

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ**

*Кафедра общей физики*

**И.Н. ГРАЧЕВА, Е.А. ФИЛИППОВА, А.И. ФИШМАН**

**ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА.  
ЦЕНТРИРОВАННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

**Казань – 2017**

**УДК 535.317.2**  
**ББК 22.34**

*Принято на заседании кафедры общей физики  
Протокол № 8 от 15 июня 2017 года*

**Рецензент:**

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник  
Центра квантовых технологий КФУ **Р.В. Юсупов**

**Грачева И.Н., Филиппова Е.А., Фишман А.И.**

**Геометрическая оптика. Центрированные оптические системы /**  
И.Н. Грачева, Е.А. Филиппова, А.И. Фишман. – Казань: Казан. ун-т,  
2017. – 31 с.

Учебно-методическое пособие «Геометрическая оптика. Центрированные оптические системы» предназначено для студентов-бакалавров 1-2 года обучения, изучающих раздел курса общей физики «Оптика». В пособии последовательно излагаются основные законы геометрической оптики, приводятся основные понятия и определения, необходимые для ознакомления с принципами образования изображений в центрированных оптических системах. Описан матричный метод расчета центрированных оптических систем.

Настоящее пособие может быть использовано во время семинарских занятий, в ходе самостоятельной работы и при выполнении работ общего физического практикума по курсу «Оптика» студентами физических и нефизических специальностей.

© Грачева И.Н., Филиппова Е.А.,  
Фишман А.И., 2017  
© Казанский университет, 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Геометрическая оптика.....	4
1. Центрированные оптические системы (ЦОС) .....	6
2. Матричный метод описания центрированных оптических систем .....	11
а) Матрица преобразования параметров светового луча для оптически однородного промежутка. ....	13
б) Матрица преобразования параметров луча для сферической преломляющей поверхности. ....	14
в) Матрица преобразования параметров светового луча для сферической отражающей поверхности. ....	16
3. Матрица линзы .....	17
4. Определение кардинальных элементов произвольной ЦОС.....	18
5. Частные виды матриц преобразования параметров лучей .....	22
Примеры решения задач.....	23

## Геометрическая оптика

Многие простые оптические явления, такие, например, как возникновение теней и образование изображений в оптических приборах, можно объяснить на основе законов геометрической (или лучевой) оптики. Геометрическая оптика использует представление о световых лучах – математических линиях, вдоль которых происходит распространение энергии световых колебаний. Пучки света рассматриваются как совокупности бесконечного числа независимых лучей, удовлетворяющих хорошо известным законам:

1. В прозрачной однородной среде свет распространяется прямолинейно.

2. Распространение любого светового пучка в среде не зависит от наличия других пучков света.

3. Луч, падающий на плоскую границу раздела двух однородных изотропных прозрачных сред ( $S_1$ , рис.1), отраженный луч  $S_3$  и нормаль  $N$ , восстановленная к границе раздела в точке падения луча  $S_1$ , лежат в одной плоскости (*плоскость падения*). Угол падения  $\varphi_1$  равен углу отражения  $\varphi_3$ .

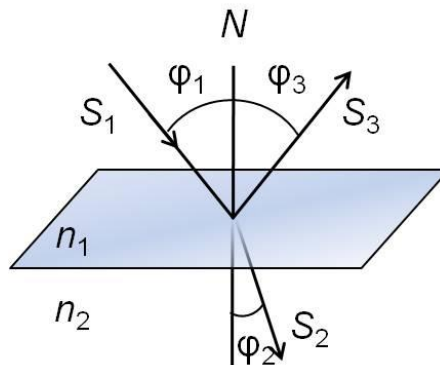


Рис. 1. Отражение и преломления луча на границе раздела двух прозрачных сред

4. Луч, падающий на границу раздела двух однородных изотропных прозрачных сред ( $S_1$ , рис.1), преломленный луч  $S_2$  и нормаль  $N$ , восстановленная к границе раздела в точке падения луча  $S_1$ , лежат в одной плоскости. Углы падения  $\varphi_1$  и преломления  $\varphi_2$  для монохроматического света связаны соотношением

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2, \quad (1.1)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – абсолютные показатели преломления сред (закон Снеллиуса).

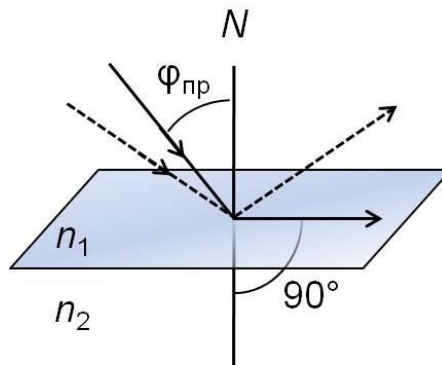


Рис. 2. Полное внутреннее отражение света при падении на оптически менее плотную среду

При сравнении двух прозрачных сред та из них, которая имеет больший показатель преломления, называется «оптически более плотной».

Если свет распространяется из среды оптически более плотной в оптически менее плотную ( $n_1 > n_2$ ), то в соответствии с законом Снеллиуса угол преломления будет больше угла падения (рис. 2). При увеличении угла падения угол преломления растет. При достижении углом  $\varphi_1$  значения  $\varphi_{\text{пр}} = \arcsin(n_2/n_1)$  угол  $\varphi_2$  становится равным  $90^\circ$ . Этот угол падения называется *предельным*. Если свет падает на границу раздела сред под углом большим предельного (т.е.  $\varphi_{\text{пред}} < \varphi_1 < \pi/2$ ), свет во вторую среду не проникает. Это явление называется *полным внутренним отражением* света.

## 1. Центрированные оптические системы (ЦОС)

Оптическая система, образованная сферическими (в частности плоскими) отражающими и преломляющими поверхностями, называется центрированной, если центры кривизны всех поверхностей лежат на одной прямой. Эта прямая называется *главной оптической осью* системы.

Пучок лучей, исходящих из одной точки или сходящихся в одну точку, называется *гомоцентрическим пучком* (пучок параллельных лучей также является гомоцентрическим, исходящим из бесконечно удаленной точки).

Если гомоцентрический пучок лучей, исходящих из какой-либо точки  $S$ , после прохождения некоторой оптической системы сходится в точке  $S_i$ , то  $S_i$  является стигматическим изображением точки  $S$ .  $S$  и  $S_i$  называются *сопряженными точками*.

Под идеальной оптической системой понимают такую систему, которая дает стигматическое изображение, геометрически подобное отображенному предмету. Теория таких систем становится особенно простой, когда все распространяющиеся в них лучи *параксиальны*, т.е. проходят на небольшом расстоянии от оптической оси системы и образуют с ней малые углы. Гомоцентричность пучка параксиальных лучей при прохождении через идеальную центрированную систему не нарушается.

ЦОС характеризуется рядом так называемых *кардинальных* точек и плоскостей, задание которых полностью описывает все свойства ЦОС и позволяет пользоваться ими, не рассматривая реального хода лучей в системе.

Пусть на центрированную оптическую систему падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси. Поскольку такой пучок является гомоцентрическим, а система – идеальной, на выходе из оптической системы пучок остается гомоцентрическим. Точка пересечения пучка таких лучей (или их продолжений) на выходе из системы называется *задним* или *вторым главным фокусом*. Главные фокусы всегда лежат на главной оптической оси ЦОС. Если на систему падает гомоцентрический пучок лучей, исходящий из некоторой точки, и после прохождения оптической системы лучи идут

параллельно главной оптической оси, исходная точка называется *передним* или *первым главным фокусом* системы.

