# 1. Неколичественные модели

Часто гуманитарии не хотят изучать математику, так как считают, что в их деятельности она не пригодится. Основной аргумент: математика изучает численные, количественные задачи, а гуманитарные науки – качественные, часто неформализуемые. Этот взгляд, как мне кажется – наследие школьной программы по математике, которая основана на теориях вековой давности. В прошлом веке, действительно, математика была ориентирована в основном на потребности физики и техники, бытовых и расчетных задач.

Но в XX веке математика сделала качественный скачок. С началом развития кибернетики изменился сам объект исследования. Современная математика все больше интересуется задачами управления и регулирования, а также проблемами, связанными со сложными системами. То есть теми вопросами, которые до этого считались прерогативой гуманитарных наук.

В данном курсе даются некоторые основные понятия, связанные с обработкой неколичественных и неформализуемых данных. Основополагающим при этом является понятие отношения, которое моделирует многие типы взаимосвязей объектов. Среди них выделяются такие типы, как эквивалентность, толерантность и различные отношения порядка.

В гуманитарных исследованиях в большинстве случаев невозможно использовать методы измерения, которые являются основным средством изучения в естественных науках. Дело в том, что параметры объекта чаще всего не являются количественными (см. ссылка?). Кроме того, большинство понятий, связанных со сложными системами являются нечеткими, расплывчатыми, так что их трудно описать с помощью четких, логичных простых схем.

Поэтому, одним из основных “измерительных приборов” гуманитарного исследования является человек. Именно он умеет сравнивать несравнимое, проводить разграничения, выбирать и вообще действовать неформально. Называть такого человека могут по–разному: эксперт, испытуемый, респондент, информант и т.д. но суть во всех случаях одна – он дает свой собственный, субъективный ответ на вопросы, на которые объективного ответа нет.

Однако “одна голова хорошо, а две лучше”. Чтобы повысить объективность результата, обычно опрашивают не одного человека, а многих. Ответы при этом, скорее всего, будут различными. Как из множества результатов построить один, отражающий по–возможности общее мнение? Оказывается, математика может дать здесь свои советы и предостеречь от ловушек.

Подобные методы можно было бы назвать “теорией компромисса”. Однако, как известно, не всякий конфликт приходит к компромиссу. Наиболее общие закономерности конфликтов изучает математическая теория игр, элементы которой также разобраны в пособии.

# 2. Отношения и их типы

## Способы описания отношений

Понятие отношения уже упоминалось в первой части пособия. Разберем его теперь подробнее. Вспомним определение.

> Определение 1. Говорят, что между элементами множеств $A$ и $B$ задано соотношение, если для каждой пары элементов $(a, b)$, где $a \in A$, $b \in B$, можно сказать, выполняется это соотношение или нет. Соотношение между элементами о д н о г о и т о г о же множества $A$ называют отношением. Множество $A$ будем называть носителем отношения.

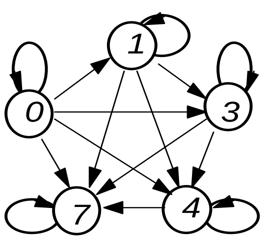
Соотношение можно описать как некоторое множество пар элементов. Те пары, для которых оно выполняется, входят в соотношение, а остальные – нет. Примерами соотношений являются равенство чисел, отношение родства, отношение ученик – учитель, соотношение стимул – реакция и т. д. Обозначается соотношение либо специальным символом, например, $< \ \leq \ = \ > \ \geq \ \neq \ \sim \ \Leftrightarrow \ \in \ \notin \ \subset \ \not\subset \ \|$ и т. п., либо описывается словами. Примеры: $a = b$, $1 < 2$, Сидоров ученик Петрова и т. п. Можно обозначить его и какой-нибудь буквой, например, ρ, или символом, например, ✧. Тогда фраза «$a$ находится с $b$ в соотношении ρ» (или ✧) будет кратко записываться как $a \rho b$ (или $a$✧$b$).

Определение не требует, чтобы отношение было “осмысленно”: любой набор пар $(a, b)$ является соотношением. Если множества $A$ и $B$ конечны, его можно задать с помощью таблицы. Например, так:

| Элементы множества $A$ | Элементы множества $B$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $a$ | | ✓ | | ✓ |
| $b$ | ✓ | ✓ | | ✓ |
| $c$ | ✓ | | | ✓ |

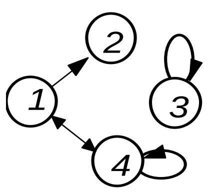
В этом примере в соотношение входят (находятся в данном соотношении) пары $(a, 2)$, $(a, 4)$, $(b, 1)$, $(b, 2)$, $(b, 4)$, $(c, 1)$, $(c, 4)$. Если обозначить это соотношение через σ, можно записать, что $a \sigma 4$, но $b \not\sigma 3$.

Для отношений применяется также другой наглядный способ описания: с использованием так называемых графов (от латинского *grapheo* – пишу). Он также обычно применяется к конечным множествам. При этом элементы множества изображаются в виде точек плоскости (вершин графа). Те пары, которые находятся в данном отношении, связывают направленным отрезком (дугой графа). Он не обязательно должен быть прямолинейным. Например, отношение “≤” для чисел 0, 1, 3, 4, 7 можно представить та-



ким графом:

| Элементы $A$ | Элементы $B$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | | ✓ | | ✓ |
| 2 | | | | |
| 3 | | | ✓ | |
| 4 | ✓ | | | ✓ |

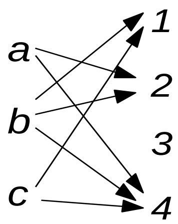



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На этом рисунке вы видите петли: так обозначаются дуги, у которых начало совпадает с концом. В общем случае может оказаться, что некоторые вершины не связаны ни одной дугой, а другие – одной или даже двумя (направленными в разные стороны).

Таблица и граф справа описывают одно и то же отношение. Для краткости таблицу можно заменить квадратной матрицей, в которой отмеченным парам соответствует 1, а неотмеченным – 0. Эта матрица называется матрицей смежности графа. Она также приведена на рисунке.

С помощью графа можно изобразить и с о о т н о ш е н и е между двумя р а з л и ч н ы м и множествами. Такой граф называют двудольным, так как все его вершины разбиваются на две группы: слева – вершины, соответствующие элементам множества $A$, а справа – элементам $B$. Стрелки в этом случае идут только слева направо. Например, соотношение, заданное таблицей на стр. 2, имеет графическое изображение как на рисунке слева. ☺




Отношение между элементами некоторого множества можно само рассматривать как множество, например, множество отмеченных пар или множество дуг на графе. А значит, к отношениям, заданным на одном и том же носителе $A$ можно применять обычные операции объединения, пересечения и дополнения, а также проверять, входит ли одно отношение в другое.

## Свойства отношений

Общее понятие отношения весьма широко, так что желательно выделить из него наиболее часто используемые частные случаи. Это можно сделать, наложив на отношение какие–нибудь естественные ограничения. Прежде чем сформулировать их, присмотримся к примерам наиболее часто встречающихся отношений.

Самое простое отношение, присущее каждому множеству – это отношение равенства. Его граф состоит из одних петель, а матрица является диагональной (т.е. на диагонали стоят единицы, а по сторонам от нее – нули).

| = | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 |

;

| < | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 |

;

| ≤ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 |

Другое отношение, носителем которого является множество чисел, – отношение “меньше”. Его матрица является треугольной, так как единицы стоят только выше диагонали, а на ней и ниже – нули. Матрица отношения “≤” объединяет две предыдущие: у нее единицы стоят и на диагонали и выше нее.

У первой и третьей таблиц есть общее свойство: все диагональные элементы равны 1, т.е. каждый элемент находится в отношении к самому себе. С другой стороны, первая таблица в отличие от второй и третьей симметрична: выше диагонали и ниже ее структура отношения одинакова. Эти простые свойства имеют свои названия:

Определение 2. Отношение $\diamond$, заданное на множестве $A$ называется
а) рефлексивным, если $a\diamond a$ для любого $a\in A$;
б) симметричным, если из $a\diamond b$ следует, что $b\diamond a$;
в) транзитивным, если из $a\diamond b$ и $b\diamond c$ следует $a\diamond c$.

Последнее определение не является настолько наглядным, чтобы его можно было заметить на таблице, однако, оно выполняется для всех трех разобранных отношений. Действительно, если $a<b$ и $b<c$, то выполняется и $a<c$. То же верно для отношений “не больше” и “равно”.

К каждому из этих свойств можно построить в некотором смысле противоположное, с приставкой “а–” или “анти–”.

Определение 3. Отношение $\diamond$, заданное на множестве $A$, называется
а) арефлексивным, если $a\diamond a$ не выполняется ни для какого $a\in A$;
б) асимметричным, если из $a\diamond b$ следует, что неверно $b\diamond a$;
в) антисимметричным, если из $a\diamond b$ и $b\diamond a$ следует $a=b$.

Например, арефлексивным будет то отношение, для которого ни один элемент не находится в этом отношении с самим собой. На диагонали матрицы такого соотношения будут одни нули. Пример такого отношения – “<“ или “>“. Эти отношения также асимметричны, так как не может быть одновременно $x<y$ и $y<x$. Любое асимметричное отношение арефлексивно. Действительно, если выполняется $a\diamond a$, то по определению не должно выполняться $a\diamond a$, так что наше предположение неверно.

Антисимметрия похожа на асимметрию, только это требование не распространяется на равные элементы. Можно сказать, что антисимметричное отношение – это асимметричное, к которому добавлены диагональные единицы. Типичным примером антисимметричного отношения будет “≤”, так как оно состоит из строгого неравенства “<“ и равенства.

Не следует путать приставки “а–” и “не–”. Приставка “не–” означает, что некоторое свойство выполняется не во всех случаях, в то время как “а–” – означает “не выполняется никогда”.

Заметим, что в определении отношения не требуется, чтобы для каждой пары $(a, b)$ выполнялось хотя бы одно из соотношений $a\diamond b$ или $b\diamond a$. Вполне может оказаться, что некоторые элементы не находятся в данном отношении ни в каком порядке.

Определение 4. Элементы $(a, b)$, для которых не выполняется ни $a\diamond b$, ни $b\diamond a$ называют несравнимыми (в смысле отношения $\diamond$). Отношение, для которого все элементы попарно сравнимы, называется полным.

Примером неполного отношения является отношение “быть подмножеством”, $\subset$ . Действительно, в большинстве случаев из двух множеств ни одно не является подмножеством другого. То же верно для отношения “делиться нацело”, применимого к целым числам. Например, 2 не делится на 3 и 3 не делится на 2, так что эти элементы несравнимы в смысле делимости. Неполным является отношение "быть сыном" на множестве мужчин (так как два человека не обязательно являются отцом и сыном). То же верно для отношения "учитель–ученик".

Перечисленные определения позволяют выделить различные типы отношений в зависимости от того, какие из свойств выполняются.

## Отношение эквивалентности

Отношение, в котором основные свойства выполняются без приставок “а–”, “анти–” называется эквивалентностью.

Определение 5. Любое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется эквивалентностью. Обычно отношение эквивалентности обозначается знаком ~ или ε.

Следует заметить, что термин “эквивалентно” используется в отдельных областях знания в некотором конкретном значении, для описания “одинаковых”, “неразличимых”, “взаимозаменяемых” элементов. Здесь же мы отвлекаемся от конкретного наполнения смыслом этого слова. Для нас эквивалентность – это любое отношение, удовлетворяющее трем свойствам.

Примеры.

*1.* Самым простым примером эквивалентности является, конечно, равенство. В этом случае $a \sim b$ выполняется только в форме $a = a$, так что симметрия и транзитивность становятся тривиальными требованиями, а рефлексивность для равенства выполняется.

*2.* Из геометрических отношений эквивалентностью можно считать параллельность, так как две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой (а это и есть транзитивность). Правда, в школьном определении прямая не параллельна самой себе, так что рефлексивность не выполняется. Однако, если считать, что совпадение прямых – частный случай параллельности, то это отношение станет эквивалентностью.

*3.* Отношение “перпендикулярность”, наоборот, не является эквивалентностью, так как оно не транзитивно (две прямые, перпендикулярные третьей, не перпендикулярны между собой).

