

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

На правах рукописи

**ФРОЛОВ Александр Геннадьевич**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОД  
КОЛЛОКАЦИИ В ТЕОРИИ СЛАБОНАПРАВЛЯЮЩИХ  
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ**

05.13.18 – математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —  
доктор физико-математических  
наук, доцент Е.М. Карчевский

**КАЗАНЬ — 2012**

# Оглавление

Введение . . . . .	3
<b>ГЛАВА 1. Задачи о собственных волнах слабонаправляющих волно-</b> <b>водов в однородной среде, полупространстве и слоистой среде .</b>	<b>31</b>
§ 1. Постановки задач . . . . .	31
§ 2. Локализация собственных значений . . . . .	43
§ 3. Интегральные представления собственных функций. . . . .	47
§ 4. Дискретность характеристических множеств и зависимость харак- теристических значений $\beta$ от параметра $\omega$ . . . . .	55
§ 5. Существование поверхностных волн . . . . .	62
<b>ГЛАВА 2. Метод коллокации решения спектральных задач для дву-</b> <b>мерных слабо сингулярных интегральных уравнений . . . . .</b>	<b>80</b>
§ 1. Метод коллокации решения линейных задач . . . . .	81
§ 2. Численное решение задач о поверхностных волнах . . . . .	86
§ 3. Метод коллокации решения нелинейных задач. . . . .	119
§ 4. Численное решение задач о вытекающих волнах . . . . .	123
§ 5. Программный комплекс . . . . .	142
<b>Приложение . . . . .</b>	<b>161</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>173</b>

## Введение

Для оптоэлектроники последние годы характерны изучением и техническим освоением миниатюрных интегральных оптических схем (при изготовлении которых используются нано-материалы [43]) вместо классических электрических [21] и бурным развитием оптических телекоммуникационных технологий передачи данных на большие расстояния [52]. В проектировании и анализе современных оптических волноводных структур важную роль играет математическое моделирование и применение средств вычислительной техники [84]. На этом пути возникают задачи теории диэлектрических (оптических) волноводов [54].

Задачи о собственных волнах диэлектрических волноводов являются задачами поиска частных решений уравнений Максвелла в виде бегущих волн в неограниченных областях, удовлетворяющих условиям сопряжения на границах раздела сред и соответствующим условиям на бесконечности [18], [53]. В диссертации задачи о собственных волнах диэлектрических волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде, решаются в скалярном приближении слабонаправляющих волноводов [54]. Несмотря на относительную простоту, это приближение широко используется при математическом моделировании оптических волноводов (см., напр., [9], [18], [30], [35], [36], [54]).

Наиболее полная информация получена о решениях относительно простой задачи о собственных волнах волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной окружающей среде [54]. Хорошо изучены свойства поверхностных собственных волн такого волновода. Собственные функции задачи (амплитуды собственных волн) в этом случае отвечают ко-

нечному числу собственных значений (постоянных распространения), принадлежащих ограниченному интервалу вещественной оси. Отличительными особенностями поверхностных собственных волн являются экспоненциальное убывание на бесконечности их амплитуд и симметричность соответствующего дифференциального оператора.

В работе Б.З. Каценеленбаума [34] на основе анализа характеристического уравнения, полученного методом разделения переменных, было доказано существование другого типа собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с постоянным вещественным показателем преломления. Они получили название вытекающих. Вытекающие собственные волны имеют экспоненциально возрастающие на бесконечности амплитуды. При рассмотрении задач о вытекающих собственных волнах возникают несамосопряженные дифференциальные операторы, а соответствующие постоянные распространения являются комплексными.

Важно отметить, что, как было доказано в работе [34], постоянные распространения собственных волн указанных двух типов непрерывно зависят от радиуса волновода, показателей преломления волновода и окружающей среды, частоты электромагнитных колебаний. С их изменением собственные волны могут трансформироваться из одного типа в другой.

Несколько десятилетий значительные усилия исследователей были направлены на построение алгоритмов расчета поверхностных собственных волн. Разработано большое количество методов, приспособленных для областей специальной формы. Так, для расчета диэлектрических волноводов неоднородного заполнения с поперечным сечением, близким к круговому, широкое применение нашли лучевой метод, метод нормальных волн и асимптотические методы [17], [54]. Известно точное решение задачи о собственных волнах однородного диэлектрического волновода эллиптического поперечного сечения,

полученное методом разделения переменных [41].

Для расчета волноводов с произвольным контуром поперечного сечения применялся метод коллокации (в дифференциальной постановке) [80], [81], вариационные методы [5], [9], [10] и различные модификации метода частичных областей [5], [6], [15], [38], [58], [87], [93].

Для решения задач о поверхностных собственных волнах диэлектрических волноводов с неоднородным заполнением применялся метод конечных разностей [1], [22], [50], [51].

В работах [23], [42], [79] для расчета поверхностных собственных волн диэлектрических волноводов с постоянным показателем преломления применялись граничные интегральные уравнения, построенные на основе формулы Грина. Теоретического обоснования этого метода в указанных работах проведено не было.

Основное внимание исследователей прежде всего было направлено на построение алгоритмов, анализ и интерпретацию полученных численных результатов. Важные и сложные вопросы существования решений, сходимости применяемых численных методов либо не рассматривались, либо оставались исследованными недостаточно подробно.

Наибольшего прогресса при численном решении задач о поверхностных собственных волнах линейных изотропных волноводов в однородной окружающей среде, по-видимому, удалось достичь Р.З. Даутову и Е.М. Карчевскому на пути применения и обоснования метода точных нелокальных граничных условий [18]. Этот метод оказался чрезвычайно эффективным и при исследовании существования решений указанных задач.

В работах С.И. Соловьева [94], Е.М. Карчевского и С.И. Соловьева [56] предложен другой метод исследования разрешимости этих задач, основанный на специальных вариационных постановках на всей плоскости. Эти постановки позволили применить для анализа метода спектральной теории вполне непрерывных операторов. Благодаря

ря работам Р.З. Даутова, Е.М. Карчевского [18], С.И. Соловьева [94], Е.М. Карчевского и С.И. Соловьева [56] можно утверждать, что теория разрешимости задач о поверхностных собственных волнах линейных изотропных волноводов в однородной окружающей среде построена с исчерпывающей полнотой.

Однако, многие важные для приложений вопросы, связанные с анизотропией, нелинейностью сред, распространением электромагнитных волн в неоднородных неограниченных областях, вытеканием энергии в окружающую среду остаются еще относительно слабо изученными.

Достаточно эффективные и универсальные алгоритмы решения задач дифракции в бесконечных областях основаны на переходе к интегральным уравнениям [88], [39], [37], [48]. Такой подход позволяет, в частности, точно учесть поведение решений задач дифракции на бесконечности. Он применим для нелинейных и анизотропных сред. Разработке и обоснованию численных методов решения интегральных уравнений теории дифракции посвящено большое количество работ (см., напр., [4], [11]–[14], [24], [26], [27], [37], [40], [45], [46], [48], [69]).

Применительно к спектральной теории диэлектрических волноводов метод интегральных уравнений значительное развитие получил в работах Ю.Г. Смирнова и его учеников (см. [53] и цитированную там литературу). Для задач о поверхностных собственных волнах нелинейных волноводов получены постановки в виде спектральных задач для нелинейных интегральных операторов. Доказано существование их решений методом сжимающих отображений и обоснованы итерационные методы приближенного решения.

В монографии Р.З. Даутова и Е.М. Карчевского [18] методом интегральных уравнений для ряда общих задач о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах линейных волноводов, получены результаты о качественных свойствах спектра, разработаны и обоснованы численные алгоритмы решения спектральных задач для волново-

дов с постоянным показателем преломления, основанные на аппроксимации граничных интегральных уравнений методом Галеркина.

В этом контексте необходимо упомянуть и о близких спектральных задачах теории дифракции — задачах о собственных волнах щелевых и полосковых линий. В работах А.С. Ильинского, Ю.Г. Смирнова, Ю.В. Шестопалова, Е.В. Чернокожина (см. [28], [91] и цитированную там литературу) указанные задачи формулируются как задачи поиска характеристических чисел фредгольмовых голоморфных оператор-функций, полученные на основе метода интегральных уравнений. В работах этих авторов анализируются качественные свойства характеристического множества: локализация, дискретность, существование характеристических чисел. Исследования опираются на общую теорию нелинейных спектральных задач, развитую в работах [16], [33]. Предлагаются и исследуются проекционные методы расчета волноведущих структур. При обосновании численных методов используются результаты [2], [3] о проекционных методах решения нелинейных спектральных задач для фредгольмовых операторов.

Решения задач в указанных работах разыскивались в классах функций, удовлетворяющих на бесконечности парциальным условиям излучения. Парциальные условия излучения были введены А.Г. Свешниковым в работе [49]. Применение этих условий в задачах о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов позволяет разыскивать наряду с поверхностными и вытекающие собственные волны [18], [31], [77], [89].

Вытекающие собственные волны диэлектрических волноводов играют важную роль в анализе эффектов излучения и преобразования волн, возникающих в задачах о стыковке [86] и изгибе волноводов [97], а также в задачах излучения при анизотропии волноводов [92], [85].

В связи с этим в последнем десятилетии начали разрабатываться универсальные методы, предназначенные для расчета вытекающих волн. Так, в работе [72] для поиска вытекающих волн диэлектриче-

ских волноводов с постоянным показателем преломления применялся метод граничных интегральных уравнений. Интегральные представления решений, основанные на формуле Грина, в сочетании с методом конечных элементов использовались для расчета вытекающих собственных волн неоднородных диэлектрических волноводов в статье [73]. Доказательства сходимости предлагаемых методов в этих работах проведено не было.

Ранее подход, основанный на сочетании метода конечных элементов и интегрального представления решений вне области поперечного сечения волновода с использованием соответствующей функции Грина, применялся в статье [71] для поиска поверхностных собственных волн волноводов в плоско-слоистой среде. Важно отметить, что в этой работе не было проведено исследования сходимости метода, однако, было доказано существование решения задачи и изучены свойства собственных волн.

Известна физическая постановка задачи о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в плоско-слоистой среде (состоящей из двух слоев) в предположении о том, что показатель преломления слоя, в котором находится волновод, сильно отличается в большую сторону от показателя преломления второго слоя [9]. Это предположение приводит к задаче о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве [9].

В работе Е.М. Карчевского и С.И. Соловьева [55] для исследования собственных волн неоднородных слабонаправляющих волноводов, удовлетворяющих парциальным условиям излучения, использовалось двумерное слабо сингулярное интегральное уравнение по области поперечного сечения волновода. В частном случае поверхностных волн соответствующий оператор самосопряженный. Это позволило доказать непустоту его спектра. Доказано, что характеристическое множество общей задачи о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах может состоять лишь из изолированных точек соответству-

ющей оператор-функции, являющихся ее характеристическими значениями, непрерывно зависящими от неспектральных параметров.

Построенное в [55] уравнение может быть использовано и для численного решения задачи, например, методом коллокации. Это один из наиболее эффективных с точки зрения экономии вычислительных ресурсов методов решения линейных и нелинейных спектральных задач для многомерных интегральных уравнений [96].

Подводя итог, можно утверждать, что наибольшего прогресса в задачах о собственных волнах неоднородных слабонаправляющих волноводов удалось достичь при анализе поверхностных волн волноводов в однородной среде (доказано существование поверхностных волн, изучены их свойства, теоретически обоснован численный метод их поиска [18], [56]). Теоретически обоснованные методы расчета вытекающих волн волноводов, находящихся в однородной среде, могут быть разработаны на основе известной нелинейной спектральной задачи для двумерного слабо сингулярного интегрального уравнения [55]. Численные методы для задачи о поверхностных волнах волновода в плоско-слоистой среде развиты относительно слабо, однако вопросы существования и свойства ее решения хорошо изучены [71]. Для задачи о поверхностных волнах волновода в полупространстве известна лишь физическая постановка [9]. Постановка задачи о вытекающих собственных волнах волновода в полупространстве не известна, но эта задача может быть сформулирована аналогично задачам о собственных волнах щелевых и полосковых линий [28], [91].

Таким образом, проблемы исследования математических моделей спектральной теории слабонаправляющих диэлектрических волноводов являются весьма актуальными. Прежде всего, целью диссертационной работы является получение новой формулировки задачи и исследование в рамках единой математической модели свойств поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода, находящегося в полупространстве. Ак-

туальным является исследование вопросов существования решения этой задачи.

Актуальной является проблема разработки теоретически обоснованных общих методов вычисления собственных волн всех известных типов неоднородных слабонаправляющих диэлектрических волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде. Актуальной является проблема реализации этих методов в виде комплексов программ, тестирование и анализ эффективности методов.

В настоящей работе сформулирована нелинейная спектральная задача для двумерного слабо сингулярного интегрального уравнения, удобная для теоретического исследования и численного решения общей задачи о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах неоднородного слабонаправляющего диэлектрического волновода, находящегося в полупространстве. Установлена эквивалентность этой задачи исходной спектральной задаче для уравнения Гельмгольца. Исследованы вопросы локализации и дискретности спектра.

Задачи о поверхностных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде эквивалентным образом сведены к параметрическим линейным спектральным задачам для интегральных операторов с симметричными, положительными, слабо полярными ядрами. Доказано существование решения задачи о поверхностных волнах волновода в полупространстве, проанализированы его свойства.

Построен и теоретически обоснован метод коллокации численного решения спектральных задач для двумерных слабо сингулярных интегральных уравнений: линейных, эквивалентных задачам о поверхностных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде; и нелинейных, эквивалентных общим спектральным задачам о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах слабонаправляющих волноводов в од-

нородной среде и полупространстве.

Создан комплекс программ в системе Matlab. Решен ряд конкретных задач теории диэлектрических волноводов, проанализирована скорость сходимости и показана практическая эффективность предлагаемого метода путем сравнения решений с точными решениями и результатами, полученными другими авторами. Рассчитаны поверхностные и вытекающие собственные волны ряда неисследованных ранее волноводов в полупространстве и слоистой среде.

Диссертация состоит из введения двух глав и приложения. В первой главе исследуются спектральные задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде. В §1.1 приводятся постановки этих задач.

Сначала формулируется задача о собственных волнах волновода в однородной среде. Предполагается, что показатель преломления волновода незначительно отличается от показателя преломления окружающей среды настолько, что можно применить приближение слабонаправляющего волновода (см., напр., [9], [54]). В этом приближении исходная задача, сформулированная для системы уравнений Максвелла, сводится (см., напр., [18], с. 29) к скалярной.

Ненулевая функция  $u \in U_A$  называется собственной функцией *общей* задачи ( $A$ ) о собственных волнах волновода в однородной среде, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$ , если (см. рис. 1, с. 31):

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0; \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (1)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь  $\Omega$  — ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma \in C^{1,\alpha}$  — граница  $\Omega$ , область  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ ;  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $\varepsilon_0$  ( $\mu_0$ ) — электрическая (магнитная) постоянная;  $n(x) = n_\infty > 0$  при  $x \in \Omega_\infty$ , где  $n_\infty$  — постоянный показатель преломления окружающей среды;

функция  $n(x) > n_\infty$  при  $x \in \Omega$ ,  $n \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ;  $U_A$  — множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ , удовлетворяющих парциальным условиям излучения;  $\Lambda$  — риманова поверхность функции  $\ln \chi(\beta)$ , где  $\chi(\beta) = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$ ;  $u$  — функция, аппроксимирующая в приближении слабонаправляющего волновода компоненты  $H_1$  и  $H_2$  комплексной амплитуды собственной волны.

Парциальные условия излучения заключаются в том, что функция  $u$  должна быть представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда, допускающего почленное дифференцирование до любого порядка:

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi r) \exp(il\varphi), \quad r \geq R_0. \quad (3)$$

Здесь  $R_0$  — такое положительное число, что  $\Omega$  целиком лежит в круге радиуса  $R_0$ ;  $H_l^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода порядка  $l$ ;  $r, \varphi$  — полярные координаты точки  $x$ .

Частота электромагнитных колебаний  $\omega$ , постоянная распространения  $\beta$  и отвечающая им собственная функция  $u$  однозначно определяют по явным формулам (см., напр., [18], с. 29) собственную волну, распространяющуюся в волноводе.

При любом фиксированном значении  $\omega > 0$  функция из класса  $U_A$  может, как убывать, так и неограниченно возрастать на бесконечности. Это зависит того, какой области римановой поверхности  $\Lambda$  принадлежит соответствующая постоянная распространения  $\beta$ .

Риманова поверхность  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов, ее главный («физический») лист обозначается  $\Lambda_0^{(1)}$  и определяется следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(1)}.$$

С листом  $\Lambda_0^{(1)}$  соединяется лист  $\Lambda_0^{(2)}$ , который называется «нефизиче-

ским» и определяется следующим образом:

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(2)}.$$

В задачах о собственных волнах слабонаправляющих волноводов принято различать поверхностные и вытекающие собственные волны (см., напр., [18], с. 26). Вещественным  $\beta \in \mathbb{R}_0^{(1)}$ ,  $|\beta| > kn_\infty$ , отвечают *поверхностные* волны (символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$  обозначена вещественная ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$ ). Для поверхностных волн  $\text{Re}(\chi) = 0$ , а  $\text{Im}(\chi) = \sigma > 0$ , следовательно, амплитуда  $u$  любой поверхностной волны экспоненциально убывает на бесконечности:

$$u = \exp(-\sigma r) O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \sigma > 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Известно [7], что все производные такой функции также удовлетворяют парциальным условиям излучения (3), и, как следствие, условию (4).

Постоянные распространения  $\beta$  *вытекающих* волн принадлежат множеству  $\Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$  (символом  $\mathbb{R}_0^{(2)}$  обозначена вещественная ось листа  $\Lambda_0^{(2)}$ ). Амплитуды  $u$  вытекающих собственных волн экспоненциально возрастают на бесконечности потому, что для них  $\text{Im}(\chi) < 0$ .