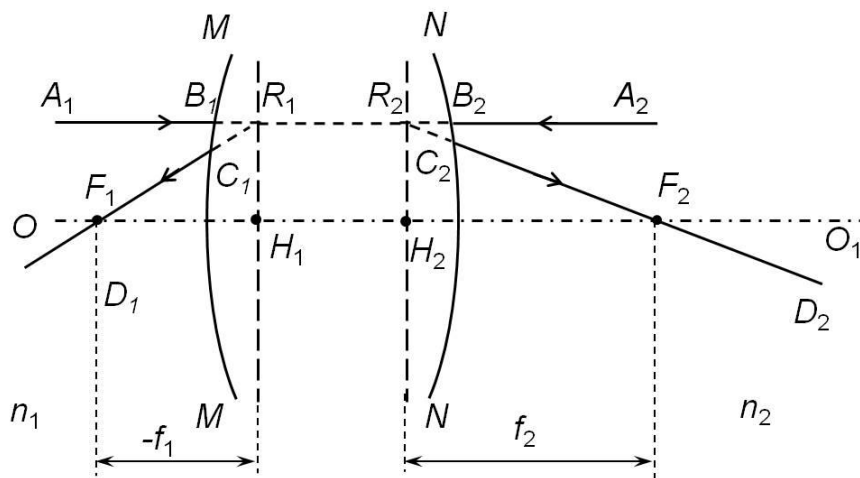


Рис. 3. Кардинальные точки и плоскости центрированной оптической системы

На рис. 3 изображена некоторая ЦОС, ограниченная сферическими поверхностями  $MM$  и  $NN$ . С одной стороны от данной ЦОС находится среда с показателем преломления  $n_1$ , с другой стороны среда с показателем преломления  $n_2$ . Направим на эту систему луч  $A_1B_1$ , параллельный главной оптической оси  $OO_1$ . Сопряженный ему луч выйдет из системы по направлению  $C_2D_2$  и пересечет главную оптическую ось в точке  $F_2$  – заднем главном фокусе ЦОС. Плоскость, проходящая через  $F_2$  и перпендикулярная главной оптической оси  $OO_1$ , называется фокальной. Любой пучок параллельных лучей, падающих на оптическую систему, преобразуется в гомоцентрический пучок, при этом точка схождения лучей принадлежит фокальной плоскости, проходящей через задний фокус. Точно так же луч  $A_2B_2$  при прохождении через систему пересечет ось  $OO_1$  в точке  $F_1$  – переднем главном фокусе ЦОС. Лучи, исходящие из точек  $F_1$  и  $F_2$ , после системы будут идти параллельно главной оптической оси. Продолжения лучей  $A_1B_1$  и  $D_1C_1$  ( $A_2B_2$  и  $D_2C_2$ ) пересекаются в точке  $R_1$  ( $R_2$ ). Плоскости, проходящие через точки  $R_1$  и  $R_2$  и перпендикулярные оптической оси, носят названия *главных плоскостей*, а точки  $H_1$  и  $H_2$  – *главных точек*. Точки главных плоскостей  $R_1$  и  $R_2$  сопряжены и изображаются с поперечным увеличением  $\beta = H_1R_1/H_2R_2 = +1$  (о правиле знаков см. ниже). Главные плоскости обладают следующим свойством: любой луч (или его продолжение),

падающий на ЦОС и пересекающий первую главную плоскость на некотором расстоянии от главной оптической оси, после преобразования в оптической системе пересекает вторую главную плоскость на том же самом расстоянии от главной оптической оси.

Точки  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $F_1$  и  $F_2$  являются кардинальными точками ЦОС. Расстояния от главных точек до фокусов  $f_1 = H_1F_1$  и  $f_2 = H_2F_2$  называются фокусными расстояниями системы. Главный фокус может лежать как слева, так и справа от соответствующей главной точки.

Для того чтобы различать эти случаи, следует придерживаться так называемого «*правила знаков*». В геометрической оптике принимается, что свет распространяется слева направо – это положительное направление. Расстояния, отсчитываемые от главных точек вправо по ходу луча, считаются положительными, а влево, против хода луча – отрицательными. Расстояния, отсчитываемые вверх от главной оптической оси, положительны, вниз – отрицательны. Углы, отсчитываемые от оптической оси против часовой стрелки, положительны, по часовой стрелке – отрицательны. Обратим внимание, что на рисунках указываются *длины* отрезков и величины углов, то есть модули соответствующих величин (например,  $-f_1$ ,  $f_2$ , рис. 3). В соответствии с этим на рис. 3 фокусное расстояние  $f_1$  – отрицательная величина, а  $f_2$  – положительная.

Величина  $\Phi = \frac{n_2}{f_2} = -\frac{n_1}{f_1}$  называется оптической силой системы. Единица

измерения оптической силы – диоптрия (1 дптр =  $\text{м}^{-1}$ ). При  $\Phi > 0$  заднее фокусное расстояние положительное, система дает действительное изображение бесконечно удаленной точки, и говорят, что оптическая система является собирающей. В случае  $\Phi < 0$  изображение бесконечно удаленной точки мнимое, система будет рассеивающей. Системы с оптической силой  $\Phi = 0$  называются телескопическими. Телескопическая система преобразует параллельный пучок в параллельный же, но с другим углом наклона к оптической оси.



Из выражения для оптической силы системы  $\Phi$  очевидно, что между фокусными расстояниями любой ЦОС выполняется соотношение  $\frac{f_2}{f_1} = -\frac{n_2}{n_1}$ .

Отсюда следует, что если среды по обе стороны от оптической системы одинаковы (например, оптическая система находится в воздухе), фокусные расстояния одинаковы по модулю и отличаются только знаком.

В качестве кардинальных точек не обязательно пользоваться фокусами и главными точками, иногда их заменяют **узловыми точками**. Они обладают тем свойством, что луч, проходящий через переднюю узловую точку ( $K_1$ , рис. 4) и образующий с осью  $OO_1$  угол  $\alpha_1$ , после преломления проходит через заднюю узловую точку ( $K_2$ ) и образует с осью угол  $\alpha_2 = \alpha_1$  (в сопряженных точках  $K_1$  и  $K_2$  угловое увеличение  $\Gamma = \alpha_2/\alpha_1 = +1$ ).

Если значения показателей преломления первой и последней сред одинаковы, то узловые точки совпадают с главными.

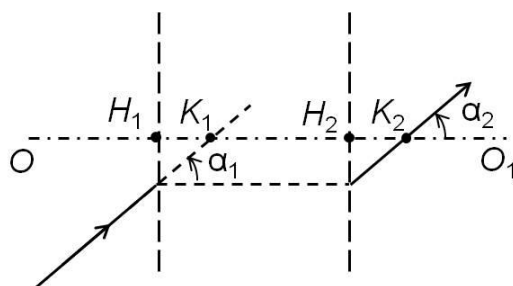


Рис. 4. Узловые точки  $K_1$  и  $K_2$  центрированной оптической системы

Вообще говоря, в качестве кардинальных точек можно принять две произвольно выбранные пары сопряженных точек при условии, что известно линейное или угловое увеличение, соответствующее этим парам. Однако применение таких кардинальных точек неудобно и не получило распространение на практике.

Рассмотрим принцип построения изображений в ЦОС, если заданы четыре кардинальные точки  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $F_1$  и  $F_2$  (см. рис. 5). В пространстве предметов (слева от первой главной плоскости) задана точка  $A_1$ , которая находится на высоте  $y_1$  от главной оптической оси  $OO_1$  и на расстоянии  $-s_1$  от первой главной плоскости. Необходимо найти сопряженную ей точку в

пространстве изображений. Очевидно, что благодаря цилиндрической симметрии ЦОС в параксиальном приближении сопряженная точка будет принадлежать той же самой плоскости, которая проходит через главную оптическую ось и точку  $A_1$ . Так как любой луч, проходящий через точку  $A_1$ , после преобразования в системе пройдет через сопряженную ей точку  $A_2$ , для определения её положения достаточно построить ход двух лучей. Их пересечение даст положение точки  $A_2$ .