*4.* Отношение “быть братом” является эквивалентностью на множестве мужчин, если его дополнить по рефлексивности, т.е. считать каждого человека братом самому себе. Такое модифицированное отношение можно назвать ”иметь общих родителей”.

*5.* Для более дальних степеней родства это уже не верно: даже если считать человека родственником самому себе, не будет выполняться транзитивность. Действительно, два моих двоюродных брата (один по отцу, другой по матери), вообще говоря, не родственники между собой. Таким образом, отношение родства – не эквивалентность. ☺

Основное свойство любой эквивалентности – то, что она порождает разбиение всего множества на классы. Действительно, рассмотрим для каждого элемента $a$ все элементы $b$, эквивалентные ему. Обозначим множество (класс) таких элементов через $K_a$. В силу рефлексивности $a \in K_a$, так что каждое такое множество не пусто. Могут ли два класса пересекаться? Если элемент $c$ принадлежит и $K_a$ и $K_b$, это значит, что $c \sim a$ и $c \sim b$, откуда в силу симметрии следует, что $a \sim c$, а в силу транзитивности – что $a \sim b$. Тогда, как легко показать, все элементы, эквивалентные $a$, эквивалентны и $b$, и наоборот. Следовательно, классы $K_a$ либо не пересекаются, либо совпадают. Можно показать и обратное: каждое разбиение на классы порождает эквивалентность, которую можно назвать “принадлежность одному классу”.

Для классификации (в математическом смысле), как и для эквивалентности, можно сформулировать три обязательных свойства:

*1.* Про каждый объект точно известно, входит он в конкретный класс или нет.

*2.* Каждый объект входит не более чем в один класс (т.е. классы не пересекаются).

*3.* Каждый объект входит хотя бы в один из классов (объединение классов дает все классифицируемое множество). ☺

Связь между эквивалентностью и классификацией можно увидеть на графе или матрице. Граф отношения эквивалентности состоит из нескольких частей, не связанных между собой, внутри каждой из которых проведены в с е   в о з м о ж н ы е дуги (в том числе петли).

Матрицу эквивалентности можно сделать более наглядной, если перенумеровать элементы “по классам”, т.е. сначала выписать элементы одного класса, потом – второго и т.д., не перемешивая их. В этом случае матрица отношения будет иметь блочную структуру:

| ~ | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 1 | | | 1 | 1 | |
| *b* | | 1 | | | | |
| *c* | | | 1 | | | 1 |
| *d* | 1 | | | 1 | 1 | |
| *e* | 1 | | | 1 | 1 | |
| *f* | | | 1 | | | 1 |

$\Rightarrow$

| ~ | *a* | *d* | *e* | *b* | *c* | *f* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 1 | 1 | 1 | | | |
| *d* | 1 | 1 | 1 | | | |
| *e* | 1 | 1 | 1 | | | |
| *b* | | | | 1 | | |
| *c* | | | | | 1 | 1 |
| *f* | | | | | 1 | 1 |

☺

Вопрос о том, что первично – эквивалентность или разбиение на классы – сродни вопросу о курице и яйце. Иногда человек сначала замечает общие свойства, похожесть объектов, а потом формально классифицирует их, объединяя похожие в один класс, а непохожие относя в разные. Так, в частности, возникают абстрактные понятия.

Например, что означает слово "цвет"? Если не вдаваться в научные объяснения (которые возникли, конечно, гораздо позже самого понятия), то цвет – это понятие, объединяющее в себе отдельные цвета (красный, желтый, черный и т.д.). В свою очередь, красный – это то общее, что есть у предметов одного цвета. Здесь сначала человек заметил некоторые общие свойства, затем возникла классификация объектов по этим свойствам, а потом эти свойства получили названия: сначала – конкретные цвета (названия классов), а потом и сам принцип классификации (слово ц в е т – это и есть название принципа классификации).

С другой стороны, когда первоклашек при поступлении в школу разбивают на классы, это происходит во многом случайно, но после этого между ними возникает отношение “быть одноклассниками”, которое может сказаться на всей их последующей жизни.

## Отношение толерантности

– Говорят, вы с братом близнецы?
– Да. Но он похож на меня больше, чем я на него.

Отношение эквивалентности, разобранное в предыдущем разделе, моделирует понятие “одинаковые”, “неразличимые”. Можно сказать, что эквивалентными являются объекты, совпадающие по каким–то с у щ е с т в е н н ы м качествам. Но на практике часто бывает, что у двух объектов часть свойств совпадает, а часть нет. В этом случае мы можем сказать, что объекты п о х о ж и между собой. Будет ли отношение “похожести” эквивалентностью? Проверим все три свойства. “Похожесть” рефлексивна: каждый элемент похож сам на себя. Симметрична: если $a$ похож на $b$, то и $b$ похож на $a$. Но будет ли это отношение транзитивно? Если Анна похожа на Беллу цветом волос, а на Варю – цветом глаз, отсюда не следует, что Белла и Варя похожи между собой по этим признакам. Так что отношение “похожести” не транзитивно.

Определение 6. Рефлексивное и симметричное отношение называется толерантностью. Отношение толерантности будем обозначать $\tau$.

Для изображения симметричных отношений, таких, как эквивалентность и толерантность, можно использовать так называемый неориентированный граф. Вместо двух противонаправленных стрелок (дуг) смежные вершины соединяют одним отрезком, называемым ребром графа. Это делает рисунок более компактным и наглядным.

В таких обозначениях графы для эквивалентности и толерантности выглядят примерно так:

а) эквивалентность б) толерантность

Здесь для простоты опущены все петли, которые по идее должны исходить из каждой вершины в силу рефлексивности обоих отношений.

На левом рисунке ясно видна связь эквивалентности и классификации, так как вершины разбились на группы, не связанные между собой. Внутри же каждой группы все элементы связаны попарно. Толерантность не обладает таким свойством, но тем не менее на правом рисунке также выделяются множества тесно связанных между собой элементов (правда, пересекающиеся между собой). Это, например, $\{a, b, c, d\}$ или $\{a, 2, 3\}$. Такие множества важны для описания толерантности, так что им даже дали специальное название.

<u>Определение 7</u>. Пусть на носителе $A$ задано отношение $\rho$. Множество элементов $B \subset A$ называется ядром отношения, если любая пара элементов из $B$ находится в отношении $\rho$. Если никакое множество, включающее в себя $B$, не обладает этим свойством, то ядро называется максимальным.

Ядра можно искать для произвольных отношений, но особенно естественно – для отношения толерантности, так как оно рефлексивно и симметрично. В данном примере ядрами толерантности будут, например, подмножества $\{a, b, c, d\}$ и $\{2, 3\}$. Первое – максимальное, а второе – нет, так как его можно дополнить элементом $a$, толерантным как 2, так и 3. Множество же $\{1, 2, 3\}$ не будет ядром, потому что 1 не толерантно 2.

Ясно, что ядро можно построить, начиная с любого элемента. Поэтому множество всех ядер в совокупности покроет носитель отношения. Такой набор подмножеств называют обычно покрытием множества. Таким образом, толерантность порождает некоторое покрытие множества–носителя. Если это носитель конечен, то любое ядро входит в какое–нибудь максимальное, поэтому можно включать в покрытие только максимальные ядра.

С другой стороны, можно начинать построение ядра и с любого ребра, поэтому любая пара толерантных элементов входит совместно в некоторое ядро. Последнее рассуждение показывает, что покрытие, в свою очередь, порождает некоторую толерантность. А именно, два элемента будем считать толерантными, если они входят совместно хотя бы в одно из подмножеств покрытия.

Например, рассмотрим в качестве множества–объекта студенческую группу. В ней можно выделить подгруппы людей, дружных между собой. При этом один и тот же человек может, вообще говоря, входить в разные компании друзей. Поэтому отношение “дружбы” является толерантностью, хотя его вряд ли можно назвать “сходством”. Точно так же вместо дружеских можно рассматривать и любые другие группы людей – профессиональные, социальные, служебные и т.п. Это показывает, что смысл толерантности более широкий, чем просто отношение сходства. ☺

Пример. Проиллюстрируем на конкретных данных оба процесса: построение толерантности исходя из покрытия и наоборот, покрытия по толерантности. Несколько студентов посещают спецкурсы по выбору: А, Б, В, и Г ходят на курс "Математическая астрология", В, Д и Е – курс "Английский сленг", и, наконец, Г, Д и Е – курс "Фольклор в науке".

Эти три множества образуют покрытие множества {А, Б, В, Г, Д, Е}, так как каждый студент посещает хотя бы один курс (рис. а)). Поэтому они порождают некоторую толерантность $\tau$: два студента находятся в отношении $\tau$, если они встречаются на каком–нибудь спецкурсе (рис б)). Внутри каждого овала проведены все ребра.

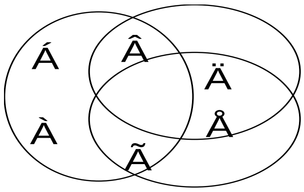



рис а)

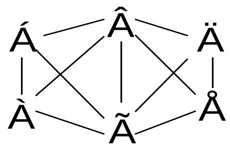



рис б)

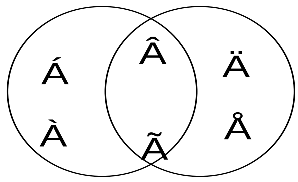


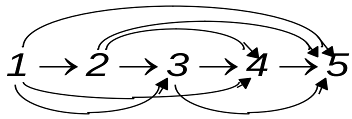

рис в)

Построим теперь ядра полученной толерантности τ. Начиная с элемента А и пристраивая к нему связанные с ним элементы, получим подмножество {А, Б, В, Г}. Больше никаких элементов добавить нельзя, так что это ядро максимальное. То же ядро порождается элементом Б. Аналогично Д и Е порождают максимальное ядро {В, Г, Д, Е}. Элементы В и Г каждый входят в оба эти ядра и других максимальных ядер не порождают. Итак, данную толерантность можно описать с помощью покрытия, состоящего только из двух множеств, т.е. отличного от исходного. Все студенты группы {В, Г, Д, Е}, действительно, встречаются попарно на спецкурсах, хотя и на разных. В этом отличие толерантности от эквивалентности: если по классификации построить эквивалентность, а по ней классификацию, то она будет обязательно совпадать с исходной.

## Отношения порядка

> – Кто из двух конкурсантов лучше играет на фортепьяно?
> – Не знаю. Вот если бы Вы спросили, кто хуже, я сказал бы не задумываясь.

Если эквивалентность и толерантность моделируют такие симметричные отношения, как “одинаковость” и “похожесть”, то отношение порядка соответствует несимметричным отношениям типа предпочтения, иерархии и т.п. Подобные отношения бывают весьма разнообразными, так что определение порядка можно ввести многими способами. Общим во всех этих определениях будет транзитивность. Поэтому, прежде чем переходить к определениям подумаем, как можно изобразить наглядно транзитивное отношение.




Конечно, как и любое другое отношение, его можно записать с помощью графа. Однако граф может оказаться громоздким и “нечитаемым”. Например, отношение “<“ для чисел 1, 2, …, 5 будет выглядеть как на рисунке справа, хотя структура этого порядка вполне определяется маленькими стрелками 1→2; 2→3 и т.д. И даже просто расположением в линию слева направо. Причина здесь в том, что другие стрелки можно достроить “по транзитивности”: стрелка 1→3 соответствует пути из 1 в 3 по стрелкам 1→2 и 2→3.

Определение 8. Ориентированный граф называется диаграммой Хассе некоторого транзитивного отношения, если для любых элементов *a, b* находящихся в данном отношении, на графе существует путь из *a* в *b* вдоль дуг графа, и наоборот, любые точки, связанные таким путем, находятся в данном отношении.

Иногда на такой диаграмме даже не ставят стрелок, а взаимное расположение обозначают положением на плоскости: менее предпочтительные элементы помещают левее, а более предпочтительные – правее. Для отношений иерархии в том же смысле используют верх и низ.