Задаче (A) удовлетворяют амплитуды, и поверхностных, и вытекающих собственных волн. Наряду с общей задачей (A) в диссертации особое внимание уделяется ее частному случаю — задаче о поверхностных волнах. В §1.1 дается соответствующее определение. Символом  $U_B$  обозначается множество вещественных функций непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ , удовлетворяющих условию (4). Ненулевая функция  $u \in U_B$  называется собственной функцией задачи (B) о *поверхностных* собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_\infty$ , если выполнены условия (1) и (2).

Затем формулируется общая задача о собственных волнах слабонаправляющего волновода, находящегося в полупространстве. По-

становка этой задачи возникает при поиске собственных волн волновода, находящегося в плоско-слоистой среде, состоящей из двух полупространств. Причем, следуя [9], предполагается, что показатель преломления волновода слабо отличается от показателя преломления  $n_\infty = \text{const}$  того полупространства, в котором он целиком находится, а  $n_\infty$  в свою очередь намного больше положительного постоянного показателя преломления второго полупространства.

Ненулевая функция  $u \in U_C$ , называется собственной функцией *общей* задачи (C) о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$ , если (см. рис. 3, с. 39):

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty; \quad (5)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma; \quad (6)$$

$$u = 0, \quad x_2 = 0. \quad (7)$$

Здесь  $\Omega_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\} \setminus \bar{\Omega}$ ;  $U_C$  — множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ , удовлетворяющих парциальным условиям излучения вида

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi r) \sin(l\varphi), \quad r \geq R_0, x_2 \geq 0. \quad (8)$$

Множество вещественных функций, удовлетворяющих тем же свойствам гладкости, но на бесконечности, имеющих асимптотику (4), обозначается символом  $U_D$ .

Общей задаче (C) удовлетворяют амплитуды, и поверхностных, и вытекающих собственных волн волновода в полупространстве.

Ненулевая функция  $u \in U_D$  называется собственной функцией задачи (D) о *поверхностных* собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$ , если выполнены условия (5)–(7).

В конце параграфа, следуя [71], формулируется задача (E) о *поверхностных* волнах слабонаправляющего волновода в плоско-слоистой среде. Ненулевая функция  $u \in U_E$ , называется собственной функцией этой задачи, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_\infty$ , если (см. рис. 4, с. 41):

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty; \quad (9)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma; \quad (10)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial x_2} = \frac{\partial u^-}{\partial x_2}, \quad x_2 = 0. \quad (11)$$

Здесь  $\Omega_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0\} \setminus \bar{\Omega}$ ;  $U_E$  — множество вещественных, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$  функций, удовлетворяющих условию

$$|u| \leq c \exp(-\alpha r), \quad c, \alpha > 0, \quad r > R_0. \quad (12)$$

Предполагается, что область  $\Omega$  целиком лежит в нижней полуплоскости; показатель преломления  $n(x) = n_\infty = \text{const}$  при  $x \in \Omega_\infty$ ,  $x_2 < 0$ , кроме того,  $n(x) = n_t = \text{const}$  при  $x \in \Omega_\infty$ ,  $x_2 > 0$ , где  $n_\infty > n_t > 0$ .

В §1.2 исследуется локализация спектра поставленных задач. Сначала формулируется известное [55] утверждение о том, что при фиксированном  $\omega > 0$  на главном листе  $\Lambda_0^{(1)}$  поверхности  $\Lambda$  собственные значения  $\beta$  общей задачи (A) о собственных волнах волновода в однородной среде могут принадлежать лишь множеству

$$G = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}, \quad n_+ = \max_{x \in \bar{\Omega}} n(x).$$

Таким образом, при любой частоте  $\omega > 0$  у общей задачи (A) о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде на физическом листе  $\Lambda_0^{(1)}$  не может находиться никаких иных собственных значений  $\beta$ , кроме постоянных распространения поверхностных волн. Кроме того, если поверхностные волны существуют,

то их постоянные распространения обязательно принадлежат множеству  $G$ . Эти утверждения обобщают известные результаты (см., напр., [54]) о локализации спектра собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения с постоянным показателем преломления, полученные на основе элементарного анализа характеристического уравнения метода разделения переменных.

Далее доказывается теорема 1.1 о том, что и в общей задаче (С) о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве при фиксированном  $\omega > 0$  на главном листе  $\Lambda_0^{(1)}$  поверхности  $\Lambda$  собственные значения  $\beta$  могут принадлежать лишь множеству  $G$ . Доказательство основано на применении формул Грина.

Относительно локализации собственных значений задачи (E) о поверхностных волнах волновода в слоистой среде известен [71] следующий результат: для любой частоты  $\omega > 0$  собственные значения  $\beta$  задачи (E) должны удовлетворять условию  $\beta < kn_+$ .

В §1.3 строятся интегральные представления собственных функций. Сначала формулируется известное [55] утверждение о том, что если  $u$  — собственная функция общей задачи (A) о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде, отвечающая собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ , то

$$u(x) = \int_{\Omega} G_A(x, y) g^2(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (13)$$

где  $G_A(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi |x - y|)$  — фундаментальное решение уравнение Гельмгольца, функция  $g^2(y) = k^2(n^2(y) - n_\infty^2)$ .

Далее доказывается лемма 1.1 о том, что любая собственная функция общей задачи (С) о собственных волнах волновода в полупространстве, отвечающая собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ , представляется в виде (13), где вместо фундаментального решения используется известная (см., напр., [28]) функция Грина задачи Дирихле для полуплоскости  $G_C(x, y)$ . Доказательство основано на третьей формуле Грина.

Аналогично доказывается лемма 1.2 о том, что любая собственная функция задачи  $(E)$ , отвечающая собственным значениям  $\omega > 0$ , и  $\beta > kn_\infty$ , представляется в виде (13), где вместо фундаментального решения используется известная (см., напр., [71]) функция Грина задачи сопряжения  $G_E(x, y)$ . Из этого интегрального представления следует, в частности, что первые производные собственной функции экспоненциально убывают на бесконечности, а именно, удовлетворяют условию (12).

С уменьшением частоты электромагнитных колебаний  $\omega$  постоянные распространения  $\beta$  волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной окружающей среде, могут перемещаться с физического листа римановой поверхности  $\Lambda$  на нефизический (см. с. 38). Другими словами, поверхностные собственные волны могут трансформироваться в вытекающие.

Такой же эффект наблюдается при расчете дисперсионных кривых различных волноводов, находящихся как в однородной среде, так и в полупространстве. Об этом подробно говорится в параграфе, посвященном описанию численных экспериментов. Поэтому для приложений важно теоретически изучить функции  $\beta = \beta(\omega)$ . Это делается в §1.4 с привлечением методов спектральной теории оператор-функций.

В §1.4 методами спектральной теории фредгольмовых голоморфных оператор-функций изучается задача  $(C)$ . При  $x \in \Omega$  равенство вида (13) представляет собой интегральное уравнение, которое трактуется как уравнение

$$v = \lambda(\omega)T_C(\omega, \beta)v \quad (14)$$

в пространстве  $L_2(\Omega)$ . Здесь

$$(T_C(\omega, \beta))v(x) = \int_{\Omega} K_C(\omega, \beta; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

$$v = pu, \quad p^2(x) = \frac{n^2(x) - n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2} > 0,$$

$$\lambda = k^2 (n_+^2 - n_\infty^2) > 0. \quad (16)$$

где ядро  $K_C = G_C(x, y)p(x)p(y)$  — слабо полярно.

Доказывается теорема 1.2 об эквивалентности задач (C) и (14). Она состоит в том, что если  $u \in U_C$  является собственной функцией задачи (C), отвечающей некоторым собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$ , то  $v = pu$  принадлежит пространству  $L_2(\Omega)$  и дает нетривиальное решение уравнения (14) при тех же самых значениях параметров  $\omega$  и  $\beta$ . С другой стороны, если при некоторых значениях  $\omega$  и  $\beta$  уравнение (14) имеет нетривиальное решение  $v \in L_2(\Omega)$ , то  $u = v/p$  удовлетворяет равенству (13), принадлежит множеству  $U_C$  и является собственной функцией задачи (C), отвечающей тем же самым значениям  $\omega$  и  $\beta$ .

Доказательство теоремы 1.2 опирается на известные свойства интегральных операторов со слабо полярными ядрами [8]. В ходе доказательства существенным образом используются требования гладкости контура  $\Gamma$  и функции  $n$  в области  $\Omega$ .

Далее вводится оператор-функция параметра  $\beta$ :

$$C(\omega, \beta) = I - \lambda(\omega)T_C(\omega, \beta), \quad (17)$$

где  $\omega > 0$  — фиксированный параметр,  $I$  — единичный оператор в  $L_2(\Omega)$ . Доказывается, что при  $\beta \in \Lambda$  оператор  $C(\omega, \beta)$  фредгольмов.

Основным результатом параграфа 1.4 является теорема 1.3. Она состоит в следующем. Регулярное множество оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  не пусто, а именно,  $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(C)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $C(\omega, \beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  непрерывно зависит от параметра  $\omega > 0$ . Кроме того, с изменением  $\omega > 0$  характеристические значе-

ния оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  могут появляться и исчезать только на границе поверхности  $\Lambda$ , т. е. в точках  $\beta = \pm kn_\infty$  и на бесконечности.

Доказательство теоремы 1.3 основано на применении классических результатов теории фредгольмовых голоморфных оператор-функций, а именно, теоремы [16] об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, и теоремы [95] о поведении характеристических значений  $\beta$  такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра  $\omega$  в случае, если оператор-функция  $A(\beta, \omega)$  является непрерывной функцией параметров  $\beta$  и  $\omega$ .

Теорема 1.3 обобщает известные результаты (см., напр., [54]) о зависимости постоянных распространения собственных волн слабо-направляющего диэлектрического волновода кругового сечения, находящегося в однородной среде, от частоты электромагнитных колебаний, полученные в результате анализа характеристического уравнения метода разделения переменных.

Изложение материала в этом параграфе начинается с формулировки известного [55] утверждения об эквивалентности общей задачи (A) о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде и аналогичной (14) задачи вида

$$v = \lambda(\omega)T_A(\omega, \beta)v. \quad (18)$$

Далее формулируется аналогичное теореме 1.3 известное [18] утверждение о свойствах решения задачи (18).

В §1.5 исследуются вопросы существования поверхностных волн волноводов в однородной среде, полупространстве и слоистой среде. Известно (см. [18], с. 168), что при любом  $\omega > 0$  у задачи (B) о поверхностных собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде существует конечное число собственных значе-

ний  $\beta \in (kn_\infty, kn_+)$ . Точно такой же результат известен [71] и для задачи  $(E)$  о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в плоско-слоистой среде. Аналогичных результатов для задачи  $(D)$  о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве не известно.

В §1.5 используется новый метод доказательства существования поверхностных волн слабонаправляющих волноводов. Он основан на сочетании трех эквивалентных формулировок для каждой из трех задач  $((B), (D)$  и  $(E))$ : исходной классической постановки  $(I)$ , формулировки в виде спектральной задачи для интегрального оператора с симметричным слабо полярным ядром  $(II)$ , вариационной формулировки задачи на всей плоскости или полуплоскости  $(III)$ . Интегральные операторы с указанными свойствами являются самосопряженными и вполне непрерывными. Для доказательства положительной определенности этих операторов применяется формулировка  $(III)$  и эквивалентность постановок  $(I)$ – $(III)$  для каждой задачи.

Такой подход конструктивен. Задачи  $(B), (D)$  и  $(E)$  сводятся к параметрическим линейным спектральным задачам для вполне непрерывных, самосопряженных, положительно определенных интегральных операторов в ограниченной области поперечного сечения волновода. Во второй главе предлагаются и исследуются конечномерные аппроксимации указанных операторов.

Параграф 1.5 начинается с изучения задачи  $(B)$  о поверхностных собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде. Собственные функции  $u$  отвечают собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_\infty$ . В этом случае вещественная часть числа  $\chi$  равна нулю, а мнимая часть положительна:  $\chi = i\sigma$ , где

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2} > 0. \quad (19)$$

Доказывается, что при выполнении этого условия ядро интегрального оператора  $T_A(\omega, \sigma)$  является не только слабо полярным, но так-

же симметричным и положительным. Этот оператор рассматривается как оператор  $T_B(\sigma)$ , зависящий от параметра  $\sigma$ , а задача (18) при фиксированных  $\sigma > 0$  — как линейная спектральная задача определения характеристических чисел  $\lambda$  и собственных функций  $v$  оператора  $T_B(\sigma)$ :

$$v = \lambda T_B(\sigma) v. \quad (20)$$

Отметим, что введенные параметры имеют отчетливый физический смысл (см., напр., [54], [58]). Функция  $p^2$  называется «профилем волновода» (часто обозначается  $P$ ). Это основная характеристика среды, в которой распространяются собственные волны. Параметр  $\sqrt{\lambda}$  в физической литературе обычно обозначается  $V$ . Он называется «обобщенным параметром частоты». Чем больше  $V$ , тем больше поверхностных собственных волн может распространяться в волноводе. Параметр  $\sigma$  (часто обозначается  $k_t$ ) — «поперечное волновое число» — характеристика скорости затухания поверхностной волны на бесконечности. Чем меньше  $\sigma$ , тем меньше эта скорость (см. (4)).

Формулируется теорема 1.4 об эквивалентности задачи (B) и задачи (20). Эта теорема с учетом сделанных в §1.5 предположений, фактически, является частным случаем известного [55] утверждения об эквивалентности задачи (A) и задачи (18).

Затем доказывается теорема 1.5 о существовании решений задачи (20), а именно о том, что для любого  $\sigma > 0$  оператор  $T_B(\sigma)$  является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, и для этого оператора справедливы следующие утверждения.

1. Существует счетное множество положительных характеристических чисел  $\lambda_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности.

2. Система собственных функций  $\{v_i\}$  может быть выбрана ортонормированной:  $(v_k, v_i) = \delta_{ki}$ , где через  $(\cdot, \cdot)$  обозначено скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$ .

3. Минимальное характеристическое число  $\lambda_1(\sigma)$  простое (кратность равна единице), соответствующая собственная функция  $v_1(x)$  не меняет знака в области  $\Omega$ .

4.  $\lambda_1(\sigma) \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .

Доказательство проводится описанным выше методом и опирается на классические результаты теории интегральных операторов с симметричными полярными ядрами (см., напр., [8]), а также теории вполне непрерывных операторов (см., напр., [47]).

Отметим, что утверждения 1 и 2 могут быть получены на основе результатов Р.З. Даутова и Е.М. Карчевского [18]. В этой монографии существование решений задачи о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде доказано методом точных нелокальных граничных условий. В силу эквивалентности рассматриваемых задач эти утверждения, по-существу, являются следствиями теоремы 7.32 [18]. Тем не менее, в диссертации приводится их доказательство на основе вариационной постановки задачи на всей плоскости. Такой подход используется и при исследовании разрешимости задач о поверхностных волнах волноводов в полупространстве и слоистой среде, для которых точные нелокальные граничные условия не известны.

Утверждение 3 есть следствие теоремы Ентча для интегральных операторов с полярными, симметричными, положительными ядрами. Утверждение 4 известно [55]. Минимальное характеристическое число  $\lambda_1 = \lambda_1(\sigma)$  и отвечающая ему собственная функция  $v_1$  при фиксированном  $\sigma > 0$  определяют собственную волну, которая в теории волноводов носит название основной. Таким образом, третье и четвертое утверждения можно сформулировать так: у волновода, находящегося в однородной среде, при любой частоте  $\omega > 0$  существует ровно одна основная волна.

Теорема 1.5 обобщает результаты [54] о существовании и свойствах поверхностных собственных волн слабонаправляющего диэлек-

трического волновода кругового сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной среде, полученные методом разделения переменных.

Далее исследуется существование решений задачи  $(D)$  о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве. Доказывается, что при  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_\infty$  она сводится к решению задачи вида

$$v = \lambda T_D(\sigma) v, \quad (21)$$

где ядро интегрального оператора  $T_D$  выражается через функцию Грина для полуплоскости и является слабо полярным, симметричным и положительным. Формулируется теорема 1.6 об эквивалентности этой задачи исходной задаче  $(D)$ , если параметры  $\sigma$  и  $\lambda$  связаны с  $\omega$  и  $\beta$  равенствами (16) и (19). Эта теорема является частным случаем теоремы 1.2.

Доказывается теорема 1.7 о существовании собственных волн волновода в полупространстве, а именно, о том, что для любого  $\sigma > 0$  оператор  $T_D(\sigma)$  является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, и для этого оператора справедливы все утверждения, в точности повторяющие утверждения 1–3 теоремы 1.5. Четвертое утверждение формулируется следующим образом: существует такое положительное число  $c$ , что  $\lambda_1(\sigma) \rightarrow c > 0$  при  $\sigma \rightarrow 0$ . Доказательство теоремы 1.7 проводится аналогично доказательству теоремы 1.5.

Утверждение 4 этой теоремы устанавливает, что у слабонаправляющего волновода в полупространстве при достаточно малых  $\omega$  не существует поверхностных собственных волн. В этом заключается принципиальное отличие спектральных характеристик волновода в полупространстве от волновода в однородной окружающей среде, у которого при любой частоте  $\omega > 0$  существует, по крайней мере одна поверхностная собственная волна (основная).

Завершается §1.5 исследованием существования решений зада-

чи ( $E$ ) о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в слоистой среде. Доказывается, что при  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty > kn_t$  интегральный оператор  $T_E$  вида (15), где вместо фундаментального решения уравнения Гельмгольца используется функция Грина задачи сопряжения, имеет слабо полярное, вещественное и симметричное ядро. Ставится задача: найти значения  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  и ненулевые функции  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие равенству

$$v = \lambda T_E(\sigma, \lambda) v. \quad (22)$$

Формулируется теорема 1.8 об эквивалентности задачи (22) и исходной задачи ( $E$ ), если параметры  $\sigma$  и  $\lambda$  связаны с  $\omega$  и  $\beta$  равенствами (16) и (19). Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.2. Далее фиксируется  $\sigma > 0$  и наряду с задачей (22) рассматривается следующая:

$$v = \gamma T_E(\sigma, \lambda) v. \quad (23)$$

Ясно, что если при некотором  $\lambda > 0$  существует значение  $\gamma = \lambda$  и ненулевая функция  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие равенству (23), то тройка  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $v$  есть решение задачи (22).