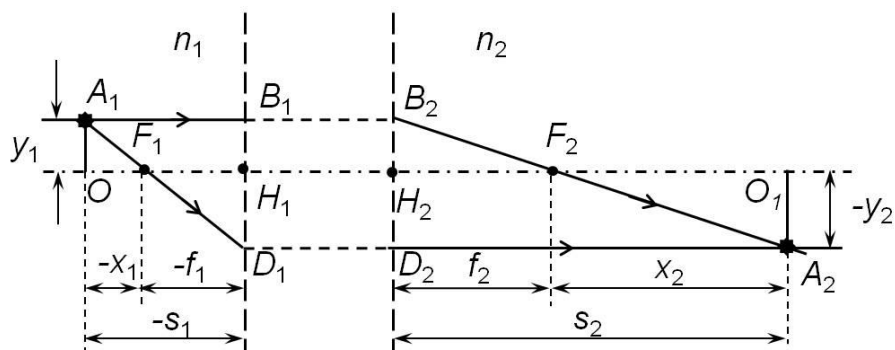


Рис. 5. Построение изображений в ЦОС по кардинальным точкам

Через точку  $A_1$  проведем луч  $A_1B_1$  параллельно главной оптической оси до пересечения с первой главной плоскостью. Поскольку луч должен пересечь вторую главную плоскость на той же самой высоте, продолжаем ход луча до пересечения со второй главной плоскостью в точке  $B_2$ . Из точки  $B_2$  проводим луч таким образом, чтобы он пересек главную оптическую ось в точке заднего фокуса  $F_2$ , получаем луч  $B_2A_2$ . Ход первого луча определен. Далее через точку  $A_1$  проводим луч  $A_1D_1$ , проходящий через передний фокус  $F_1$ , до пересечения с первой главной плоскостью в точке  $D_1$ . Пучок лучей, исходящий из переднего фокуса, преобразуется в пучок, параллельный главной оптической оси. Поэтому из точки  $D_2$ , сопряженной  $D_1$ , строим луч параллельно оси  $OO_1$ . Точка  $A_2$  пересечения лучей  $B_2A_2$  и  $D_2A_2$  является изображением исходной точки  $A_1$ . Точка  $A_2$  находится на расстоянии  $s_2$  от второй главной плоскости и на высоте  $-y_2$  от главной оптической оси. Обозначим расстояние от точки  $A_1$  до передней фокальной плоскости как  $-x_1$ , а расстояние от задней фокальной плоскости до точки изображения  $A_2$  как  $x_2$ .

Из подобия треугольников  $A_1F_1O$  и  $F_1H_1D_1$  следует:  $\frac{y_1}{-x_1} = \frac{-y_2}{-f_1}$  (мы записываем длины отрезков по модулю). Аналогично, из подобия треугольников  $A_2F_2O_1$  и  $F_2H_2B_2$  следует:  $\frac{y_1}{f_2} = \frac{-y_2}{x_2}$ . Преобразуя эти два выражения и исключая из них расстояния  $y_1$  и  $y_2$ , получаем так называемую формулу Ньютона для ЦОС

$$x_1x_2 = f_1f_2. \quad (1.2)$$

Учитывая, что  $-x_1 = -s_1 - (-f_1)$ , а  $x_2 = s_2 - f_2$ , выражение (1.2) можно переписать в виде

$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1. \quad (1.3)$$

Если известна оптическая сила системы и показатели преломления по обе стороны от нее, выражение (1.3) можно записать следующим образом

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \Phi. \quad (1.4)$$

Величина  $\beta = \frac{y_2}{y_1}$  называется поперечным увеличением системы.  $\beta > 0$ , если изображение прямое,  $\beta < 0$ , если изображение перевернутое (как на рис. 5). Можно выразить поперечное увеличение через фокусные расстояния системы:

$$\beta = 1 - \frac{s_2}{f_2} = \frac{f_1}{f_1 - s_1} \quad (1.5).$$

## **2. Матричный метод описания центрированных оптических систем**

Матричный метод позволяет рассчитать ход параксиальных лучей через ЦОС. Рассмотрим его основные принципы.

Оптическая система представляет собой совокупность преломляющих и отражающих поверхностей, разделяющих пространство, в котором

распространяется луч, на последовательность однородных сред (материал линз и промежутки между ними). Соответственно, траектория луча состоит из отрезков прямых линий. Будем рассматривать только меридиональные лучи, т.е. лучи, лежащие в одной плоскости с главной оптической осью (ось  $z$  и, соответственно, плоскость  $yz$ ) (рис. 6).

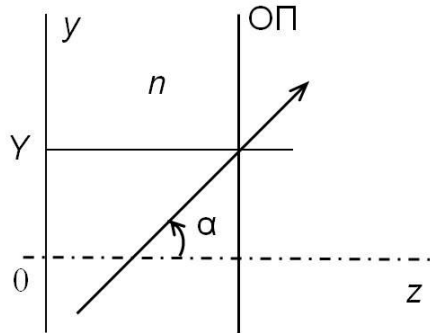


Рис. 6. Пересечение луча с опорной плоскостью

Выберем некоторую плоскость  $z = \text{const}$ , перпендикулярную оптической оси, и назовем ее опорной плоскостью (ОП). Любой меридиональный луч можно определить заданием двух параметров: координаты  $Y$  точки пересечения луча с опорной плоскостью

и угла  $\alpha$  наклона луча к оптической оси (для параметров  $Y$  и  $\alpha$  работает «правило знаков», на рис. 6  $Y > 0$  и  $\alpha > 0$ ). Удобнее, однако, в качестве второго параметра  $V$  использовать произведение показателя преломления среды  $n$  на угол  $\alpha$ :  $V = n\alpha$ .

Преобразование параметров луча при переходе от одной опорной плоскости ОП<sub>1</sub> к другой, ОП<sub>2</sub>, в параксиальном приближении будет линейным, т.е. для любой пары опорных плоскостей оно имеет вид:

$$\begin{aligned} Y_2 &= A \cdot Y_1 + B \cdot V_1 \\ V_2 &= C \cdot Y_1 + D \cdot V_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Это преобразование можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Опорные плоскости можно выбирать произвольно, в разных местах оптической системы. Для определенной пары плоскостей ОП<sub>1</sub> и ОП<sub>2</sub> преобразование параметров любого параксиального луча будет описываться одной и той же матрицей, элементы которой определяются оптическими свойствами пространства между ОП<sub>1</sub> и ОП<sub>2</sub>: расположением и радиусами

преломляющих и отражающих поверхностей, а также показателями преломления сред, находящихся между ними. Матрица, описывающая преобразование лучей всей оптической системой, получается перемножением матриц, сопоставляемых отдельным промежуткам.

Для полного описания поведения луча в центрированной оптической системе необходимо знать матрицы преобразования для трех основных элементов: оптически однородного промежутка, преломляющей и отражающей поверхностей. Определим эти матрицы.

**а) Матрица преобразования параметров светового луча для оптически однородного промежутка.**

Оптический промежуток зададим опорными плоскостями ОП<sub>1</sub> и ОП<sub>2</sub>. Расстояние между ними  $l$  и показатель преломления  $n$  (предполагается, что показатель преломления остается неизменным между опорными плоскостями и вблизи ОП<sub>1</sub> слева и ОП<sub>2</sub> справа).