✍ Замечание. Не следует путать диаграмму Хассе с неориентированным графом, используемым для изображения симметричных отношений (см. стр. 7). Каждый раз, используя подобную картинку, надо оговаривать, что она значит (граф или диаграмма). ☺

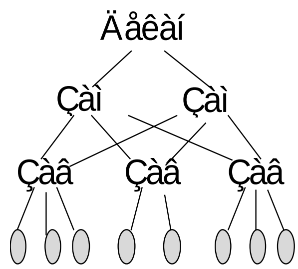
Диаграммой Хассе для отношения “<“, изображенного выше, будет
$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$ или 1—2—3—4—5.

Определение 9. Транзитивное асимметричное отношение называют отношением строгого порядка. Антисимметричное транзитивное отношение называют отношением нестрогого порядка. Отношение порядка мы будем обозначать знаком вида $\lhd$, а если надо подчеркнуть его нестрогость – знаком $\lhd$.

В силу асимметрии левый и правый элементы сравнения отличаются между собой. Если не оговорено противное, будем называть в соотношении $a \lhd b$ элемент $a$ менее предпочтительным, а элемент $b$ – более предпочтительным.

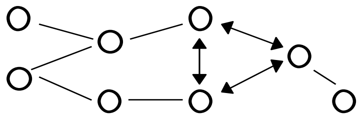
Типичными отношениями строгого и нестрогого порядка являются “<” и ”≤”, но эти примеры не являются наиболее общими. Дело в том, что в определении ничего не говорится о полноте отношений. Это значит, что и при строгом, и при нестрогом порядке могут существовать элементы несравнимые между собой. В этом случае порядок называют частичным.

В качестве примера разберем отношение иерархии среди сотрудников одного факультета. Во главе его стоит декан, имеющий в подчинении нескольких заместителей, им подчиняются зав. кафедрами, а тем, в свою очередь, рядовые преподаватели. В такой структуре заместители декана равноправны между собой: ни один из них не находится в подчинении у другого. То же можно сказать и о заведующих кафедрами. Однако можно заметить, что “равноправие” это с точки зрения отношения подчинения разное: замы имеют одних и тех же подчиненных, поэтому их можно считать “одинаковыми”, эквивалентными в данной структуре, заведующие же кафедрами имеют разных подчиненных, так что они несравнимы между собой. Если соединить на диаграмме дугой двух замов, в остальном порядок подчинения не изменится. Если же мы подчиним одного зав. кафедрой другому, то в силу транзитивности и все преподаватели этой кафедры станут подчиненными “чужого” зава.

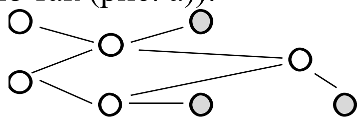



На этом примере показаны две основные причины несравнимости: равноправие элементов и собственно несравнимость. То же можно проиллюстрировать на отношении предпочтения. Если вам предложат сравнить разные формы проведения досуга, некоторые вы посчитаете равноправными (взаимозаменяемыми), например, телевизор и книгу, а другие несравнимыми, например, послеобеденный сон и коллекционирование марок. Хотя бы потому, что они относятся к разным масштабам времени: собирание марок не мешает вам иногда и прикорнуть после обеда.

В связи с различием двух видов несравнимости, иногда понятие порядка расширяют, снимая с него требование асимметрии, а оставляя только транзитивность. Для общего транзитивного отношения возможны 4 случая взаимоотношения элементов: $a \lhd b$; $b \lhd a$; $a \sim b$ (когда выполняются оба соотношения $a \lhd b$ и $b \lhd a$) и $a$ несравнимо с $b$ (не выполняется ни одно из этих соотношений). Диаграмма Хассе в общем случае выглядит примерно так (рис. а)):



а) транзитивное отношение



б) отношение порядка

На этой схеме три элемента, соединенные стрелками, эквивалентны между собой. Если же рассматривать отношение, являющееся порядком в точном смысле слова (т.е. антисимметричное отношение), подобных циклов на диаграмме быть не может (см. рис. б)).

Если порядок полный, т.е. все неравные элементы можно сравнивать между собой, то он очень похож на обычное сравнение чисел. Диаграмма Хассе такого порядка вытягивается в линию. Поэтому полный порядок называют еще линейным.

## Максимальные и наибольшие элементы

С понятием неравенства (числового) тесно связано понятие максимального (наибольшего) элемента. Можно ли его перенести на общее отношение порядка? Максимальное (наибольшее) число можно определить как такое, которое больше всех остальных, или такое, что больше него чисел нет. Оказывается, для частичного порядка эти два свойства не совпадают.

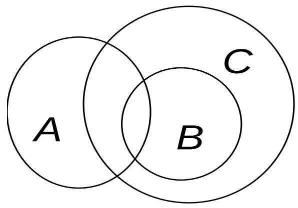
> Определение 10. Пусть в множестве $A$ задано отношение порядка (строгого или нестрогого). Элемент $a$ будем называть максимальным относительно этого порядка, если *не существует* элемента, более предпочтительного, чем он. Наибольшим же назовем элемент, который более предпочтителен, чем *все остальные* элементы множества.

Для пояснения рассмотрим кандидатов в депутаты Думы по всем округам. По результатам голосования между ними возникает отношение предпочтения со стороны избирателей. Ясно, что сравнивать при помощи этого отношения можно только кандидатов из одного списка. Действительно, у кандидатов из разных списков *разные избиратели*, и мы просто не знаем их мнение по отношению к “чужому” кандидату. Кроме того, если включить таких кандидатов в один список, число полученных ими голосов неминуемо изменится. Итак, для кандидатов $a$ и $b$ выполняется $a \lhd b$, если они включены в один список и $a$ набрал меньше голосов, чем $b$. Для определенного таким образом порядка максимальным элементом будет *любой кандидат, ставший депутатом*, т.е. прошедший в Думу. Как мы видим, максимальных элементов в множестве может быть несколько. Наибольший же элемент, если он существует, может быть только один. Среди депутатов нет “наибольшего”, они все несравнимы (равноправны) по отношению к избирателям. Наибольший элемент присутствует, например, в иерархии исполнительной власти (премьер–министр), так как она построена на принципе *едино*началия.

Как мы показали, в множестве может не существовать наибольшего элемента. А всегда ли существует максимальный? Для конечного множества ответ положительный. Более того, мы можем построить максимальный элемент, начиная с *любого* элемента множества и двигаясь слева направо по диаграмме Хассе. На рисунке б) стр. 11 максимальные элементы закрашены.

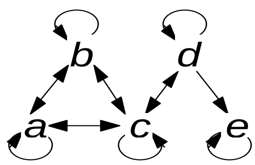
Для бесконечных множеств это уже неверно: движение направо может и не закончиться. Например, в множестве натуральных чисел не существует максимального.

Понятия минимального и наименьшего элементов определяются аналогично. При этом в множестве может быть, например, один наибольший элемент и несколько минимальных, или один наименьший и один наибольший и т.д. ☺




Важным случаем частичного порядка является включение множеств, обозначаемое $\subset$ . Наибольшим в смысле этого отношения будет множество, включающее в себя все остальные, а максимальным – любое подмножество, которое нельзя включить в большее. На рисунке максимальными будут множества *A* и *C*, а множество *B* – не максимальное, так как оно входит с *C*. Наибольшего среди этих трех множеств нет. Кстати, когда мы говорили о максимальном ядре (см. Опр. 7), мы понимали максимальность именно в этом смысле.

Различные отношения, как мы уже говорили (стр. 3), также можно рассматривать как множества. Например, как множество пар $(a,\ b)$ или как множество дуг (ребер) графа. В этом смысле отношения можно сравнивать, т.е. проверять, входит ли одно в другое. Можно также искать максимальное (наибольшее, минимальное, наименьшее) отношение того или иного типа, вложенное в данное.




Пример. Рассмотрим отношение ρ, изображенное на рисунке. Оно рефлексивно (у каждого элемента есть петля), но не симметрично ($d\ \rho\ e$, но неверно $e\ \rho\ d$) и не транзитивно ($c\ \rho\ d$ и $d\ \rho\ e$, но неверно $c\ \rho\ e$). Следовательно, оно не является эквивалентностью. Поставим задачу найти наибольшую эквивалентность, входящую в данное отношение. Ясно, что классы искомой эквивалентности будут ядрами отношения ρ (см. Опр. 7), хотя и не обязательно максимальными. Например, одноэлементное множество $\{a\}$ является ядром. Элемент $a$ входит также в ядра $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ и $\{a,b,c\}$. Больше ничего добавить к $a$ нельзя, т.к. он больше ни с чем не связан.

Среди полученных четырех классов есть наибольший, а именно,

$\{a, b, c\}$. Но так бывает не всегда. Например, среди ядер, “натянутых” на $c$ есть максимальные, но нет наибольшего. Этот элемент входит в ядра $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ и $\{c, d\}$. Два последних являются максимальными, так как их нельзя расширить внутри отношения ρ, но ни один из них не является наибольшим. Рассматривая аналогичным образом остальные элементы, получим 3 максимальных ядра, а именно, $\{a,b,c\}$, $\{c,d\}$ и $\{e\}$. Любое их подмножество также будет ядром. Выбирая непересекающиеся ядра, получим классификацию (а, значит, и эквивалентность), вложенную в ρ. Например, это может быть разбиение $\{a,b\} \cup \{c,d\} \cup \{e\}$ или $\{a, b, c\} \cup \{d\} \cup \{e\}$. Можно выбрать и более дробное деление, например, $\{a, b\} \cup \{c\} \cup \{d\} \cup \{e\}$. Оно отличается от предыдущего тем, что "стерты" некоторые ребра ($a$—$c$ и $b$—$c$). Таким образом, как отношение оно более "бедное", т.к. входит в предыдущее. Поэтому как множество его нельзя считать максимальным. С другой стороны, первые два разбиения нельзя получить друг из друга стиранием некоторых ребер, так что они оба максимальны. Наибольшей вложенной эквивалентности в этом примере нет.

Общее понятие максимальности для вложенных эквивалентностей можно сформулировать и по–другому.

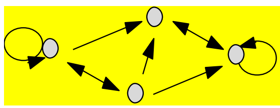
Определение 11. Эквивалентность, вложенная в некоторое отношение, называется максимальной, если никакие два ее класса нельзя объединить в один.

## Упражнения

*1.1.* Запишите таблицу отношения “<“ для целых чисел от 1 до 5.

*1.2.* Какой вид имеет матрица рефлексивного отношения? Симметричного? Арефлексивного? Асимметричного? Антисимметричного? Нерефлексивного? Несимметричного? Приведите примеры.

*1.3.* Является ли равенство полным отношением? Тот же вопрос для эквивалентности.



*1.4.* Отношение задано графом. Опишите его с помощью таблицы. Каким свойствам отношений оно удовлетворяет? Дополните его до рефлексивности (т.е. добавьте такие пары (дуги), чтобы отношение стало рефлексивным).

*1.5.* Отношение задано таблицей (справа). Опишите его с помощью графа. Каким свойствам отношений оно удовлетворяет? Дополните его до транзитивности (т.е. добавьте такие пары (дуги), чтобы отношение стало транзитивным).

| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| a | ✓ | | | ✓ | |
| b | | ✓ | | | ✓ |
| c | ✓ | | ✓ | | |
| d | | | | ✓ | ✓ |
| e | ✓ | | | | ✓ |

*1.6.* Как бы вы назвали математически свойство, выраженное в феодальной формуле “Вассал моего вассала не мой вассал”?

*1.7.* "Странно все это: моя бабушка ездила на лошади, но боялась автомобилей; мать ездила на автомобиле, но боялась самолетов; моя дочь обожает летать на самолетах, но боится лошадей …". Какое свойство отношения "более пугающий" удивляет рассказчика?

*1.8.* Из соотношений $x \sim y$ и $y \sim x$ с помощью свойства транзитивности получаем $x \sim x$. Можно ли сказать, что первое свойство эквивалентности (рефлексивность) следует из двух других?

*1.9.* Является ли эквивалентностью отношение “быть земляком”? Если да, то что возникло раньше – оно или соответствующая классификация?

*1.10.* В журнале "Квант" №6, 1987 г. приведена такая “классификация”:

Животные подразделяются на а) принадлежащих Императору; б) бальзамированных; в) прирученных; г) молочных поросят; д) сирен; е) сказочных; ж) бродячих собак; з) включенных в настоящую классификацию; и) буйствующих, как в безумии; к) неисчислимых; л) нарисованных очень тонкой кисточкой из верблюжьей шерсти; м) и прочих; н) только что разбивших кувшин; о) издалека кажущихся мухами.