Доказывается теорема 1.9 о существовании решений задачи (23), а именно о том, что при  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  оператор  $T_E(\sigma, \lambda)$  является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, и для этого оператора справедливы следующие утверждения.

1. Существует счетное множество положительных характеристических чисел  $\gamma_i(\sigma, \lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности.

2. Система собственных функций  $\{v_i\}$  может быть выбрана ортонормированной:  $(v_k, v_i) = \delta_{ki}$ .

Далее вводятся в рассмотрение функции  $\gamma_i = \gamma_i(\lambda)$  параметра  $\lambda > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , где  $\gamma_i(\lambda)$  — характеристические числа оператора  $T_E(\sigma, \lambda)$ ,  $\sigma > 0$  — фиксированный параметр. Приводятся результаты расчетов конкретных волноводов в слоистой среде, полученные в

диссертации методом коллокации, показывающие, что графики этих функций пересекают прямую  $\gamma = \lambda$ .

Спектральные задачи о собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде, полупространстве и слоистой среде сведены в первой главе к линейным (20), (21), (22), а также к нелинейным (14), (18), задачам поиска характеристических чисел двумерных слабо сингулярных интегральных операторов. Одним из эффективных численных методов решения подобных задач является метод коллокации [53], [96].

Во второй главе на основе метода коллокации с триангуляцией области интегрирования и кусочно-постоянной аппроксимацией собственных функций строятся приближения указанных задач. Для вычисления поверхностных и вытекающих собственных волн формулируются, соответственно, линейные и нелинейные алгебраические спектральные задачи. Исследуется сходимость метода, в частности, доказывається, что метод коллокации решения линейных задач имеет второй порядок точности при вычислении простых характеристических чисел.

§2.1 посвящен численному решению задач (20), (21) и (22). Строится правильная регулярная триангуляция  $\Omega_h$  области  $\Omega$  ( $h$  — максимальный размер треугольника), вершины многоугольника  $\Omega_h$  принадлежат  $\Gamma$ . Вводится сетка  $\Xi_h$ , состоящая из центров масс  $\xi_{j,h}$  элементов триангуляции  $\Omega_{j,h}$  (их число обозначается  $N$ ).

При фиксированных значениях параметров, от которых зависят интегральные операторы, приближенное решение задач (20), (21) и (22) разыскивается в виде кусочно-постоянной функции

$$u^{(h)}(x) = \sum_{j=1}^N u_h(\xi_{j,h}) \varphi_{j,h}, \quad (24)$$

где  $\varphi_{j,h}(x) = 1$ , если  $x \in \Omega_{j,h}$ ,  $\varphi_{j,h}(x) = 0$ , если  $x \notin \Omega_{j,h}$ . Значе-

ния  $u_{j,h} = u_h(\xi_{j,h})$  определяются из уравнений

$$u_{i,h} = \lambda \sum_{j=1}^N u_{j,h} \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) dy, \quad i = 1, \dots, N. \quad (25)$$

Множество всех характеристических чисел оператора  $T$  обозначается через  $\text{sp}(T)$ . Приближением по методу коллокации к числу  $\lambda \in \text{sp}(T)$  называется число  $\lambda_h = 1/\mu_h$ , где  $\mu_h$  есть некоторое характеристическое число матрицы  $T_h$  с вещественными элементами

$$t_{ij} = \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) dy, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Множество всех таких чисел  $\lambda_h$  обозначается через  $\text{sp}(T_h)$ .

Доказывается теорема 2.10, которая заключается в следующем. Пусть оператор  $T$  определяется правой частью равенства (20) или (21) при фиксированном  $\sigma > 0$ , либо равенства (22) при фиксированных  $\lambda > 0$  и  $\sigma > 0$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если  $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$ , то существует такое семейство  $\lambda_h \in \text{sp}(T_h)$ , что  $\lambda_h \rightarrow \lambda_0$  при  $h \rightarrow 0$ .
2. Если семейство  $\lambda_h \in \text{sp}(T_h)$  такое, что  $\lambda_h \rightarrow \lambda_0 > 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то  $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$ .
3. Если показатель преломления  $n \in C^2(\Omega)$ , а характеристическое число  $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$  простое, то существует такое  $\bar{h} > 0$ , что

$$|\lambda_h - \lambda_0| \leq ch^2, \quad h \in (0, \bar{h}).$$

Доказательство теоремы основывается на общих результатах теории дискретной сходимости проекционных методов решения линейных спектральных задач для многомерных интегральных операторов с полярными ядрами [96]. Доказательство довольно объемно и частично носит реферативный характер, поэтому в основной части диссертации приводится его схема, а подробное изложение вынесено в приложение.

В §2.2 описываются численные эксперименты решения линейных спектральных задач. Задача (25) сводится к обобщенной алгебраической задаче на собственные значения для симметричных вещественных матриц. Приводятся расчетные формулы для вычисления интегралов матричных элементов метода коллокации. Особое внимание уделяется вычислению диагональных элементов, имеющим логарифмическую особенность при совпадении аргументов; она выделяется аналитически.

Приводятся результаты численных экспериментов решения ряда конкретных задач спектральной теории диэлектрических волноводов. Полученные результаты сравниваются с известными точными решениями и решениями, полученными другими авторами, и оценивается реальная скорость сходимости метода в зависимости от  $h$ . Во всех экспериментах демонстрируется второй порядок точности метода. Рассчитываются поверхностные волны ряда неисследованных ранее волноводов в полупространстве и слоистой среде.

§2.3 посвящен решению методом коллокации нелинейных спектральных задач (14) и (18). Пусть частота  $\omega > 0$  фиксирована. Тогда общие задачи о собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде и полупространстве имеют вид

$$A(\omega, \beta)u = (I - \lambda(\omega)T(\omega, \beta))u = 0, \quad (26)$$

где  $A$  — соответствующая фредгольмова, голоморфная по  $\beta \in \Lambda$  оператор-функция. Оператор  $T$  аппроксимируется точно также, как описано в первом параграфе второй главы. Приближением по методу коллокации к решению задачи (26) называется решение нелинейной алгебраической спектральной задачи

$$A_h(\omega, \beta)u_h = 0,$$

где  $A_h(\omega, \beta)$  — матрица с элементами, нелинейно зависящими от  $\beta$ :

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \lambda(\omega) \int_{\Omega_{j,h}} K(\omega, \beta; \xi_{i,h}, y) dy, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (27)$$

Характеристическое множество оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  обозначается символом  $\sigma(A)$ . Через  $\sigma(A_h)$  обозначается множество характеристических чисел  $\beta_h \in \Lambda$  матрицы  $A_h(\omega, \beta)$ .

Доказывается теорема 2.11, которая заключается в следующем. Пусть частота  $\omega > 0$  фиксирована; оператор-функция  $T(\omega, \beta)$  параметра  $\beta \in \Lambda$  определена равенством вида (15) с ядром, выражающимся через соответствующую функцию Грина; пусть  $A(\omega, \beta)$  — соответствующая оператор-функция параметра  $\beta \in \Lambda$  определенная равенством (26). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , то существует такое семейство  $\beta_h \in \sigma(A_h)$ , что  $\beta_h \rightarrow \beta_0$  при  $h \rightarrow 0$ .

2. Если семейство  $\beta_h \in \sigma(A_h)$  такое, что  $\beta_h \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$  при  $h \rightarrow 0$ , то  $\beta_0 \in \sigma(A)$ .

3. Пусть семейство  $\beta_h \in \Lambda$  и семейство  $u_h$  нормированных векторов такие, что  $\beta_h \in \sigma(A_h)$ ,  $A_h(\omega, \beta_h)u_h = 0$  и  $\beta_h \rightarrow \beta_0$ ,  $u_h \rightarrow u_0$  при  $h \rightarrow 0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\omega, \beta_0)u_0 = 0$ ,  $\|u_0\|_{L_2(\Omega)} = 1$ .

Здесь через  $E_h$  обозначено пространство сеточных функций со значениями в точках коллокации и максимум-нормой,  $p_h$  — соответствующий проектор.

Доказательство этой теоремы опирается на общие результаты [3] о проекционных методах решения нелинейных спектральных задач для фредгольмовых операторов.

В §2.4 описываются численные эксперименты поиска методом коллокации вытекающих собственных волн волноводов, находящихся в однородной среде и полупространстве. Для решения нелинейных конечномерных спектральных задач применяется метод обратных итераций с невязкой [90]. Приводятся результаты расчета дисперсионных кривых и линий уровня вытекающих собственных волн однородных и неоднородных волноводов различных сечений. Исследуется сходимость метода коллокации в зависимости от  $h$  путем сравнения решений, полученных при разных  $h$ , с известными точными решениями

и решениями, полученными на больших сетках. Эксперименты показывают, что метод имеет второй порядок точности. Приводятся результаты численных экспериментов поиска вытекающих собственных волн ряда неисследованных ранее волноводов в полупространстве.

В §2.5 описывается комплекс программ на языке Matlab, в которых реализованы предложенные методы и алгоритмы. Программы позволяют строить дисперсионные кривые и находить амплитуды поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющих волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и слоистой среде. Работоспособность программ иллюстрируется в широком диапазоне значений физических и расчетных параметров.

В приложении приводится подробное доказательство теоремы 2.10. Основные результаты диссертации.

1. Сформулирована нелинейная спектральная задача для фредгольмовой голоморфной оператор-функции, содержащей двумерный слабо сингулярный интегральный оператор, эквивалентная общей задаче о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве. Доказано, что для всех значений частоты электромагнитных колебаний характеристическое множество может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями. Установлено, что характеристические значения непрерывно зависят от частоты и могут появляться и исчезать лишь на границе области голоморфности оператор-функции.

2. Сформулированы параметрические задачи на собственные значения для интегральных операторов с симметричными, слабо полярными ядрами, эквивалентные задачам о поверхностных собственных волнах волноводов в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде. Доказано, что для всех допустимых значений параметров у задачи о поверхностных волнах волновода в полупространстве существует счетное множество решений.

3. Разработан метод коллокации численного решения спектральных задач для двумерных слабо сингулярных интегральных уравнений: линейных, эквивалентных задачам о поверхностных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде; и нелинейных, эквивалентных общим задачам о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде и полупространстве. Доказана сходимость метода коллокации решения линейных и нелинейных задач.

4. Метод коллокации реализован в виде комплекса программ на языке Matlab. Показана практическая эффективность предлагаемого метода. Численными экспериментами подтвержден теоретический результат о том, что метод имеет второй порядок скорости сходимости при вычислении простых характеристических чисел линейных задач; продемонстрировано, что метод имеет такую же скорость сходимости и при решении нелинейных задач.

Результаты диссертации докладывались на Международных научных конференциях ММЕТ (Киев, 2010 г.), «Дни дифракции» (Санкт-Петербург, 2011 г.), молодежных научных школах-конференциях «Лобачевские чтения» (Казань, 2010 и 2011 гг.), Всероссийской молодежной научно-инновационной школе «Математика и математическое моделирование» (Саров, 2010 г.), Международном семинаре «Супервычисления и математическое моделирование» (Саров, 2009 г.), на семинаре «Математическое моделирование и математическая физика» кафедры прикладной математики КФУ (руководитель — Н.Б. Плещинский), на итоговых конференциях КФУ 2011 и 2012 гг., на итоговых научно-образовательных конференциях студентов КФУ 2009, 2010 и 2011 гг. и опубликованы в [59]–[68], [74]–[76].

В совместных работах [59], [65], [66], [74]–[76] результаты принадлежат авторам в равной мере.

## ГЛАВА 1

# Задачи о собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде, полупространстве и слоистой среде

### § 1. Постановки задач

**1. Волновод в однородной среде.** Пусть цилиндрический диэлектрический волновод является бесконечно длинным и находится в неограниченном пространстве с постоянным показателем преломления  $n_\infty$ . Будем считать, что образующая цилиндра параллельна оси  $x_3$ , показатель преломления  $n$  внутри цилиндра не зависит от переменной  $x_3$  и является вещественной функцией пространственных переменных  $x_1$  и  $x_2$ . В дальнейшем символом  $x$  будем обозначать вектор с координатами  $x_1$  и  $x_2$ . Обозначим символом  $\mathbb{R}^2$  плоскость  $\{x_3 = \text{const}\}$ . Пусть  $\Omega$  — область поперечного сечения волновода — ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Обозначим символом  $\Gamma$  границу области  $\Omega$  (см. рис. 1).

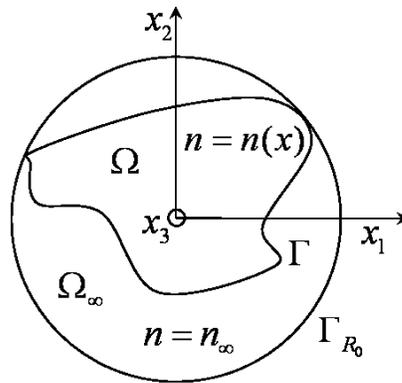


Рис. 1. Поперечное сечение волновода в однородной среде

Будем считать, что граница  $\Gamma$  принадлежит классу  $C^{1,\alpha}$ , т. е. выполнены следующие условия.

1. В каждой точке кривой  $\Gamma$  можно провести единственную касательную.

2. Существует такое число  $r_0 > 0$ , что для каждой точки  $x \in \Gamma$  окружность  $S(x, r_0)$  пересекает из  $\Gamma$  кусок кривой  $\gamma(x, r_0)$  такой, что он может быть описан уравнением  $y_2 = \varphi(y_1)$  в так называемой местной декартовой системе координат, начало которой расположено в точке  $x$ , ось  $y_1$  направлена по касательной к кривой  $\Gamma$ .

3. Производная функции  $\varphi$  удовлетворяет условию Липшица с показателем  $\alpha \in (0, 1]$ , т. е.

$$|\varphi'(y_1^1) - \varphi'(y_1^2)| \leq L|y_1^1 - y_1^2|^\alpha,$$

для любых  $y_1^1, y_1^2 \in \gamma'(x, r_0)$ , где  $\gamma'(x, r_0)$  — проекция  $\gamma(x, r_0)$  на ось  $y_1$ . Величины  $r_0, L, \alpha$  можно выбрать общими для всех точек кривой  $\Gamma$ .

Кривые с такими свойствами называются кривыми Ляпунова (см., напр., [8], с. 409).

Относительно показателя преломления  $n$  предположим следующее: функция  $n = n(x) > n_\infty > 0$ ,  $x \in \Omega$ , принадлежит множеству  $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ;  $n = n_\infty$ ,  $x \in \Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ .

Дополнительно предположим, что показатель преломления волновода настолько слабо отличается от показателя преломления окружающей среды, что можно применить приближение слабонаправляющего волновода (см., напр., [9], [54]). В этом приближении исходная задача, сформулированная для системы уравнений Максвелла, сводится (см., напр., [18], с. 29) к скалярной: требуется найти такие значения частоты электромагнитных колебаний  $\omega > 0$  и комплексной постоянной распространения  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (1)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$  — волновое число,  $\varepsilon_0$  ( $\mu_0$ ) — электрическая (магнитная) постоянная;  $u^+$  ( $u^-$ ) — предельное значение функции  $u$  извне (изнутри) контура  $\Gamma$ ,  $\partial u / \partial \nu$  — производная по внешней нормали.

Поясним физический смысл функции  $u$ , следуя [18], с. 29. Известно представление компонент комплексных амплитуд  $E$  и  $H$  собственной волны, распространяющейся в волноводе при заданной частоте  $\omega$  и постоянной распространения  $\beta$ , через составляющие  $H_1$  и  $H_2$ :

$$H_3 = \frac{-1}{i\beta} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \right), \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (3)$$

$$E_1 = \frac{\mu_0 \omega}{\beta} H_2 - \frac{1}{\omega \beta} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (4)$$

$$E_2 = -\frac{\mu_0 \omega}{\beta} H_1 - \frac{1}{\omega \beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (5)$$

$$E_3 = \frac{1}{i\varepsilon \omega} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right), \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (6)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$  — диэлектрическая проницаемость. В приближении слаборадирующего волновода компоненты  $H_1$  и  $H_2$  аппроксимируются одной и той же функцией  $u$ , удовлетворяющей уравнениям (1), (2).

Будем разыскивать нетривиальное решение уравнений (1), (2) в классе комплекснозначных функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Область  $\Omega_\infty$  является неограниченной, следовательно, для того, чтобы полностью сформулировать задачу, необходимо задать поведение функции  $u$  на бесконечности. В области  $\Omega_\infty$  она удовлетворяет уравнению Гельмгольца с коэффициентом  $\chi^2(\beta)$  где

$$\chi(\beta) = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}. \quad (7)$$

Следуя [18], с. 24, будем предполагать, что эта функция, кроме того, удовлетворяет парциальным условиям излучения.

Дадим соответствующее определение. Пусть  $\Lambda$  — поверхность Римана функции  $\ln \chi(\beta)$ ,  $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$  — открытый круг радиуса  $R$ , а  $R_0$  — положительная константа, такая что  $\Omega \subset \Omega_{R_0}$ . Обозначим  $H_l^{(1)}$  — функцию Ханкеля первого рода порядка  $l$  (см., напр., [70]),  $r, \varphi$  — полярные координаты точки  $x$ . Будем говорить, что функция  $u$ , являющаяся в  $\Omega_\infty$  решением уравнения Гельмгольца (1), где  $\beta \in \Lambda$ , удовлетворяет парциальным условиям излучения, если эта функция для всех  $r > R_0$  разлагается в ряд

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi r) \exp(il\varphi). \quad (8)$$

Заметим, что для любой функции  $u$ , являющейся в  $\Omega_\infty$  решением уравнения Гельмгольца (1), ряд (8) сходится абсолютно и равномерно во всякой замкнутой области  $a \leq r \leq b$ , где  $a$  и  $b$  произвольные числа, удовлетворяющие условию  $R_0 < a < b < \infty$ ; кроме того, указанный ряд можно дифференцировать почленно сколько угодно раз [7].