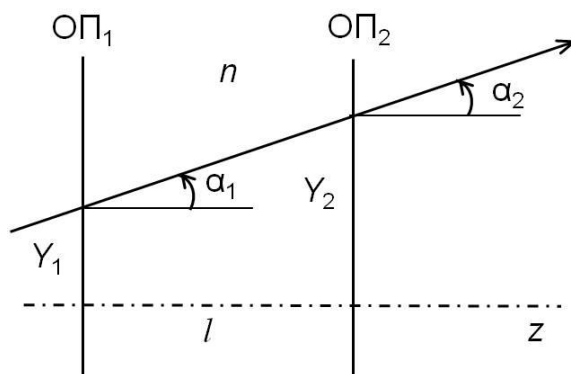


Рис. 7. Преобразование параметров луча в оптически однородном промежутке

Из рис. 7 видно, что  $Y_2 = Y_1 + l \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$ . В параксиальном приближении углы наклона лучей считаются малыми и, следовательно,  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \alpha_1$  и  $Y_2 = Y_1 + l \cdot \alpha_1$ . Чтобы перейти от  $\alpha_1$  к  $V_1$ , домножим и разделим последнее слагаемое на  $n$ , тогда  $Y_2 = Y_1 + LV_1$ , где  $L = \frac{l}{n}$  – приведенная толщина оптического промежутка. Наклон луча при переходе от ОП<sub>1</sub> к ОП<sub>2</sub> не изменяется, т.е.  $V_2 = V_1$ .

$$Y_2 = Y_1 + LV_1 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Таким образом, преобразование параметров луча оптически однородным промежутком можно описать с помощью матрицы  $T$ , где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

**б) Матрица преобразования параметров луча для сферической преломляющей поверхности.**

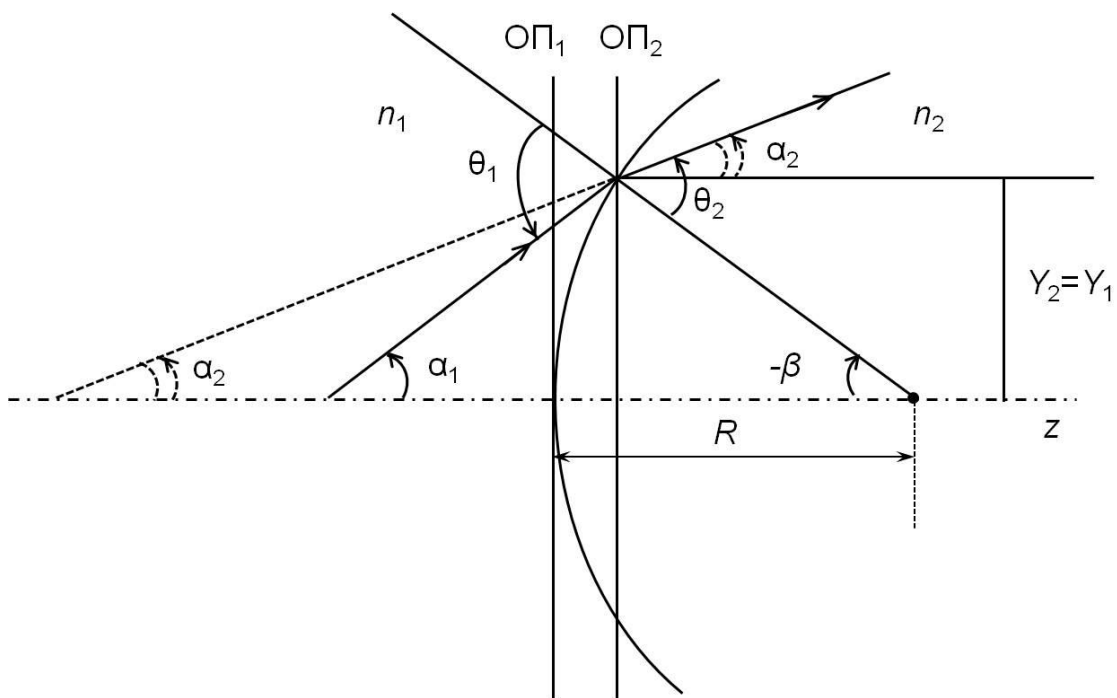


Рис. 8. Преобразование параметров луча для сферической преломляющей поверхности

Пусть радиус кривизны этой поверхности равен  $R$  и она разделяет две среды с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Выберем опорные плоскости  $ОП_1$  и  $ОП_2$  по обе стороны в непосредственной близости от преломляющей поверхности (рис. 8). Расстояние между ними  $R - R \cos(-\beta) = R(1 - \cos \beta) = R \frac{\beta^2}{2}$  пренебрежимо мало. Поэтому можно считать, что луч пересекает обе плоскости на одном расстоянии от оси  $z$ , т.е.  $Y_2 = Y_1$ . Чтобы найти, как преобразуется параметр  $V$ , воспользуемся законом преломления  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ , который в случае параксиального приближения имеет вид

$n_1\theta_1 = n_2\theta_2$ . По теореме о внешнем угле треугольника имеем  $\theta_1 = -\beta + \alpha_1$  и  $\theta_2 = -\beta + \alpha_2$ . Умножая первое из этих равенств на  $n_1$ , второе на  $n_2$  и используя закон преломления, находим  $n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 + \beta(n_2 - n_1)$ . Учитывая, что  $n_1\alpha_1 = V_1$ ,  $n_2\alpha_2 = V_2$  и  $-\beta = \frac{Y_1}{R}$ , имеем:  $V_2 = V_1 - \frac{Y_1}{R}(n_2 - n_1)$ , или  $V_2 = V_1 - \Phi Y_1$ , где

$\Phi = \frac{n_2 - n_1}{R}$  – оптическая сила преломляющей поверхности. Докажем это

утверждение. По определению, оптическая сила ЦОС  $\Phi = \frac{n_2}{f_2}$ . Главные

плоскости простейшей оптической системы, состоящей из одной сферической преломляющей поверхности, совпадают друг с другом, и единственной главной точкой будет являться точка пересечения поверхности с главной оптической осью. Заднее фокусное расстояние отсчитывается от главной точки до заднего фокуса. Если слева на сферическую поверхность падает луч, параллельный

оптической оси, то для него  $V_1 = n_1\alpha_1 = 0$  и  $V_2 = n_2\alpha_2 = -\frac{Y_1}{R}(n_2 - n_1)$ . При этом угол  $\alpha_2$  определяет наклон луча, идущего после преломления в фокус, и можно

записать  $\alpha_2 = -\frac{Y_1}{f_2}$  (минус появляется с учетом правила знаков, предлагаем

убедиться в этом самостоятельно). Таким образом,  $\frac{n_2 Y_1}{f_2} = \frac{Y_1}{R}(n_2 - n_1)$ , или

$$\Phi = \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Итак, выражение  $V_2 = V_1 - \Phi Y_1$  вместе с  $Y_2 = Y_1$  дает закон преобразования параметров луча при преломлении на сферической поверхности:

$$\begin{matrix} Y_2 = Y_1 \\ V_2 = -\Phi Y_1 + V_1 \end{matrix} \text{ или } \begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Матрица  $P$  преломляющей сферической поверхности имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Плоскую поверхность можно рассматривать как частный случай сферической с  $R \rightarrow \infty$ . Тогда  $\Phi = 0$  и матрица преломления  $P$  (2.6) будет единичной матрицей. Чтобы одни и те же формулы были справедливы для выпуклой и вогнутой поверхностей, значение  $R$  считают положительным, если центр кривизны лежит на оси  $z$  справа от границы (поверхность выпуклая), и отрицательным в противном случае.

**в) Матрица преобразования параметров светового луча для сферической отражающей поверхности.**

Закон отражения, с учетом знаков углов падающего и отраженного лучей, имеет вид  $\theta_1 = -\theta_2$ . Формально закон отражения можно рассматривать как частный случай закона преломления при  $n_2 = -n_1$  и представить отражение луча как преломление в среде с отрицательным показателем преломления. Матрица преобразования параметров луча при отражении от сферической поверхности тогда будет иметь такой же вид, как и матрица преломления, если в выражении для оптической силы  $n_2$  заменить на  $(-n_1)$ :  $\Phi = -\frac{2n_1}{R}$ . Таким образом, фокусное расстояние сферического зеркала, находящегося в среде с любым показателем преломления, равно половине его радиуса. Для выпуклого зеркала  $R > 0$  и оптическая сила отрицательна, для вогнутого – положительна. Формулу (1.4) в случае сферического зеркала можно переписать в виде

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{R}. \quad (2.7)$$

Если после отражения луч движется в направлении отрицательных значений оси  $z$ , то толщина оптического промежутка  $l$  считается отрицательной. Так как для таких лучей и показатель преломления нужно считать отрицательным, то приведенная толщина  $L = \frac{l}{n}$  будет положительной. Поэтому матрица  $T$  для оптического промежутка не зависит от направления луча.