Какие обязательные свойства классификации здесь нарушаются?

*1.11.* Равенство, как частный случай эквивалентности, порождает разбиение множества на классы. Какие?

*1.12.* К какому типу относятся следующие отношения: а) подобие геометрических фигур; б) братство; г) родство; д) дружба.

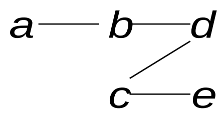
*1.13.* Покажите, что отношение "быть синонимами" является толерантностью. Является ли оно эквивалентностью? А к какому типу относится отношение антонимии (т.е. отношение "быть антонимами")?

*1.14.* Опишите отношение "принадлежать одной компании" на множестве студентов вашей группы. Является ли оно толерантностью?

*1.15.* Для изображения каких отношений используется диаграмма Хассе? Чем она отличается от графа, изображающего то же отношение?

*1.16.* Покажите, что в определении строгого порядка можно заменить асимметричность на арефлексивность.

*1.17.* Запишите отношение "более трудный" для предметов, включенных в ваше расписание. Является ли оно частичным или полным (линейным) порядком?




*1.18.* Строгий порядок описан с помощью диаграммы Хассе (справа). Опишите его с помощью графа и матрицы.

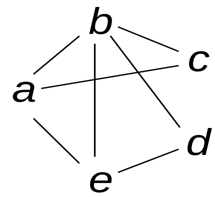
*1.19.* Есть в порядках, описанных в предыдущих двух упражнениях, максимальные элементы? Минимальные? Наибольший? Наименьший?

*1.20.* Найдите максимальные и минимальные элементы в примерах отношений порядка, приведенных в тексте. В каких из них существует наибольший элемент? наименьший?

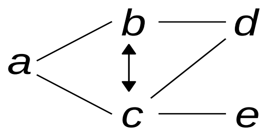
*1.21.* Пусть в множестве существует наибольший элемент. Покажите, что он является максимальным, и что других максимальных элементов не существует. Каким свойством отношения порядка надо воспользоваться для доказательства?

*1.22.* Покажите, что, если в конечном множестве ровно один максимальный элемент, то он является и наибольшим, а если их больше одного, то наибольшего не существует.

*1.23.* Толерантность задана графом (справа, петли не нарисованы). Найдите все ядра, порожденные элементом *a*. Есть ли среди них максимальные? Наибольшее? Постройте все максимальные эквивалентности, вложенные в данную толерантность. (Подсказка: их будет 5).




*1.24.* Транзитивное отношение задано обобщенной диаграммой Хассе (справа). Постройте все максимальные порядки, вложенные в данное отношение и изобразите их в виде диаграмм Хассе. (Подсказка: В диаграмме Хассе не должно быть циклов из трех элементов).




*1.25.* По аналогии с понятием ядра введите понятие цепочки и максимальной цепочки (линейного порядка, вложенного в данное отношение).

*1.26.* Покажите, что максимальная эквивалентность, заданная в Опр. 11 является максимальной и в смысле включения множеств.

*1.27.* Рассмотрим все порядки, вложенные в данное отношение. Покажите, что если какой–нибудь из них линейный, то он будет максимальным (в смысле включения множеств) среди этих порядков. Будет ли он наибольшим?

# 3. Неформализуемые и слабо формализуемые задачи

В предыдущей главе мы ввели понятие *отношения* между элементами множества. Оно является одной из моделей для понятия “структура”. Возникает вопрос: как найти то или иное отношение в *реальной* системе? Эта задача является очень сложной, не только из–за трудности сбора исходного материала, но и из–за сложности его последующей интерпретации. Дело в том, что реальная структура обычно не бывает настолько четкой и жесткой, чтобы ее можно было описать формальной математической моделью. Причин этого много, мы же разберем две: неоднозначность и нечеткость.

### Проблема многих критериев

Одна из причин, по которой связи между объектами нельзя описать с помощью отношения – в том, что обычно сравнение происходит не по одному признаку, а по многим. Это касается сравнения и в смысле равенства (одинаковости) и в смысле неравенства (предпочтения).

Предположим, что мы хотим классифицировать (разбить на группы) некоторое количество элементов, причем оснований для классификации у нас несколько. Если классификации по разным принципам совпадают, то проблемы не возникает. Но такое встречается нечасто. В крайнем случае классификации могут быть совершенно различными, тогда их нельзя объединять, а необходимо исследовать отдельно.

Однако вполне может реализоваться промежуточный случай, когда принципы классификации хотя и не совпадают, но близки между собой. Например, вы хотите разбить людей на группы бедных, богатых и среднего достатка. По какому принципу можно отнести человека в ту или иную группу? Можно учитывать доход: если он ниже определенного уровня – считать человека бедным, а если выше некоторого другого –богатым. Другой критерий – недвижимость и капитал. Ведь доход может резко изменяться во времени (потеря работы, повышение в должности и др.), а капитал сохранится. Третий способ – по собственному мнению человека. Ясно, что такие классификации не являются совершенно независимыми, но и не совпадают. Например, человек, считающий себя бедным может иметь объективно более высокие доходы и сбережения, чем тот, кто считает себя обеспеченным.

Можно ли в этом случае найти разбиение, наилучшим образом учитывающее все отдельные подходы? Ключевыми здесь являются слова “наилучшим образом”. Что это значит? Оказывается, этим словам можно придать самый разный смысл, по–разному формализовать.

Такие же проблемы возникают и при исследовании отношений порядка. Одни и те же объекты можно упорядочить по разным критериям. Например, одежду можно сравнивать по цене, качеству, соответствию моде, долговечности и т.п. Так какое же платье считать лучшим? Конечно, если вы найдете наряд и недорогой, и модный, и подходящий по размеру, то задача будет решена. Однако опыт подсказывает, что такое сочетание качеств практически недостижимо. И действительно, чем выше качество предмета, тем выше, вообще говоря, и его цена.

Однако, как и в случае эквивалентности, может оказаться, что разные упорядочения одного и того же объекта не противоречат полностью друг другу. Тогда возникает задача найти некоторое, хотя бы частичное, упорядочение, позволяющее учесть все важные критерии.

Как легко догадаться, в случае, когда нет *объективного* четкого порядка, невозможно найти и *формальный* метод его поиска. Однако можно предложить много способов приближенного описания объекта как упорядоченного.

## Поиск комплексной классификации

Пусть для исследуемого множества $A$ с элементами $a$ мы имеем $k$>1 классификаций. Соответствующие эквивалентности будем обозначать через $\varepsilon_i$. Будем исходить из предположения, что на $A$ существует некоторое "естественное" (хотя пока не известное) разбиение на классы с эквивалентностью $\varepsilon$, для которой $\varepsilon_i$ дают приближенное описание. Задача состоит в том, чтобы найти $\varepsilon$ по $\varepsilon_i$. Эту задачу можно решать многими методами, вот некоторые из них.

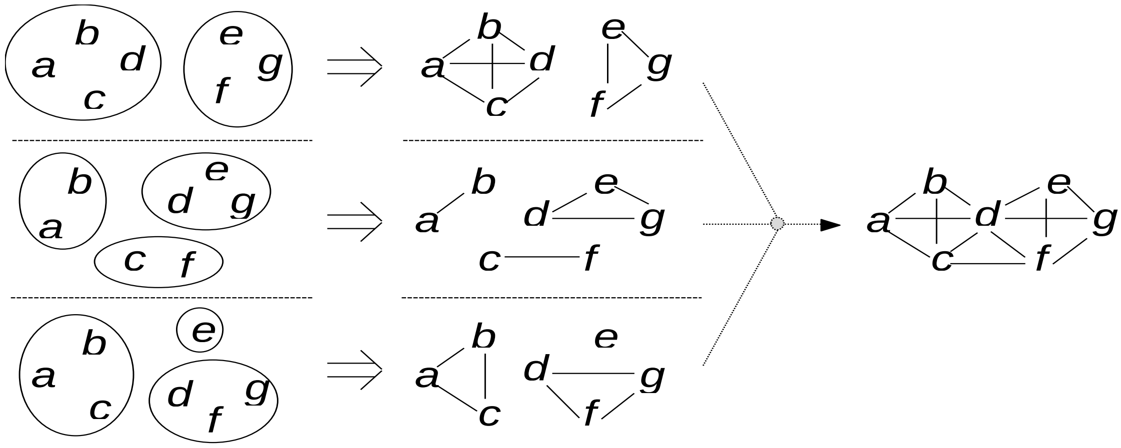
1. Метод промежуточной толерантности. Найдем сначала объединение отношений $\varepsilon_i$, которое обозначим через $\tau$. В матрице отношения $\tau$ единицы будут во всех тех клетках, в которых единица стоит хотя бы в одной из таблиц для $\varepsilon_i$. На графе это означает, что мы накладываем друг на друга все картинки, соответствующие отдельным $\varepsilon_i$.

Элементы будут находиться в отношении $\tau$, если они попали в один класс *хотя бы для одной* эквивалентности (совпадают хотя бы в одном смысле). Такое отношение, как мы видели, будет уже не эквивалентностью, а толерантностью. Например, рассмотрим 7 человек, обозначенных буквами $a$, $b$, …, $g$ и попробуем разбить их на группы *похожих* между собой людей. В качестве отдельных критериев "похожести" выберем тип лица, цвет глаз и цвет волос. Запишем три качества каждого из испытуемых в таблицу:

| Критерий | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Тип лица | Овальн. | Овальн. | Овальн. | Овальн. | Круглое | Круглое | Круглое |
| Цвет глаз | Карие | Карие | Голубые | Зеленые | Зеленые | Голубые | Зеленые |
| " волос | Темные | Темные | Темные | Шатен | Блонд. | Шатен | Шатен |

На рисунке изображены соответствующие классификации и эквивалентности, обозначенные через $\varepsilon_i$, $i$=1, 2, 3. Толерантность, полученная объединением этих трех эквивалентностей, показана справа. В качестве искомой классификации можно взять любую максимальную эквивалентность, входящую в эту толерантность (Опр. 11, стр. 13).

Три классификации Эквивалентности Толерантность




Максимальные эквивалентности находим так, как это показано в примере на с. 13. Сначала выявляем ядра (Опр. 7, стр. 8). Обратите внимание, что после объединения в множестве появились максимальные ядра, которых не было ни в одной исходной классификации: это $\{c,d,f\}$ и $\{d,e,f,g\}$. Существуют три максимальные классификации, входящие в τ. Это $\{a,b,c,d\} \cup \{e,f,g\}$, $\{a,b\} \cup \{c,d,f\} \cup \{e,g\}$ и $\{a,b,c\} \cup \{d,e,f,g\}$. Первая из них – это $\varepsilon_1$, а другие две не совпадают ни с одной из исходных эквивалентностей.

Заметим, что в классе $\{c,d,f\}$ несмотря на то, что все элементы класса сходны попарно, не существует ни одного признака, общего для всех элементов класса. Это можно отнести к недостаткам метода.

2. Метод пересечения классов. Предыдущий метод может вызвать возражения из–за слишком сильного значения единичных связей. Действительно, в толерантности τ присутствует такая пара, как *c*—*f*, которая объединяется только в одном случае (похожи только по цвету глаз). С другой стороны, пара *a*—*b* принадлежит одному и тому же классу во всех классификациях (похожи по всем параметрам). Можно считать, что в последнем случае связь между элементами гораздо более сильная.

При жестком подходе вполне естественно считать эквивалентными только те элементы, которые эквивалентны во всех смыслах (по отношению ко всем эквивалентностям $\varepsilon_i$). Соответствующее отношение ε строится как пересечение отношений $\varepsilon_i$. Таблица такого отношения содержит единицы только в тех клетках, в которых единицы стоят во всех $\varepsilon_i$. На графе при этом остаются только те ребра, которые присутствуют во всех исходных графах.

Пересечение эквивалентностей само является эквивалентностью, так что решение, полученное данным методом, единственно. В нашем примере это будет $\{a, b\}$ и 5 одноэлементных классов. Как видим, в этом случае классификация почти тривиальна.

