КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт физики

Т.Ю.АЛЬПИН, Р.А.ДАИШЕВ

ПОСОБИЕ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ: ЧАСТЬ II

Учебное пособие

Казань – 2022

УДК 517

*Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Института Физики КФУ*

Протокол № 8 от 6 мая 2022 г.

Рецензент
доцент Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ,
кандидат физико-математических наук
Корнеева Наталья Николаевна

Альпин Т.Ю., Даишев Р.А.
Пособие по высшей математике: часть II / Альпин Т.Ю., Даишев Р.А. – Казань: Казан. ун-т, 2022. – 42 с.

Пособие предназначено для студентов-радиофизиков Института физики Казанского федерального университета и является методическим обеспечением курса "Высшая математика".

Глава 1

Общая теория

1.1 Основные понятия и определения

С точки зрения математики теория дифференциальных уравнений возникает из задач дифференциального и интегрального исчислений. Само определение дифференциального уравнения опирается на понятие производной функции, а задача его решения является по сути обобщенной задачей интегрирования. В дифференциальном исчислении мы по заданной функции $y = y(x)$ находим ее производную

$$y'(x) = f(x) \,, \tag{1.1}$$

которая сама является некоторой функцией $f(x)$ переменной x. В интегральном исчислении мы решаем обратную задачу: пусть задана функция $f(x)$, найти ее первообразную $y(x)$. Решение этой задачи дается неопределенным интегралом

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C \,,$$

где C – произвольная постоянная. Таким образом, в задаче интегрального исчисления мы решаем уравнение (1.1), рассматривая в нем функцию $y(x)$ как неизвестную. Уравнение (1.1) является простейшим примером того, что в математике называется дифференциальным уравнением. Дадим общее определение дифференциального уравнения.

Пусть $y = y(x)$ – некоторая неизвестная действительная функция одной действительной переменной x, а $y'(x)$, $y''(x)$,..., $y^{(n)}(x)$ ее производные до n-го порядка включительно. Иногда, для краткости, указание на аргумент функций мы будем опускать и подразумевать его по умолчанию.

Определение 1. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \,, \tag{1.2}$$

где F – некоторая функция многих переменных от указанных аргументов.

Определение 2. Старший порядок производной неизвестной функции $y = y(x)$, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* данного дифференциального уравнения.

Таким образом, уравнение (1.2) – это обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка.

Решить дифференциальное уравнение – это значит найти такую функцию $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее и ее производных в уравнение (1.2) обращает это уравнение в тождество.

Определение 3. Функция $y = \varphi(x)$, обращающая дифференциальное уравнение в тождество, называется *частным решением* этого дифференциального уравнения.

Любое дифференциальное уравнение имеет бесконечно много частных решений подобно тому, как любая функция имеет бесконечно много первообразных, отличающихся друг от друга на произвольную постоянную. В общем случае, для того чтобы решить дифференциальное уравнение n-го порядка вида (1.2), необходимо проделать n раз операцию неопределенного интегрирования. На каждом i-м шаге такого интегрирования возникает своя произвольная постоянная C_i.

Таким образом, после n-го шага в конечном решении дифференциального уравнения n-го порядка появится ровно n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \,. \tag{1.3}$$

Такое решение называется *общим решением* дифференциального уравнения. Любое частное решение уравнения (1.2) получается из общего решения (1.3) при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, диктуемых условиями решаемой задачи. Иначе говоря, *общим решением называется решение, содержащее в себе все без исключения частные решения.* Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего некоторым заранее заданным условиям, называется *задачей Коши.*

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения вида (1.2). Она ставится следующим образом: необходимо решить уравнение (1.2) в предположении, что решение должно удовлетворять следующим условиям:

$$y(x_0) = y_0\ ,\ y'(x_0) = y_1\ ,\ y''(x_0) = y_2\ ,\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\ , \tag{1.4}$$

где x_0 – некоторая заданная точка на действительной числовой прямой, $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ – некоторые заданные числа, то есть в задаче Коши нам дано значение функции и всех ее производных до $(n-1)$ - го порядка включительно в некоторой точке x_0. Условия (1.4) называются *данными Коши* или *начальными условиями*, а сами величины x_0 и $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ – *начальными значениями.* Если уже получено общее решение дифференциального уравнения в виде (1.3), то для отыскания констант, соответствующих частному решению, удовлетворяющему данным Коши, необходимо составить и решить следующую систему:

$$\begin{cases} \quad\ \ \Phi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_0\ , \\ \quad\ \ \Phi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_1\ , \\ \leqslant aders\ . \\ \Phi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_{n-1}\ . \end{cases}$$

Это система n уравнений на n неизвестных величин $C_1, C_2, ..., C_n$, которые, в силу известной теоремы о существовании и единственности неявной функции, определяются из этой системы однозначно. Подставив найденные константы в общее решение (1.3), получим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям задачи Коши.

Пример. Рассмотрим физическую задачу о падении первоначально покоящегося тела с высоты h. Выберем систему координат, направив ось x вверх с началом координат на поверхности Земли. Функция $x = x(t)$ будет определять положение x тела во времени t. Из физики мы знаем, что все тела у поверхности Земли падают с одним и тем же ускорением g, а ускорение – это вторая производная от координаты по времени. При сделанном нами выборе системы координат ускорение свободного падения g направлено в сторону, противоположную направлению оси x, поэтому для решения поставленной задачи необходимо решить следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$x''(t) = -g\ ,$$

с начальными условиями $x(0) = h$, $x'(0) = 0$, где мы учли, что в момент времени $t = 0$ тело покоилось и находилось на высоте h. Первый интеграл этого уравнения дает

$$x'(t) = \int (-g)\, dt = -gt + C_1\ ,$$

а второй интеграл

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2\ .$$

Таким образом, мы получили общее решение нашего уравнения. Из физических соображений можно сказать, что константа C_1 представляет из себя начальную скорость v_0 нашего тела, а константа C_2 – начальное положение x_0, поэтому мы можем написать общее решение нашей задачи в виде:

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}\ ,$$

где все величины приобретают ясный физический смысл. В нашем случае $v_0 = 0$, а $x_0 = h$, поэтому частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$x(t) = h - \frac{gt^2}{2}\ .$$

Наряду с задачей Коши часто приходится решать задачи, в которых значение искомой функции задаётся в двух точках, ограничивающих отрезок, на котором требуется определить решение. Такие задачи называются *краевыми* или *граничными* задачами.

1.2 Геометрическое толкование дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$

Введём на плоскости декартову систему координат. Пусть $y = \varphi(x)$ – решение. Соответствующая этому решению кривая на плоскости называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения. (Говоря шире, интегральной кривой системы дифференциальных уравнений называется график решения этой системы). Наше уравнение ставит каждой паре значений, то есть точке плоскости, определённое значение производной y'. Поскольку y' – тангенс угла наклона касательной в каждой точке интегральной кривой, то уравнение $y' = f(x, y)$ определяет в каждой точке некоторое направление. *Вся совокупность таких направлений* определяет *поле направлений*, изображаемых на картине стрелками. Задача теории дифференциальных уравнений может быть сформулирована так: найти такие кривые, чтобы их касательные в каждой точке кривой имели направление, совпадающие с полем направлений в этой точке.

Можно найти геометрическое место точек, в которых касательные к интегральным кривым имеют одно и то же направление. Такие геометрические места точек называются *изоклинами.*

Будем говорить, что дифференциальное уравнение разрешимо *явно,* если его решение выражено через элементарные функции. Будем говорить, что решение дифференциального уравнения находится в квадратурах, если оно выражено через квадратуры от явно заданных функций. Такие решения называются *решениями в квадратурах.*

1.3 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_m(x)$ набор из m неизвестных действительных функций одной действительной переменной x.

Определение 4. *Системой обыкновенных дифференциальных уравнений* называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_m, y_m', y_m'', \ldots, y_m^{(n_m)}) = 0\,, \\ F_2(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_m, y_m', y_m'', \ldots, y_m^{(n_m)}) = 0\,, \\ \leqslant aders\ . \\ F_l(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_m, y_m', y_m'', \ldots, y_m^{(n_m)}) = 0\,, \end{cases} \tag{1.5}$$

где F_i $(i = 1, \ldots, l)$ – функции многих переменных от указанных аргументов.

Определение 5. Наивысший порядок производной, входящей в уравнения системы (1.5), называется *порядком* системы дифференциальных уравнений.

Очевидно, что порядок системы (1.5) – это наибольшее из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$.

Определение 6. Набор функций $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$, превращающий все уравнения системы (1.5) в тождества, называется *частным решением* этой системы дифференциальных уравнений.

Как и выше, *общим решением называется решение, содержащее в себе все без исключения частные решения.*

1.4 Дифференциальные уравнения в частных производных

До сих пор мы рассматривали в этой лекции только *обыкновенные* дифференциальные уравнения, неизвестные функции в которых были функциями одной переменной. Однако во многих практических задачах таких функций оказывается недостаточно для описания изучаемых процессов и необходимо рассматривать функции многих переменных. Обобщение понятия дифференциального уравнения на случай, когда неизвестная функция зависит от многих переменных, приводит нас к понятию *дифференциального уравнения в частных производных.*

Пусть $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – искомая функция, зависящая от нескольких независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 1)$.

Определение 7. Выражение вида

$$\Phi\left(x_1, x_2, ..., x_n, u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0 \tag{1.6}$$

называется *дифференциальным уравнением в частных производных* m *- го порядка* относительно неизвестной функции $u(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv u(x)$. Как и в обыкновенных дифференциальных уравнениях, порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

Дифференциальные уравнения в частных производных являются обобщением обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку обыкновенные уравнения можно формально рассматривать как частный случай уравнения (1.6) при $n = 1$. Так же как и в случае обыкновенных уравнений, решить уравнение (1.6) – это значит найти такую функцию $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, которая при подстановке ее в уравнение обращает это уравнение в тождество.

Определение 8. Функция $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, обращающая дифференциальное уравнение в частных производных в тождество, называется *частным решением* этого дифференциального уравнения.

Как и в случае обыкновенных уравнений, уравнение в частных производных имеет бесконечно много частных решений. Однако в этом случае вид общих решений оказывается сложнее. В качестве примера рассмотрим уравнение в частных производных вида

$$F(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}) = 0\,. \tag{1.7}$$

В уравнение входит только производная $\frac{\partial u}{\partial x_1}$. При постоянном значении переменной x_2 уравнение (1.7) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с неизвестной функцией u и независимой переменной x_1. Параметр x_2 изменяет вид этого уравнения. Пусть общим решением уравнения (1.7), рассматриваемого как обыкновенное дифференциальное уравнение, является функция

$$u = \Phi(x_1, x_2, C)\,, \tag{1.8}$$

которое содержит произвольную постоянную C и параметр x_2. Однако для того, чтобы выражение (1.8) было решением уравнения (1.7), необходимо и достаточно, чтобы C была постоянной только относительно переменной x_1. Следовательно, C может быть произвольной функцией от переменной x_2, то есть $C = f(x_2)$. Таким образом, общее решение уравнения (1.7) имеет вид:

$$u = \Phi(x_1, x_2, f(x_2))\,,$$

где $f(x_2)$ – произвольная функция указанной переменной. Итак, общее решение уравнения в частных производных первого порядка вида (31.7) содержит одну произвольную функцию. Естественно ожидать от более сложных уравнений в частных производных еще большего произвола в характере общих решений.

Глава 2

Решение некоторых уравнений первого порядка

В этой лекции мы рассмотрим некоторые простейшие интегрируемые типы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, то есть уравнений вида

$$F(x, y, y') = 0\,, \tag{2.1}$$

и дадим методы их решения.

В случае, если уравнение (2.1) можно разрешить относительно производной, представим его в виде

$$y' = f(x, y)\,. \tag{2.2}$$

Этот вид уравнения называется *уравнением, разрешенным относительно производной.* В противном случае дифференциальные уравнения называются *уравнениями, неразрешенными относительно производной*; они имеют общий вид (2.1).

При решении дифференциальных уравнений производную неизвестной функции удобно представлять в виде отношения дифференциалов:

$$y' = \frac{dy}{dx}\,.$$

Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,.$$

Иногда это уравнение бывает удобно представлять в виде

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0\,, \tag{2.3}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – некоторые функции двух переменных. В это уравнение обе переменные входят равноправным образом. Уравнение (2.3) не связывает нас выбором неизвестной функции, то есть мы можем искать решение или в виде функции $y = y(x)$, или в виде $x = x(y)$.

2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым и легко решаемым уравнением среди всех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка является уравнение с разделяющимися переменными. *Уравнение с разделяющимися переменными* – это дифференциальное уравнение первого порядка, которое может быть записано в виде

$$y' = g(x)\,h(y)\,. \tag{2.4}$$

Представляя производную как отношение дифференциалов, уравнение (2.4), если $h(y) \neq 0$, можно переписать в виде

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

или

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx\ ,$$

где $f(y) = \dfrac{1}{h(y)}$.