### 3. Матрица линзы

Получим в качестве примера матрицу преобразования параметров луча, прошедшего через толстую линзу. Толстая линза – это оптически однородная среда с показателем преломления  $n$ , ограниченная сферическими поверхностями с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ . Расстояние между поверхностями вдоль оптической оси равно  $l$  (толщина линзы). Считаем, что линза находится в среде с показателем преломления  $n_0$  (для воздуха  $n_0 = 1$ ).

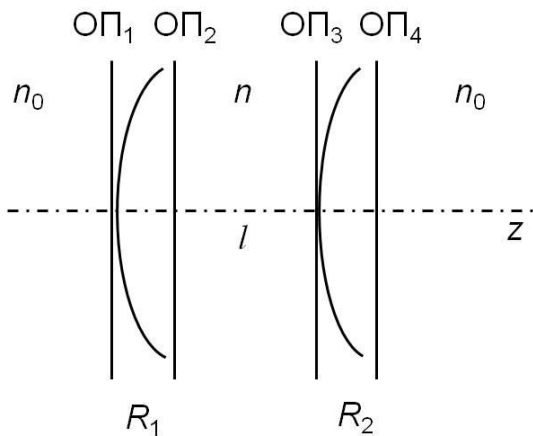


Рис. 9. Толстая линза

Поскольку мы имеем две преломляющие поверхности и оптический промежуток между ними, выбираем опорные плоскости в непосредственной близости от преломляющих поверхностей (рис. 9). Пусть  $P_1$  и  $P_2$  – матрицы преломления для первой и второй поверхности, соответственно, а  $T$  – матрица

оптического промежутка. Обозначим:  $\begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$  – параметры некоторого луча на

ОП<sub>1</sub> (перед входом в линзу),  $\begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$  – параметры луча после преломления на

первой поверхности,  $\begin{pmatrix} Y_3 \\ V_3 \end{pmatrix}$  – после прохождения оптического промежутка с

приведенной толщиной  $L = \frac{l}{n}$ ,  $\begin{pmatrix} Y_4 \\ V_4 \end{pmatrix}$  – параметры на ОП<sub>4</sub> после преломления на

второй поверхности. Очевидно, что  $\begin{pmatrix} Y_4 \\ V_4 \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} Y_3 \\ V_3 \end{pmatrix}$ , но  $\begin{pmatrix} Y_3 \\ V_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$ , т.е.

$$\begin{pmatrix} Y_4 \\ V_4 \end{pmatrix} = P_2 T \begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = P_2 T P_1 \begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}.$$

Мы выразили параметры луча, вышедшего из линзы, через параметры луча, падающего на линзу. Следовательно, матрица преобразования луча в толстой линзе  $M = P_2 T P_1$  равна произведению матриц для ее отдельных элементов, взятых в обратном порядке. Выполняя перемножение, находим:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ -\Phi_2 & 1 - L\Phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 - L\Phi_1 & L \\ -(\Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2) & 1 - L\Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ где } \Phi_1 = \frac{n - n_0}{R_1} \text{ и } \Phi_2 = \frac{n_0 - n}{R_2}. \quad (3.1)$$

Элемент  $C$  полной матрицы преобразования  $M$ , взятый с обратным знаком, дает нам оптическую силу толстой линзы:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2. \quad (3.2)$$

Если толщина оптического промежутка мала по сравнению с радиусами кривизны преломляющих поверхностей, то такая линза называется **тонкой**. Переходя от толстой линзы к тонкой, т.е. устремляя  $L \rightarrow 0$ , получим:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Phi_1 + \Phi_2) & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Получается, что матрица преобразования параметров луча в тонкой линзе имеет такой же вид, как матрица  $P$  преломления на одной сферической поверхности, но с оптической силой  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ . Следовательно, оптическая сила тонкой линзы в воздухе равна:

$$\Phi = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.4)$$

#### 4. Определение кардинальных элементов произвольной ЦОС

Путем последовательного применения преобразований параметров луча отдельными элементами оптической системы можно получить матрицу преобразования для произвольной ЦОС, если известны кривизна и взаимное расположение ее преломляющих и отражающих поверхностей, а также значения показателей преломления.

Предположим, что полная матрица некоторой ЦОС равна  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ .

Зная ее элементы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , можно легко найти кардинальные точки оптической системы: передний и задний фокусы ( $F_1$  и  $F_2$ ) системы, точки пересечения главных плоскостей  $H_1$  и  $H_2$  с главной оптической осью.

Известно, что задний главный фокус ЦОС – это точка, в которой собираются все лучи, падающие на систему слева параллельно главной оптической оси. Поэтому, чтобы найти положение заднего фокуса, рассмотрим луч, входящий в систему параллельно оси  $z$  на некоторой высоте  $Y_1$  (рис. 10).

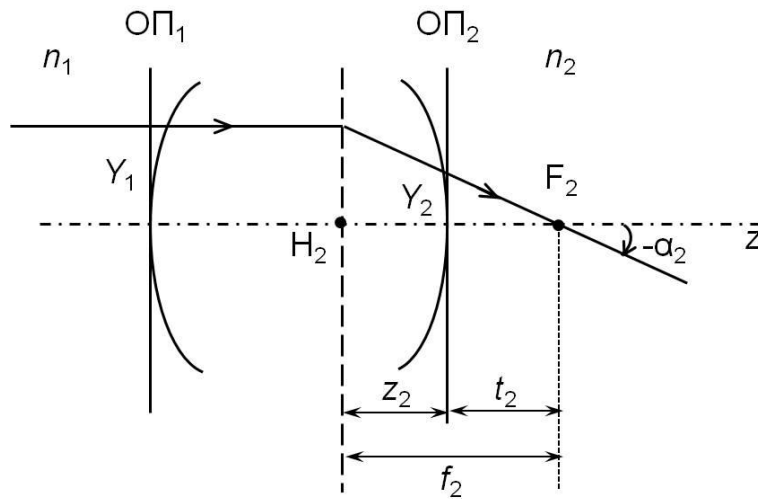


Рис. 10. К определению фокусного расстояния системы

Для такого луча  $\alpha_1 = 0$  и, соответственно,  $V_1 = n_1 \alpha_1 = 0$ . На выходе из системы луч имеет параметры  $Y_2 = AY_1$  и  $V_2 = CY_1$ . С другой стороны,  $V_2 = -n_2 \alpha_2$ . Минус появился вследствие учета правила знаков. Точка пересечения продолжений входящего параллельно оптической оси луча и луча, выходящего из системы, принадлежит второй главной плоскости. По определению, фокусное расстояние  $f_2$  – это расстояние от точки  $H_2$  до заднего фокуса системы  $F_2$ . Оно равно

$$f_2 = \frac{Y_1}{-\alpha_2} = -\frac{n_2 Y_1}{V_2} = -\frac{n_2 Y_1}{CY_1} = -\frac{n_2}{C}. \quad (4.1)$$

Найдем теперь расстояние от задней опорной плоскости ОП<sub>2</sub> до F<sub>2</sub>.

$$t_2 = \frac{Y_2}{-\alpha_2} = -\frac{n_2 Y_2}{V_2} = -\frac{n_2 A Y_1}{C Y_1} = -\frac{n_2 A}{C}. \text{ Зная } f_2 \text{ и } t_2, \text{ можно найти расстояние от ОП}_2$$

до H<sub>2</sub> (расстояние отсчитываем влево, следовательно, появляется знак минус):

$$z_2 = -(f_2 - t_2) = -f_2 + t_2 = \frac{n_2}{C} - \frac{A}{C} n_2 = n_2 \frac{(1-A)}{C} \quad (4.2)$$

Аналогично можно найти положение переднего главного фокуса оптической системы и первой главной плоскости. Для удобства нахождения кардинальных точек центрированной оптической системы по известным элементам матрицы *M* полученные результаты сведены в таблицу.