Для всех целых значений  $l$  функции Ханкеля  $H_l^{(1)}(\chi(\beta)r)$  представимы в виде

$$H_l^{(1)}(\chi(\beta)r) = c_l^{(1)}(\chi(\beta)r) \ln(\chi(\beta)r) + R_l^{(1)}(\chi(\beta)r), \quad (9)$$

где  $c_l^{(1)}(\chi(\beta)r)$  и  $R_l^{(1)}(\chi(\beta)r)$  — однозначные аналитические функции комплексного аргумента  $\beta$  (см., напр., [70]). Следовательно, на римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $H_l^{(1)}(\chi(\beta)r)$  являются однозначными аналитическими функциями.

Описанное выше множество функций  $u$ , удовлетворяющих требуемым свойствам гладкости и парциальным условиям излучения (8), обозначим символом  $U_A$ .

**Определение 1.1.** Ненулевую функцию  $u \in U_A$  будем называть собственной функцией *общей* задачи о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0, \beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (1), (2). Всюду далее эту задачу будем называть задачей (A).

При любом фиксированном значении  $\omega > 0$  функция из класса  $U_A$  может, как убывать, так и неограниченно возрастать на бесконечности. Это зависит от того, какой области римановой поверхности  $\Lambda$  принадлежит соответствующая постоянная распространения  $\beta$ .

Следуя [18], с. 24, опишем поверхность Римана  $\Lambda$  и приведем классификацию собственных функций задачи (A). Поверхность  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов и имеет две точки ветвления  $\beta = \pm kn_\infty$ . В силу того, что функцию  $\chi(\beta)$  саму следует рассматривать как однозначную на двулистной поверхности Римана, поверхность  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов римановой поверхности логарифма  $\Lambda_m$ , где  $m = 0, \pm 1, \dots$ , каждый из которых делится на два листа римановой поверхности квадратного корня  $\chi(\beta)$ :  $\Lambda_m^{(1)}$  и  $\Lambda_m^{(2)}$ . Всюду далее будем предполагать, что точки ветвления не принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$ .

Обозначим символом  $\Lambda_0^{(1)}$  главный («физический») лист римановой поверхности  $\Lambda$ , который определяется следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(1)}. \quad (10)$$

С листом  $\Lambda_0^{(1)}$  соединяется лист  $\Lambda_0^{(2)}$ , который называется «нефизическим» и определяется следующим образом:

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(2)}. \quad (11)$$

Лист  $\Lambda_0^{(2)}$  соединен с листом  $\Lambda_0^{(1)}$  вдоль разреза, выбранного в соответствии с условием  $\text{Im}(\chi(\beta)) = 0$  на  $\Lambda_0^{(1)}$ , т. е. проходящего по мнимой оси и интервалу  $(-kn_\infty, kn_\infty)$  вещественной оси.

Теперь приведем классификацию собственных функций (собственных волн). В задачах о собственных функциях слабонаправляющих волноводов принято различать поверхностные и вытекающие собственные волны (см., [18], с. 26). Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ . Вещественным  $\beta \in \mathbb{R}_0^{(1)}$  таким, что  $|\beta| > kn_\infty$  отвечают *поверхностные* волны.

Функции Ханкеля при  $-\pi/2 < \arg \chi < 3\pi/2$  и  $r \rightarrow \infty$  имеют следующую асимптотику (см., напр., [70]):

$$H_l^{(1)}(\chi r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi r}} \exp \left[ i \left( \chi r - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\chi r} \right) \right]. \quad (12)$$

Таким образом, если  $-\pi/2 < \arg \chi < 3\pi/2$ ,  $\text{Im}(\chi) \neq 0$ , и функция  $u$  удовлетворяет парциальным условиям излучения (8), то эта функция удовлетворяет следующему условию на бесконечности:

$$u = \exp(i\chi r) O \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Ясно, что для поверхностных волн  $\text{Re}(\chi) = 0$ , а  $\text{Im}(\chi) = \sigma > 0$ . Следовательно, амплитуда  $u$  любой поверхностной волны экспоненциально убывает на бесконечности:

$$u = \exp(-\sigma r) O \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad \sigma > 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Известно [7], что все производные такой функции также удовлетворяют парциальным условиям излучения (8), и, как следствие, условию (14).

Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(2)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(2)}$ . Постоянные распространения  $\beta$  *вытекающих* волн принадлежат множеству  $\Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$ . Амплитуды  $u$  вытекающих собственных волн экспоненциально возрастают на бесконечности, потому что для них  $\text{Im}(\chi) < 0$ .

Задаче (A), с. 34, удовлетворяют амплитуды, и поверхностных, и вытекающих собственных волн. Наряду с общей задачей (A) в диссертации особое внимание уделяется ее частному случаю — задаче о поверхностных волнах. Дадим соответствующее определение.

Заметим, что при вещественных  $\beta$  коэффициент уравнения (1) вещественный. Поэтому будем разыскивать нетривиальное решение уравнений (1) и (2) в классе вещественных функций непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Кроме того потребуем, чтобы на бес-

конечности функция  $u$  удовлетворяла условию (14). Такое множество функций  $u$  обозначим символом  $U_B$ .

**Определение 1.2.** Ненулевую функцию  $u \in U_B$  будем называть собственной функцией задачи о *поверхностных* собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$ , если выполнены условия (1) и (2). Всюду далее эту задачу будем называть задачей (B).

**2. Пример.** Хорошо известно точное решение задачи (A), с. 34, в частном случае волновода кругового поперечного сечения радиуса  $R$  с постоянным показателем преломления  $n_+$  (см., напр., [54]). Методом разделения переменных получено семейство характеристических уравнений для определения параметров  $\omega$  и  $\beta$ :

$$\chi_+ \frac{J'_l(R\chi_+)}{J_l(R\chi_+)} = \chi \frac{H_l^{(1)'}(R\chi)}{H_l^{(1)}(R\chi)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где  $\chi_+ = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}$ . Подробное изложение свойств различных типов собственных волн, отвечающих разным значениям  $\beta$ , можно найти, например, в книге [54]. При любом  $\omega > 0$  уравнение (15) имеет решения  $\beta \in \mathbb{R}_0^{(1)}$ ,  $kn_\infty < |\beta| < kn_+$ , которым отвечают поверхностные собственные волны, и решения  $\beta$ , лежащие на нефизическом листе  $\Lambda_0^{(2)}$ , которым отвечают вытекающие собственные волны.

На рисунке 2 (заимствованном из книги [54]) показаны дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового поперечного сечения радиуса  $R$  с постоянным показателем преломления — графики функций  $U = U(V)$ , где  $U = kR\sqrt{n_+^2 - (\beta/k)^2}$ , а  $V = kR\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$ . Точками отсечки называются точки, в которых дисперсионные кривые поверхностных собственных волн с уменьшением  $\omega$  трансформируются в кривые вытекающих собственных волн. На рис. 2 в точках отсечки  $U = V$ . Дисперсионные кривые поверхностных волн лежат на рисунке правее прямой  $U = V$ , графики веще-

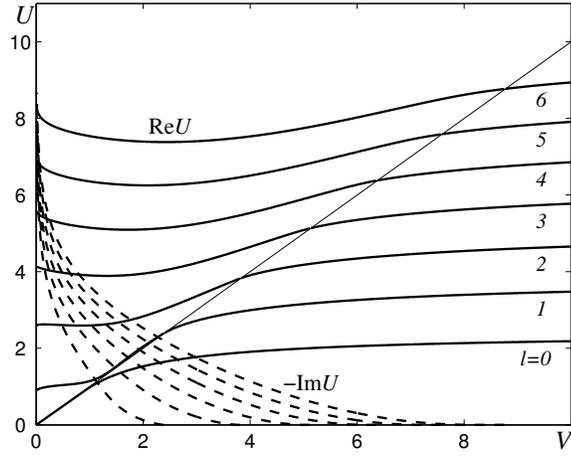


Рис. 2. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения радиуса  $R$  с постоянным показателем преломления  $n_+$ , находящегося в однородной окружающей среде с показателем преломления  $n_\infty$ . Здесь приняты следующие обозначения:  $V = kR\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$  и  $U = kR\sqrt{n_+^2 - (\beta/k)^2}$ .

ственных частей функции  $U = U(V)$  для вытекающих волн — левее этой прямой.

Для любой сколь угодно малой частоты  $\omega$  существует, по крайней мере, одна поверхностная собственная волна. Она называется основной. При любом  $\omega > 0$  число поверхностных собственных волн конечно и стремится к бесконечности при  $\omega \rightarrow \infty$ . Значения частот электромагнитных колебаний  $\omega$ , при которых  $\beta = kn_\infty$ , называются критическими. Они являются решениями уравнений отсечки:

$$J_{l-1}(R\chi_+) = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

При любом  $\omega > 0$  число вытекающих собственных волн бесконечно.

**3. Волновод в полупространстве.** Сформулируем теперь, следуя [9], задачу о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве. Постановка этой задачи возникает при поиске собственных волн волновода, находящегося в плоско-слоистой среде, состоящей из двух полупространств. Причем, предполагается, что показатель преломления волновода слабо отличается от показателя пре-

ломления  $n_\infty = \text{const}$  того полупространства, в котором он целиком находится, а  $n_\infty$  в свою очередь намного больше постоянного показателя преломления  $n_b > 0$  второго полупространства.

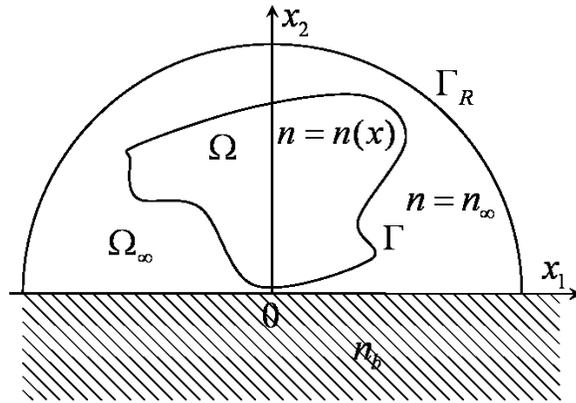


Рис. 3. Поперечное сечение волновода в полупространстве

Итак, пусть  $\Omega$  — ограниченная область, целиком лежащая в верхней полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$  (см. рис. 3). Будем считать, что граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  принадлежит классу  $C^{1,\alpha}$ . Определим область  $\Omega_\infty = \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{\Omega}$ . Обозначим символом  $\Omega_R^+$  открытый полукруг радиуса  $R$ :

$$\Omega_R^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R, x_2 > 0\}, \quad (17)$$

пусть  $\Gamma_R^+$  — граница этого полукруга, а  $R_0$  — положительная константа, такая что  $\Omega \subset \Omega_{R_0}^+$ .

Относительно показателя преломления  $n$  предположим также следующее: функция  $n = n(x) > n_\infty > 0$ ,  $x \in \Omega$ , принадлежит множеству  $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ;  $n = n_\infty$ ,  $x \in \Omega_\infty$ .

В задаче о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве [9] требуется определить такие значения частоты  $\omega > 0$  и постоянной распространения  $\beta \in \Lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (18)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (19)$$

и граничному условию

$$u = 0, \quad x_2 = 0. \quad (20)$$

Будем разыскивать нетривиальные решения уравнений (18)–(20) в классе комплекснозначных функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Дополнительно предположим, что функция  $u$  удовлетворяет парциальным условиям излучения в полуплоскости [28], т. е. разлагается в ряд следующего вида:

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi r) \sin(l\varphi), \quad r > R_0. \quad (21)$$

Для любой функции  $u$ , являющейся в  $\Omega_\infty$  решением уравнения (18) и удовлетворяющей равенству (20), ряд (21) сходится абсолютно и равномерно во всякой замкнутой области  $a \leq r \leq b$ , где  $a$  и  $b$  произвольные числа, удовлетворяющие условию  $R_0 < a < b < \infty$ ; кроме того, указанный ряд можно дифференцировать почленно сколько угодно раз [28]. Обозначим символом  $U_C$  описанное множество функций.

**Определение 1.3.** Ненулевую функцию  $u \in U_C$  будем называть собственной функцией *общей* задачи о собственных волнах слабораправляющего волновода в полупространстве, отвечающей собственным значениям  $\beta \in \Lambda$ ,  $\omega > 0$ , если выполнены условия (18)–(20). В дальнейшем эту задачу будем называть задачей (C).

Классифицировать собственные функции задачи (C), будем также, как собственные функции задачи (A), с. 34. Задаче (C) удовлетворяют амплитуды, и поверхностных, и вытекающих собственных волн. Наряду с общей задачей (C) в диссертации особое внимание уделяется ее частному случаю — задаче о поверхностных волнах волновода в полупространстве. Дадим соответствующее определение.

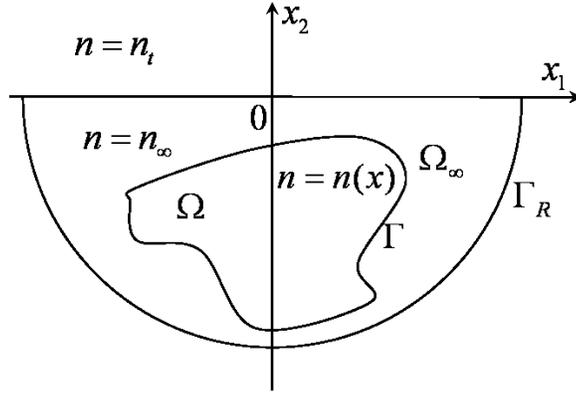


Рис. 4. Поперечное сечение волновода в слоистой среде

Заметим, что при вещественных  $\beta$  коэффициент уравнения (18) вещественный. Поэтому будем разыскивать нетривиальное решение уравнений (18)–(20) в классе вещественных функций непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Кроме того потребуем, чтобы на бесконечности функция  $u$  удовлетворяла условию (14). Такое множество функций  $u$  обозначим символом  $U_D$ .

**Определение 1.4.** Ненулевую функцию  $u \in U_D$  будем называть собственной функцией задачи о *поверхностных* собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$ , если выполнены условия (18)–(20). Всюду далее эту задачу будем называть задачей ( $D$ ).

**4. Волновод в слоистой среде.** Следуя [71] приведем постановку задачи о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода, находящегося в полупространстве, постоянный показатель преломления  $n_\infty$  которого незначительно отличается в большую сторону от показателя преломления  $n_t = \text{const} > 0$  второго полупространства.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область целиком лежащая в нижней полуплоскости  $\mathbb{R}_-^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 < 0\}$  (см. рис. 4). Пусть  $\Gamma \in C^{1,\alpha}$  — граница области  $\Omega$ . Определим область  $\Omega_\infty$  следующим образом:  $\Omega_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0\} \setminus \bar{\Omega}$ .

Относительно показателя преломления волновода  $n$  предположим также следующее. Функция  $n = n(x) > n_\infty$  при  $x \in \Omega$ , принадлежит множеству  $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ;  $n = n_\infty$  при  $x \in \Omega_\infty$  и  $x_2 < 0$ ;  $n = n_t$  при  $x \in \Omega_\infty$  и  $x_2 > 0$ ; кроме того,  $n_\infty > n_t > 0$ .

Задача о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в слоистой среде заключается [71] в отыскании таких значений постоянной распространения  $\beta > 0$  и частоты электромагнитных колебаний  $\omega > 0$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (22)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma; \quad (23)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial x_2} = \frac{\partial u^-}{\partial x_2}, \quad x_2 = 0, \quad (24)$$

и условию на бесконечности:

$$|u| \leq c \exp(-\alpha r), \quad c, \alpha > 0, \quad r > R_0. \quad (25)$$

В условии сопряжения (24) через  $u^+(u^-)$  обозначено предельное значение функции  $u$  сверху (снизу) оси  $x_1$ .

Символом  $U_E$  обозначим множество вещественных, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$  функций, удовлетворяющих условию (25). Известно [71], что ненулевые функции  $u \in U_E$  удовлетворяющие уравнениям (22)–(24) могут существовать лишь при условии  $\beta > kn_\infty$ . Поэтому в дальнейшем, решая эту задачу, мы будем предполагать это условие выполненным.

**Определение 1.5.** Ненулевую функцию  $u \in U_E$  будем называть собственной функцией задачи о *поверхностных* волнах слабонаправляющего волновода в слоистой среде, отвечающей собственным зна-

чениям  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$ , если выполнены условия (22)–(24). Далее эту задачу будем обозначать ( $E$ ).

## § 2. Локализация собственных значений

**1. Волновод в однородной среде.** Сформулируем известный результат [55] о локализации собственных значений задачи ( $A$ ), с. 34. Обозначим  $G$  — объединение двух интервалов на оси  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ :

$$G = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}, \quad n_+ = \max_{x \in \bar{\Omega}} n(x). \quad (1)$$

*Пусть  $\omega > 0$ . На  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения  $\beta$  задачи ( $A$ ), с. 34, могут принадлежать лишь множеству  $G$ .*

Поясним, что при любой частоте электромагнитных колебаний  $\omega$  у общей задачи ( $A$ ), с. 34, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде на физическом листе  $\Lambda_0^{(1)}$  не может находиться никаких иных собственных значений  $\beta$ , кроме постоянных распространения поверхностных волн. Кроме того, если поверхностные волны существуют, то их постоянные распространения обязательно принадлежат множеству  $G$ . Это утверждение обобщает известные результаты (см., напр., [54]) о локализации спектра собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной среде, полученные на основе элементарного анализа характеристического уравнения метода разделения переменных (см. п. 1, §1).

**2. Волновод в полупространстве.** Сформулируем и докажем теорему о локализации собственных значений задачи ( $C$ ), с. 40.