3. Пороговый метод. Сравнивая два предыдущих метода, мы можем заметить, что они представляют собой крайние случаи. В первом учитываются единичные сходства, которые можно посчитать случайными, нехарактерными, а во втором – только полное совпадение по всем параметрам. Чтобы не впадать в крайности, естественно использовать промежуточное решение: считать, что эле-

менты достаточно похожи, если они связаны несколькими связями. Выберем нижнюю границу $r$, называемую порогом, и будем включать в толерантность те связи, которые присутствуют не менее, чем в $r$ эквивалентностях. Такую толерантность можно обозначить через $\tau_r$, так как она зависит от $r$. Порог $r$ меняется от 1 до $k$ (числа исследуемых классификаций). В нашем примере $k$=3, поэтому можно рассматривать толерантности $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$.

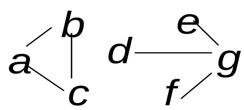
Проще всего найти все $\tau_r$ по матрице, равной сумме матриц для $\varepsilon_i$. В каждой клетке такой матрицы указано количество ребер, связывающих пару элементов, т.е. количество признаков, по которым они совпадают. В данном примере она имеет вид (левая таблица, нули не выписаны):

| + | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 3 | 3 | 2 | 1 | | | |
| *b* | 3 | 3 | 2 | 1 | | | |
| *c* | 2 | 2 | 3 | 1 | | 1 | |
| *d* | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| *e* | | | | 1 | 3 | 1 | 2 |
| *f* | | | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| *g* | | | | 2 | 2 | 2 | 3 |

$\Rightarrow$

| $\tau_2$ | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | ✓ | ✓ | ✓ | | | | |
| *b* | ✓ | ✓ | ✓ | | | | |
| *c* | ✓ | ✓ | ✓ | | | | |
| *d* | | | | ✓ | | | ✓ |
| *e* | | | | | ✓ | | ✓ |
| *f* | | | | | | ✓ | ✓ |
| *g* | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

Толерантность $\tau_2$ можно получить, если пометить те клетки таблицы, в которых стоят числа, не меньшие 2. Отношение $\tau_1$ всегда равно $\tau$, т.е. объединению эквивалентностей, изученному в первом методе. В то же время $\tau_k$ (в примере $\tau_3$) – это пересечение эквивалентностей, т.е. $\varepsilon$ (второй метод).




Отношение $\tau_2$ имеет граф, изображенный на рисунке. Для него можно найти вложенные эквивалентности, как и в первом методе. Явно выделяется класс $\{a,b,c\}$. Из элементов $d$, $e$, $f$ один надо присоединить к $g$, два других останутся изолированными. Получаем 3 максимальных эквивалентности: $\{a,b,c\} \cup \{e,g\} \cup \{d\} \cup \{f\}$; $\{a,b,c\} \cup \{d,g\} \cup \{e\} \cup \{f\}$ и $\{a,b,c\} \cup \{f,g\} \cup \{d\} \cup \{e\}$. ☺

Тремя методами мы получили 7 разных ответов на вопрос. Какой же из них правильный? Если не использовать никакую дополнительную информацию, то нет и возможности выбрать. Чтобы решить, что какая–то классификация больше соответствует искомому гипотетическому отношению эквивалентности, необходимо дополнительное содержательное (неформальное) исследование.

## Упорядочение по нескольким критериям

Лучше быть богатым и здоровым, чем бедным и больным.

Задача упорядочения по нескольким критериям встречается еще более часто, чем классификация по нескольким принципам. Исходными данными являются порядки того или иного типа, из которых надо построить один “обобщенный” порядок. Как и в предыдущем разделе, мы предполагаем, что это искомое отношение отражает некоторую “естественную” структуру объекта, которую нам и надо выявить.

Самым разработанным является случай, когда отдельные показатели имеют количественный или близкий к нему смысл. Тогда соответствующие упорядочения линейны (см. стр. 11) и, более того, величину каждого показателя можно представить численно (скажем, в баллах). Например, пусть элементы оцениваются по трем показателям, $x$, $y$ и $z$, причем для $a$ значения этих показателей – (1, 1, 1), для $b$ – (2, 3, 4), а для $c$ – (3, 2, 3). Ясно, что $a$ можно считать “меньшим” как $b$, так и $c$. Но как сравнить между собой $b$ и $c$? По первому показателю $b$ меньше $c$, а по двум другим – наоборот.

Самым распространенным методом в этом случае является метод комбинированного критерия. Он состоит в том, что вместо многих критериев (показателей) вводится один, выраженный как функция от них. Числовой же показатель всегда позволяет упорядочить множество, причем л и н е й н о .

Чаще всего в качестве такого единого показателя берут сумму всех показателей. В примере получаем 2+3+4=9, 3+2+3=8, так что по сумме значений $c$ меньше $b$. Достоинство такого выбора в его простоте и симметрии: все отдельные показатели входят в общий совершенно равноправно. Однако в некоторых случаях такое равноправие является недостатком, скажем, если отдельные критерии выражаются в разных единицах измерения. Подобная проблема возникает в спорте в различных видах многоборья, где результатами по отдельным видам соревнований могут быть секунды, метры, попадания и т.п. Например, в биатлоне, чтобы некоторым образом “приравнять” плохую стрельбу к потерянным секундам, полагается бежать несколько штрафных кругов по числу промахов. Но по каким принципам выбирается длина штрафного круга? Ясно, что у разных людей могут быть свои мнения на этот счет. Если спортсмен, за которого я болею, стреляет плохо, то я буду добиваться уменьшения штрафного круга, если же хорошо – то наоборот.

Даже если отдельные показатели однородны, непонятно, почему в качестве общего критерия надо брать сумму, а не, скажем, произведение. А ведь такая замена может существенно изменить результат. Например, пусть элементы характеризуются двумя показателями, которые для $a$ принимают значения (1, 5), а для $b$ – (2, 3). Сумма показателей больше у первого элемента ($1+5 > 2+3$), а произведение – у второго ($1 \cdot 5 < 2 \cdot 3$).

Вообще говоря, можно придумать множество других симметричных и несимметричных комбинированных критериев, причем результат будет сильно зависеть от выбора комбинирующей функции. А это значит, что мы не будем получать “истинное” упорядочение, которое, конечно, не должно зависеть от способа обработки данных.

Как мы видим, даже для количественных показателей задача многокритериального выбора является неформализуемой. Тем более это верно для качественной информации. Тем не менее, формально подобную процедуру можно применить и для линейных порядков, не имеющих количественного смысла.

1. Процедура Бордá. Пусть нам даны несколько линейных упорядочений одного и того же конечного множества. Каждое из них можно представить с помощью нумерации элементов, например, от более предпочтительных к менее предпочтительным. Такой номер можно назвать рангом элемента в конкретном упорядочении. Комбинированный критерий, равный сумме рангов, дает нам возможность упорядочить элементы линейно или почти линейно (так как некоторые элементы могут получить одинаковый суммарный ранг).

Например, пусть элементы $a$, $b$, $c$, $d$ упорядочены 3 способами. Запишем места всех элементов в таблицу:

| | 1 порядок | 2 порядок | 3 порядок | Сумма рангов |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 2 | 4 | 7 |
| $b$ | 2 | 3 | 1 | 6 |
| $c$ | 3 | 4 | 3 | 10 |
| $d$ | 4 | 1 | 2 | 7 |

В данном случае можно считать, что $b \prec a = d \prec c$, где запись $a \prec b$ означает, что $a$ предпочтительнее, чем $b$. Как мы видим, некоторые элементы в результате стали неразличимыми.

Конечно, для неколичественных показателей такое суммирование весьма условно, однако, оно имеет некоторый смысл. Например, если все отдельные порядки совпадают, то и суммарный порядок будет таким же, Если же большинство элементов по результирующей шкале имеет одинаковый ранг, можно подозревать, что исследуемая структура не является порядком, по крайней мере, линейным.

Современник и соперник Борда, французский математик Кондорсе критиковал эту процедуру за необоснованность и некоторые другие недостатки. В частности, он показал, что процедура манипулируема: добавляя или удаляя некоторый элемент мы может изменить взаимное расположение двух других. Например, удалим в предыдущем примере элемент $d$. Тогда в третьем упорядочении $a$ будет иметь ранг 3 и по сумме мест элементы $a$ и $b$ сравняются. Если же убрать еще и $c$, то окажется, что $a$ лучше $b$ (сумма мест 5 и 6)!

Кондорсе предпринял попытку построить процедуру, исходя из некоторых аксиом. А именно, он предположил, что в множестве есть некоторый “естественный” порядок, но в каждом конкретном упорядочении он представлен в с некоторой равномерной случайной погрешностью. Ученый постарался подобрать процедуру, которая в этих условиях позволяла больше всего приблизиться к “истинному” упорядочению. Каково же было его разочарование, когда лучшей процедурой для таких случаев оказалась … процедура Борда! ☺

Для частичных порядков процедуры с комбинированным критерием не подходят. Поэтому в общем случае можно поступить так же, как в предыдущем разделе, т.е. построить пересечение или объединение исходных отношений.

2. Пересечение порядков. Обозначим отдельные упорядочения, заданные на множестве $A$, через $\pi_i$, а их пересечение через $\pi$. Два элемента будут находиться в

отношении $\pi$, если то же верно для всех $\pi_i$. Пересечение порядков антисимметрично и транзитивно, т.е. также является порядком. Плохо только то, что результирующий порядок будет гораздо менее полным, чем исходные. Даже для линейных $\pi_i$ пересечение будет только частичным упорядочением. Покажем это на примере. Рассмотрим на множестве $\{a, b, c, d\}$ два линейных порядка: один лексикографический (по алфавиту), другой – представленный списком $(b, d, a, c)$. Пересечение этих порядков найдем с помощью таблиц:

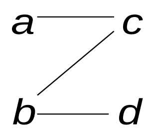
| $\pi_1$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | 1 | 1 | 1 |
| $b$ | | | 1 | 1 |
| $c$ | | | | 1 |
| $d$ | | | | |

$\cap$

| $\pi_2$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | | 1 | |
| $b$ | 1 | | 1 | 1 |
| $c$ | | | | |
| $d$ | 1 | | 1 | |

=

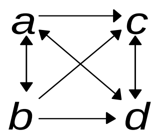
| $\pi$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | | 1 | |
| $b$ | | | 1 | 1 |
| $c$ | | | | |
| $d$ | | | | |




Справа представлена диаграмма Хассе результирующего отношения. Очевидно, что оно не линейно.

3. <u>Объединение порядков</u>, напротив, содержит слишком много связей и само не является порядком (почему?). Однако в нем можно выделить (как правило, несколько) вложенных порядков. Для приведенного выше примера объединение порядков будет иметь вид как в таблице и на графе справа. В этот граф, кроме исходных, входят еще и такие порядки: $(b, a, c, d)$; $(b, a, d, c)$; $(a, b, d, c)$. Все они линейны, а следовательно, максимальны (см. упражнение 1.26).

| $\cup$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | 1 | 1 | 1 |
| $b$ | 1 | | 1 | 1 |
| $c$ | | | | 1 |
| $d$ | 1 | | 1 | |




Этот метод хорошо применять, если исходные порядки частичны, т.е. не позволяют сравнивать некоторые элементы. Объединение порядков позволяет сравнить два элемента, если один предпочтительней другого хотя бы в одном смысле.

4. <u>Пороговый метод.</u> Идея порогового метода – точно такая же, как и для случая эквивалентностей. По исходным отношениям порядка $\rho_i$, $i$=1, …, $k$, строим отношение $\sigma_r$, в которое входят пары, помеченные хотя бы в $r$ порядках. Далее можно поступить по–разному. Если отношение $\sigma_r$ достаточно “насыщенное”, т.е. имеет много дуг (в частности, не является антисимметричным), то часть дуг “стираем”, чтобы получить вложенное отношение порядка. Если же дуг мало (например, при большом $r$), то можно, наоборот, добавить некоторые дуги “по транзитивности”. Чаще всего приходится применять и то и другое.