Фокусное расстояние оптической системы определяется элементом *C* матрицы преобразования. Как и у линзы, этот элемент, взятый с противоположным знаком, является оптической силой системы  $\Phi = -C$ .

*Таблица.*

Расстояния от опорных плоскостей до кардинальных точек ЦОС

$\text{ОП}_1 - F_1 = n_1 \frac{D}{C}$	$\text{ОП}_2 - F_2 = -n_2 \frac{A}{C}$
$H_1 - F_1 = f_1 = \frac{n_1}{C}$	$H_2 - F_2 = f_2 = -\frac{n_2}{C}$
$\text{ОП}_1 - H_1 = n_1 \frac{(D-1)}{C}$	$\text{ОП}_2 - H_2 = n_2 \frac{(1-A)}{C}$

Разберем на примере, как найти кардинальные элементы и оптическую силу ЦОС.

Рассчитать положение главных плоскостей и фокусов толстой выпукло-вогнутой стеклянной линзы в воздухе, если радиус кривизны выпуклой поверхности  $R_1 = 10$  см, вогнутой  $R_2 = 5$  см и толщина линзы  $d = 3$  см (рис. 11).

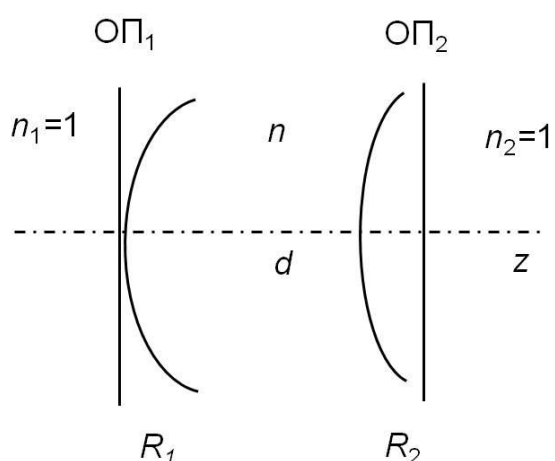


Рис. 11. К расчету параметров толстой линзы

Оптическая сила преломляющих поверхностей:

$$\Phi_1 = \frac{n-1}{R_1} = \frac{0,5}{0,1} = 5 \text{ (дптр)};$$

$$\Phi_2 = \frac{1-n}{R_2} = -\frac{0,5}{0,05} = -10 \text{ (дптр)},$$

приведенная толщина оптического

$$\text{промежутка } L = \frac{d}{n} = \frac{0,03}{1,5} = 0,02 \text{ (м)}.$$

Матрица преобразования параметров луча толстой линзой имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} 1 - L\Phi_1 & L \\ -(\Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2) & 1 - L\Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Зная оптические силы преломляющих поверхностей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , а также приведенную толщину оптического промежутка  $L$ , можно легко найти элементы матрицы  $M$ :

$$A = 1 - L\Phi_1 = 1 - 0,02 \cdot 5 = 0,9; \quad B = L = 0,02 \text{ м};$$

$$C = -(\Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2) = -(5 - 10 + 0,02 \cdot 5 \cdot 10) = 4 \text{ м}^{-1};$$

$$D = 1 - L\Phi_2 = 1 + 0,02 \cdot 10 = 1,2.$$

Теперь, воспользовавшись таблицей, найдем кардинальные точки системы:

$$\text{ОП}_1 - F_1 \quad \frac{D}{C} = 0,3 \text{ м}$$

$$\text{ОП}_1 - H_1 \quad \frac{D-1}{C} = 0,05 \text{ м}$$

$$H_1 - F_1 \quad f_1 = \frac{1}{C} = 0,25 \text{ м}$$

$$\text{ОП}_2 - F_2 \quad -\frac{A}{C} = -\frac{0,9}{4} = -0,225 \text{ м}$$

$$\text{ОП}_2 - H_2 \quad \frac{1-A}{C} = \frac{0,1}{4} = 0,025 \text{ м}$$

$$H_2 - F_2 \qquad f_2 = -\frac{1}{C} = -0,25 \text{ м}$$

Изобразим на рис. 12 положение главных плоскостей и фокусов.

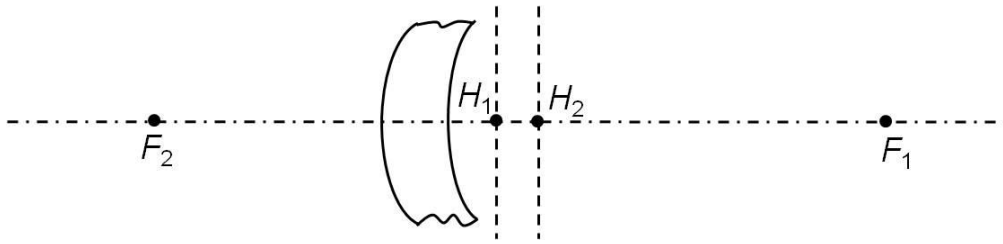


Рис. 12. Положение фокусов и главных плоскостей толстой линзы

## 5. Частные виды матриц преобразования параметров лучей

Пусть матрица некоторой ЦОС имеет вид:  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ . Тогда параметры

произвольного луча связаны соотношениями:

$$\begin{cases} Y_2 = AY_1 + BV_1 \\ V_2 = CY_1 + DV_1 \end{cases}$$

Допустим, что опорные плоскости выбраны так, что элемент  $A = 0$ . Тогда можно записать:  $Y_2 = BV_1$ : все параллельные лучи, пересекающие ОП<sub>1</sub> в любой точке с координатой  $Y_1$ , пересекут опорную плоскость ОП<sub>2</sub> в одной точке. Это означает, что ОП<sub>2</sub> совпадает с фокальной плоскостью.

Допустим теперь, что элемент  $B = 0$ . Тогда  $Y_2 = AY_1$ : все лучи, пересекающие ОП<sub>1</sub> в одной точке, пересекут ОП<sub>2</sub> тоже в одной точке. Значит, эти точки и опорные плоскости являются сопряженными. Отношение

$$\frac{Y_2}{Y_1} = A = \beta \text{ – поперечное увеличение системы.}$$

Если элемент  $C$  матрицы  $M$  оказался равным 0, то  $V_2 = DV_1$ : параллельные лучи, пересекающие ОП<sub>1</sub>, пересекают ОП<sub>2</sub> под одним и тем же углом (остаются параллельными). Такая система называется афокальной или телескопической, поскольку её фокальные точки лежат в бесконечности (см. табл.). Примером может служить зрительная труба, установленная на бесконечность, когда задняя фокальная плоскость объектива совмещена с передней фокальной

плоскостью окуляра. Отношение углов наклона выходящих и входящих лучей  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = D$  характеризует угловое увеличение телескопической системы. Угловое увеличение зрительной трубы, определяемое элементом  $D$  матрицы  $M$ , показывает, во сколько раз угол, под которым виден бесконечно удаленный предмет в зрительную трубу, больше угла, под которым он был бы виден невооруженным глазом.

Допустим, что элемент  $D = 0$ . Тогда  $V_2 = CY_1$ : все лучи, пересекающие ОП<sub>1</sub> в одной точке, пересекут ОП<sub>2</sub> под одним углом (окажутся параллельными). Это означает, что плоскость ОП<sub>1</sub> совпала с передней фокальной плоскостью.