**Теорема 1.1.** *Пусть  $\omega > 0$ . На  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения  $\beta$  задачи ( $C$ ), с. 40, могут принадлежать лишь множеству  $G$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть

$$B = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \text{Im}\beta = 0, |\beta| \geq kn_+ \right\},$$

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| < kn_\infty \right\}.$$

Предположим, что  $u$  — собственная функция задачи (C), с. 40, отвечающая собственному значению  $\beta \in D$ . Применим в областях  $\Omega$  и  $\Omega_R^+ \setminus \bar{\Omega}$ , где  $R \geq R_0$ , к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  (здесь и далее  $\bar{u}$  означает функцию комплексно-сопряженную с  $u$ ) формулу Грина. Получим равенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) dx &= \int_{\Gamma} \left( u^- \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \nu} - \bar{u}^- \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) dl, \\ \int_{\Omega_R^+ \setminus \bar{\Omega}} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) dx &= - \int_{\Gamma} \left( u^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial \nu} - \bar{u}^+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right) dl + \\ &+ \int_{\Gamma_R^+} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl - \int_{L_R} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dl. \end{aligned}$$

Здесь  $L_R = \{x : x_1 \in (-R, R), x_2 = 0\}$ . При любом  $\beta \in D$  имеем  $k^2 n^2 - \beta^2 > 0$ , следовательно, левые части в двух последних равенствах обращаются в нуль. Сложим почленно эти равенства, используя условия сопряжения (19), с. 40, и равенство нулю функции  $u$  на  $L_R$ . Получим

$$\int_{\Gamma_R^+} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl = 0, \quad R \geq R_0.$$

Отсюда, используя условие (21), с. 40, и ортогональность тригонометрических функций, для любого  $R \geq R_0$  получим

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ H_l^{(1)}(\chi R) H_l^{(2)'}(\chi R) - H_l^{(2)}(\chi R) H_l^{(1)'}(\chi R) \right] |a_l|^2 = 0,$$

где  $a_l$  — коэффициенты ряда (21), с. 40, в который разлагается функция  $u$ . Хорошо известно (см., напр., [70]), что

$$H_l^{(1)}(\chi R) H_l^{(2)'}(\chi R) - H_l^{(2)}(\chi R) H_l^{(1)'}(\chi R) = \frac{4}{i\pi\chi R},$$

где  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Следовательно, для любого  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega_{R_0}$  все коэффициенты  $a_l$  в разложении (21), с. 40, обращаются в нуль. Это значит, что  $u = 0$  при  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega_{R_0}$ . Уравнение (18), с. 39, имеет фундаментальное решение (см., напр., [25]). Обозначим его через  $\Phi(\beta; x, y)$ . Используя третью формулу Грина, можно записать:

$$u(x) = - \int_{\Gamma_{R_0}} \left[ u^-(y) \frac{\partial \Phi(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} \Phi(\beta; x, y) \right] dl(y), \quad x \in \Omega_{R_0}.$$

Так как  $u = 0$  при  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega_{R_0}$ , то  $u = 0$  и  $\partial u / \partial \nu = 0$  при  $x \in \Gamma_{R_0}$ . Следовательно,  $u = 0$  при  $x \in \Omega_{R_0}$ . Таким образом, мы показали, что задача (C), с. 40, при  $\beta \in D$  имеет только тривиальное решение.

Предположим, что  $u$  — собственная функция задачи (C), с. 40, отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ . Применим в областях  $\Omega$  и  $\Omega_R^+ \setminus \bar{\Omega}$ ,  $R \geq R_0$ , к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  формулу Грина. Получим равенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega} \bar{u} \Delta u dx &= \int_{\Gamma} \bar{u}^- \frac{\partial u^-}{\partial \nu} dl, \\ \int_{\Omega_R^+ \setminus \bar{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega_R^+ \setminus \bar{\Omega}} \bar{u} \Delta u dx &= - \int_{\Gamma} \bar{u}^+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} dl + \int_{\Gamma_R^+} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} dl - \int_{L_R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x_2} dl. \end{aligned}$$

Здесь символом « $\cdot$ » обозначено скалярное произведение векторов в  $\mathbb{R}^2$ . Сложим почленно эти равенства, учитывая условия (19) и (20), с. 40:

$$\int_{\Omega_R^+} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega_R^+} \bar{u} \Delta u dx = \int_{\Gamma_R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} dl.$$

Устремим в этом равенстве  $R$  к бесконечности. При этом следует учесть (см. с. 36), что при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , функция  $u$ , ее производные, а, следовательно, и все подынтегральные выражения экспоненциально убывают на бесконечности. В результате получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}_+^2} (\beta^2 - k^2 n^2) |u|^2 dx = 0. \quad (2)$$

При вещественных  $\beta \in B$ , равенству (2) удовлетворяет лишь нулевая функция  $u$ . Действительно, если  $\beta \in B$  и  $|\beta| > kn_+$ , то из этого равенства сразу вытекает, что  $u = 0$  на всей полуплоскости. Если же  $\beta \in B$  и  $|\beta| = kn_+$ , то из него следует, что  $\nabla u = 0$  в  $\mathbb{R}_+^2$ , т. е.  $u$  принимает постоянное значение. Но из асимптотики (14), с. 36, вытекает, что на бесконечности  $u$  обращается в нуль. Значит  $u$  равняется нулю всюду, т. е. при  $\beta \in B$  задача (C), с. 40, имеет лишь тривиальное решение.

Возьмем мнимую часть от левой и правой части равенства (2). Получим

$$\operatorname{Im}\beta^2 \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^2 dx = 0.$$

Следовательно, собственные значения  $\beta$  задачи (C), с. 40, на  $\Lambda_0^{(1)}$  не могут иметь одновременно мнимую и вещественную части отличными от нуля, т. е. принадлежать множеству  $\Lambda_0^{(1)} \setminus (B \cup D \cup G)$ . Итак доказано, что на  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения  $\beta$  задачи (C), с. 40, могут принадлежать лишь множеству  $G$ .  $\square$ <sup>1)</sup>

Эта теорема заключается в том, что при любой частоте электромагнитных колебаний  $\omega$  у общей задачи (C), с. 40, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве на физическом листе  $\Lambda_0^{(1)}$  не может находиться никаких иных собственных значений  $\beta$ , кроме постоянных распространения поверхностных волн. Кроме того, если поверхностные волны существуют, то их постоянные распространения обязательно принадлежат множеству  $G$ .

**3. Волновод в слоистой среде.** Относительно локализации собственных значений задачи (E), с. 42, известно [71] следующее утверждение.

*Пусть  $\omega > 0$ . Собственные значения  $\beta$  задачи (E), с. 42, должны удовлетворять условию  $\beta < kn_+$ .*

---

<sup>1)</sup>Символом  $\square$ , как обычно, будем обозначать конец доказательства.

### § 3. Интегральные представления собственных функций.

**1. Волновод в однородной среде.** Введем в рассмотрение фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$G_A(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi |x - y|), \quad (1)$$

где  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, коэффициент  $\chi$  определен равенством (7), с. 33. Отметим, что функция  $G_A(x, y)$  при любом фиксированном  $y \in \mathbb{R}^2$  по  $x$  удовлетворяет парциальным условиям излучения (8), с. 34, (см., напр., [18], с. 44). Поэтому иногда функцию (1) также называют функцией Грина для уравнений Гельмгольца, удовлетворяющей на бесконечности парциальным условиям излучения.

Сформулируем известное [55] утверждение об интегральном представлении собственных функций общей задачи (A), с. 34, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде.

*Если функция  $u$  есть собственная функция задачи (A), с. 34, отвечающая собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ , то*

$$u(x) = \int_{\Omega} G_A(x, y) g^2(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

где

$$g^2(y) = k^2 n^2(y) - k^2 n_{\infty}^2. \quad (3)$$

**2. Волновод в полупространстве.** Построим интегральное представление собственных функций общей задачи (C), с. 40, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве. Для этого будем использовать соответствующую функцию Грина (см., напр., [28]).

**Определение 1.6.** Функцией Грина задачи Дирихле для верхней полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$  называется

функция  $G_C(x, y)$ ,  $x \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$ ,  $y \in \mathbb{R}_+^2$ , удовлетворяющая следующим свойствам.

1. При каждом  $y \in \mathbb{R}_+^2$  представляется в виде

$$G_C(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi |x - y|) + G(x, y),$$

где функция  $G(x, y)$  удовлетворяет по  $x$  уравнению

$$\Delta_x G(x, y) + \chi^2 G(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^2, \quad (4)$$

и является непрерывной по  $x$  в  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ .

2. При каждом  $y \in \mathbb{R}_+^2$  удовлетворяет по  $x$  граничному условию

$$G_C(x, y) = 0, \quad x_2 = 0.$$

3. При каждом  $y \in \mathbb{R}_+^2$  удовлетворяет по  $x$  парциальным условиям излучения (21), с. 40.

Известно явное представление функции Грина (см., напр., [28]):

$$G_C(x, y) = \frac{i}{4} \left( H_0^{(1)}(\chi |x - y|) - H_0^{(1)}(\chi |x - y^*|) \right), \quad (5)$$

где  $y^* = (y_1, -y_2)$ .

**Лемма 1.1.** *Если функция  $u$  есть собственная функция задачи (C), с. 40, отвечающая собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ , то*

$$u(x) = \int_{\Omega} G_C(x, y) g^2(y) u(y) dy, \quad x \in \overline{\mathbb{R}_+^2}, \quad (6)$$

где функция  $g$  определена равенством (3).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Собственная функция задачи (C), с. 40, отвечающая собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ , удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + \chi^2 u = 0, \quad x \in \Omega_{\infty}. \quad (7)$$

В области  $\Omega$  она удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + (k^2 n^2(x) - \beta^2) u = 0, \quad x \in \Omega.$$

Запишем это уравнение в виде

$$\Delta u + \chi^2 u = f, \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

где  $f = -g^2 u$ . Используем в области  $\Omega$  третью формулу Грина:

$$w(x)u(x) = \int_{\Gamma} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} - u^-(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu} \right) dl(y) - \int_{\Omega} f(y) \Phi(x, y) dy, \quad (9)$$

где  $\Phi(x, y)$  — фундаментальное решение (1),

$$w(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 1/2, & x \in \Gamma, \\ 0, & x \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Наша ближайшая цель — получить аналогичное представление вне области  $\Omega$ . Пусть  $\Omega_R^+$  — полукруг в верхней полуплоскости, целиком содержащий область  $\Omega$  (см. с. 39). Применим третью формулу Грина в области  $\Omega_R^+ \setminus \Omega$ , ограниченной кусочно-гладким контуром. Получим интегральное представление функции  $u$  в области  $\Omega_R^+ \setminus \Omega$ :

$$\begin{aligned} w_{\infty}(x)u(x) = & - \int_{\Gamma} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu(y)} - u^+(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) + \\ & + \int_{\Gamma_R^+} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\ & - \int_{L_R} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y_2} \right) dl(y), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Gamma_R^+$  — граница полукруга  $\Omega_R^+$ ,  $L_R = \{x : x_1 \in (-R, R), x_2 = 0\}$ ,

$$w_{\infty}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_R^+ \setminus \Omega, \\ 1/2, & x \in \Gamma, \\ 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Сложим почленно равенства (9) и (10). Функция  $u$  удовлетворяет условиям сопряжения (19), с. 40, поэтому интегралы по контуру  $\Gamma$  сокращаются. В результате получим интегральное представление, справедливое при любом  $x \in \overline{\Omega_R^+}$  для произвольного достаточно большого  $R$ :

$$\begin{aligned}
u(x) = & - \int_{\Omega} f(y) \Phi(x, y) dy + \\
& + \int_{\Gamma_R^+} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\
& - \int_{L_R} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y_2} \right) dl(y),
\end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что полученные представления не учитывают граничное условие (20), с. 40, и содержат фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, а не функцию Грина задачи Дирихле для полуплоскости.

Применим в области  $\Omega_R^+ \setminus \Omega$  формулу Грина к функции  $u$  и функции  $G(x, y)$ , которая в данном случае рассматривается, как функция переменной  $y$  при фиксированном  $x \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$ . Получим равенство

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_R^+ \setminus \Omega} (G(x, y)(\Delta_y + \chi^2)u(y) - u(y)(\Delta_y + \chi^2)G(x, y)) dy = \\
& = \int_{\Gamma_R^+} \left( G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\
& - \int_{L_R} \left( G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} - u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_2} \right) dl(y) - \\
& - \int_{\Gamma} \left( G(x, y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu(y)} - u^+(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y).
\end{aligned}$$

Функция  $u$  в области  $\Omega_R^+ \setminus \Omega$  удовлетворяет уравнению (7). При каждом фиксированном  $y \in \mathbb{R}_+^2$  функция  $G(x, y)$  по  $x$  удовлетворяет

уравнению (4). Эта функция симметрична по  $x$  и  $y$ . Следовательно, она удовлетворяет тому же уравнению по  $y$  при любом фиксированном  $x \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$ . Учитывая эти свойства функций  $G$  и  $u$ , получим, что левая часть последнего равенства равна нулю:

$$\int_{\Omega_R^+ \setminus \Omega} (G(x, y)(\Delta_y + \chi^2)u(y) - u(y)(\Delta_y + \chi^2)G(x, y)) dy = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Gamma_R^+} \left( G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\ & - \int_{L_R} \left( G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} - u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_2} \right) dl(y) - \\ & - \int_{\Gamma} \left( G(x, y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu(y)} - u^+(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y). \end{aligned} \quad (12)$$

Фиксируем  $x \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$  и применим формулу Грина к функциям  $G(x, y)$  (по переменной  $y$ ) и  $u$  в области  $\Omega$ . В результате получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (G(x, y)(\Delta_y + \chi^2)u(y) - u(y)(\Delta_y + \chi^2)G(x, y)) dy = \\ & \int_{\Gamma} \left( G(x, y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} - u^-(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y). \end{aligned} \quad (13)$$

Так как функция  $u$  удовлетворяет уравнению (8), а  $G(x, y)$  по переменной  $y$  — соответствующему однородному уравнению, то последнее равенство примет вид

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Gamma} \left( G(\beta; x, y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} - u^-(y) \frac{\partial G(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\ & - \int_{\Omega} G(\beta; x, y) f(y) dy. \end{aligned} \quad (14)$$

Сложим теперь почленно равенства (11), (12) и (14). При этом надо учесть условия сопряжения (19), с. 40. Для любого  $x \in \overline{\Omega_R^+}$  получим

$$\begin{aligned}
u(x) = & - \int_{\Omega} f(y) G_C(x, y) dy + \\
& + \int_{\Gamma_R^+} \left( G_C(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial G_C(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\
& - \int_{L_R} \left( G_C(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} - u(y) \frac{\partial G_C(x, y)}{\partial y_2} \right) dl(y),
\end{aligned} \tag{15}$$

Третье слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю, так как функции  $u(y)$  и  $G_C(x, y)$  равны нулю при  $y \in L_R$ . Покажем, что второе слагаемое также равно нулю. Для этого воспользуемся тем, что функции  $u$  и  $G_C$  удовлетворяют парциальным условиям излучения. Имеем

$$\begin{aligned}
I = & \int_{\Gamma_R^+} \left( G_C(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial G_C(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) = \\
= & \int_{\Gamma_R^+} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l H_l^{(1)}(\chi r) \sin(l\varphi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \chi H_k^{(1)'}(\chi r) \sin(k\varphi) \right) dl(y) - \\
& - \int_{\Gamma_R^+} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l \chi H_l^{(1)'}(\chi r) \sin(l\varphi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H_k^{(1)}(\chi r) \sin(k\varphi) \right) dl(y).
\end{aligned} \tag{16}$$

Ряды под интегралами равномерно сходятся, поэтому можно поменять местами порядок интегрирования и суммирования. Учитывая далее ортогональность тригонометрических функций, получаем, что выражение для  $I$  принимает вид

$$I = \pi R \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l d_l \chi \left( H_l^{(1)}(\chi R) H_l^{(1)'}(\chi R) - H_l^{(1)'}(\chi R) H_l^{(1)}(\chi R) \right).$$

Очевидно, что  $I = 0$ .

Итак, мы получили, что для любого достаточно большого  $R$

$$u(x) = - \int_{\Omega} f(y) G_C(x, y) dy = \int_{\Omega} G_C(x, y) g^2(y) u(y) dy, \quad x \in \overline{\Omega_R^+}.$$

В силу произвольности  $R$  имеет место (6).  $\square$

**3. Волновод в слоистой среде.** Этот пункт посвящен построению интегрального представления собственных функций задачи (E), с. 42,. При этом будет использована соответствующая функция Грина (см., напр., [71]).

Пусть во всей нижней полуплоскости  $\mathbb{R}_-^2$  показатель преломления равен  $n_\infty$ . Область  $\Omega$  в задаче (E), с. 42, целиком принадлежит этой полуплоскости. Поэтому, как обычно, определим параметр

$$\chi = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}.$$

В верхней полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2$  показатель преломления равен  $n_t$ , обозначим

$$\chi_t = \sqrt{k^2 n_t^2 - \beta^2}.$$

Напомним, что мы предполагаем, что  $0 < kn_t < kn_\infty < \beta$ . Всюду далее будем считать что  $\chi = i\sigma$ ,  $\chi_t = i\sigma_t$ , где

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2} > 0, \quad \sigma_t = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_t^2} > 0$$

и, следовательно,  $0 < \sigma < \sigma_t$ .

**Определение 1.7.** Функцией Грина задачи сопряжения называется функция  $G_E(x, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $y \in \mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_-^2$ , удовлетворяющая следующим свойствам.

1. При  $x, y \in \mathbb{R}_-^2$  функция  $G_E(x, y)$  представляется в виде

$$G_E(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma |x - y|) + G(x, y),$$

а при  $x, y \in \mathbb{R}_+^2$  — в виде

$$G_E(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma_t |x - y|) + G(x, y),$$

кроме того, при  $x \in \mathbb{R}_-^2$ ,  $y \in \mathbb{R}_+^2$ , или  $x \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $y \in \mathbb{R}_-^2$

$$G_E(x, y) = G(x, y),$$

где функция  $G(x, y)$  при каждом фиксированном  $y \in \mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_-^2$  удовлетворяет по  $x$  уравнениям

$$\Delta_x G(x, y) - \sigma_t^2 G(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^2, \quad (17)$$

$$\Delta_x G(x, y) - \sigma^2 G(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_-^2, \quad (18)$$

является непрерывной и непрерывно дифференцируемой по  $x$  в  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$  и  $\overline{\mathbb{R}_-^2}$ . Здесь  $K_0$  — функция Макдональда (см., напр., [70]).

