Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 48

Равномерная сходимость функциональных рядов.

Тема сегодняшнего занятия – исследование сходимости рядов вида

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \tag{1}$$

общий член которых $a_n(x)$ представляет собой функцию, определенную на некотором множестве E числовой оси R.

Ряд (1) называется *сходящимся* на множестве E, если он сходится в каждой точке этого множества. Используя известные признаки и критерии сходимости числовых рядов, можно найти области сходимости и абсолютной сходимости ряда (1), как мы это делали с числовыми рядами, когда a_n зависел от параметра. Вспомним, как это делалось рассмотрев следующий

Пример 1. *Определить области сходимости и абсолютной сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}.$$

Решение. Ряд сходится абсолютно, если $|\ln x| < 1$, то есть на интервале $(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e})$, поскольку в этом случае он “лучше геометрического”. Ряд расходится вне этого интервала $|\ln x| > 1$, так как тогда он “хуже” гармонического и расходится при $\ln x = 1$, как гармонический. Наконец, при $\ln x = -1$ ряд сходится условно, как ряд Лейбница.

Ответ. Область сходимости ряда $[\,\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}\,)$; абсолютной сходимости $(\,\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}\,)$; условно сходится только при одном значении $x = \mathrm{e}^{-1}$.

Итак, если мы решили, что ряд $S(x)$ сходится на E, то наши дальнейшие действия, как естествоиспытателя, будут состоять в изучении поведения функции $S(x)$. Кстати, в виде такого ряда записываются решения многих дифференциальных и интегральных уравнений математической физики, описывающих поведение физических объектов. Возможно, нам придется дифференцировать и интегрировать $S(x)$, вычислять пределы при $x \to x_0$, и пр. Поскольку явный вид функции $S(x)$ неизвестен, эти действия придется производить над каждым членом $a_n(x),\ n = 1, 2\ldots,$ ряда. Спрашивается, насколько это корректно. Например, получим ли мы после почленного дифференцирования ряда (1) действительно производную функции $S(x)$ или нечто совсем другое. Многочисленные примеры показывают, что совершать такое с рядом (1) не всегда приводит к желаемому результату,– надо проверять специальные условия о глобальной скорости сходимости ряда, а не при каждом x в отдельности. Такие условия обычно накладываются в виде равномерной сходимости функциональной последовательности $\{S_n(x),\ n = 1, 2, \ldots\}$ частичных сумм ряда (1).

Определение 1. *Ряд* (1) *называется* равномерно *сходящимся на множестве E, если равномерно на E сходится последовательность частичных сумм*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

или, что тоже, остаток ряда (1)

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0,$$

то есть

$$\sup_{x \in E} r_n(x) \longrightarrow 0,$$

когда $n \to \infty$.

Понятно, что используя только это определение достаточно трудно установить или опровергнуть равномерную сходимость функционального ряда. Для этого, как и для предыдущих рядов существуют критерии и достаточные признаки сходимости.

Критерий Коши равномерной сходимости: *Ряд* (1) *сходится равномерно на* E *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \;\; \forall n > N \;\; \forall p \geq 1 \;\; \forall x \in E :$$
$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Критерий Коши неравномерной сходимости: *Ряд* (1) *не сходится равномерно на* E, *если*

$$\exists\varepsilon > 0 \;\; \forall N \geq 1 \;\; \exists n > N \;\; \exists p \geq 1 \;\; \exists x_n \in E :$$
$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x_n) \right| \geq \varepsilon.$$

В частности, если

$$\exists\varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \;\; \exists x_n \in E, \;\; |\, a_n(x_n)\,| \geq \varepsilon,$$

то ряд (1) *не является равномерно сходящимся на* E.

Это частное замечание утверждает, что если функциональная последовательность $\{\, a_n(x)\,\}$ общих членов ряда не сходится равномерно к нулю на E, то ряд (1) также не будет сходится равномерно. Отсюда следует *практическая рекомендация* по доказательству отсутствия равномерной сходимости: **надо найти такое** x_n, **чтобы** $a_n(x_n) \not\to 0$.

Приведем пример на использование этой практической рекомендации.

Пример 2. *Исследовать на равномерную сходимость ряд* (1) *с общим членом*

$$a_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{n\sqrt{n}},$$

когда $x \in E = [\,1,\,\infty\,]$.

Решение. При любом $x \in E$ общий член $a_n(x) \sim x^3/n\sqrt{n}$, так что в силу асимптотического признака сходимости ряд сходится на E. Однако множество E неограничено, и поэтому в качестве x_n можно выбрать функцию от n, “гасящую” быструю скорость сходимости ряда при фиксированном x, положив, к примеру $x_n = \sqrt{n}$. В таком случае при любом n значение общего члена $a_n(x) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, и никакой сходимости к нулю быть не может.

Обратимся теперь к методам доказательств равномерной сходимости.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. *Если существует такая последовательность $\{ c_n \}$ неотрицательных чисел, что $| a_n(x) | \le c_n$ на E, и при этом ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

сходится равномерно.

Заметим, что ряд с общим членом c_n принято называть *мажорирующим* рядом.

Пример 3. *Исследовать на равномерную сходимость ряд* (1) *с общим членом*

$$a_n(x) = \exp\{ -n(x^2 + sinx) \},$$

когда $x \in E = [1, \infty]$.