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Перед выпуклой поверхностью стеклянной выпукло-плоской линзы толщины  $d = 9$  см находится предмет. Его изображение образуется на плоской поверхности линзы, которая служит экраном. Определить поперечное увеличение, если радиус кривизны выпуклой поверхности линзы  $R = 2,5$  см.

*Решение.*

*I способ.* Поскольку изображение формируется на плоской поверхности линзы, лучи преломляются только на ее выпуклой сферической поверхности, и можно рассматривать задачу как преломление на сферической поверхности. Предположим, что линейный размер предмета равен  $y_1$  (см. рис. 13). Построим изображение крайней точки предмета, для этого пустим луч из данной точки в точку  $H$  пересечения сферической поверхности с главной оптической осью. В точке падения луча главная оптическая ось является нормалью к границе раздела двух сред – воздуха и стекла. Преломившись, луч пересечет плоскую поверхность линзы в крайней точке изображения на расстоянии  $-y_2$  от главной оптической оси. Искомое поперечное увеличение  $\beta = y_2/y_1$ .

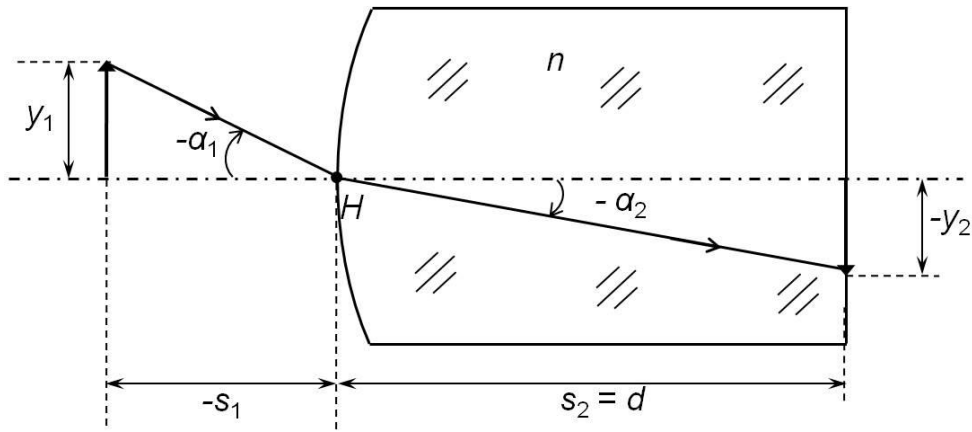


Рис. 13. Ход луча в оптической системе, описанной в задаче 1

Запишем закон преломления света в параксиальном приближении  $-\alpha_1 = -n\alpha_2$  и выразим угол падения и угол преломления через их тангенсы

$-\alpha_1 = \frac{y_1}{-s_1}$ ,  $-\alpha_2 = \frac{-y_2}{d}$ . Разделив одно выражение на другое и проведя

преобразования, получим  $\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\alpha_2 d}{\alpha_1 s_1} = \frac{1}{n} \frac{d}{s_1}$ .

Для определения соотношения между расстояниями  $s_1$  и  $d$  воспользуемся формулой (1.4). В нашем случае  $\frac{n}{d} - \frac{1}{s_1} = \frac{n-1}{R}$ . Для стекла  $n = 1.5$ . Умножим обе

части равенства на  $d/n$ , получим  $1 - \beta = \frac{d(n-1)}{nR}$ , или  $\beta = 1 - \frac{d}{R} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -0,2$ .

*II способ.* Воспользуемся матричным методом. Поперечное увеличение  $\beta$ , даваемое оптической системой, определяется двумя параметрами

( $\beta = \frac{y_2}{y_1} = 1 - \frac{b}{f_2}$  по формуле (1.5)),  $f_2$  – задним фокусным расстоянием и  $b$  –

расстоянием от задней главной плоскости  $H_2$  до плоскости изображения. Плоскостью изображения в данном случае является плоская поверхность линзы. Следовательно, если мы найдем положение задней главной плоскости и заднего фокуса, то задача будет решена.

Воспользуемся матрицей преобразования толстой линзы и найдем ее элементы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  для заданной плоско-выпуклой линзы.



$$M = \begin{pmatrix} 1 - L\Phi_1 & L \\ -(\Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2) & 1 - L\Phi_2 \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{d}{n} = \frac{0,09}{1,5} = 0,06 \text{ м}; \quad \Phi_1 = \frac{n-1}{R_1} = \frac{0,05}{0,025} = 20 \text{ дптр}; \quad \Phi_2 = \frac{1-n}{R_2} = \frac{1-n}{\infty} = 0.$$

$$A = 1 - L\Phi_1 = 1 - 0,06 \cdot 20 = -0,2; \quad B = L = 0,06 \text{ м};$$

$$C = -(\Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2) = -20 \text{ м}^{-1}; \quad D = 1 - L\Phi_2 = 1 - 0 = 1.$$

Проверкой правильности вычисления параметров является равенство 1 детерминанта матрицы  $M$ . Воспользуемся теперь таблицей и определим  $b$  и  $f_2$ :

$$b = H_2 - \text{ОП}_2 = -n_2 \frac{1-A}{C} = \frac{A-1}{C} = 0,06 \text{ м, значит, вторая опорная плоскость}$$

располагается внутри линзы.

$$f_2 = -\frac{n_2}{C} = \frac{1}{C} = 0,05 \text{ м, так как выпукло-плоская линза находится в}$$

воздухе.

$$\beta = \frac{Y_2}{Y_1} = 1 - \frac{b}{f_2} = 1 - \frac{6}{5} = -0,2.$$

Следовательно, изображение, даваемое данной оптической системой, действительное, уменьшенное ( $|\beta| < 1$ ) и перевернутое ( $\beta < 0$ ).

**Задача 2.** Фокусные расстояния тонкой стеклянной двояковыпуклой симметричной линзы в воздухе равны 10 см. Линзу положили на воду таким образом, что с одной стороны линзы остался воздух, а с другой вода. Как изменились фокусные расстояния линзы?

*Решение.* Для определения новых фокусных расстояний линзы нужно рассчитать ее оптическую силу. Тонкая двояковыпуклая линза в воздухе является собирающей, значит, оптическая сила линзы в воздухе  $\Phi_0 = \frac{1}{f_0}$

$$= 10 \text{ дптр. При этом по формуле (3.4) } \Phi_0 = \frac{2(n_c - 1)}{R}, \text{ здесь } n_c \text{ — показатель}$$

преломления стекла. Когда линзу положили на воду, показатель преломления

среды с одной стороны от линзы изменился, а с другой остался таким же, равным 1, то есть  $\Phi' = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{n_c - 1}{R} + \frac{n_e - n_c}{-R}$  (радиус второй сферической

поверхности двояковыпуклой линзы отрицателен, поскольку поверхность вогнутая, если луч падает со стороны воздуха на линзу), здесь  $n_e$  – показатель преломления воды. Итак,  $\Phi' = \frac{2n_c - n_e - 1}{R}$ . Выразим радиус кривизны

сферических поверхностей линзы через  $\Phi_0$ :  $R = \frac{2(n_c - 1)}{\Phi_0}$ , тогда

$\Phi' = \Phi_0 \frac{2n_c - n_e - 1}{2(n_c - 1)}$ . Для определения фокусных расстояний нужно учесть

показатели преломления по обе стороны от линзы. Таким образом,

$$\text{со стороны воздуха } f_1 = -\frac{1}{\Phi'} = -\frac{2(n_c - 1)}{\Phi_0(2n_c - n_e - 1)} = -14,9 \text{ см};$$

$$\text{со стороны воды } f_2 = \frac{n_e}{\Phi'} = \frac{2n_e(n_c - 1)}{\Phi_0(2n_c - n_e - 1)} = 19,8 \text{ см}.$$

Обратите внимание на то, что фокусные расстояния изменились с обеих сторон от линзы, в том числе и со стороны воздуха. Это прямое следствие того, что при изменении показателя преломления среды даже с одной стороны от оптической системы ее оптическая сила изменяется.