Таким образом, мы разделили переменные: в правую часть уравнения вошла только функция от переменной y и дифференциал от y, а в левую – функция от x и дифференциал от x. Получившееся выражение является равенством дифференциалов некоторых двух функций, одна из которых является функцией только переменной x, а другая только переменной y, то есть

$$dF(y) = f(y)\,dy\ , \quad dG(x) = g(x)\,dx\ ,$$

и наше уравнение принимает вид

$$dF(y) = dG(x)\ .$$

Интегрируя обе части этого уравнения, находим общий интеграл уравнения (2.4):

$$F(y) = G(x) + C\ ,$$

где C – произвольная постоянная, а

$$F(y) = \int f(y)\,dy\ ,\ G(x) = \int g(x)\,dx\ .$$

В общем случае уравнение с разделяющимися переменными – это уравнение вида

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx + N_1(x)\,N_2(y)\,dy = 0\ .$$

Разделяя переменные в этом уравнении и предполагая, что $M_2\ N_1 \neq 0$, можно записать

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = -\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx\ ,$$

а общий интеграл этого уравнения будет иметь вид

$$\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = -\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + C\ .$$

2.2 Однородные уравнения

Следующий тип легко интегрируемых обыкновенных дифференциальных уравнений – это однородные уравнения. *Однородным уравнением* называется уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\ . \tag{2.5}$$

Если же дифференциальное уравнение задано в виде (2.3), т.е. в виде

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0\ ,$$

то оно называется однородным, если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одной и той же степени.

Определение. Функция $M(x,\ y)$ называется *однородной функцией степени* n, если для любого k выполняется соотношение $M(kx,ky) = k^n M(x,y)$.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены неизвестной функции. Пусть $u = u(x)$ новая неизвестная функция, связанная со старой соотношением $y = x \cdot u$. Отсюда $y' = u + x \cdot u'$, и уравнение (2.5) приводится к виду

$$u + x \cdot u' = f(u)\ .$$

Это дифференциальное уравнение для новой функции. Оно является уравнением с разделяющимися переменными, поскольку, при $f(u) - u \neq 0$, $x \neq 0$, можно записать

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}\ .$$

Интегрируя обе части последнего соотношения, можно получить общее решение в виде

$$x = C\exp\left(\int \frac{du}{f(u)-u}\right) .$$

Обозначим

$$\varphi(u) = \exp\left(\int \frac{du}{f(u)-u}\right) ,$$

тогда, возвращаясь к старой функции, можно записать общее решение уравнения (2.5) в виде

$$x = C\varphi\left(\frac{y}{x}\right) .$$

Следует отметить, что помимо этого общего решения уравнение (2.5) может иметь также решение вида

$$y = u_0 x ,$$

где u_0 – константа, являющаяся корнем уравнения $f(u) = u$.

2.3 Линейное уравнение первого порядка

Уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной, то есть уравнение вида

$$p(x)\, y' + q(x)\, y + r(x) = 0 ,$$

называется *линейным уравнением первого порядка.* Здесь функции $p(x)$, $q(x)$ и $b(x)$ – это заданные функции переменной x. Если $p(x) \neq 0$, то это уравнение легко привести к виду

$$y' + a(x)\, y = b(x) , \tag{2.6}$$

В случае, когда $r(x) = 0$ или $b(x) = 0$, линейное уравнение называется *однородным*, в противном случае, т.е. при $r(x) \neq 0$ или $b(x) \neq 0$, оно называется *неоднородным.*

Легко видеть, что линейное однородное уравнение

$$y' + a(x)\, y = 0$$

является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные

$$\frac{dy}{y} = -a(x)\, dx$$

и интегрируя обе части, получаем общее решение линейного однородного уравнения

$$y = C\exp\left(-\int a(x)\, dx\right) . \tag{2.7}$$

Общее решение неоднородного линейного уравнения (2.6) можно найти из общего решения соответствующего ему линейного однородного уравнения *методом вариации постоянной.* Суть этого метода состоит в следующем.

Пусть дано уравнение вида (2.6). Однородное уравнение называется *соответствующим* данному неоднородному, если оно получается из него приравниванием к нулю правой части исходного уравнения. Пусть решение однородного уравнения имеет вид (2.7), тогда решение уравнения (2.6) будем искать в виде

$$y = C(x)\exp\left(-\int a(x)\, dx\right) , \tag{2.8}$$

где $C(x)$ – неизвестная функция. Подставляя выражение (2.8) в уравнение (2.6), получим

$$C'(x)\exp\left(-\int a(x)\, dx\right) - C(x)\, a(x)\exp\left(-\int a(x)\, dx\right) +$$

$$+ C(x)\, a(x) \exp\left(-\int a(x)\, dx\right) = b(x)\,,$$

что приводит к дифференциальному уравнению для функции $C(x)$:

$$C'(x) = b(x) \exp\left(\int a(x)\, dx\right)\,.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и его общее решение имеет вид

$$C(x) = \int b(x) \exp\left(\int a(x)\, dx\right)\, dx + C\,,$$

где C в правой части обычная произвольная константа неопределенного интегрирования. Следовательно, общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = \left[\int b(x) \exp\left(\int a(x)\, dx\right)\, dx + C\right] \exp\left(-\int a(x)\, dx\right)\,. \tag{2.9}$$

Следует отметить, что второе слагаемое этого решения является общим решением линейного однородного уравнения, соответствующего линейному неоднородному, а первое слагаемое является частным решением линейного неоднородного уравнения.

На практике нет нужды пользоваться общими формулами (2.7) и (2.9) для нахождения общих решений линейных уравнений. Линейное однородное уравнение можно проинтегрировать, непосредственно разделяя переменные, а линейное неоднородное уравнение можно решить описанным здесь методом вариации постоянной.

2.4 Уравнение Бернулли

К линейным уравнениям приводятся некоторые другие типы дифференциальных уравнений. Одним из таких уравнений является *уравнение Бернулли*, которое имеет вид

$$y' + a(x)\, y = b(x)\, y^n\,, \tag{2.10}$$

где $n = const$. Очевидно, что при $n = 0$ мы получим неоднородное линейное уравнение, а при $n = 1$ уравнение Бернулли является линейным однородным уравнением. Поэтому в дальнейшем полагаем $n \neq 0$, $n \neq 1$.

В общем случае уравнение Бернулли сводится к линейному неоднородному уравнению заменой неизвестной функции

$$u = y^{1-n}\,.$$

Производя соответствующую замену в уравнении (2.10), получим для новой функции u линейное неоднородное уравнение вида

$$u' + (1-n)\, a(x)\, u = (1-n)\, b(x)\,.$$

Найдя его общее решение и производя обратную замену, получим общее решение уравнения Бернулли.

2.5 Уравнение Риккати

Уравнение Риккати не относится к линейным уравнениям:

$$y'(x) + a(x)y + b(x)y^2 = c(x). \tag{2.11}$$

В общем виде оно не интегрируется в квадратурах, но заменой переменных может быть преобразовано в уравнение Бернулли, если известно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения.

Действительно, полагая $y(x) = y_1(x) + z(x)$, где $z(x)$ - новая неизвестная функция, получим

$$y_1'(x) + z'(x) + a(x)\,[y_1(x) + z(x)] + b(x)\,[y_1(x) + z(x)]^2 = c(x).$$

Поскольку $y_1'(x) + a(x)y_1 + b(x)y_1^2 \equiv c(x)$, раскрывая скобки, получим относительно $z(x)$ уравнение Бернулли:

$$z' + (a(x) + 2b(x)y_1(x))\, z + b(x)z^2 = 0.$$

2.6 Уравнения в полных дифференциалах

Мы уже записывали дифференциальное уравнение первого порядка в виде

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0\,, \tag{2.12}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – некоторые функции двух переменных.

В том случае, когда выражение, стоящее в правой части уравнения (2.12), является полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, уравнение (2.12) называется *уравнением в полных дифференциалах.* В этом случае уравнение (2.12) можно переписать в виде

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dU = 0,$$

и общий интеграл такого уравнения легко находится:

$$U(x,y) = C\,.$$

Теорема. Для того, чтобы уравнение (2.12) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы производные $\frac{\partial N}{\partial x}$ и $\frac{\partial M}{\partial y}$ были непрерывны и удовлетворяли условию

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\,. \tag{2.13}$$

Необходимость. Дано, что наше уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т.е. выполнено

$$M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x},\;\; N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{2.14}$$

Тогда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y};\quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}.$$

Поскольку производные M'_y и N'_x непрерывны, вторые производные равны между собой. Вследствие равенства вторых производных, условие (2.13) выполнено.

Достаточность. Дано: условие (2.13) выполнено. Найдём такую функцию $U(x,y)$, что $M(x,y)\,dx+ N(x,y)\,dy = dU$. Для этого первое из равенств (2.14) проинтегрируем по x :

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y),$$

а получившееся выражение продифференцируем по y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}dx + \varphi'_y = N(x,y).$$

Заменяя, вследствие (2.13), производную под знаком интеграла, получим

$$N(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}dx + \varphi'_y = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'_y,$$

откуда $\varphi'_y = N(x_0,y)$. Интегрируя это выражение, найдём $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy.$$

Следовательно,

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy.$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы показали, что если условие (2.13) выполнено, то общее решение уравнения (2.12) имеет вид

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy=C. \tag{2.15}$$

Очевидно, что далеко не всегда уравнение (2.12) является уравнением в полных дифференциалах.

В некоторых случаях удается отыскать такую функцию $\mu(x,y)$, при умножении на которую обеих частей уравнения (2.12) оно становится уравнением в полных дифференциалах. Такая функция $\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем.*

Если $\mu(x,y)$ интегрирующий множитель уравнения (2.12), то

$$\mu(x,y)(M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy)=dU=0$$

и

$$\mu\,M=\frac{\partial U}{\partial x}\;,\;\mu\,N=\frac{\partial U}{\partial y}\;.$$

Отметим, что метод разделения переменных для уравнения с разделяющимися переменными

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx+N_1(x)\,N_2(y)\,dy=0$$

фактически сводится к умножению этого уравнения на интегрирующий множитель

$$\mu=\frac{1}{M_2(y)\,N_1(x)}\;.$$

Глава 3

Существование и единственность решения

3.1 Теорема Коши существования и единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$

Выше мы видели, как разнообразны методы решения даже простейших дифференциальных уравнений. Закономерен вопрос: если мы применим другой метод, решим наше дифференциальное уравнение другим способом, не найдем ли мы другое решение, совсем не похожее на уже найденное? Тогда возникает следующий вопрос: а какое решение "правильное"? Какое из них адекватно описывает исследуемый нами физический процесс?

Ответ на эти вопросы даёт теорема Коши о существовании и единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$.

Мы приведём её без доказательства.

Теорема Коши: *Если в уравнении* $y' = f(x, y)$ *функция* $f(x, y)$

1) непрерывна в прямоугольнике

$$D: \begin{cases} x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a \\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b \end{cases},$$

2) удовлетворяет условию Липшица $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N\,|y_1 - y_2|$, *где* $N = const$,

то существует единственное решение $y = y(x)$, $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$ *этого уравнения, удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$, *где* $h < \min[\, a,\ b/M,\ 1/N\,]$, $M = \max f(x, y)$ *в* D.

Из этой теоремы следует, что если уравнение удовлетворяет определённым условиям, то как бы мы не решали это уравнение, найденное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, единственно и никакого другого решения не существует. Иначе говоря, через данную точку проходит только одна интегральная кривая.

Замечание 1. Если функция $f(x, y)$ имеет *непрерывную* в D производную $f'_y(x, y)$, то *условие Липшица удовлетворено автоматически*:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|f'_y(x, y_1 + \theta(y_1 - y_2)\right| |y_1 - y_2| \leqslant N\,|y_1 - y_2|\,,$$

где $N = \max\left|f'_y(x, y)\right|$ в области D. В замкнутой области, вследствие непрерывности производной, этот максимум всегда существует.

Замечание 2. Пусть D - некоторая область на плоскости (x, y), где для функции $f(x, y)$ выполнены условия теоремы Коши. Исходя из теоремы Коши можно доказать, что через каждую точку этой области проходит *одна и только одна интегральная кривая* уравнения $y' = f(x, y)$.

Теорема (о непрерывной зависимости решения от параметра и от начальных условий). *Если правая часть дифференциального уравнения*

$$y' = f(x, y, \mu)$$

непрерывна по μ *при* $\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$ *и удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения, причём постоянная Липшица* N *не зависит от* μ, *то решение* $y(x, \mu)$ *уравнения, удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$, *непрерывно зависит от параметра* μ.

Эту теорему мы доказывать не будем.