2. При каждом фиксированном  $y \in \mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_-^2$  функция  $G_E(x, y)$  удовлетворяет по  $x$  условиям сопряжения:

$$G_E^+(x, y) = G_E^-(x, y), \quad \frac{\partial G_E^+(x, y)}{\partial x_2} = \frac{\partial G_E^-(x, y)}{\partial x_2}, \quad x_2 = 0. \quad (19)$$

3. При каждом фиксированном  $y \in \mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_-^2$  функция  $G_E(x, y)$  удовлетворяет условию (25), с. 42.

Известно явное представление функции Грина  $G_E(x, y)$  (см., напр., [71]):

$$G_E(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma|x - y|) - \quad (20)$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp((x_2 + y_2)\gamma) \frac{\gamma_t - \gamma}{(\gamma_t + \gamma)\gamma} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x, y \in \mathbb{R}_-^2;$$

$$G_E(x, y) = \quad (21)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-x_2\gamma_t) \exp(y_2\gamma)}{\gamma_t + \gamma} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}_+^2, y \in \mathbb{R}_-^2;$$

$$G_E(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma_t|x - y|) - \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp((-x_2 - y_2)\gamma_t) \frac{\gamma - \gamma_t}{(\gamma + \gamma_t)\gamma_t} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x, y \in \mathbb{R}_+^2;$$

$$G_E(x, y) = \quad (23)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(x_2\gamma_t) \exp(-y_2\gamma)}{\gamma_t + \gamma} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}_-^2, y \in \mathbb{R}_+^2.$$

Здесь  $\gamma = \sqrt{\theta^2 + \sigma^2}$ ,  $\gamma_t = \sqrt{\theta^2 + \sigma_t^2}$ .

**Лемма 1.2.** Пусть  $u$  — собственная функция задачи (E), с. 42, отвечающая собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$ . Тогда

$$u(x) = \int_{\Omega} G_E(x, y) g^2(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (24)$$

где функция  $g$  определена равенством (3).

Эта лемма доказывается аналогично лемме 1.1. Отметим только, что интеграл вида (16), не будет равен нулю, но будет стремиться к нулю при  $R \rightarrow \infty$  (см. [71]). Используя интегральное представление (24), можно проверить, что первые производные функции  $u$  удовлетворяют условию (25), с. 42, экспоненциального убывания на бесконечности.

#### **§ 4. Дискретность характеристических множеств и зависимость характеристических значений $\beta$ от параметра $\omega$ .**

С уменьшением частоты электромагнитных колебаний  $\omega$  постоянные распространения  $\beta$  волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной окружающей среде, могут перемещаться с физического листа римановой поверхности  $\Lambda$  на нефизический (см. с. 38). Другими словами, поверхностные собственные волны могут трансформироваться в вытекающие.

Такой же эффект наблюдается при расчете дисперсионных кривых различных волноводов, находящихся как в однородной среде, так и в полупространстве. Об этом будет подробно сказано в параграфе, посвященном описанию численных экспериментов. Поэтому для приложений важно теоретически изучить функции  $\beta = \beta(\omega)$ . Это будет сделано в настоящем параграфе с привлечением методов спектральной теории оператор-функций.

**1. Волновод в однородной среде.** В этом пункте излагаются известные результаты [55] и [18], с. 79. Общая задача (A), с. 34, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде сводится к нелинейной спектральной задаче для фредгольмовой голоморфной оператор-функции и описываются свойства ее решений.

Равенство (2), с. 47, при  $x \in \Omega$  представляет собой интегральное уравнение со слабо полярным ядром (фундаментальное решение (1), с. 47, уравнения Гельмгольца имеет логарифмическую особенность при  $|x - y| \rightarrow 0$ ). Запишем это уравнение в виде

$$u(x) = \lambda(\omega) \int_{\Omega} G_A(\omega, \beta; x, y) p^2(y) u(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где

$$p^2(x) = \frac{n^2(x) - n_{\infty}^2}{n_+^2 - n_{\infty}^2} > 0, \quad \lambda = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_{\infty}^2) > 0, \quad (2)$$

$$G_A(\omega, \beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi(\omega, \beta) |x - y|),$$

$$\chi(\omega, \beta) = \sqrt{\omega^2 n_{\infty}^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2}. \quad (3)$$

Преобразуем (1) к уравнению с симметричным ядром. Непосредственно для применения результатов спектральной теории оператор-функций симметрии ядра не требуется, однако она будет использована в следующем параграфе при доказательстве существования поверхностных волн (тогда ядро получится вещественным и симметричным). Кроме того, во второй главе интегральные уравнения будут основой при построении численных методов поиска, как поверхностных, так и вытекающих собственных волн. Поэтому с целью единообразия построения расчетных схем и интерпретации численных результатов проведем симметризацию ядра уже на данном начальном этапе.

Обозначим  $v = pu$ ,

$$K_A(\omega, \beta; x, y) = G_A(\omega, \beta; x, y) p(x) p(y) \quad x, y \in \Omega. \quad (4)$$

Имеем

$$v(x) = \lambda(\omega) \int_{\Omega} K_A(\omega, \beta; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Пусть  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ . Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$(T_A(\omega, \beta))v(x) = \int_{\Omega} K_A(\omega, \beta; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Ядро  $K_A$  слабо полярно, поэтому оператор  $T_A(\omega, \beta)$  можно (см., напр., [8], с. 287) рассматривать как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных интегрируемых с квадратом функций  $L_2(\Omega)$ . Запишем уравнение (5) в виде:

$$v = \lambda(\omega)T_A(\omega, \beta)v. \quad (7)$$

Будем искать такие  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$ , при которых существуют ненулевые функции  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие уравнению (7).

Сформулируем известное [55] утверждение об эквивалентности задачи (A), с. 34, и задачи (7).

*Если  $u \in U_A$  является собственной функцией задачи (A), с. 34, отвечающей некоторым собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$ , то  $v = ru$  принадлежит пространству  $L_2(\Omega)$  и дает нетривиальное решение уравнения (7) при тех же самых значениях параметров  $\omega$  и  $\beta$ . Если при некоторых значениях  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$  уравнение (7) имеет нетривиальное решение  $v \in L_2(\Omega)$ , то  $u = v/r$  удовлетворяет равенству (1), принадлежит множеству  $U_A$  и является собственной функцией задачи (A), с. 34, отвечающей тем же самым собственным значениям  $\omega$  и  $\beta$ .*

Фиксируем некоторое значение  $\omega > 0$ . Положим

$$A(\omega, \beta) = I - \lambda(\omega)T_A(\omega, \beta), \quad (8)$$

где  $I$  — единичный оператор в  $L_2(\Omega)$ , а оператор  $T_A(\omega, \beta)$  определен равенством (6). При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро интегрального оператора  $T_A(\omega, \beta)$  слабо полярно, следовательно, оператор  $T_A(\omega, \beta)$  вполне непрерывен, и оператор  $A(\omega, \beta)$  фредгольмов [8].

Ненулевая функция  $v \in L_2(\Omega)$  называется собственной функцией оператор-функции  $A(\omega, \beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение

$$A(\omega, \beta)v = 0. \quad (9)$$

Характеристическим множеством оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  называется множество чисел  $\beta \in \Lambda$ , для которых оператор  $A(\omega, \beta)$  не имеет ограниченного обратного в  $L_2(\Omega)$ . Это множество будем обозначать символом  $\sigma(A)$ . Обозначим множество регулярных точек оператора  $A(\omega, \beta)$  через  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\omega, \beta)^{-1} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)\}$ .

Известно (см. [18], с. 79) следующее утверждение.

*Множество регулярных точек оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  не пусто, а именно,  $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\omega, \beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  непрерывно зависит от параметра  $\omega > 0$ . Кроме того, с изменением  $\omega > 0$  характеристические значения оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  могут появляться и исчезать только на границе поверхности  $\Lambda$ , т. е. в точках  $\beta = \pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

Это утверждение обобщает известные результаты (см., напр., [54]) о зависимости постоянных распространения собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной среде, от частоты электромагнитных колебаний, полученные в результате анализа характеристического уравнения метода разделения переменных.

**2. Волновод в полупространстве.** Сведем теперь общую задачу (С), с. 40, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в

полупространстве к нелинейной спектральной задаче для фредгольмовой голоморфной оператор-функции.

Равенство (6), с. 48, при  $x \in \Omega$  представляет собой интегральное уравнение со слабо полярным ядром, которое запишем в виде

$$u(x) = \lambda(\omega) \int_{\Omega} G_C(\omega, \beta; x, y) p^2(y) u(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad (10)$$

где

$$G_C(\omega, \beta; x, y) = \frac{i}{4} \left( H_0^{(1)}(\chi(\omega, \beta)|x - y|) - H_0^{(1)}(\chi(\omega, \beta)|x - y^*|) \right),$$

функции  $p$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$  определены равенствами (2), (3),  $y^* = (y_1, -y_2)$ . Убедимся, что для всех  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$  ядро  $G_C(x, y)p^2(y)$  слабо полярно. Действительно, если  $x = y$ , то  $x \neq y^*$ . Следовательно, при совпадении аргументов ядро  $G_C(x, y)p^2(y)$  имеет такую же (логарифмическую) особенность, что и фундаментальное решение уравнения Гельмгольца.

Обозначим  $v = pu$ ,

$$K_C(\omega, \beta; x, y) = G_C(\omega, \beta; x, y) p(x) p(y), \quad x, y \in \Omega. \quad (11)$$

Тогда

$$v(x) = \lambda(\omega) \int_{\Omega} K_C(\omega, \beta; x, y) v(y) dy, \quad x \in \Omega. \quad (12)$$

Пусть  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ . Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$(T_C(\omega, \beta)) v(x) = \int_{\Omega} K_C(\omega, \beta; x, y) v(y) dy, \quad x \in \Omega. \quad (13)$$

Будем рассматривать оператор  $T_C(\omega, \beta)$  как оператор, действующий в пространстве  $L_2(\Omega)$ . Запишем уравнение (12) в виде:

$$v = \lambda(\omega) T_C(\omega, \beta) v. \quad (14)$$

Будем искать такие  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$ , при которых существуют ненулевые функции  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие уравнению (14).

Относительно эквивалентности задач (C), с. 40, и (14) справедлива следующая

**Теорема 1.2.** *Если  $u \in U_C$  является собственной функцией задачи (C), с. 40, отвечающей некоторым собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$ , то  $v = ru$  принадлежит пространству  $L_2(\Omega)$  и дает нетривиальное решение уравнения (14) при тех же самых значениях параметров  $\omega$  и  $\beta$ . Если при некоторых значениях  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$  уравнение (14) имеет нетривиальное решение  $v \in L_2(\Omega)$ , то  $u = v/r$  удовлетворяет равенству (10), принадлежит множеству  $U_C$  и является собственной функцией задачи (C), с. 40, отвечающей тем же самым собственным значениям  $\omega$  и  $\beta$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 1.1. Докажем второе утверждение. Пусть при некоторых значениях  $\omega$  и  $\beta$  уравнение (14) имеет нетривиальное решение  $v \in L_2(\Omega)$ . Определим функцию  $u = v/r \in L_2(\Omega)$ . Ясно, что так определенная функция  $u$  удовлетворяет в  $L_2(\Omega)$  уравнению (10) со слабо полярным ядром. Хорошо известно, что интегральный оператор со слабо полярным ядром переводит  $L_2(\Omega)$  в  $C(\bar{\Omega})$  и ограничен (см., напр., [8], с. 327). Следовательно, функция  $u$  непрерывна в  $\bar{\Omega}$ .

Интегральный оператор, определяемый правой частью равенства (10), представим в виде потенциала площади с плотностью  $ur^2$  (определение и используемые ниже свойства потенциала площади см., напр., в [8], с. 463) и интегрального оператора с гладким ядром. По предположению функция  $n$ , а, следовательно, и  $p^2$  принадлежит классу  $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Если плотность потенциала площади принадлежит  $C(\bar{\Omega})$ , то сам потенциал принадлежит  $C^1(\mathbb{R}^2)$  и  $C^2(\Omega_\infty)$ . Значит функция  $u$  непрерывно дифференцируема в  $\mathbb{R}^2$  и дважды непрерывно дифференцируема в  $\Omega_\infty$ . Теперь мы можем заключить, что плотность потенциала площади принадлежит  $C^1(\Omega)$ . Такой потенциал принадлежит  $C^2(\Omega)$ , следовательно, и функция  $u$  дважды непрерывно дифференцируема в  $\Omega$ . Итак мы доказали, что  $u$  удовлетворяет требуемым свойствам гладкости, а также, что условия сопряжения (19)

выполнены.

По построению функции Грина для полупространства  $G_C$  функция  $u$ , определяемая равенством (10), удовлетворяет уравнению Гельмгольца (18) и граничному условию (20). Докажем теперь, что функция  $u$  удовлетворяют условию (21). Действительно, при каждом фиксированном  $y$  функция Грина удовлетворяет парциальным условиям излучения по  $x$ :

$$G_C(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l(y) H_l^{(1)}(\chi r(x)) \sin(l\varphi(x)).$$

Следовательно, в ряд такого же вида разлагается и функция  $u$ . Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно это представление подставить в равенство (10).  $\square$

Фиксируем некоторое значение  $\omega > 0$ . Положим

$$C(\omega, \beta) = I - \lambda T_C(\omega, \beta), \quad (15)$$

где  $I$  — единичный оператор в  $L_2(\Omega)$ , а оператор  $T_C(\omega, \beta)$  определен равенством (13). При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро интегрального оператора  $T_C(\omega, \beta)$  слабо полярно, следовательно, оператор  $T_C(\omega, \beta)$  вполне непрерывен, а оператор  $C(\omega, \beta)$  фредгольмов [8]. Собственные функции  $v \in L_2(\Omega)$  оператор-функции  $C(\omega, \beta)$ , отвечающие характеристическим значениям  $\beta \in \Lambda$ , удовлетворяют уравнению

$$C(\omega, \beta)v = 0. \quad (16)$$

**Теорема 1.3.** *Множество регулярных точек оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  не пусто, а именно,  $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(C)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $C(\omega, \beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  непрерывно зависит от параметра  $\omega > 0$ . Кроме того, с изменением  $\omega > 0$  характеристические значения оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  могут появляться и исчезать*

только на границе поверхности  $\Lambda$ , т. е. в точках  $\beta = \pm kn_\infty$  и на бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично [33], с. 459, можно показать, что оператор-функция  $C(\omega, \beta)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывна как функция двух переменных  $\beta \in \Lambda$  и  $\omega > 0$ . В силу фредгольмовости оператора  $C(\omega, \beta)$ , теоремы 1.1 о локализации собственных значений задачи  $(C)$ , с. 40, и теоремы 1.2 об эквивалентности задач  $(C)$ , с. 40, и (14) оператор  $C(\omega, \beta)$  обратим для любых  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus G$ . Таким образом, справедливость теоремы вытекает из теоремы [16] об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции  $C(\beta)$  при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, и теоремы [95] о поведении характеристических значений  $\beta$  такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра  $\omega$  в случае, если оператор-функция  $C(\omega, \beta)$  является непрерывной функцией параметров  $\beta$  и  $\omega$ .  $\square$

Поясним, что с точки зрения физических приложений в теореме 1.3 говорится о том, что зависимость постоянных распространения  $\beta$  собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода, находящегося в полупространстве, от частоты электромагнитных колебаний  $\omega$  имеет качественно такой же характер, что и для волновода в однородной среде.

## § 5. Существование поверхностных волн

Известно (см. [18], с. 168), что при любом  $\omega > 0$  у задачи  $(B)$ , с. 37, о поверхностных собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде существует конечное число собственных значений  $\beta \in (kn_\infty, kn_+)$ . Точно такой же результат известен [71] и для задачи  $(E)$ , с. 42, о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в плоско-слоистой среде. Аналогичных результатов для

задачи  $(D)$ , с. 41, о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве не известно.

В этом параграфе используется новый метод доказательства существования поверхностных волн слабонаправляющих волноводов. Он основан на сочетании трех эквивалентных формулировок для каждой из трех задач  $((B)$ ,  $(D)$  и  $(E)$ ): исходной классической постановки  $(I)$ , формулировки в виде спектральной задачи для интегрального оператора с симметричным слабо полярным ядром  $(II)$ , вариационной формулировки задачи на всей плоскости или полуплоскости  $(III)$ . Интегральные операторы с указанными свойствами являются самосопряженными и вполне непрерывными. Для доказательства положительной определенности этих операторов применяется формулировка  $(III)$  и эквивалентность постановок  $(I)$ – $(III)$  для каждой задачи. Анализ опирается на классические результаты теории интегральных операторов с симметричными полярными ядрами (см., напр., [8]), а также теории вполне непрерывных операторов (см., напр., [47]).

Такой подход конструктивен. Он позволяет свести каждую из трех задач  $(B)$ ,  $(D)$  и  $(E)$  к параметрической линейной спектральной задаче для вполне непрерывного, самосопряженного, положительно определенного интегрального оператора в ограниченной области поперечного сечения волновода. Во второй главе предлагаются и исследуются конечномерные приближения указанных операторов на основе метода коллокации с триангуляцией области интегрирования и кусочно-постоянной аппроксимацией собственных функций.

