Решение обыкновенных диф. ур. (ОДУ)

Виды задач:

1) Задача Коши
2) Краевая задача
3) Задача Штурма-Лиувилля (зад. на собств. значения)

1. З. К.

Методы решения
- Метод Эйлера (явный, неявный)
- М. Рунге-Кутта

$$(1)\quad \begin{cases} u'(x) = f(x,u), & x > x_0 \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

З. К. „p"-го порядка можно свести к системе „p" уравнений, каждое из которых ~~можно~~ 1-го порядка:

$$(2)\quad \text{З. К. } p\text{-го пор.} \begin{cases} u^{(p)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(p-1)}) \\ u(x_0) = a_0,\ u'(x_0) = a_1, \dots\ u^{(p-1)}(x_0) = a_{p-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ простой заменой переменных

$$\begin{aligned} u_0 &= u \quad (=u) \\ u_1 &= u_0' \quad (=u') \\ u_2 &= u_1' \quad (=u'') \\ &\vdots \\ u_p &= u_{p-1}' \quad (=u^{(p)}) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} u_0' = u_1 \\ u_1' = u_2 \\ \vdots \\ u_{p-1}' = f(x, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \\ u_0(x_0) = a_0 \\ \vdots \\ u_{p-1}(x_0) = a_{p-1} \end{cases}$$

система из „p" уравнений 1-го порядка

Поэтому будем рассматривать метода для решения З.К. (1), не нарушая общности для решен. З. К (2), разреш. относительно p-ой произ.

2. Пример краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right)+qu=f,\quad x\in(0,1)$$

граничные условия:

$$u(0)=u(1)=0;$$

3. З. Ш.-Л. (з. на собств. знач. относительно пары (λ,u))

$\mathcal{L}u=\lambda u$ пример: $\begin{cases}-\dfrac{d^2u}{dt^2}=\lambda\rho(t)u\\ u(0)=0,\ \dfrac{du}{dt}(l)=\lambda m u(l)\end{cases}$

~~отн~~

Основные понятия теор. разностных схем.

Пусть имеется некотоя диф. задача

$\mathcal{L}u=f(x,u)$, $\mathcal{L}$ - диф. оператор.

где $u\in H$ - нек-ое функц. пространство, напр., $u\in C^k(\Omega)=C^k(0,1)$ - пр-во непр. диф. функций вплоть до к-ой произв. на $(0,1)$.

~~Будем~~ не

Под приближенным решением (численным) будем понимать ~~нек~~ сеточную ф. y_h на $\underbrace{\text{множестве}}_{\text{сетке}}$ $x\in(0,1)$

сетке $\bar{\omega}_h=\omega_h\cup\gamma_h$

ω_h - внутренние узлы $\omega_h=\{x_1,x_2,\ldots x_{N-1}\}$

γ_h - граничные узлы $\{x_0,x_N\}$

сеточная ф. - ф., заданная на дискретном $\underbrace{\text{множестве точек}}_{\text{сетке}}$ $\{x_i\}$ (эти точки x_i = узлы сетки, h - шаг сетки),

для равномерн. сетки

$\bar{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=0,1,\ldots N\}$

Итак, у нас имеется диф. задача (3) в соответствии которой по некоторому правилу мы строим разностную схему (4) (~~сист~~ СЛАУ, правило, по которому строится Р.С. пока не рассматривается)

Диф. задача

(3) $\mathcal{L} u = f$

$u \in H$

$f \in F$

$\xRightarrow{\text{строим}}$

Разности. схема

$\boxed{L_h y_h = f_h}$ (4)

$y_h \in H_h$

$f_h \in F_h$

H_h – пр-во сеточн. ф.

h – сеточный парам. (шаг сетки)

Теперь мы умеем решать задачу (4), но как понять, насколько решение Р.С. (4) y_h близко к реш. Д.З. (3)?