3.2 Особые точки, особые кривые, особые решения

Вернёмся теперь к уравнениям $y' = f(x, y)$. Рассмотрим точки (x_0, y_0), в окрестности которых решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, не существует, или решение, хотя и существует, но не единственно.Такие точки называются *особыми точками.*

Кривая, состоящая из особых точек, называется *особой кривой.*

Если график некоторого решения сплошь состоит из особых точек, то решение называется *особым решением.*

Для нахождения особых точек или особых кривых надо прежде всего найти множество точек, в которых нарушены условия теоремы о существовании и единственности решения, т.к. только среди них могут быть особые. Конечно, не каждая точка, в которой нарушены условия существования и единственности решения, обязательно является особой, поскольку условия теоремы достаточны для существования и единственности решения, но они не являются необходимыми.

Первое условие теоремы Коши существования и единственности решения нарушается в точках разрыва функции $f(x, y)$, причём если при приближении по любому пути точки (x, y) к точке (x_0, y_0), т.е. $(x, y) \to (x_0, y_0)$ (некоторой изолированной точке разрыва), функция $f(x, y) \to \infty$, то вместо уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ можно рассматривать уравнение $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x, y)}$, для которого правая часть уже непрерывна в точке (x_0, y_0), если считать, что $\dfrac{1}{f(x, y)} \to 0$.

Следовательно, в задачах, где x и y равноправны, первое условие теоремы Коши нарушается в тех точках, в которых функция $f(x, y)$ и функция $\dfrac{1}{f(x, y)}$ разрывны.

Особенно часто приходится рассматривать уравнения вида $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, где функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны. В этом случае функции $\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$ и $\dfrac{N(x, y)}{M(x, y)}$ будут одновременно разрывны лишь в точках (x_0, y_0), в которых $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$ и не существует пределов $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{N(x, y)}{M(x, y)}$.

Рассмотрим несколько типичных особых точек уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$.

(**1.**) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$, или, что то же, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{2y}$.

Правые части этих уравнений разрывны в точке $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Действительно, предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2y}{x}$ зависит от пути. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим путь $y = kx$, $\forall k$. Ясно, что когда $x \to 0$, то и $y \to 0$. Тогда $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2kx}{x} = 2k$. Поскольку здесь k - любое число, то и значение предела произвольно, т.е. предел функции зависит от пути стремления точки (x, y) к точке $(0, 0)$, а это значит, что предел нашей функции в данной точке не существует.

Интегрируя уравнение, получим $y = Cx^2$ - семейство квадратичных парабол, проходящих через точку $x = 0$, $y = 0$.

Через эту точку, в которой нарушено первое условие теоремы Коши - непрерывность правой части уравнения - проходит бесконечно много интегральных кривых исследуемого уравнения. Решение в этой точке существует, но оно не единственно. В начале координат - особая точка уравнения, называемая *узлом.*

(**2.**) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$, или $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x}{y}$.

Правая часть этого уравнения терпит разрыв в точке $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Интегрируя это уравнение, получим $y = {}^{C}\!/_{x}$ - семейство гипербол. Начало координат $x = 0$, $y = 0$ является особой точкой уравнения, в ней также нарушено первое условие теоремы Коши - условие непрерывности правой части. Через эту точку не проходит ни одно решение нашего уравнения. Особая точка такого рода называется *седлом.*

(**3.**) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}$, или $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x - y}{x + y}$.

Правая часть этого уравнения терпит разрыв в точке $(x_0, y_0) = (\ 0,\ 0\ )$. Интегрируя это однородное уравнение, получим $\sqrt{x^2 + y^2} = C \cdot e^{\operatorname{arctg} y/x}$, или, в полярных координатах, $\rho = C \cdot e^{\varphi}$ - однопараметрическое семейство логарифмических спиралей. Особая точка такого типа называется *фокусом.*

(**4**.) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, или $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{y}{x}$.

Опять, правая часть этого уравнения терпит разрыв в точке $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Интегрируя это уравнение, получим $x^2 + y^2 = = C^2$ - семейство окружностей с центром в точке $(0, 0)$ - начале координат. В этом примере не существует решения, удовлетворяющего условию $y(0) = 0$. Особая точка такого типа, т.е. особая точка, окрестность которой заполнена семейством замкнутых интегральных кривых, называется *центром.*

Можно показать (мы этого делать не будем), что *одной только непрерывности правой части уравнения* $y' = f(x, y)$, *без выполнения второй части требования теоремы Коши - условия Липшица - недостаточно для единственности решения. Однако существование решения при этом уже обеспечивается.*

Второе условие - условие Липшица, или более грубое условие, требующее существования ограниченной производной f'_y, чаще всего нарушается в точках, при приближении к которым эта производная неограниченно возрастает, т.е. точках, в которых $\dfrac{1}{f'_y} = 0$. Уравнение $\dfrac{1}{f'_y(x, y)} = 0$, вообще говоря, определяет некоторую кривую, в точках которой, как мы уже сказали выше, может быть нарушена единственность решения. *Если* в точках этой кривой единственность нарушена, то кривая называется *особой кривой*, а если, кроме того, эта кривая окажется ещё и интегральной кривой, то мы получим *особую интегральную кривую.* Возможно, что кривая, описываемая уравнением $\dfrac{1}{f'_y(x, y)} = 0$, имеет несколько ветвей, тогда для каждой ветви необходимо решить вопрос о том, является ли она особой кривой, и, если да, то является ли она особой интегральной кривой.

Рассмотрим следующий пример. Имеет ли уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y - x)^2} + a$, где $a = 5$ или $a = 1$, особое решение? Правая часть уравнения непрерывна, но частная производная $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{2}{3}(y - x)^{-\frac{1}{3}}$ неограниченно возрастает при приближении к прямой $y = x$. Если $a = 5$, то функция $y = x$ не удовлетворяет уравнению и, следовательно, она не является особым решением этого уравнения. Если же $a = 1$, функция $y = x$ удовлетворяет нашему уравнению и, следовательно. является решением этого уравнения.

Осталось только выяснить, нарушена ли единственность в точках этой прямой. Заменой переменных $z = y - x$ получаем $\dfrac{dz}{dx} = z^{\frac{2}{3}}$, откуда $y - x = \dfrac{(x - c)^3}{27}$. Получили однопараметрическое семейство кубических парабол. Кривые этого семейства проходят через каждую точку графика решения $y = x$, следовательно, в каждой точке этой прямой единственность решения нарушена. Поэтому функция $y = x$ является особым решением, а соответствующая ей прямая является особой интегральной прямой.

3.3 Уравнения, не разрешённые относительно производной

Общий вид уравнения, не разрешённого относительно производной, таков: $F(x, y, y') = 0$. При работе с этими уравнениями чаще всего могут встретиться следующие случаи.

(**1**.) Если это уравнение удаётся разрешить относительно y', то получаем одно или несколько уравнений $y' = f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, ...)$. Интегрируя эти, уже разрешённые относительно производной, уравнения, найдём решения исходного уравнения.

Так, если $F(x, y, y') \equiv A_n(x, y)(y')^n + A_{n-1}(x, y)(y')^{n-1} + ... + A_1(x, y)y' + A_0(x, y) = 0$, рассмотрим его как алгебраическое уравнение относительно y', найдём, вообще говоря, n решений, т.е. получим n уравнений первого порядка, разрешённых относительно производной, которые решаем обычными методами.

Пример. $x(y')^2 - 2yy' + 4x = 0$. Разрешим уравнение относительно производной: $y' = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}$. Это однородное уравнение. Обозначая $\dfrac{y}{x} = t$, получим $t'x = \pm\sqrt{t^2 - 4}$. Разделим переменные в этом уравнении: $\dfrac{dt}{\sqrt{t^2 - 4}} = \pm\dfrac{dx}{x}$, откуда $\ln\left(\dfrac{t}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{t}{2}\right)^2 - 1}\right) + C = \pm \ln x$, или

$\dfrac{y_1}{2x} + \sqrt{\left(\dfrac{y_1}{2x}\right)^2 - 1} + C_1 = x$, и $\dfrac{y_2}{2x} + \sqrt{\left(\dfrac{y_2}{2x}\right)^2 - 1} + C_2 = \dfrac{1}{x}$, т.е. получено два решения исходного уравнения.

(**2**.) $\mathbf{F(x, y') = 0}$. Существует два подхода к решению уравнений такого вида.

(**a**.) Разрешим это уравнение относительно y', если это возможно, и далее решаем обычными методами.

(**b**.) Если разрешить относительно производной нельзя, то введём параметр p : $x = \varphi(p)$, $y' = \psi(p)$ так, что $F(\varphi(p), \ \psi(p)) \equiv 0$. Поскольку $dy = y'\ dx$, то $dy = \psi(p)d\varphi(p) = \psi(p) \cdot \varphi'(p)dp$, или $y = \displaystyle\int \psi(p) \cdot \varphi'(p)dp + C$. Таким образом, мы получили решение нашего дифференциального уравнения в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = \int \psi(p)\cdot\varphi'(p)dp + C. \end{cases}$

(**3**.) $\mathbf{F(y, y') = 0}$. Если трудно разрешить относительно y', то опять вводим параметр p : $y = \varphi(p)$, $y' = \psi(p)$ так, что $F(\varphi(p), \ \psi(p)) \equiv 0$. Поскольку

$dy = y'\,dx$, то $dx = \dfrac{dy}{y'} = \dfrac{d\varphi(p)}{\psi(p)} = \dfrac{\varphi'(p)dp}{\psi(p)}$, или $x + C =$

$= \displaystyle\int \frac{\varphi'(p)}{\psi(p)}dp$. Т.о., мы опять получили решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x + C = \int \dfrac{\varphi'(p)}{\psi(p)}dp, \\ y = \varphi(p). \end{cases}$

(**4**.) **Уравнение Лагранжа.** Это уравнение, общий вид которого может быть записан в форме: $A(y')y + B(y')x = C(y')$, или в форме $y = \varphi(y')x + \psi(y')$. Будем решать это уравнение методом введения параметра. Полагаем $y' = p$, $dy = pdx$. Тогда $y = \varphi(p)x + \psi(p)$. Дифференциал dy равен $dy = x\varphi_p'(p)dp + \varphi(p)dx + \psi_p'(p)dp = pdx$, откуда $(p - \varphi(p))\,dx = \left(x\varphi_p'(p) + \psi_p'(p)\right)dp$, или $\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{x\varphi_p'(p)}{p - \varphi(p)} + \dfrac{\psi_p'(p)}{p - \varphi(p)}$. (Случай, когда $\varphi(p) = p$, рассмотрим ниже, когда будем рассматривать уравнение Клеро.) Отсюда видно, что структура этого уравнения такова: $x_p' + a(p)x = b(p)$. Это линейное относительно $x(p)$ уравнение первого порядка, метод решения которого нам уже известен.

(**5**.) **Уравнение Клеро.** Частным случаем уравнения Лагранжа является уравнение $y = y'\cdot x + \psi(y')$. (Здесь $\varphi(y') = y'$). Как и в предыдущем случае, введём параметр $y' = p$, $dy = pdx$. Тогда $y = p\cdot x + \psi(p)$. Возьмём дифференциал этого выражения, после простых преобразований получим $\dfrac{dp}{dx}\cdot\left(x + \psi_p'(p)\right) = 0$. Или

1) $\dfrac{dp}{dx} = 0$, тогда $p = C$, и $y = C\cdot x + \psi(C)$

- однопараметрическое семейство интегральных кривых, или

2) $\begin{cases} x = -\psi_p'(p), \\ y = -p\psi_p'(p) + \psi(p). \end{cases}$

- решение, записанное в параметрическом виде.

Интересно отметить, что интегральная кривая, определяемая решением 2), является *огибающей* семейства интегральных кривых 1).

Действительно, огибающая некоторого однопараметрического семейства $\Phi(x, y, C) = 0$ определяется уравнениями

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi_C'(x, y, C) = 0 \end{cases},$$

которые для семейства $y = Cx + \psi(C)$ имеют вид

$$\begin{cases} y = Cx + \psi(C) \\ x = -\psi_C'(C) \end{cases},$$

что лишь обозначением параметра отличается от 2).

Заметим здесь, что метод введения параметра применим и тогда, когда уравнение имеет вид $y = f(x, y')$, если при этом получается интегрируемое уравнение для $x(p)$ или для $p(x)$.

Пример. $y = 2y'x + \dfrac{x^2}{2} + y'^2$, $y' = p$, $y = 2px + \dfrac{x^2}{2} + p^2$.

$$dy = pdx = 2pdx + 2xdp + xdx + 2pdp; \ \ (p + x)dx + 2(x + p)dp = 0.$$

$$(p + x)(dx + 2dp) = 0.$$

$$1) \ x + p = 0, \ \ x = -p, \ \ y = 2px + \frac{x^2}{2} + p^2 = -\frac{x^2}{2}.$$

$$2) \ x + 2p = C, \ x = C - 2p,$$

$$y = 2p(C - 2p) + \frac{(C - 2p)^2}{2} + p^2 = \frac{1}{2}(C^2 - 2p^2).$$

$$\begin{cases} x = C - 2p \\ y = \frac{1}{2}(C^2 - 2p^2) \end{cases}.$$

3.4 Теорема существования и единственности решений уравнений вида $F(x, y, y') = 0$

Ранее мы рассмотрели теорему существования и единственности решения $y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$. Ниже мы исследуем вопрос о существовании и единственности решений уравнений вида $F(x, y, y') = 0$.

