating them and studying their properties.

Keywords: convex domain, the distance function to the boundary of a domain, isoperimetric inequality, torsional rigidity.