**1. Волновод в однородной среде.** Обратимся сначала к изучению задачи  $(B)$ , с. 37, о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде. Собственные функции отвечают собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_\infty$ . В этом случае вещественная

часть числа  $\chi$  равна нулю, а мнимая часть положительна:  $\chi = i\sigma$ , где

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2} > 0. \quad (1)$$

Тогда ядро интегрального уравнения (5), с. 57, становится не только слабо полярным, но также вещественным, симметричным и положительным:

$$K_A(\omega, \beta; x, y) = G_A(\omega, \beta; x, y)p(x)p(y) > 0, \quad x, y \in \Omega,$$

$$G_A(\omega, \beta; x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma(\omega, \beta)|x - y|).$$

Действительно,

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(iz) = \frac{1}{2\pi} K_0(z), \quad z > 0, \quad (2)$$

а функция Макдональда  $K_0$  положительна на всей положительной полуоси (см., напр., [70]). Введем новые обозначения:

$$G_B(\sigma; x, y) = G_A(\omega, \beta; x, y), \quad K_B(\sigma; x, y) = K_A(\omega, \beta; x, y). \quad (3)$$

Интегральный оператор  $T_A(\omega, \beta)$ , определенный равенством (6), с. 57, целесообразно рассматривать, как оператор

$$(T_B(\sigma)) v(x) = \int_{\Omega} K_B(\sigma; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

действующий в пространстве вещественных функций  $L_2(\Omega)$ , а задачу (5), с. 57, — как спектральную задачу

$$v = \lambda T_B(\sigma) v, \quad (5)$$

где требуется найти  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  и отвечающие им ненулевые функции  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие равенству (5). При фиксированном  $\sigma > 0$  задача (5) есть линейная задача определения характеристических чисел  $\lambda$  и собственных функций  $v$  оператора  $T_B(\sigma)$ .

Отметим, что введенные нами параметры имеют отчетливый физический смысл (см., напр., [54], [58]). Функция  $p^2$  называется «профилем волновода» (часто обозначается  $P$ ). Это основная характеристика среды, в которой распространяются собственные волны. Параметр  $\sqrt{\lambda}$  в физической литературе обычно обозначается  $V$ . Он называется «обобщенным параметром частоты». Чем больше  $V$ , тем больше поверхностных собственных волн может распространяться в волноводе. Параметр  $\sigma$  (часто обозначается  $k_t$ ) — «поперечное волновое число» — характеристика скорости затухания поверхностной волны на бесконечности. Чем меньше  $\sigma$ , тем меньше эта скорость (см. (14), с. 36).

Задачи (5) и (B), с. 37, эквивалентны, а именно справедлива

**Теорема 1.4.** *Если не равная нулю функция  $u \in U_B$  и параметры  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_\infty$  удовлетворяют условиям (B), с. 37, то*

$$v = pu \in L_2(\Omega), \quad \lambda = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2), \quad \sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_\infty^2}$$

*удовлетворяют равенству (5). С другой стороны, если для ненулевой функции  $v \in L_2(\Omega)$  и некоторых значений  $\lambda > 0$ ,  $\sigma > 0$  выполняется равенство (5), то*

$$u = v/p, \quad \beta = \left( \sigma^2 + \lambda \frac{n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2} \right)^{1/2}, \quad \omega = \left( \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2)} \right)^{1/2}$$

*удовлетворяют уравнению (1), с. 56, функция  $u$  принадлежит множеству  $U_B$  и является собственной функцией задачи (B), с. 37, отвечающей собственным значениям  $\beta$  и  $\omega$ .*

Эта теорема с учетом сделанных в настоящем параграфе предположений, фактически, является частным случаем приведенного на с. 57 известного [55] утверждения об эквивалентности задачи (A), с. 34, и задачи (7).

Относительно существования решений задачи (5) справедлива

**Теорема 1.5.** При любом  $\sigma > 0$  оператор  $T_B(\sigma)$ , определенный равенством (4), является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, и для него справедливы следующие утверждения.

1. Существует счетное множество положительных характеристических чисел  $\lambda_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности.

2. Система собственных функций  $\{v_i\}$  может быть выбрана ортонормированной:  $(v_k, v_i) = \delta_{ki}$ , где через  $(\cdot, \cdot)$  обозначено скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$ .

3. Минимальное характеристическое число  $\lambda_1(\sigma)$  простое (его кратность равна единице), соответствующая собственная функция  $v_1(x)$  не меняет знака в области  $\Omega$ .

4.  $\lambda_1(\sigma) \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При любом  $\sigma > 0$  ядро  $K_B(\sigma; x, y)$  вещественное, симметричное и слабо полярное, следовательно, оператор  $T_B(\sigma)$  вполне непрерывный и самосопряженный (см., напр., [8], с. 326). Докажем, что он положительно определен.

Сформулируем вариационную постановку задачи (B), с. 37, о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде. Обозначим  $H^1 = W_2^1(\mathbb{R}^2)$  пространство Соболева, образованное функциями из  $L_2(\mathbb{R}^2)$ , у которых существуют обобщенные производные, и

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + u^2) dx < \infty, \quad u \in H^1.$$

Интеграл в левой части этой оценки примем за определение квадрата нормы в  $H^1$ .

Рассмотрим задачу: найти все  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$  при которых существуют ненулевые функции  $u \in H^1$ , удовлетворяющие для любой

функции  $v \in H^1$  равенству:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} n^2 uv dx. \quad (6)$$

Задачи (B), с. 37, и (6) эквивалентны. Действительно, с одной стороны, пусть  $u$  — собственная функция задачи (B), с. 37. Такая функция принадлежит  $U_B$ , удовлетворяет условиям сопряжения (2), с. 33, а ее производная экспоненциально убывает на бесконечности (см. с. 36), следовательно,  $u \in H^1$ . Умножим уравнение (1), с. 32, на произвольную бесконечное число раз дифференцируемую, финитную функцию  $v$  (как обычно, пространство таких функций обозначим буквой  $\mathcal{D}$ ) и воспользуемся формулой интегрирования по частям. Получим тождество вида (6), где интегралы берутся по носителю функции  $v$ . Пространство  $\mathcal{D}$  плотно в  $H^1$  (см., напр., [57], с. 342). Следовательно, тождество (6) справедливо для любой  $v \in H^1$ .

С другой стороны, выбирая в (6) в качестве  $v$  произвольную функцию из  $\mathcal{D}$  с носителем, содержащим  $\Omega$ , получаем, что функция  $u$  — обобщенное решение (из пространства Соболева) уравнения (1), с. 32, в произвольной области  $\Omega'$ , содержащей  $\Omega$ . В силу известных результатов о гладкости обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений (см., напр., [32], с. 114) уравнение (1), с. 32, выполняется в  $\Omega'$  в классическом смысле. При этом, поскольку  $u \in H^1(\Omega')$ , то выполняется первое условие сопряжения (2), с. 33. Применяя формулу интегрирования по частям и используя произвол в выборе функции  $v$ , нетрудно убедиться, что и второе условие сопряжения (2), с. 33, также выполняется. Далее, поскольку функция  $u$  при  $\beta > kn_\infty$  удовлетворяет уравнению (1), с. 32, в классическом смысле и убывает на бесконечности, то она удовлетворяет условию (14), с. 36 (см., напр., [7]).

Запишем тождество (6) в виде

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx = k^2 \int_{\Omega} n^2 uv dx + k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega_\infty} uv dx \quad \forall v \in H^1. \quad (7)$$

Добавим и вычтем из правой части этого тождества интеграл

$$k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega} uv dx.$$

Получим тождество

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx = \\ & = k^2 \int_{\Omega} n^2 uv dx + k^2 n_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^2} uv dx - k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega} uv dx \quad \forall v \in H^1. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть параметры  $\sigma$  и  $\lambda$  связаны с собственными значениями  $\omega$  и  $\beta$  задачи (B), с. 37, равенствами (2), с. 56, (1), с. 64, а функция  $p$  определена первым равенством в (2), с. 56, т. е.

$$p^2(x) = \frac{n^2(x) - n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2}, \quad \lambda = k^2 (n_+^2 - n_\infty^2), \quad \sigma^2 = \beta^2 - k^2 n_\infty^2.$$

Перепишем тождество (8) в виде

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \sigma^2 uv) dx = \lambda \int_{\Omega} p^2 uv dx \quad \forall v \in H^1. \quad (9)$$

Запишем последнее тождество в виде

$$a(\sigma; u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in H^1, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a(\sigma; u, v) &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} uv dx, \quad u, v \in H^1, \\ b(u, v) &= \int_{\Omega} p^2 uv dx, \quad u, v \in H^1. \end{aligned}$$

Будем искать  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  и ненулевые функции  $u \in H^1$  такие, что выполняется (10). Задачи (6) и (10) эквивалентны в том смысле, что их собственные функции совпадают, а собственные значения связаны равенствами (2), с. 56, (1), с. 64,

Ясно, что при любом  $\sigma > 0$  оператор  $A(\sigma)$ , порождаемый билинейной формой  $a(\sigma; u, v)$ , ограниченный, самосопряженный и положительно определенный, а оператор  $B$ , порождаемый билинейной формой  $b(u, v)$ , ограниченный, самосопряженный и неотрицательный. Кроме того, оператор  $B$  компактный (см., напр., [32], с. 106).

Существование решений задачи вида (10) с операторами, обладающими указанными свойствами, известно (см., напр., [18], с. 129). При любом  $\sigma > 0$  у задачи (10) существует счетное множество положительных собственных значений  $\lambda_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности, а система собственных функций  $\{u_i\}$  может быть выбрана ортонормированной в смысле скалярного произведения в  $L_2(\Omega)$  с весом  $p^2$ .

Если параметры  $\sigma$  и  $\lambda$  связаны с собственными значениями  $\omega$  и  $\beta$  задачи (B), с. 37, равенствами (2), с. 56, (1), с. 64, то каждое решение вариационной задачи (10) дает решение задачи (B), с. 37, и наоборот. Эта задача в свою очередь эквивалентна (см. теорему 1.4) задаче (5). Следовательно, каждое собственное значение  $\lambda_i(\sigma)$  задачи (10) является характеристическим числом оператора  $T_B(\sigma)$ , и наоборот, а соответствующие собственные функции связаны равенством  $v_i = pu_i$ . Значит первые два утверждения теоремы справедливы. Кроме того, доказано, что оператор  $T_B(\sigma)$  является положительно определенным, так как все его характеристические числа положительны (см., напр., [8], с. 325).

При любом  $\sigma > 0$  ядро  $K(\sigma; x, y)$  оператора  $T_B(\sigma)$  является симметричным, положительным и слабо полярным. Таким образом для этого оператора справедлива теорема Ентча (см., напр., [8], с. 329), т. е. имеет место и третье утверждение теоремы.

Утверждение 4 известно [55].  $\square$

Отметим, что утверждения 1 и 2 могут быть получены из результатов [18]. В этой монографии существование решений задачи о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в однород-

ной среде доказано методом точных нелокальных граничных условий. В силу эквивалентности рассматриваемых задач утверждения 1 и 2 являются следствиями теоремы 7.32 [18]. Тем не менее, доказательства этих утверждений теоремы 1.5 мы приводим полностью, поскольку они основаны на специальной вариационной постановке задачи на всей плоскости. Такой подход будет использован в следующих двух пунктах и при исследовании разрешимости задач о поверхностных волнах волноводов в полупространстве и слоистой среде, для которых точные нелокальные граничные условия не известны.

Минимальное характеристическое число  $\lambda_1 = \lambda_1(\sigma)$  и отвечающая ему собственная функция  $v_1$  при фиксированном  $\sigma > 0$  определяют собственную волну, которая в теории волноводов носит название основной (см. с. 38). Таким образом, в этой теореме, в частности, доказано, что у волновода, находящегося в однородной среде, при любой частоте  $\omega > 0$  существует в точности одна основная волна.

Проиллюстрируем только что доказанную теорему. Графики функций  $\lambda_i = \lambda_i(\sigma)$  в теории волноводов называются дисперсионными кривыми. На рис. 2, с. 89, изображены дисперсионные кривые волновода кругового поперечного сечения единичного радиуса с постоянным показателем преломления  $n = \sqrt{2}$ , находящегося в однородной окружающей среде с  $n_\infty = 1$ .

**2. Волновод в полупространстве.** Докажем теперь существование решений задачи (C), с. 40, о поверхностных волнах слабо-направляющего волновода в полупространстве. Ядро интегрального уравнения (12), с. 59, слабо полярно. При  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_\infty$  оно также становится вещественным и симметричным:

$$K_C(\omega, \beta; x, y) = G_C(\omega, \beta; x, y)p(x)p(y), \quad x, y \in \Omega,$$

$$G_C(\omega, \beta; x, y) = \frac{1}{2\pi} (K_0(\sigma(\omega, \beta)|x - y|) - K_0(\sigma(\omega, \beta)|x - y^*|)).$$

Здесь  $K_0$  — функция Макдональда, функции  $p$  и  $\sigma$  определены равенствами (2), с. 56, и (1), с. 64, соответственно,  $y^* = (y_1, -y_2)$ . Дей-

ствительно, для любых  $x, y \in \Omega$  в силу очевидных равенств

$$|x - y| = |y - x|, \quad |x - y^*| = |y - x^*|$$

имеем  $K_C(x, y) = K_C(y, x)$ . Потребуем дополнительно, чтобы область  $\Omega$  не касалась оси  $x_1$ . Тогда ядро становится положительным:  $K_C(x, y) > 0$ . Действительно, функция Макдональда монотонно убывает на положительной полуоси (см., напр., [44]) а для любых  $x, y \in \Omega$  имеем  $|x - y| < |x - y^*|$ .

В этом случае интегральный оператор  $T_C(\omega, \sigma)$ , определенный равенством (13), с. 59, удобно рассматривать, как оператор

$$(T_D(\sigma))v(x) = \int_{\Omega} K_D(\sigma; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega, \quad (11)$$

$$K_D(\sigma; x, y) = G_D(\sigma; x, y)p(x)p(y), \quad (12)$$

$$G_D(\sigma; x, y) = \frac{1}{2\pi} (K_0(\sigma|x - y|) - K_0(\sigma|x - y^*|)),$$

действующий в пространстве вещественных функций  $L_2(\Omega)$ , а задачу (12), с. 59, — как спектральную задачу

$$v = \lambda T_D(\sigma)v, \quad (13)$$

где требуется найти значения  $\lambda > 0, \sigma > 0$  и отвечающие им ненулевые функции  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие равенству (13).

Задачи (13) и (D), с. 41, эквивалентны, а именно справедлива

**Теорема 1.6.** *Если не равная нулю функция  $u \in U_D$  и параметры  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_{\infty}$  удовлетворяют условиям (D), с. 41, то*

$$v = pu \in L_2(\Omega), \quad \lambda = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_{\infty}^2), \quad \sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_{\infty}^2}$$

удовлетворяют равенству (13). С другой стороны, если для ненулевой функции  $v \in L_2(\Omega)$  и некоторых значений  $\lambda > 0, \sigma > 0$  выполняется равенство (13), то

$$u = v/p, \quad \beta = \left( \sigma^2 + \lambda \frac{n_{\infty}^2}{n_+^2 - n_{\infty}^2} \right)^{1/2}, \quad \omega = \left( \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_{\infty}^2)} \right)^{1/2}$$

удовлетворяют уравнению (10), с. 59, функция  $u$  принадлежит множеству  $U_D$  и является собственной функцией задачи (D), с. 41, отвечающей собственным значениям  $\beta$  и  $\omega$ .

Эта теорема с учетом сделанных в настоящем параграфе предположений, фактически, является частным случаем теоремы 1.2.

Относительно существования решений задачи (13) справедлива

**Теорема 1.7.** *При любом  $\sigma > 0$  оператор  $T_D(\sigma)$ , определенный равенством (11), является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, и для него справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует счетное множество положительных характеристических чисел  $\lambda_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности.*

2. *Система собственных функций  $\{v_i\}$  может быть выбрана ортонормированной:  $(v_k, v_i) = \delta_{ki}$ .*

3. *Минимальное характеристическое число  $\lambda_1(\sigma)$  простое (его кратность равна единице), соответствующая собственная функция  $v_1(x)$  не меняет знака в области  $\Omega$ .*

4. *Существует такая константа  $c > 0$ , что  $\lambda_1(\sigma) \rightarrow c$ ,  $\sigma \rightarrow 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При любом  $\sigma > 0$  ядро  $K_D(\sigma; x, y)$  вещественное, симметричное и слабо полярное, следовательно, оператор  $T_D(\sigma)$  вполне непрерывный и самосопряженный (см., напр., [8], с. 326). Докажем, что он положительно определенный.

Сформулируем вариационную постановку задачи (D), с. 41, о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве. Обозначим

$$H_0^1 = \{u \in W_2^1(\mathbb{R}_+^2) : u = 0, x_2 = 0\}.$$

Будем искать  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  и ненулевые функции  $u \in H_0^1$  такие, что

$$a(\sigma; u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in H_0^1, \quad (14)$$

где

$$a(\sigma; u, v) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}_+^2} uv dx, \quad u, v \in H_0^1,$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} p^2 uv dx, \quad u, v \in H_0^1,$$

функция  $p$  определена в (2), с. 56. Ясно, что при любом  $\sigma > 0$  оператор  $A(\sigma)$ , порождаемый билинейной формой  $a(\sigma; u, v)$ , ограниченный, самосопряженный и положительно определенный, а оператор  $B$ , порождаемый билинейной формой  $b(u, v)$ , ограниченный, самосопряженный и неотрицательный. Кроме того оператор  $B$  компактный (см., напр., [32], с. 106).

Существование решений задачи вида (14) с операторами, обладающими указанными свойствами, известно (см., напр., [18], с. 129). При любом  $\sigma > 0$  у задачи (14) существует счетное множество положительных собственных значений  $\lambda_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности, а система собственных функций  $\{u_i\}$  может быть выбрана ортонормированной в смысле скалярного произведения в  $L_2(\Omega)$  с весом  $p^2$ .

Если параметры  $\sigma$  и  $\lambda$  связаны с собственными значениями  $\omega$  и  $\beta$  задачи  $(D)$ , с. 41, равенствами (2), с. 56, и (1), с. 64, то каждому решению вариационной задачи (14) отвечает решение задачи  $(D)$ , с. 41, и наоборот (см. аналогичные рассуждения в ходе доказательства теоремы 1.5). Эта задача в свою очередь эквивалентна (см. теорему 1.6) задаче (13). Следовательно, каждое собственное значение  $\lambda_i(\sigma)$  задачи (14) является характеристическим числом оператора  $T_C(\sigma)$ , и наоборот, а соответствующие собственные функции связаны равенством  $v_i = pu_i$ . Значит, первые два утверждения теоремы справедливы. Кроме того, доказано, что оператор  $T_D(\sigma)$  является положительно определенным, так как все его характеристические числа положительны (см., напр., [8], с. 325).