Очевидно, что для таких уравнений через некоторую точку (x_0, y_0) может проходить уже не одна, а несколько интегральных кривых, т.к. разрешая уравнение $F(x, y, y') = 0$ относительно производной y', мы, как правило, получаем не одно. а несколько действительных значений $y' = f_i(x, y), (i = 1, 2, ...)$.

Если каждое из уравнений $y' = f_i(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения, то для каждого из этих уравнений найдётся единственное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Поэтому свойство единственности решения уравнения $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, обычно понимается в том смысле, что через данную точку (x_0, y_0) *по данному направлению* проходит не более одной интегральной кривой уравнения.

Теорема. *Существует единственное решение* $y = y(x)$, $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$, *где* h *достаточно мало, уравнения* $F(x, y, y') = 0$, *удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$, *для которого* $y'(x_0) = y'_0$, *где* y'_0 *- один из корней уравнения* $F(x_0, y_0, y') = 0$, *если в замкнутой окрестности точки* (x_0, y_0, y'_0) *функция* $F(x, y, y')$ *удовлетворяет условиям:*

1) $F(x, y, y')$ *непрерывна по всем аргументам;*

2) существует непрерывная по всем аргументам частная производная $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$, *причём* $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, y'_0)}{\partial y'} \neq 0$;

3) существует непрерывная по всем аргументам ограниченная по модулю производная $\dfrac{\partial F}{\partial y}$: $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \leqslant N$.

(Без доказательства.)

Глава 4

Линейные дифференциальные уравнения

4.1 Линейные дифференциальные уравнения n - го порядка

Общий вид дифференциального уравнения n - го порядка таков:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{4.1}$$

Функция F считается непрерывной функцией своих аргументов. Если она удовлетворяет теореме существования неявной функции, то уравнение (4.1) можно представить в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ...y^{(n-1)}). \tag{4.2}$$

Это общий вид уравнения n - го порядка, разрешённого относительно старшей производной. Будем пока изучать только уравнения такого вида.

Теорема. *Существует единственное решение дифференциального уравнения n - го порядка*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ...y^{(n-1)}),$$

удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, если в окрестности начальных значений $(x_0,\ y_0,\ y'_0,\ ...,\ y_0^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', y'', ...y^{(n-1)})$ является непрерывной функцией своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам,начиная со второго.

Замечание. Последнее условие в теореме может быть заменено более грубым условием существования в той же окрестности ограниченных частных производных первого порядка функции $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ по всем аргументам, начиная со второго.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения n - го порядка называется множество решений, состоящих из всех без исключения частных решений.

Иначе говоря, общее решение содержит в себе все без исключения частные решения. Забегая вперёд, заметим, что общее решение зависит от n параметров, в качестве которых могут быть выбраны, например, начальные значения искомой функции и производных $y_0,\ y'_0,\ ...\ ,\ y_0^{(n-1)}$.

Линейным дифференциальным уравнением n - го порядка называется дифференциальное уравнение, линейное относительно неизвестной функции и всех её производных, т.е. имеющее вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \tag{4.3}$$

где $a_0(x) \neq 0$. Если $b(x) = 0$, то уравнение называется *однородным*, а если $b(x) \neq 0$, то уравнение называется *неоднородным.*

Поскольку $a_0(x) \neq 0$, уравнение (4.3) всегда может быть приведено к виду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \tag{4.4}$$

Далее, если не оговорено противное, все $p_i(x)$ будем считать непрерывными функциями.

Обозначим
$$L[\,y\,] \overset{def}{=} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y.$$
Будем называть $L[\,y\,]$ *линейным дифференциальным оператором.* Он обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

1) $L[\,C\,y\,] = C\,L[\,y\,]$,

2) $L[\,y_1 + y_2\,] = L[\,y_1\,] + L[\,y_2\,]$,

3) $L\left[\,\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\,y_i\,\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\,L[\,y_i\,]$.

Рассмотрим линейные однородные уравнения $L[\,y\,] = 0$, или
$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{4.5}$$

Докажем ряд теорем о свойствах решений таких уравнений.

Теорема 1. *Если* $y = y(x)$ *является решением линейного однородного уравнения* $L[\,y\,] = 0$, *то и* $C \cdot y(x)$, *где* $C = const$, *является решением того же уравнения.*

Доказательство. Поскольку $L[\,y\,] = 0$, то и $L[\,C \cdot y\,] = C \cdot L[\,y\,] = 0$.

Теорема 2. *Если* $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ *являются решениями линейного однородного уравнения, то* $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ *также является решением того же уравнения, если* $C_1 = const$, $C_2 = const$.

Доказательство. $L[\,y\,] = L[\,C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2\,] = C_1 \cdot L[\,y_1\,] + C_2 \cdot L[\,y_2\,] = 0$.

Следствие. Пусть имеется n решений $y_1,\ y_2,\ ...\ , y_n$ линейного однородного уравнения $L[\,y\,] = 0$. Тогда их линейная комбинация с постоянными коэффициентами: $y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) + ... + C_n\,y_n(x)$ также является решением того же уравнения.

4.2 Общее решение линейного дифференциального уравнения n - го порядка

Рассмотрим линейное однородное уравнение
$$L[\,y\,] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{4.6}$$
Как отыскать его общее решение?

Вспомним следующее определение: функции $y_1(x),\ y_2(x),\ ...\ , y_n(x)$ называются *линейно зависимыми* на некотором отрезке изменения $x:\ a \leqslant x \leqslant b$, если существуют постоянные величины $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ такие, что на $[a, b]$ $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, причём хотя бы одно $\alpha_i \neq 0$. Если же это тождество справедливо только при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$ называются *линейно независимыми на отрезке* $[a, b]$.

Теорема 1. *Если функции* $y_1(x),\ y_2(x),\ ...\ , y_n(x)$ *линейно зависимы на* $[a, b]$, *то на том же отрезке* $[a, b]$ *определитель Вронского этих функций тождественно равен нулю:*
$$W(x) \equiv W[\,y_1, y_2, ..., y_n] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & ... & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Доказательство. Нам дано, что функции $y_1,\ y_2,\ ...\ , y_n$ линейно зависимы на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, т.е. $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, причём не все $\alpha_i = 0$. Продифференцируем это равенство 1 раз, 2 раза, ..., $(n-1)$ раз, а затем составим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1\, y_1(x) \;+\; \alpha_2\, y_2(x) \;+\; ... \;+\; \alpha_n\, y_n(x) \;=\; 0 \\ \alpha_1\, y_1'(x) \;+\; \alpha_2\, y_2'(x) \;+\; ... \;+\; \alpha_n\, y_n'(x) \;=\; 0 \\ \alpha_1\, y_1''(x) \;+\; \alpha_2\, y_2''(x) \;+\; ... \;+\; \alpha_n\, y_n''(x) \;=\; 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = \; 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Рассмотрим эту систему как систему алгебраических уравнений для определения α_i . Мы знаем, что не все они равны нулю, т.е. система заведомо имеет нетривиальные решения. Но однородная система линейных алгебраических уравнений может иметь нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель этой системы тождественно равен нулю. Легко видеть, что определитель этой системы совпадает с определителем Вронского. Следовательно, для того, чтобы не все α_i были равны нулю, необходимо, чтобы $W(x) \equiv 0$.

Теорема 2. *Если линейно независимые на $[a,b]$ функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots, y_n(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения с непрерывными на $[a,b]$ коэффициентами $p_i(x)$, то определитель Вронского этих функций не может обратиться в нуль ни в одной точке отрезка $[a,b]$.*

Доказательство. Доказательство будем вести от противного. Предположим, что в некоторой точке x_0 отрезка $[a,b]$ определитель Вронского равен нулю: $W(x_0) = 0$. Систему (4.7) подсчитаем в этой точке x_0 и опять рассмотрим её как систему алгебраических уравнений для определения α_i .

$$\begin{cases} \alpha_1\, y_1(x_0) \;+\; \alpha_2\, y_2(x_0) \;+\; ... \;+\; \alpha_n\, y_n(x_0) \;=\; 0 \\ \alpha_1\, y_1'(x_0) \;+\; \alpha_2\, y_2'(x_0) \;+\; ... \;+\; \alpha_n\, y_n'(x_0) \;=\; 0 \\ \alpha_1\, y_1''(x_0) \;+\; \alpha_2\, y_2''(x_0) \;+\; ... \;+\; \alpha_n\, y_n''(x_0) \;=\; 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \; 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

Поскольку $W(x_0) = 0$, существуют нетривиальные решения этой системы относительно α_i . С этими α_i составим линейную комбинацию: $y(x) = \alpha_1\ y_1(x) \ + \ \alpha_2\ y_2(x) \ + \ ... \ + \ \alpha_n\ y_n(x)$. Поскольку все $y_i(x)$, входящие в эту линейную комбинацию, являются решениями уравнения (4.6) $L[y] = 0$, то и $y(x)$ тоже является решением этого уравнения. Более того, если мы положим $y(x) = 0$, то получим тривиальное решение, удовлетворяющее в силу системы (4.8) нулевым начальным условиям $y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) = 0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Вследствие теоремы существования и единственности решения, это единственное решение уравнения (4.6) $L[\ y\ ] = 0$ и никаких других решений $y(x)$ этого уравнения с найденными нами ранее α_i нет. Поэтому $\alpha_1\ y_1(x) \ + \ \alpha_2\ y_2(x) \ + \ ... \ + \ \alpha_n\ y_n(x) \equiv 0$, и функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots, y_n(x)$ линейно зависимы.

Таким образом, предположение, что определитель Вронского хотя бы в одной точке отрезка $[a,b]$ может обратиться в нуль, приводит нас к противоречию с условиями теоремы.

Докажем теперь основную теорему данной лекции.

Теорема 3. *Общим решением линейного однородного уравнения $L[\ y\ ] = 0$ на отрезке $[a,b]$ является линейная комбинация $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ y_i(x)$ из n линейно независимых на этом отрезке частных решений $y_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ с произвольными постоянными коэффициентами.*

Доказательство. Уравнение $L[\ y\ ] = 0$ при $x \in [a,b]$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения. Поэтому решение $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ y_i(x)$ будет общим решением, т.е. будет содержать в себе все без исключения частные решения, если окажется возможным подобрать таким образом произвольные постоянные C_i, чтобы удовлетворить произвольно заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, $x_0 \in [a,b]$. Потребовав, чтобы решение $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ y_i(x)$ удовлетворяло поставленным начальным условиям, получим систему n линейных относительно $C_i,\ (i=1,2,...,n)$ алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x_0) \ = \ y_0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i'(x_0) \ = \ y_0' \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i''(x_0) \ = \ y_0'' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(n-1)}(x_0) = \ y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Поскольку $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,y_n(x)$ - линейно независимые решения уравнения $L[\ y\ ]=0$, определитель Вронского $W(x_0)$ этой системы отличен от нуля в любой точке $x_0\in[a,b]$. Следовательно, эта система разрешима относительно C_i $(i=1,2,...,n)$ при любом выборе $x_0\in[a,b]$ и при любом выборе правых частей этой системы.

Таким образом, какие бы начальные условия

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\ \ x_0\in[a,b]$$

мы не задали - то есть какое бы частное решение мы не выбрали - подбором постоянных C_i, $(i=1,2,...,n)$ заданное частное решение можно выделить из линейной комбинации $y(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ y_i(x)$, а это означает, что данная линейная комбинация и является общим решением.

Следствие. Максимальное число линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения n-го порядка равно n.

Определение. Любые n линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется его *фундаментальной системой решений.*

На языке фундаментальной системы решений, основную теорему этой лекции можно сформулировать следующим образом:

Теорема 3^***.** *Если* $y_i(x),\ (i=1,2,...,n)$ *– фундаментальная система решений, то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения* n*-го порядка представимо в виде* $y(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ y_i(x)$*, где* $C_1,\ C_2,\ \dots,C_n$ *- произвольные постоянные.*

4.3 Формула Остроградского-Лиувилля

Совершенно очевидно, что вся информация о решениях линейного однородного уравнения каким-то образом "спрятана" в коэффициентах $p_i(x)$ $(i=1,2,...,n)$ этого уравнения. Попробуем эту информацию предъявить в явном виде.