5. <u>Правило Кондорсе</u>. Уже упоминавшийся выше Кондорсе предложил свой метод для совместной обработки нескольких порядков. Пусть даны порядки $\rho_i$, $i$=1, …, $k$. Построим по ним так называемый мажоритарный граф. Для каждой пары несовпадающих элементов $(a, b)$ проверяем, что чаще встречается: $a$ предпочтительнее $b$ или $b$ предпочтительнее $a$. Если чаще оказывается, что $a\ \rho_i\ b$, то считаем, что $a \prec b$, и наоборот. Ясно, что полученное отношение $\prec$ будет анти-

симметричным, но, к сожалению, не транзитивным, так что его нельзя считать порядком.

В общем случае отношение, заданное мажоритарным графом, неполное. Два элемента будут несравнимы, если $a\ \rho_i\ b$ в таком же числе случаев, что и $b\ \rho_i\ a$ (в частности, ни в одном случае, если $a$ и $b$ несравнимы). Если же исходные порядки линейны и их нечетное число, то такого быть не может. Действительно, в каждом линейном упорядочении проведена ровно одна дуга между $a$ и $b$ (в том или ином направлении), так что всего их нечетное число. Поэтому дуг двух направлений не может быть поровну. Имеем $a \prec b$, если не менее, чем в половине случаев выполняется $a\ \rho_i\ b$.

Итак, если все исходные порядки линейны и число их нечетно, то построенное на их основе мажоритарное отношение не только антисимметричное, но и полное. Но транзитивность не выполняется и тут.

Пример. Рассмотрим тот же пример, которым мы иллюстрировали процедуру Борда (стр. 21). Элемент $a$ имеет более высокое место, чем $b$ в двух порядках (1 и 2), а более низкое только в одном (3). Значит, в целом $a$ предпочтительнее, чем $b$. Сравнивая таким образом все пары, строим мажоритарный граф. Он задает циклическое (нетранзитивное) отношение $c \prec b \prec a \prec d \prec b$. Заметьте, что отдельные пары также поменялись местами: если по Борда $a \prec b$, то по Кондорсе $b \prec a$.

## Нечеткие множества и отношения

– Упадок французского языка начался в 1769 г.
Виктор Гюго: – А в котором часу?

В предыдущих разделах мы рассмотрели случай, когда структура объекта определяется несколькими критериями. Это приводит к неформализуемости задачи, так как по нескольким критериям разбить на части или упорядочить множество можно разными способами.

Другая причина неоднозначности – нечеткость, расплывчатость самих критериев. Действительно, многие свойства, выражаемые словами естественного языка, не являются четко определенными. Например, что такое “большой”, “существенный”, “богатый” и т.п.? Ясно, что смысл этих слов меняется в зависимости от контекста и никогда нельзя провести четкую границу между большим и малым, существенным и нет, сильным и слабым и т.п. Как бы ни определить эти понятия, найдутся промежуточные варианты, которые трудно отнести к той или иной группе.

Для описания подобных свойств и отношений применяется математическая теория нечетких множеств. Здесь мы дадим только основные понятия этой теории. Прежде чем перейти к определениям, вспомним определение характеристической функции подмножества.

Определение 12. Пусть в некотором множестве $E$ задано подмножество $A$. Характеристической функцией этого подмножества называется функция $\chi_A$, заданная на $E$ и принимающая значения 0 и 1, такая, что $\chi_A(a)$ равно 1 для $a \in A$ и обращается в 0 для всех остальных элементов из $E$.

Функция $\chi_A$ вполне определяет множество $A$. В дальнейшем мы будем считать, что $E$ – некоторое “универсальное” множество, т.е. множество, содержащее все нужные нам элементы.

Нечеткое множество $A$ отличается от обычного тем, что его элементы входят в него “в большей или меньшей степени”. Чтобы отразить этот факт, позволим характеристической функции $\chi_A$ принимать и промежуточные значения между 0 и 1. Каждое такое значение будет означать “меру вхождения” отдельного элемента в множество. Ее можно трактовать, например, как нашу уверенность в том, что данный элемент входит в множество.

Определение 13. Нечеткое (расплывчатое) множество $A$ с носителем $E$ определяется характеристической функцией $\chi_A: E \to [0; 1]$.

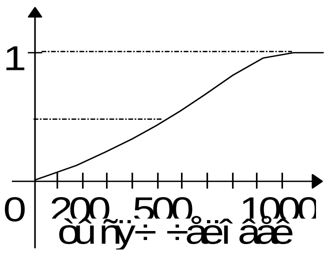
Те элементы, для которых $\chi_A=1$ входят в множество $A$ “на 100%”, те, для которых $\chi_A=0$ – не входят в него, а остальные входят только частично, причем уверенность в этом тем больше, чем больше значение $\chi_A$. Если $\chi_A$ принимает только значения 0 и 1, то множество $A$ является четким.

В качестве примера рассмотрим понятие “большой город”. Какой город вы однозначно отнесете к “большим”, а какой – к “малым”? Скажем, город с миллионом жителей может считаться большим, а с сотней тысяч – маленьким. А куда отнести полумиллионный? Можно сказать, что он отчасти большой, а отчасти нет. Причем само понятие “отчасти” можно попытаться оценить количественно, т.е. установить, какую часть от понятия “большой” составляет эта численность населения. Например, 700.000 жителей ближе к “большим” городам, чем 500.000, так что мы можем отнести его к таковым с большей уверенностью. Напротив, город в 200.000 жителей ближе к малым. Мы можем считать, что полумиллионный город является большим “наполовину”, 700.000 – например, на 4/5, а 200.000 – только на 1/3. Это и будут значения характеристической функции. Для всех городов одного размера она имеет одно и то же значение, так что $\chi_A$ можно рассматривать как функцию от размера города $\chi(x)$ (см. ниже рис. а)).

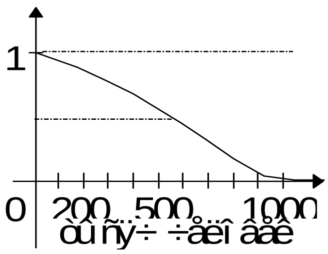
Для нечетких множеств можно ввести операции объединения, пересечения и дополнения. Результатом снова будет нечеткое множество. Можно также сравнивать нечеткие множества по вложению $\subset$..

Определение 14. Пусть нечеткие множества $A$ и $B$ имеют общий носитель $E$. Говорят, что множество $A$ входит в $B$, если $\chi_A \leq \chi_B$. Пересечением $A$ и $B$ называется нечеткое множество с характеристической функцией $\chi_{A \cap B}=\min(\chi_A, \chi_B)$. Характеристической функцией объединения будет $\chi_{A \cup B}=\max(\chi_A, \chi_B)$. Дополнение $\ddot{A}$ множества $A$ до $E$ определяется функцией $\chi_{\ddot{A}}=1-\chi_A$.

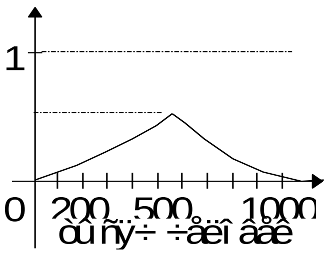
Например, дополнением к понятию “большой город” будет множество небольших городов (рис. б)).




а) Большие города, χ




б) Небольшие города, 1–χ




в) Большие и небольшие города, min(χ,1–χ)

Найдем также пересечение множеств больших и небольших городов (рис. в)). Если бы они были четкими, их пересечение было бы пустым (так как одно понятие является дополнением другого). Но для нечетких множеств это не так: существуют города, которые с некоторой долей уверенности можно считать как большими, так и небольшими. Правда, эта уверенность никогда не может быть больше 50% (почему?). ☺

По тому же принципу можно ввести и понятие нечеткого отношения, так как его также можно рассматривать как множество, а именно, как множество пар $(a, b)$.

<u>Определение 15</u>. Нечеткое отношение ρ на множестве–носителе $A$ – это функция двух переменных $\rho: A\times A\rightarrow[0; 1]$.

Если $\rho(a, b)=1$, то элементы $a$ и $b$ т о ч н о  н а х о д я т с я в отношении ρ, если $\rho(a, b)=0$, то т о ч н о  н е  н а х о д я т с я, в остальных случаях ρ означает долю уверенности в том, что отношение выполняется для пары $(a, b)$. Если множество $A$ конечно, то для записи нечеткого отношения можно использовать такую же таблицу, как и для четкого, только в ней будут стоять не галочки и не нули и единицы, а произвольные числа из промежутка [0; 1].

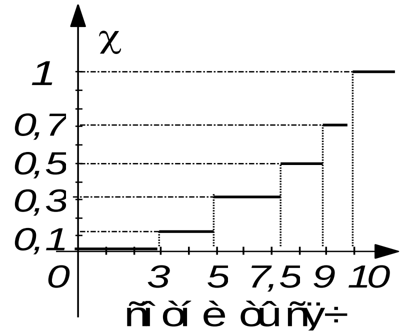
<u>Пример</u>. Рассмотрим на множестве натуральных чисел из первой пятерки отношение “примерно равны” (нечеткое равенство). При этом будем считать, что числа, отличающиеся на 1, равны на 75%, на 2 – на 50%, на 3 – на 25%, а при большем отличии – не равны вовсе. Эту информацию можно записать в виде таблицы. ☺

| ≈ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0,75 | 0,5 | 0,25 | 0 |
| 2 | 0,75 | 1 | 0,75 | 0,5 | 0,25 |
| 3 | 0,5 | 0,75 | 1 | 0,75 | 0,5 |
| 4 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 0,75 |
| 5 | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |

Одно нечеткое отношение входит в другое, если в каждой клеточке таблицы первого отношения стоят числа, не превосходящие соответствующие числа в таблице второго. Например, четкое равенство (1 на диагонали) входит в приведенное нечеткое.

Возникает вопрос: как можно построить характеристическую функцию того или иного нечеткого отношения? Как выразить численно меру нашей уверенности? Ясно, что задача эта неформальная и неформализуемая. Наиболее естественный метод ее решения – спросить человека (эксперта, респондента, носителя информации), так как только человек может оценивать количественно качественную информацию. Но мнение одного человека будет слишком субъективным, подверженным случайностям. Поэтому желательно опросить группу людей и на основе их ответов сформировать некоторое общее, коллективное мнение.

При этом необязательно требовать от отдельного респондента составить нечеткое отношение (характеристическую функцию), так как это было бы для него затруднительно. Поэтому обычно поступают так: предлагают каждому опрашиваемому построить четкое отношение на множестве (например, разбиение или упорядочение), а потом в качестве функции $\rho(\chi)$ взять частоту, с которой информанты ставили данные элементы в данное отношение (или относили к данному множеству).




Продемонстрируем этот метод на том же примере понятия “большой город”. В данном случае достаточно спросить у испытуемых, начиная с какой численности населения они считают город “большим”. Допустим, из 10 опрошенных 3 назвали границу 1.000.000, 2 – 900.000, 2 – 750.000, 2 – 500.000 и 1 – 300.000. Это значит, что миллионный город считают большим все опрошенные, 900–тысячный – все, кроме 3, т.е. 7 человек из 10 (70%) и т.д. На основе этой информации получаем приближенную характеристическую функцию. Чем больше людей будет опрошено, тем точнее получится результат. ☺

Результаты опроса информантов можно рассматривать как частный случай многокритериальной задачи, разве что вместо критерия рассматривается мнение отдельного человека. Поэтому для обработки полученных данных можно применять те же методы, которые были разобраны в предыдущих разделах. В этом случае они называются в литературе методами коллективного упорядочения (коллективного разбиения).

Однако между этими задачами есть и разница. Дело в том, что различные критерии описывают одну и ту же структуру, как правило, с разных сторон, а информанты, по идее, должны выдавать одну и ту же структуру, но с индивидуальными отклонениями. При подборе метода это можно учитывать, например, так, как это сделал Кондорсе для задачи упорядочения (см. стр. 21). Фактически Кондорсе применял свои аксиомы к теории голосования, т.е. упорядочения на основе мнений избирателей. Полученный им результат показывает, что при коллективном упорядочении одним из наиболее привлекательных является метод Борда. Кстати, он применяется на практике: например, в фигурном катании при подведении итогов используется сравнение по сумме мест, присужденных отдельными судьями.

Численные данные, полученные при объединении мнений экспертов (информантов), имеют, вообще говоря, больший смысл, чем в общей многокритериальной задаче, как более однородные и однотипные. Это позволяет более осмысленно использовать, скажем, характеристичекую функцию нечеткого отношения.

