3. Вычисление объёмов

Пусть в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ между плоскостями $\{z = z_0\}$ и $\{z = z_1\}$ параллельными плоскости xOy находится "хорошее" тело T, сечение которого плоскостью $\{z = z'\}$ не пусто при любом $z' \in [z_0, z_1]$. Обозначим это сечение $\Omega_{z'}$, и пусть $S(\Omega_{z'})$ — его площадь. Тогда объём $V(T)$ этого тела вычисляется по формуле:

$$V(T) = \int\limits_{z_0}^{z_1} S(\Omega_z)\,dz. \tag{1}$$

№2468. Возьмём $z' \in (0, 1]$. Сечение тела плоскостью $\{z = z'\}$ представляет из себя эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{z'^2} \le 1$ с полуосями a по оси Ox и z' по оси Oy. Площадь $S(\Omega_{z'}) = \pi a z'$ (№2403). Применяем формулу (1):

$$V = \int\limits_0^a \pi a z\,dz = \frac{\pi a^3}{2}.$$

№2463. При $z' \in (-c, c)$ в сечении эллипсоида плоскостью $\{z = z'\}$ получается эллиптическая фигура $\dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{z'^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{z'^2}{c^2}}\right)^2} \le 1.$

Объём тела вращения. Пусть тело T получается вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Тогда в сечении тела T плоскостью $\{x = x'\}$ $(a \le x' \le b)$ получается круг радиуса $|f(x')|$, т.е. площади $\pi f^2(x')$. Следовательно, объём тела T можно вычислить по формуле:

$$V(T) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx. \tag{2}$$

№2472.

№2473. При решении пункта б) надо разрешить равенство $y = 2x - x^2$ относительно x и находить требуемый объём как разность двух, интегрируя по y.

№2477. Получающаяся поверхность носит название "тор".

Задание по теме. Прорешать №№ 2463, 2472, 2473, 2477, 2464 (В некоторых изданиях есть опечатка в задании. Должно быть: $z = \pm c$.), 2465 (Здесь — пересечение двух цилиндров. В сечении плоскостью $\{z = z'\}$ $(-a \leq z' \leq a)$ получается квадрат.), 2474, 2475.

Тема следующего занятия: Вычисление несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.