Пусть задана фундаментальная система решений $Y_1(x),Y_2(x),...,Y_n(x)$. Построим соответствующее им дифференциальное уравнение. Пусть $y(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ Y_i(x)$. Построим определитель Вронского системы функций $y(x),Y_1(x),Y_2(x),...,Y_n(x)$:

$$W[\,Y_1,Y_2,...,Y_n,\ y]=\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots\dots & Y_n & y \\ Y_1' & Y_2' & \dots\dots & Y_n' & y' \\ Y_1'' & Y_2'' & \dots\dots & Y_n'' & y'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_1^{(n-2)} & Y_2^{(n-2)} & \dots\dots & Y_n^{(n-2)} & y^{(n-2)} \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \dots\dots & Y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ Y_1^{(n)} & Y_2^{(n)} & \dots\dots & Y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=0.$$

Этот определитель равен нулю, поскольку система функций $y(x),Y_1(x),Y_2(x),...,Y_n(x)$ линейно зависима. Раскладывая этот определитель по элементам последнего столбца, имеем:

$$y^{(n)}\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots\dots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \dots\dots & Y_n' \\ Y_1'' & Y_2'' & \dots\dots & Y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_1^{(n-2)} & Y_2^{(n-2)} & \dots\dots & Y_n^{(n-2)} \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \dots\dots & Y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} -$$

$$
- y^{(n-1)} \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \ldots\ldots\ldots\ldots & Y_n' \\ Y_1'' & Y_2'' & \ldots\ldots\ldots & Y_n'' \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ Y_1^{(n-2)} & Y_2^{(n-2)} & \ldots\ldots\ldots & Y_n^{(n-2)} \\ Y_1^{(n)} & Y_2^{(n)} & \ldots\ldots\ldots\ldots & Y_n^{(n)} \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \ldots + (-1)^n \, y \begin{vmatrix} Y_1' & Y_2' & \ldots\ldots\ldots\ldots & Y_n' \\ Y_1'' & Y_2'' & \ldots\ldots\ldots & Y_n'' \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ Y_1^{(n-2)} & Y_2^{(n-2)} & \ldots\ldots\ldots & Y_n^{(n-2)} \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots\ldots & Y_n^{(n-1)} \\ Y_1^{(n)} & Y_2^{(n)} & \ldots\ldots\ldots & Y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.
$$

Определитель, стоящий при $y^{(n)}$ - есть определитель Вронского $W(x) \neq 0$. Он отличен от нуля, так как функции $Y_1(x)$, $Y_2(x), ..., Y_n(x)$ линейно независимы. Определитель, стоящий при $y^{(n-1)}$ - производная определителя Вронского: $W'(x)$. Структура остальных определителей нас в данный момент не интересует, для нас важно лишь то, что это некоторые функции от x. Поделив на $W(x)$, получим искомое уравнение:

$$
y^{(n)} - \frac{W'(x)}{W(x)} y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + ... + p_n(x) y = 0, \tag{4.9}
$$

где

$$
p_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}, \tag{4.10}
$$

а $p_2(x), ..., p_n(x)$ - также отношения соответствующих определителей. Формулы (4.9) и (4.10) и отвечают на вопрос, каким образом связаны между собой коэффициенты $p_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ уравнения (4.1) с решениями $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ... , $Y_n(x)$ этого уравнения.

Из формулы (4.10) легко получить **формулу Остроградского-Лиувилля** :

$$
W(x) = C \, e^{-\displaystyle\int p_1(x) dx}, \tag{4.11}
$$

где $C = const$.

Благодаря этой формуле общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$
y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0, \tag{4.12}
$$

у которого известно одно частное решение $Y_1(x)$, всегда находится в квадратурах, т.к. любое решение (4.12) также должно быть решением уравнения

$$
\begin{vmatrix} Y_1(x) & y(x) \\ Y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = C \, e^{-\displaystyle\int p_1(x) dx},
$$

что приводит к линейному уравнению первого порядка

$$
Y_1(x) \cdot y'(x) - Y_1'(x) \cdot y(x) = C \, e^{-\displaystyle\int p_1(x) dx}, \tag{4.13}
$$

которое легко решается. Действительно, поделим (4.13) на $Y_1^2(x)$. В левой части получившегося уравнения нетрудно усмотреть производную частного двух функций:

$$
\left(\frac{y(x)}{Y_1(x)} \right)' = \frac{C \, e^{-\displaystyle\int p_1(x) dx}}{Y_1^2(x)}.
$$

Интегрируя это уравнение, получим искомое решение:

$$
y(x) = Y_1(x) \cdot \left[\int \frac{C \, e^{-\int p_1(x) dx}}{Y_1^2(x)} dx + \hat{C} \right].
$$

Глава 5

Линейные дифференциальные уравнения (продолжение)

5.1 Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения

Рассмотрим неоднородные дифференциальное уравнение

$$L[\,y\,] = y^{(n)} + \;p_1(x)\,y^{(n-1)} + \;p_2(x)\,y^{(n-2)} + ... + \;p_{n-1}(x)\,y' + \\ + p_n(x)\,y = f(x). \tag{5.1}$$

Соответствующее ему однородное уравнение: $L[\,y\,] = 0$.

Теорема. *Если* $z(x)$ *- частное решение неоднородного линейного уравнения, то общее решение неоднородного линейного уравнения есть* $Y(x) = z(x) + y(x)$, *где* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\,y_i(x)$ *– есть общее решение соответствующего однородного уравнения* $L[\,y\,] = 0$.

Доказательство. Так как для уравнения $L[\,y\,] = f(x)$ справедлива теорема существования и единственности решения, надо показать, что для произвольных начальных условий $Y^{(k)}(x_0) = Y_0^{(k)}$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$ найдутся коэффициенты C_i такие, что эти начальные данные удовлетворятся:

$$\begin{cases} Y_0 = z(x_0) \;\;+ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\;y_i(x_0) \\ Y_0' = z'(x_0) \;\;+ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\;y_i'(x_0) \\ Y_0'' = z''(x_0) \;+ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\;y_i''(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_0^{(n-1)} = z^{(n-1)}(x_0) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\;y_i^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Это - линейная по отношению к постоянным C_i система n алгебраических уравнений с n неизвестными. При произвольных левых частях $Y_0,\;Y_0',\;Y_0'',\;...\;,Y_0^{(n-1)}$ и при любых $z(x_0),\;z'(x_0), z''(x_0),\;...\;, z^{(n-1)}(x_0)$ она допускает единственное решение, поскольку определитель Вронского $W[\,y_1,\;y_2,\;...\;,y_n\,]$ для линейно независимой системы функций $y_1(x),\;y_2(x),\;...\;,y_n(x)$ отличен от нуля.

Таким образом, проблема нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения включает в себя проблему нахождения частного решения этого уравнения.

5.2 Нахождение общего решения методом вариации произвольных постоянных

Пусть общее решение линейного однородного уравнения есть $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\;y_i(x)$. Будем считать, что $C_i = C_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ с тем, чтобы подобрать n величин $C_i(x)$ так, чтобы удовлетворить однородному уравнению $L[y]=f(x)$. Имеющийся в результате такого выбора произвол устраним следующим образом.

$y'(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i(x)\,y_i'(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i(x)$, положим (это – первое требование) $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i(x)=0$.

$y''(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i(x)\,y_i''(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i'(x)$, положим (это – второе требование) $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i'(x)=0$.

....

$y^{(n-1)}(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i(x)\,y_i^{(n-1)}(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i^{(n-2)}(x)$,

положим (это – $(n-1)$ - ое требование) $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i^{(n-2)}(x)=0$.

$y^{(n)}(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i(x)\,y_i^{(n)}(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i^{(n-1)}(x)$.

Здесь мы уже *не можем* требовать, чтобы $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i^{(n-1)}(x)=0$, поскольку функции $C_i(x)$ уже подчинены $n-1$ требованию, а надо ещё удовлетворить уравнению $L[y]=f(x)$. Подставим $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, ... , $y^{(n)}(x)$ в наше уравнение. Получим $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i^{(n-1)}(x)\;=\;f(x)$. Это и есть последнее условие, налагаемое на $C_i(x)$. Таким образом, все функции $C_i(x)$ могут быть определены из системы

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i(x)=0. \\ \sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i'(x)=0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i^{(n-2)}(x)=0. \\ \sum\limits_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases}$$

Определитель этой системы $W(x)\neq 0$, так как функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ линейно независимы - это фундаментальная система решений однородного уравнения $L[y]=0$. Из этой системы найдём все $C_i'=\varphi_i(x)$, затем, интегрируя, получим

$C_i(x)=\displaystyle\int\varphi_i(x)dx+\hat{C}_i$, где все $\hat{C}_i=const$. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения, таким образом, имеет вид:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}\left[\hat{C}_i\;y_i(x)\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\int\varphi_i(x)dx\right)\cdot y_i(x)\right].$$

Легко видеть, что первое слагаемое в этом решении - это общее решение соответствующего однородного уравнения, тогда как второе слагаемое - это частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения.

5.3 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

На практике часто встречаются линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами, которые всегда можно представить в виде

$$L[\,y\,]\;=\;y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny\;=\;f(x)\,, \tag{5.2}$$

где $a_1,\ldots,a_n$ – заданные действительные числа.

Рассмотрим сначала однородные уравнения, то есть уравнения вида

$$L[\,y\,]\;=\;y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=\;0\,. \tag{5.3}$$

Оказывается, что интегрирование уравнения (5.3) всегда возможно в элементарных функциях и сводится к алгебраическим операциям.

Решения этого уравнения будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$. Подставим эту функцию в уравнение (5.3), получим

$$e^{kx}\,(k^n + a_1k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n) = 0.$$

Отсюда, поскольку $e^{kx} \neq 0$, следует

$$F(k) \overset{def}{=} k^n + a_1k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) называется *характеристическим уравнением* линейного дифференциального уравнения (5.3). Это алгебраическое уравнение n - го порядка. Согласно основной теореме алгебры, любое уравнение n - го порядка имеет ровно n корней.

1. Характеристическое уравнение имеет n различных вещественных корней $k_1, k_2, ..., k_n$. Им соответствуют n частных линейно независимых решений $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$, ... , $y_n = e^{k_nx}$ уравнения (5.3). В линейной независимости этих функций можно убедиться, проверив, что определитель Вронского этих функций отличен от нуля. В этом случае общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + ... + C_ne^{k_nx}. \tag{5.5}$$

2. Все корни различные, но среди них есть комплексные. Пусть $k_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $k_2 = \alpha_1 - i\beta_1$, ... , $k_{2s-1} = \alpha_s + i\beta_s$, $k_{2s} = \alpha_s - i\beta_s$ – комплексные корни характеристического уравнения, остальные корни - k_{2s+1}, ... , k_n - вещественные.

Соответствующие им частные решения для комплексных корней имеют вид:

$$y_1 = e^{(\alpha_1+i\beta_1)x},\ y_2 = e^{(\alpha_1-i\beta_1)x},\ ... , y_{2s-1} = e^{(\alpha_s+i\beta_s)x},\ y_{2s} = e^{(\alpha_s-i\beta_s)x},$$

а для действительных:

$$y_{2s+1} = e^{k_{2s+1}x},\ ... , y_n = e^{k_nx}.$$

Поскольку e^{k_1x} – решение, то $L[\ e^{k_1x}\ ] = 0$. Воспользуемся в этом соотношении известной формулой $e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$, получим: $L[\ e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x + ie^{\alpha_1x}\sin\beta_1x\ ] = 0$. Вследствие линейности оператора, имеем $L[\ e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x\ ] + iL[\ e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x\ ] = 0$.

Но e^{k_2x} - тоже решение, поэтому $L[\ e^{k_2x}\ ] = 0$; следовательно, $L[\ e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x - ie^{\alpha_1x}\sin\beta_1x\ ] = L[\ e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x\ ] - iL[\ e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x\ ] = 0$.

Комплексная величина равна нулю тогда и только тогда, когда по отдельности равны нулю действительная и мнимая части этой величины: $L[\ e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x\ ] = 0$, $L[\ e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x\ ] = 0$.

Таким образом, каждой паре комплексно-сопряжённых корней соответствуют два линейно независимых решения вида $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

В итоге получаем систему n линейно независимых решений:

$$e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x,\ e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,\ e^{\alpha_2x}\cos\beta_2x,\ e^{\alpha_2x}\sin\beta_2x,\ ... ,$$

$$..., e^{\alpha_sx}\cos\beta_sx,\ e^{\alpha_sx}\sin\beta_sx,\ e^{k_{2s+1}x},\ ... , e^{k_nx},$$

линейная комбинация которых и даёт общее решение.

3. Имеются кратные вещественные корни. Пусть k_i - корни характеристического полинома $F(k)$ кратности m_i.