Пример подобной обработки данных приведен в книге [3]. Автор описывает психолого–лингвистический эксперимент по выявлению системы связей в множестве слов–цветообозначений русского языка. Основной эксперимент был поставлен следующим образом: большому количеству испытуемых (нескольким десяткам) были предложены таблички (110 штук), на которых были написаны различные слова, означающие оттенки цвета. Каждому испытуемому было предложено разбить все карточки на непересекающиеся группы, т.е. осуществить четкую классификацию. При этом число и размер классов не оговаривались. На основе индивидуальных разбиений была построена нечеткая толерантность $\tau$. Для этого каждой паре наименований приписывалась в качестве $\tau(a,b)$ частота, с которой эти два слова попадали в один класс. На основе этой нечеткой толерантности была сделана попытка построить обобщающее разбиение на классы. При этом использовался комбинированный метод. С одной стороны, применялась идея порога, так как все слишком слабые связи были отброшены (величина порога была найдена подбором и установлена на уровне 25%). Но оставшиеся связи, в отличие от порогового метода, не рассматривались как равноправные: при построении эквивалентности предпочтение оказывалось наиболее сильным из них, т.е. с наибольшим значением $\tau(a,b)$. Поэтому был использован довольно сложный алгоритм построения и объединения цепочек слов, начиная с тех, что связаны наиболее сильно (т.е. тех, которые поставили вместе большинство испытуемых).

## Этапы выявления структуры

> Есть правила для выбора решения, но нет правила для выбора самих этих правил.

На основе сказанного выше разберем этапы и некоторые особенности исследования сложного объекта неколичественными методами. Мы предполагаем, что структура объекта может быть описана в виде отношения или нескольких отношений, которые и нужно выявить.

1. Выдвижение гипотезы. После предварительного ознакомления с материалом выдвигаем предположения о типе отношения, которое в нем присутствует. Является ли оно симметричным? транзитивным? К какому из стандартных групп отношений оно ближе: эквивалентности, толерантности, порядку?

2. Структурирование информации. Единый комплексный критерий разбиваем на отдельные более простые и легче проверяемые аспекты. Если их слишком много, можно попытаться выделить главные, например, методами факторного анализа [2]. Следует помнить, что этот метод является количественным и поэтому отражает истинную качественную структуру весьма условно. Он может использоваться в основном для предварительной обработки данных.

Если для изучения отдельных аспектов проблемы предполагается использовать метод опроса или другие формы обращения к людям (испытуемым, респондентам, экспертам и т.п.), то предварительное структурирование можно не делать, предполагая, что информанты сами проделают его в явной или неявной форме.

3. Сбор информации. Нужно заметить, что этот этап чаще всего основывается на принятой предварительно гипотезе. Действительно, если вы предполагаете, что исследуемая структура симметрична, то вы будете искать в ее элементах сходство и группировать их в классы. Если же, напротив, в структуре преобладает антисимметрия, то вы будете их упорядочивать, выстраивать в цепочки и т.п. Кроме того, предварительное выделение отдельных (частных) критериев позволяет представить информацию более компактно и обозримо.

Следует подчеркнуть, что каждый частный критерий также может быть достаточно сложным и нечетким, так что его формализация представляет собой проблему. В этом случае необходимо находить компромисс между точностью отражения отдельного аспекта и простотой. Например, если в качестве "критериев" вы используете мнения информантов, не следует давать им слишком сложные инструкции. Вряд ли человек, особенно неподготовленный, сумеет построить для большого числа элементов неполный (частичный) порядок или толерантность общего вида, не говоря уже о нечетких вариантах отношений. Поэтому испытуемым обычно предлагают разбить объекты на непересекающиеся классы (построить эквивалентность) или расположить в каком–нибудь порядке, например, пронумеровать, что дает нам линейный порядок.

Конечно, при таком упрощенном подходе происходит потеря информации, однако, можно надеяться, что она будет скомпенсирована большим числом наблюдений, так как каждый человек будет "ошибаться по своему" и эти ошибки поглотят друг друга.

4. Обработка полученной информации. На основе отдельных вариантов отношений, полученных по частным критериям или после опроса информантов, одним из методов строится комплексное отношение. Заметим, что это результирующее отношение может иметь совсем другой вид, чем исходные. Например, исходя из частных разбиений (эквивалентностей) мы построим обобщающую толерантность (покрытие). Используя отдельные линейные порядки, получим в результате частичный. Но разница может быть и больше, например, из порядков можно получить разбиение, а из эквивалентностей – порядок.

На этом этапе очень важно правильно выбрать метод обработки данных. Как мы видели, для каждого типа их существует несколько, и они дают разные результаты, так что подбор метода представляет собой нетривиальную проблему. Конечно, она неформализуема и поэтому решается на уровне здравого смысла, опыта, интуиции. Однако существуют и научные рекомендации, основывающиеся на достоинствах и недостатках отдельных методов.

Например, различные процедуры коллективного упорядочения активно изучаются в математической теории выбора или, по–другому, теории голосования (см. [1]). Она выделяет набор свойств, которыми должна обладать "хорошая" процедура. Как оказалось, многие "естественные" процедуры не обладают этими свойствами. Например, как было показано, правило Кондорсе может дать нетранзитивный результат (стр. 23), а процедура Борда манипулируема (стр. 21).

Поэтому математики пошли по другому пути: попытались сконструировать процедуры “с заранее заданными свойствами”. Результаты часто оказывались парадоксальными:

> Теорема Эрроу. Пусть некоторая процедура коллективного упорядочения обладает следующими свойствами:
>
> а) полнота и транзитивность (результирующий порядок – линейный);
>
> б) принцип единогласия (если все эксперты элемент *a* предпочитают элементу *b*, то и в коллективном упорядочении $a \prec b$);
>
> в) неманипулируемость.
>
> Тогда это процедура диктатора.

Процедура диктатора состоит в том, что заранее выбирается один из экспертов и его мнение рассматривается в качестве коллективного. Как мы видим, выполняется старая поговорка “Благими намерениями вымощена дорога в ад”: мы хотели получить хорошее, демократическое голосование, а получили диктатуру!

5. Выводы. После того, как мы получили результирующее отношение, исследование не заканчивается. Во–первых, надо проверить, насколько оно соответствует первоначальной гипотезе. Может оказаться, что она не подтвердилась. Например, вы искали в объекте порядок, но большинство элементов оказались равносильными или несравнимыми, так что результирующее отношение лучше задать в виде эквивалентности. Можно ли считать, что эта эквивалентность описывает существенные свойства объекта? Вообще говоря, нет, ведь она получена при неправильных предпосылках. Как говорится, если часы пробили 13 раз, то возникает сомнение и в предыдущих 12. Если вы снова соберете данные, исходя из симметричной структуры отношения, может получиться совершенно другой результат.

Другой важный аспект – разброс значений. Желательно каким–нибудь образом сравнить исходные частные отношения с результирующим, чтобы узнать насколько они отличаются. Это интересно как само по себе (для изучения исходной совокупности критериев или испытуемых), так и для проверки надежности результатов. Действительно, если большинство частных отношений далеко отстоят от результирующего, это может говорить о неправильном выборе исходной гипотезы. Например, пусть 10 человек упорядочили элементы в порядке $(a,b,c,d)$, другие 10 – в порядке $(d,c,b,a)$ и один – в порядке $(b,a,d,c)$. При обработке (например, пороговым методом) первые два порядка “сократятся” между собой, и результатом будет третий. Но более правильным будет предположить, что в данном множестве вообще нет никакого порядка.

Способов сравнения двух отношений существует очень много, эта задача также неформализуемая.

Если вы обнаружили, что ваша гипотеза далека от истины, необходимо ее уточнить и провести все исследование заново.

## Упражнения

*2.1.* Будет ли пересечение двух рефлексивных отношений также рефлексивно? А объединение? Те же вопросы для симметричных и асимметричных отношений, для транзитивности.

*2.2.* Покажите, что пересечение эквивалентностей – также эквивалентность. То же для отношения порядка (используйте результаты предыдущего упражнения).

*2.3.* Почему объединение нескольких эквивалентностей может не быть эквивалентностью? Тот же вопрос для отношения порядка.

*2.4.* Разбейте студентов вашей группы на классы по различным критериям "похожести". Постройте комплексное разбиение на группы. Какой метод построения вы предпочтете?

*2.5.* Литературовед изучает творчество некоторого поэта. Десять его стихотворений можно охарактеризовать так: с 1-го по 5-ое – лирические, 6-ое и 7-ое – эпические, а оставшиеся – юмористические. Кроме того, 1-ое, 2-ое, 3-ье, 5-ое, 6-ое и 8-ое написаны в рифму, а остальные – белые. Отличаются они и стихотворными размерами: 2-ое, 6-ое и 10-ое написаны хореем, 4-ое и 8-ое трехсложные, а остальные – ямб.

Разбейте эти 10 стихотворений на группы похожих между собой произведений. Однозначен ли ответ?

*2.6.* Покажите, что правило Кондорсе для линейных порядков является частным случаем порогового метода при $r = k/2$.

*2.7.* Предположим, что студенты А, Б, В, Г, Д и Е сдают три экзамена (полученные оценки указаны в таблице). Эти данные позволяют сравнить успехи студентов по каждому экзамену. А кто оказался лучшим по всем трем? Сравните успехи студентов по результатам данной сессии несколькими методами.

| Студент | 1 экз. | 2 экз. | 3 экз. |
|---|---|---|---|
| А | 3 | 3 | 5 |
| Б | 3 | 4 | 4 |
| В | 5 | 4 | 5 |
| Г | 4 | 5 | 3 |
| Д | 4 | 3 | 4 |
| Е | 5 | 4 | 3 |

*2.8.* У молодого человека 4 знакомых девушки: Алла, Вера, Гуля и Диляра. Он считает, что Вера красивее Аллы, а Диляра – Гули (в остальных случаях он не может сказать, кто из девушек красивее). Кроме того, Алла умнее Гули, а та, в свою очередь, умнее Веры (про ум Диляры он ничего сказать не может). И еще он уверен, что Алла – самая добрая из всех девушек. Помогите молодому человеку упорядочить девушек от "худшей" к "лучшей". Однозначен ли ответ?

*2.9.* Найдите объединение множеств больших и малых городов. Проинтерпретируйте полученную характеристическую функцию.

*2.10.* Является ли отношение вложения нечетких множеств (Опр. 14) нечетким или четким?

*2.11.* Данте в "Божественной комедии" помещает в 4 круг ада растратчиков и скупцов: "Все те, кого здесь видит взгляд,\\ умом настолько в жизни были кривы,\\ что в меру не умели делать трат." (Ад, Песнь 7). Что могло не понравиться математику в этой идее?

*2.12.* Среди множества предметов, которые преподают вам в этом году, выделите нечеткое множество трудных предметов. Характеристическую функцию постройте путем опроса студентов своего курса. То же для скучных предметов. На основе этой информации постройте множества "трудных и скучных" предметов, а также "нетрудных и нескучных". Пересекаются ли эти множества?

*2.13.* Попробуйте дать определение нечеткой эквивалентности; нечеткого порядка. Предложите методы их отыскания на основе опросов информантов.

# 4. Элементы математической теории конфликтов

Вся наша жизнь – игра…

Предыдущую главу можно было бы назвать “теорией компромисса”, так как мы разбирали процедуры, способные “примирить” отличающиеся, хотя и близкие точки зрения на предмет. Это возможно только в том случае, когда решение принимается одним лицом (исследователем, экспериментатором, составителем инструкции для голосования). Если же в ситуации сталкиваются интересы нескольких лиц, то она чаще всего является конфликтной. Не в том смысле, что компромисса в таком случае найти нельзя, а в том, что не существует решения, полностью устраивающего всех участников. Подобные проблемы изучаются разделом математики, который так и называется теория конфликтов, или, по–другому, теория игр.

## Основные понятия

В соответствии с традицией участников конфликта называют обычно игроками. Считается, что у каждого из игроков есть некоторый набор возможностей поведения в конфликтной ситуации, которые он выбирает сам и которые называются стратегиями. Вопрос перечисления или построения стратегий также может относиться к области теории игр, но здесь он нас не будет интересовать. Когда каждый из игроков выбрал одну из своих стратегий, мы получаем некоторую игровую ситуацию.