Решение. Легко проверить, что $x^2 + \sin x > 1$ при любом $x \in E$. Следовательно, $a_n(x) \le \mathrm{e}^{-n}$, и мажорирующий ряд с общим членом $c_n = \mathrm{e}^{-n}$ сходится как геометрический.

Еще один способ доказательства равномерной сходимости основан на мажорировании остаточного члена r_n знакочередующегося ряда с монотонно сходящимся к нулю общим членом: $|r_n(x)| \le |a_{n+1}(x)|$. В этом случае необходимо сделать оценку сверху $|a_{n+1}(x)| \le c_n$ так, чтобы $c_n \to 0$.

Пример 4. *Доказать, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} \tag{2}$$

сходится равномерно на любом конечном отрезке $E = [a, b]$, *но не сходится абсолютно ни при одном значении* $x \in \mathrm{R}$.

Решение. Установим сначала равномерную сходимость оценив по модулю остаточный член знакочередующегося ряда (2):

$$| r_n(x) | \le |, a_{n+1}(x) | = \frac{x^2 + n + 1}{(n+1)^2} \le \frac{b^2 + n + 1}{(n+1)^2} \to 0.$$

Но ряд (2) не сходится абсолютно, поскольку ряд из модулей "хуже" гармонического:
$$|\,a_n(x)\,| = \frac{x^2+n}{n^2} \geq \frac{1}{n}.$$

Приведем еще два традиционных признаков равномерной сходимости функциональных рядов.

Признак Дирихле равномерной сходимости. *Ряд вида*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{3}$$
сходится равномерно на множестве E значений x, если
$$(1) \quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)\right| < M, \quad \forall n \geq 1,$$
(2) *функциональная последовательность $\{\,a_n(x)\,\}$ монотонна и* **равномерно** *сходится к нулю*

Признак Абеля равномерной сходимости. *Ряд вида*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$
сходится равномерно на множестве E значений x, если
$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \qquad \text{сходится } \textbf{равномерно} \text{ на } E,$$
(2) *функциональная последовательность $\{\,a_n(x)\,\}$ ограничена на E и монотонна при каждом $x \in E$.*

Приведем примеры на использование этих признаков.

Пример 5. *Исследовать на равномерную сходимость ряд вида* (3) *с общим членом*
$$a_n(x) b_n(x) = \frac{\sin(x/2)\sin nx}{\sqrt{n+x^2}}$$
когда $x \in E = \mathrm{R}$.

Решение. Воспользуемся признаком Дирихле, положив $b_n = \sin(x/2)\sin nx$, так как в Кудрявцеве, Кутасове и пр. доказывается формула полезная нам и в дальнейшем:

$$\sin\frac{x}{2}\sum_{k+1}^{n}\sin nx = 2\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}.$$

В силу ограниченности функции $\sin x$ это обеспечивает нам выполнение условия (1) в признаке Дирихле с $M = 1$.

Далее, выберем

$$a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x^2}}.$$

Так как $a_n(x) \leq 1/\sqrt{n}$, то функциональная последовательность $\{\, a_n(x)\,\}$ монотонно и **равномерно** на E сходится к нулю.

Итак, оба условия признака Дирихле выполняются, так что исследуемый ряд сходится на $E = \mathrm{R}$ равномерно.

Пример 6. *Исследовать на равномерную сходимость ряд вида* (3) *с общим членом*

$$a_n(x)b_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

когда $x \in E = [\,0\,,1\,]$.

Решение. Воспользуемся признаком Абеля. Выберем

$$b_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}},$$

поскольку ряд с таким общим членом является знакочередующимся и его равномерную сходимость легче проверить, оценивая модуль остаточного члена модулем последнего отброшенного члена.

Очевидно, $|\,b_n(x)\,|$ при каждом значении x монотонно сходится к нулю и остаточный член на отрезке $E = [\,0\,,1\,]$ имеет следующую мажоранту:

$$|\,r_n(x)\,| \leq |\,b_{n+1}(x)\,| = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1+\sqrt{x}}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \to 0.$$

Таким образом, равномерная сходимость ряда из $b_n(x)$ установлена и условие (1) признака Абеля выполняется.

В условии (2) положим

$$a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Последовательность
$$a_n(x) \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$
ограничена и, как мы знаем из общего курса математического анализа, монотонно сходится к числу e. Это доказывает выполнимость условия (2) признака Абеля и, тем самым, завершает доказательство монотонной сходимости на $E=[\,0\,,1\,]$ исследуемого ряда.

Задание 48

Решение следующих задач, взятых из задачника Кудрявцев, Кутасов и др., высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

Доказать равномерную сходимость на заданном множестве E, используя признак Вейерштрасса.

$$18.8(4).\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}},\quad E=\mathrm{R}\,,$$

$$18.11(2).\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln(1+nx)}{x^n},\quad 1+\alpha\le x<\infty,\quad \alpha>0\,.$$

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость.

$$18.14(2).\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(x^2/n)}{x^2\sqrt{n}+1},\quad x\in\mathrm{R}\,,$$

$$18.21(6)^*.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{e}^{-nx},\quad 0\le x<\infty\,.$$

(Абель)

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд на разных множествах E_1 и E_2.

$$18.33(3)^*. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{n}}\, \mathrm{e}^{-nx^2}, \quad E_1 = (\delta,\, \infty),\ \delta > 0; \quad E_2 = (0,\, \infty)\,,$$

$$18.35(3). \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right), \quad E_1 = (0,\, 1), \quad E_2 = (0,\, \infty)\,.$$