В этом случае прямым вычислением можно показать (мы этого делать не будем), что функции $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = x\,e^{k_1x}$, ... , $y_{m_1} = x^{m_1-1}e^{k_1x}$, или, коротко,

$$y_s(x) = x^s\,e^{k_1x},\ \ (0 \leqslant s \leqslant m_1 - 1), \tag{5.6}$$

являются решениями уравнения (5.3) в случае, когда k_1 – корень характеристического уравнения кратности m_1.

Поскольку функции линейно независимы (в этом можно убедиться, вычислив определитель Вронского), они могут быть включены в фундаментальную систему решений уравнения (5.3).

4. Имеются кратные комплексные корни. Пусть $\alpha + i\beta$ - комплексный корень кратности m. Повторяя дословно все рассуждения, проведённые нами в пунктах 3 и 2, покажем, что этому корню отвечают следующие линейно независимые частные решения:

$$e^{\alpha x}\ \cos\beta x,\ x\, e^{\alpha x}\ \cos\beta x,\ x^2\, e^{\alpha x}\ \cos\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}\, e^{\alpha x}\ \cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\ \sin\beta x,\ x\ e^{\alpha x}\ \sin\beta x,\ \ x^2\, e^{\alpha x}\ \sin\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}\, e^{\alpha x}\ \sin\beta x.$$

5.4 Уравнения Эйлера

Уравнениями Эйлера называются уравнения вида:

$$a_0\, x^n\, y^{(n)} + a_1\, x^{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, x\, y' + a_n\, y = f(x). \tag{5.7}$$

Решение этого уравнения заменой $x = e^t$, если $x > 0$, или $x = -e^t$, если $x < 0$, сводится к решению линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

В самом деле, $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{e^t dt} = e^{-t}\, y'_t,\ y'' = \dfrac{dy'_x}{dx} = \dfrac{d(e^{-t}y'_t)}{e^t dt} = e^{-2t}\, (y''_{tt} - y'_t),\ \ y'''_{xxx} = e^{-3t}\, (y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t),\ \ldots$ и т.д.

Легко видеть, что после подстановки этих производных уравнение примет вид

$$a_0\, y^{(n)}_{t^n} + b_1\, y^{(n-1)}_{t^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}\, y'_t + a_n\, y = f(e^t).$$

Это и есть уравнение с постоянными коэффициентами, которое решается уже известными нам методами.

Глава 6

Системы дифференциальных уравнений

6.1 Основные сведения

Обратимся к физической задаче о движении материальной точки массы m под действием силы $\vec{F}(t, \vec{r}, \dfrac{d\vec{r}}{dt})$. По второму закону Ньютона

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t,\ \vec{r},\ \frac{d\vec{r}}{dt}), \tag{6.1}$$

где $\vec{F} = \vec{i}\ P + \vec{j}\ Q + \vec{k}\ R.$ В координатной записи это векторное уравнение будет выглядеть в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = P(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} = Q(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} = R(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases}. \tag{6.2}$$

Если сейчас считать неизвестными функциями не только $x(t), y(t),\ z(t)$, но и их производные $\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)$, то получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = w \\ m\dot{u} = P(t, x, y, z, u, v, w) \\ m\dot{v} = Q(t, x, y, z, u, v, w) \\ m\dot{w} = R(t, x, y, z, u, v, w) \end{cases}. \tag{6.3}$$

Как мы знаем, для того чтобы решить поставленную задачу описания траектории движения точки, необходимо задать начальное положение $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0)$ и начальную скорость $u_0 = u(t_0),\ v_0 = v(t_0),\ w_0 = w(t_0)$ точки.

Обобщая такую задачу на n - мерный случай, мы приходим к необходимости рассмотреть, при наличии начальных условий $x_i(t_0) = \overset{0}{x}_i\ (\equiv x_{i\ 0}),$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}. \tag{6.4}$$

Удобно ввести в n - мерном евклидовом пространстве вектор-функции

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots\dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}.$$

Тогда система (6.4) может быть записана в более компактном виде

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X) \tag{6.4*}$$

с начальными условиями $X(t_0) = X_0$.

Решение системы (6.4) $x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t)$,..., $x_n = \varphi_n(t)$, или, кратко,

$$X = \Phi(t) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \dots\dots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

– есть интегральная кривая в евклидовом пространстве с координатами $(t, x_1, x_2, ..., x_n)$.

В физике и механике системе (6.4), или, эквивалентно, (6.4*) даётся более естественная интерпретация.

Система (6.4*) называется *динамической системой*, переменная t берётся за время, и тогда $X = \Phi(t)$ описывает траекторию движения точки, $\frac{dX}{dt}$ – скорость точки в n - мерном евклидовом пространстве, которое в физике называют *фазовым пространством,* а траекторию – *фазовой траекторией.*

Динамическая система (6.4*) в момент времени t определяет в n - мерном фазовом пространстве поле скоростей. Если правая часть $F(t, X)$ зависит от времени, то поле скоростей меняется со временем и фазовые траектории могут пересекаться. Если же $F = F(X)$, то поле скоростей стационарно и, следовательно, через каждую точку фазового пространства $(x_1, x_2, ..., x_n)$ будет проходить лишь одна траектория.

6.2 Интегрирование систем дифференциальных уравнений путем нахождения интегрируемых комбинаций

Определение. *Интегрируемой комбинацией* называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием (6.4), но уже легко интегрирующееся: $d\,\Phi(t, x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Отсюда

$$\Phi(\ t,\ x_1,\ x_2,\ \dots, x_n\ )\ =\ C. \tag{6.5}$$

Данное выражение называется *первым интегралом системы* (6.4).

Иначе, первым интегралом системы (6.4) $\Phi(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C$ называется соотношение, обращающееся в тождество при некотором C, если вместо $x_1,\ x_2,\ \dots, x_n$ подставить решение $x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t),\ \dots, x_n = \varphi_n(t)$ системы (6.4).

Часто под первым интегралом понимают левую часть равенства (6.5), как *функцию, не равную тождественно постоянной, но сохраняющую постоянные значения вдоль интегральных кривых системы* (6.4).

Если найдено s штук интегрируемых комбинаций, то может быть получено s штук первых интегралов $\Phi_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) = = C_1$, $\Phi_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_2$, ..., $\Phi_s(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_s$, и если эти первые интегралы функционально независимы, то есть $\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_s)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_s})} \neq 0$, то s штук независимых функций из набора $x_1,\ x_2,\ \dots, x_n$ можно выразить через остальные и, подставляя их в систему (6.4), придём к системе уравнений с меньшим числом неизвестных. При $s = n$ и когда все интегралы независимы, все неизвестные функции могут быть определены из системы $\Phi_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_1$, $\Phi_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) C_2, \dots,\ \Phi_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_n$.

Систему (6.4) иногда удобно представить в виде

$$\frac{dx_1}{f_1(t,x)} = \frac{dx_2}{f_2(t,x)} = \ \dots\ = \frac{dx_n}{f_n(t,x)} = \frac{dt}{1}.$$

Обозначая $t = x_0$ и переобозначая удобным образом переменные, можно получить систему, записанную в *симметричной форме:*

$$\frac{dx_0}{A_0(x_0, x_1, ..., x_n)} = \frac{dx_1}{A_1(x_0, x_1, ..., x_n)} = \ \dots\ = \frac{dx_n}{A_n(x_0, x_1, ..., x_n)}.$$

Преимуществом такой формы записи системы является то, что в эту систему все переменные $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ входят *равноправно,* тогда как в нормальной системе (6.4) такого равноправия нет: $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ рассматриваются как функции, а t – как независимая переменная.

Симметричная форма системы уравнений может оказаться очень полезной для нахождения интегрируемых комбинаций. Для этого можно воспользоваться свойством равных дробей: если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = t,$$

то при любых $k_1,\ k_2,\ ...\ , k_n$ имеем

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + ... + k_n b_n} = t.$$

6.3 Системы линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) x_k + f_i(t), \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{6.6}$$

Эта система может быть записана в матричной форме

$$\frac{dX}{dt} = AX + F, \tag{6.6*}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t)\ a_{12}(t)\ ...\ a_{1n}(t) \\ a_{21}(t)\ a_{22}(t)\ ...\ a_{2n}(t) \\ .... \\ a_{n1}(t)\ a_{n2}(t)\ ...\ a_{nn}(t) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ .... \\ x_n(t) \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ .... \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Если все $f_i(t) \equiv 0$, то есть когда матрица-столбец $F(t) \equiv 0$, система называется *однородной*. При $f_i(t) \neq 0$, то есть когда хотя бы одна $f_i(t) \neq 0$, система называется *неоднородной*.

Введём в рассмотрение линейный оператор

$$L(\ ) \overset{def}{=} \frac{d}{dt} - A. \tag{6.7}$$

В терминах этого дифференциального оператора систему уравнений (6.6*) можно записать $L(X) = 0$ для однородной системы и $L(X) = F(t)$ для неоднородной.

Рассмотрим некоторые свойства оператора $L(\ )$.

Свойство 1. *Оператор* $L(\ )$ *линеен:* $L(C_1X_1 + C_2X_2) = = C_1L(X_1) + C_2L(X_2)$.

Действительно, $\frac{d}{dt}(C_1X_1 + C_2X_2) - A(C_1X_1 + C_2X_2) =$
$= C_1\left(\frac{dX_1}{dt} - AX_1\right) + C_2\left(\frac{dX_2}{dt} - AX_2\right) = C_1\ L(X_1) + C_2\ L(X_2)$.

Свойство 2. *Линейная комбинация* $\sum\limits_{s=1}^{m} C_s X_s$ *с постоянными коэффициентами решений* $X_1,\ X_2,\ ...\ , X_s$ *линейной однородной системы также является решением этой системы дифференциальных уравнений.*

Доказательство. $L\left(\sum\limits_{s=1}^{m} C_s X_s\right) = \sum\limits_{s=1}^{m} C_s \underbrace{L(X_s)}_{=0} = 0.$

Свойство 3. *Если линейная однородная система имеет комплексное решение* $X = U(t) + iV(t)$, *то*

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ .... \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ .... \\ v_n(t) \end{pmatrix}$$

– также решения этой системы.

Доказательство. $L(X) = L(U + iV) = L(U) + iL(V) = = 0 \Rightarrow L(U) = 0, \quad L(V) = 0,$ поскольку комплексная величина равна нулю тогда и только тогда, когда действительная часть и мнимая часть этой комплексной величины по отдельности равны нулю. Таким образом, U и V – решения системы.

Определение. Векторы $X_1,\ X_2,\ ...\ , X_n$ называются *линейно зависимыми* на сегменте $t \in [\ a,\ b\ ]$, если существуют такие постоянные $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...\ , \lambda_n$, среди которых хотя бы одно число $\lambda_k \neq 0$, что линейная комбинация $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + +\lambda_n X_n = 0$. Если же это соотношение выполнено тогда и только тогда, когда все $\lambda_k = 0$, то векторы $X_1,\ X_2,\ ...\ , X_n$ *линейно независимы.*

Из матриц-столбцов

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ .... \\ x_{n1} \end{pmatrix},\ \ X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ .... \\ x_{n2} \end{pmatrix},\ ...\ , X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ .... \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

составим квадратную матрицу

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{.......................} \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей Вронского.* Здесь, как всегда, первый индекс обозначает строку, а второй - столбец. Определитель этой матрицы называется *определителем Вронского* или *вронскианом.*

Теорема 1 (о линейной зависимости системы решений). *Если определитель Вронского решений*

$X_1, X_2, ..., X_n$ *однородной системы линейных дифференциальных уравнений с непрерывными на сегменте* $[\ a,\ b\ ]$ *коэффициентами* $a_{ik}(t)$ *равен нулю хотя бы в одной точке* $t_0 \in [\ a,\ b\ ]$, *то решения* $X_1,\ X_2,\ ...\ , X_n$ *линейно зависимы на* $[\ a,\ b\ ]$ *и, следовательно,* $\det W(t) \equiv 0$ *на* $[\ a,\ b\ ]$.

Доказательство. Вследствие непрерывности коэффициентов $a_{ik}(t)$, выполнена теорема существования и единственности решения для системы дифференциальных уравнений. Следовательно, начальное значение $X(t_0) = 0$ определяет единственное решение $X(t) \equiv 0$ однородной системы.

Поскольку $\det W(t_0) = 0$, то существует такая система постоянных $C_1,\ C_2,\ ...\ , C_n$, среди которых хотя бы одна C_i отлична от нуля, что

$$C_1 X_1(t_0) + C_2 X_2(t_0) + ... + C_n X_n(t_0) = 0, \tag{6.8}$$

что эквивалентно следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1\ x_{11}(t_0) + C_2\ x_{12}(t_0) +\ ...\ + C_n\ x_{1n}(t_0) = 0 \\ C_1\ x_{21}(t_0) + C_2\ x_{22}(t_0) +\ ...\ + C_n\ x_{2n}(t_0) = 0 \\ .... \\ C_1\ x_{n1}(t_0) + C_2\ x_{n2}(t_0) +\ ...\ + C_n\ x_{nn}(t_0) = 0 \end{cases}$$

с определителем, равным нулю. Соответствующее этой нетривиальной системе постоянных $C_1,\ C_2,\ ...\ , C_n$ решение $X(t):\ \ X(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(t)$ удовлетворяет, вследствие (6.8), начальному условию $X(t_0) = 0$. Но тогда $X(t) \equiv 0$, и мы на всём сегменте $[\ a,\ b\ ]$ имеем $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(t) \equiv 0$, при этом хотя бы одна из C_i отлична от нуля. А это как раз и означает, что система решений $X_1,\ X_2,\ ...\ , X_n$ линейно зависима на $[\ a,\ b\ ]$. Теорема доказана.