Поскольку y_h и u принадлежат разным пространствам, то есть два способа их сравнить:

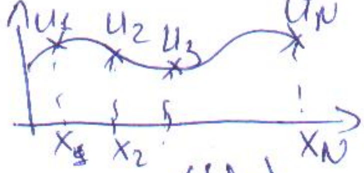
1) Доопределение сет. ф. (интерполирование) y_h на H

2) Оператор проектирования u на сетку.

$P_h(u) \equiv [u]_h \in H_h$

$P_h : H \to H_h$

пр:



$[u]_h = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$

Понятия устойчивост, аппроксимация, сходимость

(Основне понятия теории Р.С)

<u>Опр 1</u> (Сходимость) Решение Р.С. (4) <u>сходится</u> к реш. Д.У. (1), если

$$\|[u]_h - y_h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Более того, если

$$\|[u]_h - y_h\| \le c_1 h^{p}$$ – р.с. имеет <u>р-ый порядок сходим.</u>

<u>Опр. 2</u> (Невязка) <u>Невязкой</u> называется результат подстановки сеточной проекции точного решения $[u]_h$ в Р.С. (4)

$$\psi_h = L_h [u]_h - f_h = L_h [u]_h - L_h y_h =$$
$$= L_h ([u]_h - y_h) = L_h (z_h)$$

$z_h = [u]_h - y_h$ ~~z_h~~ z – погреш. схемы

<u>Опр. 3</u> (<u>Аппроксимация</u>) Р.С. (4) <u>аппроксимирует</u> д.у (3), если

$$\|\psi_h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Более того, если

$$\|\psi_h\| \le c_2 h^k$$ – имеет <u>к-ый порядок аппроксимации</u>

<u>Опр. 4</u> (Устойчивость) Р.с. устойчива, если для любых двух возмущенных задач

$$L_h y_h^1 = f_h + \varepsilon_h^1$$
$$L_h y_h^2 = f_h + \varepsilon_h^2$$

выполнено $\|y_h^1 - y_h^2\| \le c_1 (\|\varepsilon_h^1\| + \|\varepsilon_h^2\|)$

Основные (элементарные) разностные схемы для задачи Коши

$u' = f(x, u)$

$u(x_0) = u_0$.

1) Явная схема Эйлера

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f_n, \quad \text{где} \quad f_n = f(x_n, y^n)$$

$y_0 = u_0$;

2) Неявная сх. Эйлера

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f_{n+1}; \qquad \frac{y^n - y^{n-1}}{h} = f_n;$$

$y_0 = u_0$;

3) Схема с центр. разн.

$$\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2h} = f_n;$$

$y_0 = u_0$;

$y_1 = ?$

4) Схема Эйлера с пересчетом

$$\begin{cases} \dfrac{y^{n+\frac{1}{2}} - y^n}{h/2} = f_n & \text{— предиктор} \\ \dfrac{y^{n+1} - y^n}{h} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y^{n+\frac{1}{2}}\right) & \text{— корректор} \end{cases}$$

Исследование раз. сх. на аппрокс.

1) Явн. сх. Эйлера

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{h}=f_n$$

невязка - $\tau_n = \dfrac{u^{n+1}-u^n}{h} - f_n = \dfrac{\cancel{u_n} + u_n' h + \frac{1}{2}u_n'' h^2 + O(h^3) - \cancel{u_n}}{h} -$

$- f_n = u_n' + \frac{1}{2}u'' h + O(h^2) - f_n =$

$= \underbrace{(u_n' - f_n)}_{=0} + \frac{1}{2}u'' h + O(h^2) = \frac{1}{2}u'' h + O(h^2)$

$\|\tau_h\| \le \frac{1}{2} M_2 h^{1}$ – аппрок. 1-го порядка

$M_2 = \sup\limits_{a \le x \le b} |u''(x)|$

2) Неяв. сх. Эйл. – ?

3) Схем с центр. разн. – ?