**Задача 3.** Имеются две тонкие симметричные линзы: одна собирающая с показателем преломления  $n_1 = 1,70$ , другая рассеивающая с  $n_2 = 1,51$ . Обе линзы имеют одинаковый радиус кривизны поверхностей  $R = 10$  см. Линзы сложили вплотную и погрузили в воду. Каково фокусное расстояние этой системы в воде? (Показатель преломления воды  $n_0$ ).

*Решение.* Оптическая система имеет три преломляющие поверхности, разделенные двумя оптически однородными промежутками, первый – толщины  $l_1$  с показателем преломления  $n_1$ , второй – толщины  $l_2$ ,  $n_2$  (см. рис. 14а). Поэтому результирующая матрица преобразования параметров луча данной системой

имеет вид:  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  – оптические силы первой, второй и третьей преломляющих поверхностей, соответственно. Но поскольку линзы тонкие,  $L_1 = \frac{l_1}{n_1}$  и  $L_2 = \frac{l_2}{n_2}$  можно считать пренебрежимо малыми, и, следовательно, матрицы оптических промежутков превращаются в единичные матрицы. Тогда  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) & 1 \end{pmatrix}$ .

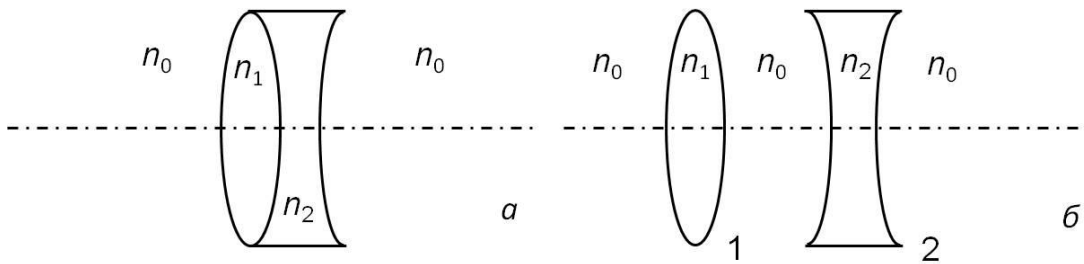


Рис. 14. Оптическая система, описанная в задаче 3

Найдем оптическую силу преломляющих поверхностей:  $\Phi_1 = \frac{n_1 - n_0}{R}$ ,

$\Phi_2 = \frac{n_2 - n_1}{-R} = \frac{n_1 - n_2}{R}$ ,  $\Phi_3 = \frac{n_0 - n_2}{R}$ . Оптическая сила системы  $\Phi$  равна

$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{n_1 - n_0}{R} + \frac{n_1 - n_2}{R} + \frac{n_0 - n_2}{R} = \frac{2(n_1 - n_2)}{R} > 0$ , т.е. система

собирающая. Элемент  $C = -\frac{2(n_1 - n_2)}{R}$ . Тогда задний главный фокус

$f_2 = -\frac{n_0}{C} = \frac{n_0 R}{2(n_1 - n_2)} = 35$  см, а передний  $f_1 = \frac{n_0}{C} = -\frac{n_0 R}{2(n_1 - n_2)} = -35$  см.

Решить эту задачу можно иначе. Система, состоящая из двух тонких линз, погруженных в воду, преобразует параметры луча следующим образом:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi'' & 1 \end{pmatrix}$ . Здесь первая матрица – матрица

преобразования двояковогнутой линзой,  $\Phi'$  – оптическая сила этой же линзы; вторая – матрица оптического промежутка между линзами, а  $L$  – его

приведенная длина; третья матрица – матрица преобразования двояковыпуклой линзой,  $\Phi''$  – ее оптическая сила (см. рис. 14б).

$$\Phi'' = \frac{n_1 - n_0}{R} + \frac{n_0 - n_1}{-R} = \frac{2(n_1 - n_0)}{R}, \quad \Phi' = \frac{n_2 - n_0}{R} + \frac{n_0 - n_2}{R} = \frac{2(n_0 - n_2)}{R}.$$

Сближая линзы согласно условию задачи, т.е.  $L \rightarrow 0$ , получаем:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi'' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Phi' + \Phi'') & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi' + \Phi'' = \frac{2(n_1 - n_2)}{R},$$

т.е. пришли к тому же результату.

Таким образом, если известны матрицы преобразования отдельных элементов сложной оптической системы (толстые, тонкие линзы), то матрицу  $M$  всей системы можно получить путем последовательного перемножения этих матриц в обратном порядке с учетом матриц оптических промежутков.

**Задача 4.** У двояковыпуклой тонкой линзы серебрится одна из поверхностей. Найти фокусное расстояние  $f$  полученного таким образом зеркала. Радиус кривизны чистой поверхности  $R_1$ , радиус кривизны посеребренной поверхности  $R_2$ . Показатель преломления материала линзы  $n$ . Линза находится в воздухе.

*Решение.* Матрица преобразования параметров луча, прошедшего такую оптическую систему,  $M = P_3 T_2 P_2 T_1 P_1$ , здесь  $P_1$  и  $P_3$  – матрицы преломления на прозрачной поверхности при входе и выходе луча из линзы, соответственно;  $P_2$  – матрица преобразования параметров луча при отражении от посеребренной поверхности;  $T_1, T_2$  – матрицы оптического промежутка линзы при прямом и обратном ходе луча. Найдем эти матрицы:  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $\Phi_1 = \frac{n-1}{R_1}$  –

оптическая сила поверхности радиуса  $R_1$ ;  $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  – единичная матрица, т.к. линза тонкая и  $L = 0$ ;  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix}$ . Поскольку вторая поверхность отражающая, луч теперь направлен в сторону отрицательных

значений  $z$ , поэтому длины и показатели преломления берутся с отрицательным знаком. Следовательно,  $\Phi_2 = \frac{-n-n}{-R_2} = \frac{2n}{R_2}$ .  $R_2$  также отрицателен согласно правилу знаков.

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-l}{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ так как } L \rightarrow 0. \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\Phi_3 = \frac{-1-(-n)}{-(-R_1)} = \frac{n-1}{R_1}, \text{ показатели преломления и } R_1 \text{ берутся со знаком минус,}$$

так как луч по-прежнему движется в сторону отрицательных значений  $z$ , дополнительный минус перед  $R_1$  появляется вследствие того, что поверхность линзы вогнутая для падающего на нее отраженного луча.

Тогда:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Элемент } C &= -(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) = -\left(\frac{n-1}{R_1} + \frac{n-1}{R_1} + \frac{2n}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{R_1} + \frac{2n}{R_2} = \\ &= -\frac{2(n-1)R_2 + 2nR_1}{R_1 \cdot R_2}. \text{ Фокусное расстояние } f = -\frac{1}{C} = \frac{R_1 \cdot R_2}{2(n-1)R_2 + 2nR_1}. \end{aligned}$$

Рекомендуемая литература:

1. Ландсберг Г.С. Оптика, Изд.6, М., Физматлит, 2006. §§75-79.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т.4. Оптика. Изд.3. М., Физматлит, 2005. §2, 9-11.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Изд.10, М., Физматлит, 2008. §115-117.
4. Бутиков Е.И. Оптика. Изд.2, С-Пб., Невский диалект, 2003. §7,1, §7.2.
5. Матвеев А.Н. Оптика. Высшая школа. 1985. §§21-23.

*Учебное издание*

**Грачева Ирина Николаевна, Филиппова Елена Алексеевна,  
Фишман Александр Израилович**

**ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА. ЦЕНТРИРОВАННЫЕ  
ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

Дизайн обложки

Подписано в печать хх.хх.2017.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. .

Тираж экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37  
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28