Теорема 2 (об общем решении линейной однородной системы.) *Линейная комбинация* $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(t)$ *с произвольными постоянными* n *штук линейно независимых решений* $X_i(t)$

$(i = 1, 2, ..., n)$ *однородной системы линейных уравнений с непрерывными на сегменте* $[\ a,\ b\ ]$ *коэффициентами* $a_{ik}(t)$ *является общим решением этой системы дифференциальных уравнений.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы надо показать, что какое бы частное решение, отвечающее начальным значениям $\overset{*}{X}(t_0) = \overset{*}{X}_0$ (то есть $\overset{*}{x}_1(t_0) = \overset{*}{x}_{10},\ \overset{*}{x}_2(t_0) = \overset{*}{x}_{20}, ...,$

$\overset{*}{x}_n(t_0) = \overset{*}{x}_{n0},$) ни взять, всегда найдутся такие $\overset{*}{C}_i$, что $\overset{*}{X}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overset{*}{C}_i\, X_i(t)$. (Иначе говоря, надо показать, что подбором постоянных C_i в решении $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ X_i(t)$ можно удовлетворить любым произвольно выбранным начальным условиям $X(t_0) = X_0$).

В силу теоремы существования и единственности решения, это требование эквивалентно тому, что должно быть выполнено следующее векторное уравнение: $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ X_i(t_0) = X_0$, где C_i считаются неизвестными величинами. В развёрнутой записи эта система выглядит так:

$$\begin{cases} C_1\ x_{11}(t_0) + C_2\ x_{12}(t_0) + \ \dots\ + C_n\ x_{1n}(t_0) = \overset{0}{x}_1 \\ C_1\ x_{21}(t_0) + C_2\ x_{22}(t_0) + \ \dots\ + C_n\ x_{2n}(t_0) = \overset{0}{x}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1\ x_{n1}(t_0) + C_2\ x_{n2}(t_0) + \ \dots\ + C_n\ x_{nn}(t_0) = \overset{0}{x}_n \end{cases}.$$

Определитель данной системы – это определитель Вронского нашей линейно независимой системы решений. Поэтому он отличен от нуля, $\det W(t) \neq 0$. Следовательно, система всегда имеет единственное решение, которое может быть найдено, например, по формулам Крамера.

Теорема 3 (об общем решении линейной неоднородной системы.) *Если* $Y(t)$ *– частное решение неоднородной системы* $L\left(X(t)\right) = F(t)$, *то* $X(t) = Y(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ X_i(t)$, *где* $X_i(t)$ *– линейно независимые решения соответствующей однородной системы* $L\left(X(t)\right) = 0$, *а* C_i *– произвольные постоянные, есть общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений.*

Доказательство. Вместо неизвестного вектора $X(t)$ введём новый вектор $Z(t) = X(t) - Y(t)$. Тогда легко видеть, что $L\left(Z(t)\right) = L\left(X(t)\right) - L\left(Y(t)\right) = 0$, поскольку $L\left(X(t)\right) = = L\left(Z(t) + Y(t)\right) = L\left(Z(t)\right) + \underbrace{L\left(Y(t)\right)}_{\equiv F(t)} = F(t) \Rightarrow L\left(Z(t)\right) = 0$. Если $X_1(t),\ X_2(t),\ \dots, X_n(t)$ – система линейно независимых решений однородной системы $L\left(Z(t)\right) = 0$, то $Z(t) = = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(t)$ – общее решение этой однородной системы. Отсюда $X(t) = Y(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ X_i(t)$ есть общее решение неоднородной системы. Оно действительно общее, так как какое бы решение $\tilde{Y}(t)$, отвечающее произвольным начальным данным $\tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$, мы не взяли, найдутся такие постоянные $\tilde{C}_1,\ \tilde{C}_2,\ \dots, \tilde{C}_n$, что $\tilde{Y}(t) = Y(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{C}_i X_i(t)$, так как система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \tilde{C}_1\ x_{11}(t_0) + \tilde{C}_2\ x_{12}(t_0) + \ \dots\ + \ \tilde{C}_n\ x_{1n}(t_0) = \ \overset{0}{\tilde{y}}_1\ - y_1(t_0) \\ \tilde{C}_1\ x_{21}(t_0) + \tilde{C}_2\ x_{22}(t_0) + \ \dots\ + \ \tilde{C}_n\ x_{2n}(t_0) = \ \overset{0}{\tilde{y}}_2\ - y_2(t_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{C}_1\ x_{n1}(t_0) + \tilde{C}_2\ x_{n2}(t_0) + \ \dots\ + \ \tilde{C}_n\ x_{nn}(t_0) = \ \overset{0}{\tilde{y}}_n\ - y_n(t_0) \end{cases}.$$

имеет единственное решение, которое может быть найдено, например, по формулам Крамера. Определитель этой системы совпадает с определителем Вронского для системы линейно независимых функций и поэтому отличен от нуля.

Теорема 4 (о суперпозиции решений.) *Решением системы*

$$L\left(X(t)\right) = F_1(t) + F_2(t) + \dots + F_s(t)$$

является сумма всех решений $X_1(t),\ X_2(t),\ \dots, X_s(t)$ *уравнений*

$$L\left(X_1(t)\right) = F_1(t),\ L\left(X_2(t)\right) = F_2(t),\ \dots, L\left(X_s(t)\right) = F_s(t).$$

Доказательство. Дано: $L\left(X_1(t)\right) \equiv F_1(t)$, $L\left(X_2(t)\right) \equiv F_2(t)$, $\dots, L\left(X_s(t)\right) \equiv F_s(t)$. Поэтому $L\left(X_1(t) + X_2(t) + \ \dots\ + X_s(t)\right) = L\left(X_1(t)\right) + L\left(X_2(t)\right) + \dots + L\left(X_s(t)\right) \equiv$
$\equiv F_1(t) + F_2(t) + \ \dots\ + F_s(t)$, то есть, сумма решений $X_1(t) + X_2(t) + \ \dots\ + X_s(t)$ действительно является решением системы $L\left(X(t)\right) = F_1(t) + F_2(t) + \dots + F_s(t)$.

Как следствие этой теоремы имеем, что если система $L\left(X(t)\right) = U(t) + i\ V(t)$ имеет решение $Z = \tilde{X}(t) + i\,\tilde{Y}(t)$, то $L\left(\tilde{X}(t)\right) \equiv U(t)$, $L\left(\tilde{Y}(t)\right) \equiv V(t)$. Иначе говоря, $\tilde{X}(t)$ и $\tilde{Y}(t)$ – суть решения уравнений $L\left(X(t)\right) = U(t)$ и $L\left(Y(t)\right) = V(t)$.

6.4 Метод вариации произвольных постоянных

Решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} - A(t)X = F(t) \tag{6.9}$$

ищем в виде

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\ X_i(t), \tag{6.10}$$

где $X_1(t),\ X_2(t),\ \ldots, X_n(t)$ – система линейно независимых решений однородной системы

$$\frac{dX}{dt} - A(t)X = 0,$$

а $C_i(t)$ – неизвестные пока функции. Для нахождения этих функций подставим решение (6.10) в исходную систему (6.9):

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)X_i(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\frac{dX_i(t)}{dt} - A(t)\sum_{i=1}^{n} C_i(t)X_i(t) = F(t).$$

Но $X_i(t)$ – решения однородной системы, т.е. $\frac{dX_i}{dt} \equiv A(t)X_i(t)$, и, следовательно, второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются. Остаётся $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(t)\ X_i(t) = F(t)$, что эквивалентно

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(t)\ x_{1i}(t) = f_1(t) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(t)\ x_{2i}(t) = f_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(t)\ x_{ni}(t) = f_n(t) \end{cases}.$$

Поскольку $\det W(t) \neq 0$, то существует единственное решение этой системы, которое может быть найдено, например, по формулам Крамера: $C_i'(t) = \varphi_i(t)$. Интегрируя, легко получить $C_i(t) = \int \varphi_i(t)\ dt + k_i$, $k_i = const$. В итоге

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(t)\ dt\right) X_i(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i\ X_i(t)$$

– общее решение нашей системы.

Глава 7

Системы дифференциальных уравнений (продолжение)

7.1 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется система

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k(t) + f_i(t), \tag{7.1}$$

где $a_{ik} = const$, или в матричном виде,

$$\frac{dX}{dt} = AX - F(t), \tag{7.1*}$$

матрица $A = \|a_{ik}\|$ – числовая матрица.

Существует два варианта решения этой системы.

Первый вариант решения системы (7.1) состоит в том, чтобы свести решение системы к решению дифференциального уравнения более высокого порядка. Ясно, что это будет линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, которое мы уже научились решать ранее.

Второй вариант решения системы (7.1) состоит в том, что надо найти линейно независимую систему решений $X_1(t),\ X_2(t),\ \ldots, X_n(t)$ соответствующей однородной системы

$$\frac{dX}{dt} = AX, \tag{7.2}$$

а затем либо применить метод вариации произвольных постоянных, либо угадать какое-либо частное решение $Y(t)$ неоднородной системы. Тогда $X(t) = Y(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, X_i(t)$, C_i – произвольные постоянные. Таким образом, мы приходим к выводу, что нам необходимо разработать способ получения n линейно независимых решений однородной системы. С этой целью будем искать решение системы (7.2) в виде

$$X(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots. \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \qquad \text{Тогда} \quad \frac{dX(t)}{dt} = \lambda\, e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots. \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Подставляя в (7.2) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим

$$\begin{pmatrix} \lambda\, \alpha_1 \\ \lambda\, \alpha_2 \\ \ldots. \\ \lambda\, \alpha_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots. \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \text{или,} \quad (A - \lambda\, E) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots. \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0,$$

где E – единичная матрица. В результате имеем однородную систему линейных алгебраических уравнений с одним параметром λ для определения неизвестных $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\alpha_n$:

$$\left\{\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)\ \alpha_1 + a_{12}\ \alpha_2 + \dots + a_{1n-1}\ \alpha_{n-1} + a_{1n}\ \alpha_n = 0 \\ a_{21}\ \alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\ \alpha_2 + \dots + a_{2n-1}\ \alpha_{n-1} + a_{2n}\ \alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ \alpha_1 + a_{n2}\ \alpha_2 + \dots + a_{nn-1}\ \alpha_{n-1} + (a_{nn}-\lambda)\ \alpha_n = 0 \end{array}\right. . \tag{7.3}$$

Эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, то есть

$$\det(A-\lambda E) = 0. \tag{7.4}$$

Уравнение (7.4) – это алгебраическое уравнение n – го порядка, называемое *характеристическим уравнением.* Вспоминая линейную алгебру, приходим к выводу, что λ – собственные значения матрицы A, а неизвестные векторы $\begin{pmatrix} \overset{(i)}{\alpha}_1 \\ \overset{(i)}{\alpha}_2 \\ \dots. \\ \overset{(i)}{\alpha}_n \end{pmatrix}$, $(i = 1,\ 2,\ \dots,n)$ – собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\lambda_n$. Среди этих собственных значений λ_i имеются как вещественные, так и комплексные; как однократные, так и кратности $r > 1$.

7.2 Простые корни характеристического полинома

Все корни однократные, т.е все они различны между собой: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$. В этом случае, как мы знаем из курса линейной алгебры, существует n штук собственных векторов

$$X_1 = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} \overset{(1)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(1)}{\underset{2}{\alpha}} \\ \dots. \\ \overset{(1)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix},\ X_2 = e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} \overset{(2)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(2)}{\underset{2}{\alpha}} \\ \dots. \\ \overset{(2)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix},\ \dots,X_n = e^{\lambda n t}\begin{pmatrix} \overset{(n)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(n)}{\underset{2}{\alpha}} \\ \dots. \\ \overset{(n)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

Среди собственных значений могут быть комплексные. Если один из корней характеристического уравнения равен $\lambda_s = = p_s + i\ q_s$, то тогда непременно существует и комплексно сопряжённый корень $\lambda_{s+1} = p_s - i\ q_s$. Формально, этим двум собственным значениям соответствуют решения

$$X_{s,s+1}(t) = e^{p_s t}\ (\cos q_s t \pm i\ \sin q_s t)\begin{pmatrix} \overset{(s)}{\beta}_1 \pm i\,\overset{(s)}{\gamma}_1 \\ \overset{(s)}{\beta}_2 \pm i\,\overset{(s)}{\gamma}_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \overset{(s)}{\beta}_n \pm i\,\overset{(s)}{\gamma}_n \end{pmatrix}.$$

Выделяя в этом выражении действительную и мнимую части, получим два независимых решения.