Важно, что в зависимости от выбора той или иной стратегии каждый игрок получает некоторый выигрыш (в этот термин мы включаем и проигрыш, который будем считать выигрышем с отрицательным знаком). Проблема заключается в том, что величина выигрыша конкретного игрока зависит не только от его собственных действий, но также и от того, какие стратегии выберут его соперники. Поэтому, даже зная, что ему сулит каждая ситуация, игрок не может однозначно выбрать стратегию.

Пример. Представим себе, что молодая супружеская пара выбирает способ провести выходной. Муж хочет пойти на стадион, а жена – посмотреть спектакль, но идти отдельно друг от друга они не хотят (удовольствие равно нулю). Эту ситуацию можно описать с помощью двух матриц выигрыша – одна для жены и одна для мужа:

Выигрыш жены

| Жена \ Муж | Стадион | Театр |
|---|---|---|
| Стадион | 1 | 0 |
| Театр | 0 | 3 |

Выигрыш мужа

| Жена \ Муж | Стадион | Театр |
|---|---|---|
| Стадион | 4 | 0 |
| Театр | 0 | 1 |

Одноименные клетки таблиц соответствуют одной и той же ситуации. Мы видим, что в данном случае нет такой ситуации, которая была бы максимально выгодна обоим супругам одновременно.

☝ Замечание. Следует помнить, что выигрыш не всегда задается в количественной шкале. Достаточно того, что игрок может сравнить между собой различные игровые ситуации (по принципу лучше–хуже), а значит, шкала может быть и порядковой, причем у каждого игрока она своя. ☺

Какое решение супругов вы считали бы наилучшим? Ясно, что выбор может идти только между вариантами (стадион, стадион) и (театр, театр), так как два другие невыгодны для обоих. Те, кто впервые сталкивается с подобной проблемой, обычно говорят, что лучший выбор – идти на стадион, так как общий выигрыш в этом случае больше. Но правомерна ли такая постановка вопроса? Видимо, нет, и по двум причинам. Во–первых, как говорилось в замечании, выигрыш супругов измеряется в неколичественной шкале, так что суммировать его и вообще сравнивать элементы из разных таблиц не имеет смысла. Действительно, можно ли считать, что удовольствие мужа от матча измеряется в тех же единицах, что и удовольствие жены от спектакля?

Но и для количественного случая суммарный или общий выигрыш не является подходящим критерием. Действительно, с точки зрения жены ее потеря (две “единицы удовольствия”) гораздо важнее, чем приобретение трех “единиц” другим человеком (мужем). Еще яснее это будет, если мы обострим ситуацию: предположим, что кто–то требует у вас деньги под тем предлогом, что ему они нужнее, чем вам. Отдадите ли вы “свои кровные” ради увеличения общего количества пользы?

## Типы игровых ситуаций

Как мы видели, в задаче о проведении досуга есть две совершенно равноправные “наилучшие” ситуации.

Определение 16. Игровая ситуация называется оптимальной по Парето, если не существует другой ситуации, в которой выигрыши всех игроков были бы не меньше, и хотя бы у одного он был больше.

Можно сказать, что оптимальная ситуация – такая, когда нельзя сделать всем не хуже, а кому–то и лучше. Как мы видели, такая ситуация в конфликте, вообще говоря, не одна.

Например, вам надо поделить некоторую сумму (скажем, 100 руб.) между двумя людьми. Какое деление можно считать оптимальным? Обычно говорят “поровну”. Но такое деление можно назвать не оптимальным, а справедливым (да и то с натяжкой: все зависит от ситуации). Оптимальным же в смысле Парето будет любое деление, лишь бы были розданы все деньги. Например, деление 45 руб.+45 руб. не оптимально, так как остается еще 10 руб., которые можно раздать обоим или добавить одному “игроку”. С другой стороны, деление 10 руб.+90 руб. – оптимально, так как невозможно увеличить выигрыш одного, не отнимая деньги у другого.

Естественно предположить, что игрокам выгодно выбирать стратегии так, чтобы ситуация была оптимальной. На самом деле это не всегда так, ведь каждый игрок учитывает собственную пользу, а не "общественную". Рассмотрим теперь поведение игроков подробнее. Какие стратегии они будут выбирать?

Пример. В двух хоккейных командах есть по несколько “пятерок” игроков. В решающий момент матча, когда осталось времени только на один гол, тренеры решают, кого им выпустить на лед. При этом они знают, что качество игры каждой пятерки зависит от того, с кем из соперников ей придется столкнуться. Вероятность (в процентах) забить гол в каждом случае дана в таблице. Вторая таблица повторяет первую со знаком “–” (так называемая игра с нулевой суммой: или антагонистическая игра: сколько выиграет один, столько проиграет другой). Знак “–” означает, что гол будет с такой вероятностью пропущен. Как поступят тренеры?

Выигрыш “Спартака”, в %

| Пятерки "Спартака" | Пятерки “Динамо” | | |
|---|---|---|---|
| | Д1 | Д2 | Д3 |
| С1 | 70 | 30 | 10 |
| С2 | –70 | 20 | –60 |
| С3 | –10 | 50 | –10 |
| С4 | 60 | –20 | –90 |

Выигрыш “Динамо”, в %

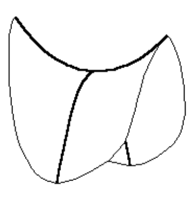
| Пятерки "Спартака" | Пятерки “Динамо” | | |
|---|---|---|---|
| | Д1 | Д2 | Д3 |
| С1 | –70 | –30 | –10 |
| С2 | 70 | –20 | 60 |
| С3 | 10 | –50 | 10 |
| С4 | –60 | 20 | 90 |

Принцип осторожной игры. Как может рассуждать тренер “Спартака”? “Если я выпущу первую пятерку, то в худшем случае получу 10% выигрыша (если у “Динамо” будет Д3). Если выпущу С2, то в худшем случае получу –70%.” Точно также для третьей пятерки худший результат будет –10%, а для С4 – даже –90%. Ясно, что самой осторожной игрой будет выпустить первую пятерку, так как она дает больший гарантированный выигрыш.

Рассуждая так же, тренер “Динамо” выпустит на лед Д3, так как худший выигрыш в этом случае –10%, а в других – –70% и –50%. ☺

Седловая точка. В примере ситуация (С1, Д3) является осторожной для обеих команд. Кроме того, им нет смысла от нее отклоняться: никакое одностороннее изменение не даст выигрыша командам. Подобная ситуация для игры с нулевой суммой называется седловой точкой.

Смысл этого названия станет понятным, если мы будем описывать антагонистическую игру одной матрицей выигрыша (скажем, первого игрока). Значение выигрыша в выбранной клетке будет наибольшим в столбце, поэтому первому игроку невыгодно менять стратегию (чтобы не уменьшить выигрыш). В то же время, это число наименьшее в строке, так что меняя стратегию, второй игрок увеличит свой проигрыш (т.е. также уменьшит выигрыш). Представление о максимуме по одному направлению и минимуме по другому и отражается в образном названии "седло".



Наличие такой точки является скорее исключением, чем правилом. В общем случае аналогом седловой точки будет так называемая равновесная ситуация.

Определение 17. Игровая ситуация называется равновесной по Нэшу, если ни один из игроков не может улучшить свой выигрыш (даже за счет других игроков) только своими действиями, т.е. изменяя свою стратегию, при условии, что все остальные игроки выбор не меняют.

Предположим, что 10 человек решили вложить по 1 тысяче руб. в какое–нибудь дело. У каждого есть выбор: вложить деньги в акции с доходом 100% или в общее дело, которое не дает дохода, но зато вложенные деньги принадлежат всем вкладчикам. (Можно считать, что дело связано с охраной окружающей среды или устройством дорог, – чем–то, что полезно всем). Какое распределение денег будет в этом случае оптимальным, а какое – равновесным? Оптимальной будет ситуация, когда все вложили деньги в общее дело: тогда каждый будет иметь по 10 тыс. р. Но будет ли такая ситуация равновесной? Как будет рассуждать каждый участник? Сейчас все деньги принадлежат мне, но они не дают дохода. Еще лучше будет, если я свою тысячу вложу в акции: тогда у меня будут и 10 тыс. р., и еще доход 1 тыс. р., т.е. всего 11 тыс. р. Итак, мы видим, что любой участник односторонними действиями может повысить свой выигрыш, уменьшив при этом выигрыши своих “соперников” (у них останется по 9 тыс. р.).

Но, конечно, таким образом будет рассуждать каждый: любую сумму, которой он может распоряжаться, ему выгоднее вложить под проценты. В результате все деньги будут изъяты из общего дела и вложены в акции. Именно эта ситуация будет равновесной, но при этом каждый участник получит только по 2 тыс. р.!

Этот пример типичен. Как правило, равновесная ситуация не бывает оптимальной, а оптимальная – равновесной. Между тем на практике может реализоваться только равновесная ситуация. Видимо, отчасти в этом кроется неудача разнообразных утопических проектов “всеобщего благоденствия”.

## Упражнения

*3.1.* Как связано понятие оптимальности по Парето с понятием максимального элемента (рассмотрите игру как задачу упорядочения игровых ситуаций по многим критериям).

*3.2.* Покажите, что в игре с нулевой суммой любая ситуация оптимальна.

*3.3.* Покажите, что седловая точка в антагонистической игре состоит из осторожных стратегий обоих игроков. Может ли в одной игре быть несколько седловых точек?

*3.4.* В таблице даны выигрыши двух игроков в некоторой игре. Найдите оптимальные и равновесные ситуации (в каждой клетке через запятую записаны выигрыши $A$ и $B$). Какая стратегия является острожной для каждого игрока?

| Стратегии $A$ | Стратегии $B$ | | |
|---|---|---|---|
| | $B1$ | $B2$ | $B3$ |
| $A1$ | (7,8) | (10,2) | (1,5) |
| $A2$ | (2,8) | (3,5) | (6,7) |
| $A3$ | (4,6) | (5,7) | (4,9) |
| $A4$ | (3,4) | (8,9) | (5,5) |

Указание. Ситуация ($A1$,$B1$) не оптимальна, так как пара (8,9) в клетке ($A4$,$B2$) больше, чем пара (7,8). Но она равновесная: игрок $A$ не может увеличить свой выигрыш, так как в первом столбце все его выигрыши меньше 7. Аналогично в первой строке все выигрыши $B$ меньше 8.

Ответ. Оптимальные ситуации: ($A1$, $B2$), ($A4$, $B2$); равновесная ($A1$, $B1$); осторожные стратегии $A3$ и $B3$.

*3.5.* Вы с приятелем ищете работу. Вам предлагают два места, на каждом работа для двоих. В первом месте вы заработаете 200 р., если ваш товарищ будет выполнять подсобную работу и получит 50 р. Без его помощи вы сможете заработать только 100 р., а он без вашей – вообще ничего. Во втором месте, наоборот, требуется работник с его специальностью, так что он сможет заработать с вашей помощью 500 р., (вы только 40 р.), а в одиночку – 200 р. Вы без него на этом месте ничего не заработаете. Постройте матрицы выигрышей для вас обоих. Какие стратегии в этой игре осторожные? Какие ситуации оптимальные? Равновесные?

*3.6.* Двое подозреваемых совместно участвовали в преступлении, однако улик на них нет. Их задержали за нарушение правил дорожного движения и предлагают сделку: если один человек предоставит улики на другого, ему простят нарушение правил движения и оставят права. Виновному же в тяжком прегрешении грозит 10 лет тюрьмы. Как вы думаете, как может развиваться ситуация дальше?

*3.7.* Игра “дефицит”. Предположим, что количество некоторого товара в торговой сети в точности соответствует спросу. Какая ситуация в этом случае будет оптимальной? равновесной? Рассмотрите случай, когда какой–то покупатель закупил товара “с запасом”, впрок.

# 5. Литература


1. Вольский, Лезина. Голосование в малых группах.
2. Окунь, Ян. Факторный анализ.
3. Фрумкина. Цвет, смысл, сходство.

# 6. Алфавитный указатель