7.3 Кратные корни характеристического полинома

Характеристическое уравнение имеет корень λ_0 кратности r. В этом случае решение будем искать в виде

$$X(t) = e^{\lambda_0 t}\left(\begin{pmatrix} \overset{(1)}{\alpha}_1 \\ \overset{(1)}{\alpha}_2 \\ \dots. \\ \overset{(1)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \overset{(2)}{\alpha}_1 \\ \overset{(2)}{\alpha}_2 \\ \dots. \\ \overset{(2)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + \dots + t^{r-1}\begin{pmatrix} \overset{(r)}{\alpha}_1 \\ \overset{(r)}{\alpha}_2 \\ \dots. \\ \overset{(r)}{\alpha}_n \end{pmatrix}\right).$$

Подставим это выражение в уравнение (7.2): $\quad \frac{dX}{dt} = A\,X.$

Имеем:

$$\lambda_0 e^{\lambda_0 t}\left(\begin{pmatrix} \overset{(1)}{\alpha}_1 \\ \overset{(1)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(1)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \overset{(2)}{\alpha}_1 \\ \overset{(2)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(2)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + ... + t^{r-1}\begin{pmatrix} \overset{(r)}{\alpha}_1 \\ \overset{(r)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(r)}{\alpha}_n \end{pmatrix}\right) +$$

$$+e^{\lambda_0 t}\left(\begin{pmatrix} \overset{(2)}{\alpha}_1 \\ \overset{(2)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(2)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + 2t\begin{pmatrix} \overset{(3)}{\alpha}_1 \\ \overset{(3)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(3)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + ... + (r-1)t^{r-2}\begin{pmatrix} \overset{(r)}{\alpha}_1 \\ \overset{(r)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(r)}{\alpha}_n \end{pmatrix}\right) =$$

$$= e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \overset{(1)}{\alpha}_1 \\ \overset{(1)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(1)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \overset{(2)}{\alpha}_1 \\ \overset{(2)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(2)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + ... + t^{r-1}\begin{pmatrix} \overset{(r)}{\alpha}_1 \\ \overset{(r)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(r)}{\alpha}_n \end{pmatrix}\right).$$

Слева и справа этого равенства - полиномы степени $r-1$, сравнивая матричные коэффициенты при одинаковых степенях t, получим соответствующие системы линейных алгебраических

уравнений на неизвестные $\begin{pmatrix} \overset{(1)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(1)}{\underset{2}{\alpha}} \\ .... \\ \overset{(1)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \overset{(2)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(2)}{\underset{2}{\alpha}} \\ .... \\ \overset{(2)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad ... \quad, \begin{pmatrix} \overset{(r)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(r)}{\underset{2}{\alpha}} \\ .... \\ \overset{(r)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix}.$

Глава 8

Немного об уравнениях в частных производных

8.1 Уравнения в частных производных первого порядка

Определение. Выражение вида

$$\Phi\left(u(x_1,x_2,...,x_n),\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},...,\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)=0 \tag{8.1}$$

называется *дифференциальным уравнением в частных производных* m *- го порядка* относительно неизвестной функции $u(x_1,x_2,...,x_n)\equiv u(x)$. Как и в обыкновенных дифференциальных уравнениях, порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется *порядком* этого уравнения. Рассмотрим некоторые примеры таких уравнений.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=x+y$. Оно легко интегрируется, его решение имеет вид: $z=\frac{1}{2}x^2+xy+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ - произвольная функция y.

Пример 2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$. Решение этого дифференциального уравнения также не вызывает затруднений: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=1$, откуда $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+A(y)$ и, следовательно, $z=xy+\displaystyle\int A(y)\,dy+B(x)$. Здесь $A(y)$ и $B(x)$ – произвольные функции указанных в скобках аргументов.

Примеры наводят на мысль о том, что общее решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка содержит одну произвольную функцию, а уравнение второго порядка – две произвольные функции, и так далее.

Предположения нуждаются в строгом обосновании. С. Ковалевской была доказана следующая теорема существования и единственности решения уравнения в частных производных.

Прежде чем сформулировать эту теорему, напомним определение аналитической функции.

Определение. Функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется *аналитической* в окрестности точки $M_0(\overset{\circ}{x}_1,\ \overset{\circ}{x}_2,\ ...\ ,\overset{\circ}{x}_n\ )$, если данная функция может быть разложена в степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности этой точки.

8.2 Теорема Коши – Ковалевской существования и единственности решения уравнения в частных производных

Теорема Коши – Ковалевской. *Существует единственное аналитическое в окрестности точки* $M_0(\overset{\circ}{x}_1,\ \overset{\circ}{x}_2,\ ...\ ,\overset{\circ}{x}_n\ )$ *решение уравнения* m *- го порядка, разрешённого относительно старшей производной по одной из переменных*

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}=f\left(x_1,...,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},...,\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}},...,\frac{\partial^m}{\partial x_n^m}\right),$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{x_1=\overset{\circ}{x}_1} = \varphi_0(x_2,...,x_n),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1}|_{x_1=\overset{\circ}{x}_1} = \varphi_1(x_2,...,x_n),$$
$$..$$

,

$$\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1}}|_{x_1=\overset{\circ}{x}_1} = \varphi_{m-1}(x_2,...,x_n),$$

если функции $\varphi_0(x_2,...,x_n)$, $\varphi_1(x_2,...,x_n)$, ... ,$\varphi_{m-1}(x_2,...,x_n)$ *являются аналитическими в окрестности точки* M_0 *, а функция* f *в правой части уравнения является аналитической функцией в окрестности начальных значений своих аргументов.* Таким образом, решение определяется заданием начальных функций $\varphi_0(x_2,...,x_n)$, $\varphi_1(x_2,...,x_n)$, ... ,$\varphi_{m-1}(x_2,...,x_n)$. Если мы их будем произвольно менять в классе аналитических функций, мы получим совокупность аналитических решений исходного уравнения, зависящую от m произвольных функций. Иначе говоря, общее решение содержит произвол в m функций.

8.3 Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

Определение. *Квазилинейным неоднородным уравнением в частных производных первого порядка* называется уравнение вида:

$$X_1(x_1,x_2,...,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1,x_2,...,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + ...$$
$$+X_n(x_1,x_2,...,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = Y(x_1,x_2,...,x_n,z). \tag{8.2}$$

Это уравнение, линейное относительно производных, может не быть, однако, линейным относительно неизвестной функции $z(x_1,x_2,...,x_n)$. Если $Y \equiv 0$, а $X_i = X_i(x_1,x_2,...,x_n)$, то есть X_i не зависят от z, то уравнение $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i(x_1,x_2,...,x_n)\,\dfrac{\partial z}{\partial x_i} = 0$ называется *линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка.*

Для большей наглядности сначала целесообразно рассмотреть квазилинейное уравнение вида

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z), \tag{8.3}$$

где функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ задают непрерывное векторное поле

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{i}\,P(x,y,z) + \vec{j}\,Q(x,y,z) + \vec{k}\,R(x,y,z).$$

Векторными линиями векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ называются линии $\vec{r} = \vec{r}(t)$, у которых касательный вектор в каждой точке совпадает по направлению с вектором $\vec{F}(x,y,z)$ в данной точке: $\frac{d\vec{r}}{dt} = k\vec{F}$, $k = const$, t - параметр данной линии. Векторные линии поля $\vec{F}(x,y,z)$, как известно, находятся путём интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{8.4}$$

Поверхности, составленные из векторных линий, называются *векторными поверхностями* данного векторного поля. В любой точке векторной поверхности выполняется условие ортогональности $\left(\vec{N}\cdot\vec{F}\right) = 0$, где $\vec{N}$ - вектор нормали к поверхности.

Рассмотрим векторную трубку, составленную из векторных линий.

Ясно, что боковая поверхность векторной трубки, состоящей из векторных линий, характеризуется тем, что в любой точке боковой поверхности векторной трубки также выполняется условие ортогональности $\left(\vec{N}\cdot\vec{F}\right) = 0$, где $\vec{N}$ - вектор нормали к боковой поверхности.

Если боковая поверхность векторной трубки определяется уравнением $u(x,y,z)=0$, то

$$\vec{N}=\overrightarrow{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\,\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\,\vec{k},$$

и условие ортогональности $\left(\vec{N}\cdot\vec{F}\right)=0$ даёт

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{8.5}$$

- линейное однородное уравнение в частных производных относительно функции трёх переменных $u(x,y,z)$.

Если боковая поверхность векторной трубки определяется уравнением $z=z(x,y)$, то $\vec{N}=-\frac{\partial z}{\partial x}\,\vec{i}-\frac{\partial z}{\partial y}\,\vec{j}+\vec{k}$ и условие $\left(\vec{N}\cdot\vec{F}\right)=0$ после очевидных преобразований запишется: $P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$ - в точности уравнение (8.3).

Итак, чтобы найти уравнение боковой поверхности векторной трубки, необходимо проинтегрировать квазилинейное уравнение (8.3), когда мы ищем решение в явном виде $z=z(x,y)$, или линейное уравнение (8.5), когда мы ищем решение в неявном виде $u(x,y,z)=0$.

Для того, чтобы решить уравнение (8.3) или (8.5), мы должны сначала найти векторные линии (так как векторные поверхности состоят из векторных линий), то есть решить вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (8.4): $\dfrac{dx}{P(x,y,z)}=\dfrac{dy}{Q(x,y,z)}=\dfrac{dz}{R(x,y,z)}$.

Пусть $(\alpha):\begin{cases}\psi_1(x,y,z)=C_1\\ \psi_2(x,y,z)=C_2\end{cases}$ - два независимых первых интеграла системы (8.4), которые задают нам двухпараметрическое семейство векторных линий, называемых *характеристиками* уравнения (8.3) или (8.4). Но боковая поверхность векторной трубки состоит из однопараметрического семейства векторных линий. Для того, чтобы из двухпараметрического семейства (α) с параметрами C_1 и C_2 выделить однопараметрическое семейство, мы должны задать зависимость (в общем случае произвольную) между этими параметрами: $\Phi(C_1,\ C_2)=0$. Это означает, что искомое уравнение поверхности определяется соотношением

$$\Phi\left(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)\right)=0, \tag{8.6}$$

где Φ - произвольная функция своих аргументов, а (8.6) - общее решение уравнения (8.3).

Если требуется найти не произвольную векторную трубку векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$, а векторную поверхность, проходящую через заданную кривую $(\beta):\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=0\\ \varphi_2(x,y,z)=0\end{cases}$ (такая задача называется *задачей Коши для дифференциального уравнения в частных производных*), то функция Φ в соотношении (8.6) уже не может быть произвольной: переменные x, y, z, входящие в это выражение должны одновременно удовлетворять и условиям (α), и уравнению кривой (β). Иначе говоря, они одновременно должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=0,\\ \varphi_2(x,y,z)=0,\\ \psi_1(x,y,z)=C_1,\\ \psi_2(x,y,z)=C_2.\end{cases}$$

Исключая x, y и z из этой системы, найдём конкретную связь между параметрами C_1 и C_2 : $\tilde{\Phi}(\ C_1,C_2)=0$. Тогда решением уравнения (8.3) будет конкретная функция

$$\tilde{\Phi}\left(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)\right)=0, \tag{8.7}$$

описывающая уравнение векторной поверхности, проходящей через заданную кривую (β).

Пример. Найти интегральную поверхность уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

проходящую через кривую $\begin{cases}x=0\\ z=y^2\end{cases}$.

Составим вспомогательную систему $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$, первые интегралы этой системы: $z = C_1,\ x^2 + y^2 = C_2$. Следовательно, общим решением исходного уравнения является функция $\Phi\left(z,\ x^2 + y^2\right) = 0$, что эквивалентно $z = f(x^2 + y^2)$ - это поверхность вращения.

Исключим $x,\ y,\ z$ из системы $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \\ z = C_1 \\ x^2 + y^2 = C_2 \end{cases}$, получим $C_1 = C_2$, или $z = x^2 + y^2$ - параболоид.

Литература

[1] Л.Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука, 1969.

[2] Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М. Наука, 1985.

[3] Карташёв А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М. Наука, 1980.

[4] Степанов В.В. "Курс дифференциальных уравнений М.: Гостехиздат, 1959.

Оглавление

Альпин Тимур Юрьевич
Даишев Ринат Абдурашидович

ПОСОБИЕ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ: ЧАСТЬ II

Учебное пособие