Докажем четвертое утверждение. При любом  $\sigma > 0$  для минимального собственного значения задачи (10) справедливо равенство

$$\frac{1}{\lambda_1(\sigma)} = \min_{u \in H_0^1, u \neq 0} \frac{b(u, u)}{a(\sigma; u, u)}.$$

Отсюда следует, что функция  $\lambda_1 = \lambda_1(\sigma)$  монотонно не возрастает при  $\sigma \rightarrow 0$ . Кроме того, для минимального характеристического числа оператора  $T_D(\sigma)$  имеем (оценку нормы оператора см., напр., в [29], с. 428):

$$\frac{1}{\lambda_1(\sigma)} = \|T_D(\sigma)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} K_D^2(\sigma; x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Далее, справедливы равенства

$$K_0(\sigma|x-y|) = \ln \frac{1}{\sigma} + g(\sigma|x-y|), \quad K_0(\sigma|x-y^*|) = \ln \frac{1}{\sigma} + g^*(\sigma|x-y^*|),$$

где функции  $g$  и  $g^*$  не имеют особенности при  $\sigma \rightarrow 0$ . Значит функция

$$K_D^2(\sigma; x, y) = \frac{1}{4\pi^2} (g(\sigma|x-y|) - g^*(\sigma|x-y|))^2 p^2(x)p^2(y)$$

непрерывна по  $\sigma$  на отрезке  $[0, \sigma_0]$ , где  $\sigma_0$  — произвольное положительное число. Следовательно, норма  $\|T_D(\sigma)\|_{L_2(\Omega)}$  ограничена сверху равномерно по  $\sigma \in [0, \sigma_0]$ , а минимальное характеристическое число  $\lambda_1(\sigma)$  оператора  $T_D(\sigma)$  — снизу. Так как  $\lambda_1(\sigma)$  монотонно не возрастает, то стремится к положительному числу при  $\sigma \rightarrow 0$ . Таким образом, четвертое утверждение тоже выполняется.

При любом  $\sigma > 0$  ядро  $K_D(\sigma; x, y)$  оператора  $T_D(\sigma)$  является симметричным, положительным, слабо полярным. Таким образом для этого оператора справедлива теорема Ентча (см., напр., [8], с. 329), т. е. имеет место и третье утверждение теоремы.  $\square$

Утверждение 4 этой теоремы устанавливает, что у слабонаправляющего волновода в полупространстве при достаточно малых  $\omega$  не существует поверхностных собственных волн. В этом заключается

принципиальное отличие спектральных характеристик волновода в полупространстве от волновода в однородной окружающей среде, у которого при любой частоте  $\omega > 0$  существует, по крайней мере одна поверхностная собственная волна (основная).

Проиллюстрируем только что доказанную теорему. На рис. 17, с. 106, изображены дисперсионные кривые волновода, поперечное сечение которого представляет собой единичный полукруг с центром в начале координат, лежащий на оси  $x_1$ . Кусочно-постоянный показатель преломления этого волновода принимает следующие значения:  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $x \in \Omega$ ,  $n(x) = n_\infty = 1$ ,  $x \in \Omega_\infty$ .

**3. Волновод в плоско-слоистой среде.** Обратимся теперь к задаче (E), с. 42, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в плоско-слоистой среде. Пусть  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$ ,  $n_\infty > n_t$ . Запишем равенство (24), с. 55, при  $x \in \Omega$  в виде интегрального уравнения со слабо полярным ядром:

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} G_E(\sigma, \lambda; x, y) p^2(y) u(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

где

$$p^2(x) = \frac{n^2(x) - n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2}, \quad \lambda = k^2 (n_+^2 - n_\infty^2),$$

$$G_E(\sigma, \lambda; x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma|x - y|) - \quad (16)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp((x_2 + y_2)\gamma) \frac{\gamma_t - \gamma}{(\gamma_t + \gamma)\gamma} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x, y \in \Omega;$$

Здесь  $\gamma = \sqrt{\theta^2 + \sigma^2}$ ,  $\gamma_t = \sqrt{\theta^2 + \sigma_t^2}$ . Напомним, что  $\sigma^2 = \beta^2 - k^2 n_\infty^2$ , а  $\sigma_t^2 = \beta^2 - k^2 n_t^2$ , следовательно,  $\sigma_t^2 = \sigma^2 + \lambda(n_\infty^2 - n_t^2)/(n_+^2 - n_\infty^2)$ . Проверим, что ядро уравнения (15) действительно слабо полярное: второе слагаемое в (16) — гладкая по  $x, y \in \Omega$  функция, а первое (функция Макдональда) имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов.

Обозначим  $v = pu$ ,

$$K_E(\sigma, \lambda; x, y) = G_E(\sigma, \lambda; x, y)p(x)p(y) \quad x, y \in \Omega. \quad (17)$$

Имеем

$$v(x) = \lambda \int_{\Omega} K_E(\sigma, \lambda; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega. \quad (18)$$

Пусть

$$(T_E(\sigma, \lambda))v(x) = \int_{\Omega} K_E(\sigma, \lambda; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega. \quad (19)$$

Ясно, что при любых  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  ядро  $K_E(\sigma, \lambda; x, y)$ , определенное равенствами (16), (17), не только слабо полярное, но также вещественное и симметричное. Будем рассматривать оператор  $T_E(\sigma, \lambda)$  как оператор, действующий в пространстве  $L_2(\Omega)$ . Запишем уравнение (18) в виде

$$v = \lambda T_E(\sigma, \lambda)v. \quad (20)$$

Требуется найти  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  и ненулевые функции  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие равенству (20).

Задачи (20) и (E), с. 42, эквивалентны, точнее справедлива

**Теорема 1.8.** *Если не равная нулю функция  $u \in U_E$  и параметры  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_{\infty}$  удовлетворяют условиям (E), с. 42, то*

$$v = pu \in L_2(\Omega), \quad \lambda = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_{\infty}^2), \quad \sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_{\infty}^2}$$

удовлетворяют равенству (20). С другой стороны, если для ненулевой функции  $v \in L_2(\Omega)$  и некоторых значений  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  выполняется равенство (20), то

$$u = v/p, \quad \beta = \left( \sigma^2 + \lambda \frac{n_{\infty}^2}{n_+^2 - n_{\infty}^2} \right)^{1/2}, \quad \omega = \left( \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_{\infty}^2)} \right)^{1/2}$$

удовлетворяют уравнению (15), функция  $u$  принадлежит множеству  $U_E$  и является собственной функцией задачи (E), с. 42, отвечающей собственным значениям  $\beta$  и  $\omega$ .

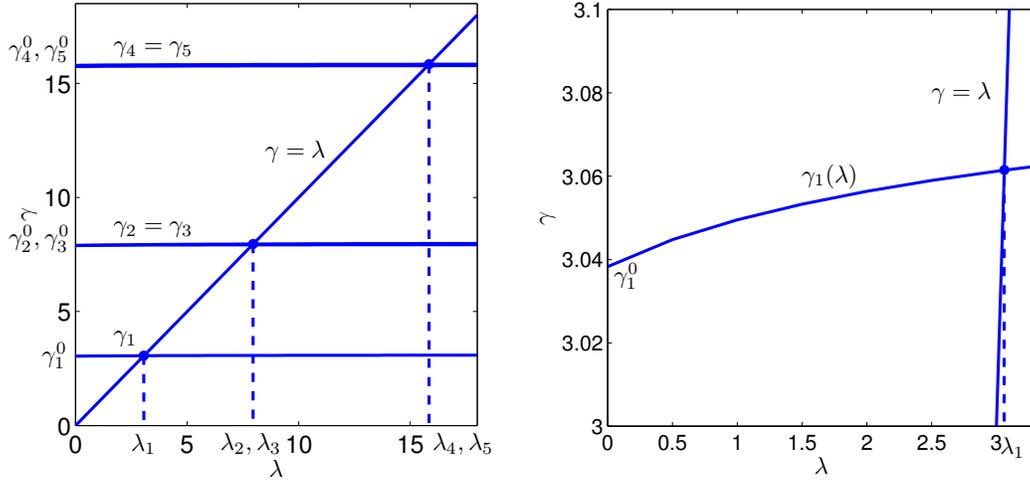


Рис. 5. Кривые  $\gamma_i = \gamma_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , полученные методом коллокации для волновода в слоистой среде (см. с. 112). Здесь  $\Omega$  — единичный круг с центром в точке  $(0, -2)$ , показатель преломления  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $x \in \Omega$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ .

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1.2.

Задача (20) представляет собой спектральную задачу для интегрального оператора с симметричным слабо полярным ядром. Фиксируем  $\sigma > 0$ , и наряду с этой задачей рассмотрим следующую:

$$v = \gamma T_E(\sigma, \lambda) v. \quad (21)$$

Ясно, что если при некотором  $\lambda > 0$  существует значение  $\gamma = \lambda$  и ненулевая функция  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие равенству (21), то тройка  $\sigma, \lambda, v$  есть решение задачи (20).

Пусть  $\lambda = 0$ . Тогда второе слагаемое в (16) тоже равно нулю, и задача (16) совпадает с задачей о поверхностных волнах волновода в однородной среде (5), с. 64. Относительно существования решений этой задачи справедлива теорема 1.5. Обозначим соответствующие характеристические числа  $\gamma_i^0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Напомним, что все они положительны.

Пусть  $\lambda > 0$ . Тогда второе слагаемое в (16) не равно нулю, но ядро оператора  $T_E(\sigma, \lambda)$  остается симметричным и слабо полярным.

Относительно существования решений задачи (21) при фиксированных  $\lambda > 0$ ,  $\sigma > 0$  справедлива

**Теорема 1.9.** *При любом  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  оператор  $T_E(\sigma, \lambda)$ , определенный равенством (19), является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, и для него справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует счетное множество положительных характеристических чисел  $\gamma_i(\sigma, \lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности.*

2. *Система собственных функций  $\{v_i\}$  может быть выбрана ортонормированной:  $(v_k, v_i) = \delta_{ki}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При любом  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  ядро  $K_E(\sigma, \lambda; x, y)$  вещественное, симметричное и слабо полярное, следовательно, оператор  $T_E(\sigma, \lambda)$  вполне непрерывный и самосопряженный (см., напр., [8], с. 326). Докажем, что утверждения 1, 2 выполняются и оператор  $T_E(\sigma, \lambda)$  положительно определен.

Сформулируем вариационную постановку задачи (E), с. 42: найти такие значения  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  и ненулевые функции  $u \in H^1 = W_2^1(\mathbb{R}^2)$ , что

$$a(\sigma, \lambda; u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in H^1, \quad (22)$$

где

$$a(\sigma, \lambda; u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^2} s(\sigma, \lambda) u v dx, \quad u, v \in H^1,$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} p^2 u v dx, \quad u, v \in H^1,$$

$$s(\sigma, \lambda) = \begin{cases} \sigma^2 + \lambda(n_\infty^2 - n_t^2)/(n_+^2 - n_\infty^2), & x_2 > 0, \\ \sigma^2, & x_2 < 0, \end{cases}$$

параметр  $\lambda$  и функция  $p^2 > 0$  определены равенствами (2), с. 56, параметр  $\sigma$  — равенством (1), с. 64;  $n_+ > n_\infty > n_t > 0$ . Фиксиру-

ем  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$ . Наряду с задачей (22) рассмотрим задачу

$$a(\sigma, \lambda; u, v) = \gamma b(u, v) \quad \forall v \in H^1. \quad (23)$$

Оператор  $A(\sigma, \lambda)$ , порождаемый билинейной формой  $a(\sigma, \lambda; u, v)$ , ограниченный, самосопряженный и положительно определенный. Оператор  $B$ , порождаемый билинейной формой  $b(u, v)$ , ограниченный, самосопряженный, неотрицательный и компактный. Значит при любых  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  у задачи (23) существует счетное множество положительных собственных значений  $\gamma(\sigma, \lambda)_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности, а собственные функции могут быть выбраны ортонормированными. Задачи (21) и (23) эквивалентны. Следовательно, теорема справедлива.  $\square$

Фиксируем  $\sigma > 0$ . Введем в рассмотрение функции  $\gamma_i = \gamma_i(\lambda)$  параметра  $\lambda > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , где через  $\gamma_i(\lambda)$  обозначены характеристические числа оператора  $T_E(\sigma, \lambda)$ . Приведем результаты расчетов, полученные методом коллокации (см. с. 112). В этом эксперименте область  $\Omega$  — единичный круг с центром в точке  $(0, -2)$ , показатель преломления  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $x \in \Omega$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ . На рис. 5 изображены кривые  $\gamma_i = \gamma_i(\lambda)$  для  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Они пересекают прямую  $\gamma = \lambda$ , практически горизонтальные (см. левый рис.), но монотонно возрастают (см. правый рис.). На рис. 21, с. 112, изображены дисперсионные кривые для этого волновода.

## ГЛАВА 2

# Метод коллокации решения спектральных задач для двумерных слабо сингулярных интегральных уравнений

Спектральные задачи о собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде, полупространстве и слоистой среде сведены в первой главе к линейным (5), с. 64, (13), с. 71, (20), с. 76, и нелинейным (7), с. 57, (14), с. 59, задачам поиска характеристических чисел двумерных слабо сингулярных интегральных операторов. Одним из эффективных численных методов решения подобных задач является метод коллокации [53], [96].

В настоящей главе на основе метода коллокации с триангуляцией области интегрирования и кусочно-постоянной аппроксимацией собственных функций строятся приближения указанных задач. Для вычисления поверхностных и вытекающих собственных волн формулируются, соответственно, линейные и нелинейные алгебраические спектральные задачи. Исследуется сходимость метода, в частности, доказываемая, что метод коллокации решения линейных задач имеет второй порядок точности при вычислении простых характеристических чисел. Обсуждаются алгоритмы, применяющиеся для приближенного решения конечно-мерных задач.

Описывается комплекс программ, написанных на языке Matlab, в котором реализованы предложенные методы и алгоритмы. Комплекс позволяет строить дисперсионные кривые и находить амплитуды поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющих волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и

слоистой среде. Работоспособность программ иллюстрируется в широком диапазоне значений физических и расчетных параметров.

Приводятся результаты численных экспериментов. Они сравниваются с известными точными решениями и результатами, полученными другими авторами. Рассчитываются поверхностные и вытекающие собственные волны ряда неисследованных ранее волноводов в полупространстве и слоистой среде. Оценивается реальная скорость сходимости метода коллокации. Во всех экспериментах при решении, как линейных, так и нелинейных задач, он всегда демонстрирует второй порядок точности.

### § 1. Метод коллокации решения линейных задач

Опишем метод коллокации приближенного решения линейных спектральных задач о поверхностных собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде (5), с. 64, полупространстве (13), с. 71, и слоистой среде (20), с. 76. Пусть  $\sigma > 0$  — фиксированный параметр. Задачи (5), с. 64, и (13), с. 71, имеют вид

$$u = \lambda T u, \quad (1)$$

а задача (20), с. 76, сведена к задаче

$$u = \gamma T(\lambda) u.$$

При фиксированном  $\lambda > 0$  эта задача тоже линейная и имеет вид (1).

Во всех этих задачах оператор  $T$  определяется одним из равенств: (4), с. 64, (11), с. 71, или (19), с. 76, вида

$$(Tu)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

где  $K$  — соответствующее слабо полярное ядро.

Обозначим через  $\mathbb{N}$  множество натуральных чисел. Проведем триангуляцию области  $\Omega$  замкнутыми треугольниками  $\Omega_{j,h}$  так, что вер-

шины многоугольника

$$\Omega_h = \bigcup_{j=1}^N \Omega_{j,h} \subseteq \bar{\Omega},$$

аппроксимирующего  $\bar{\Omega}$ , лежат на контуре  $\Gamma$  и

$$\max_{1 \leq j \leq N} \text{diam}(\Omega_{j,h}) \leq h.$$

Здесь  $N = N_h \in \mathbb{N}$  — число элементов триангуляции  $\Omega_h$ . Предполагается, что эта триангуляция является правильной и регулярной (см., напр., [20]).

Обозначим символом  $\Xi_h = \{\xi_{j,h}\}_{j=1}^N$  сетку на области  $\Omega$ , образованную центрами масс  $\xi_{j,h}$  треугольников  $\Omega_{j,h}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Собственный вектор оператора  $T$  будем разыскивать в виде кусочно-постоянной функции

$$u^{(h)}(x) = \sum_{j=1}^N u_h(\xi_{j,h}) \varphi_{j,h}, \quad (3)$$

где

$$\varphi_{j,h}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{j,h}, \\ 0, & x \notin \Omega_{j,h}. \end{cases}$$

Значения  $u_{j,h} = u_h(\xi_{j,h})$  будем определять из уравнений

$$u_{i,h} = \lambda \sum_{j=1}^N u_{j,h} \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) dy, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Обозначим через  $\text{sp}(T)$  множество всех характеристических чисел оператора  $T$ . Приближением по методу коллокации к числу  $\lambda \in \text{sp}(T)$  будем называть число  $\lambda_h = 1/\mu_h$ , где  $\mu_h$  есть некоторое характеристическое число матрицы  $T_h$  с вещественными элементами

$$t_{ij} = \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) dy, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Обозначим множество всех таких чисел  $\lambda_h$  через  $\text{sp}(T_h)$ . Метод коллокации приближенного решения задач (5), с. 64, (13), с. 71 и (20), с. 76, обосновывает следующая

**Теорема 2.10.** Пусть оператор  $T$  определен равенством (4), с. 64, или (11), с. 71, при фиксированном  $\sigma > 0$ , либо — равенством (19), с. 76, при фиксированных  $\lambda > 0$  и  $\sigma > 0$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если  $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$ , то существует семейство  $\lambda_h \in \text{sp}(T_h)$  такое, что  $\lambda_h \rightarrow \lambda_0$  при  $h \rightarrow 0$ .

2. Если семейство  $\lambda_h \in \text{sp}(T_h)$  такое, что  $\lambda_h \rightarrow \lambda_0 > 0$ ,  $h \rightarrow 0$ , то  $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$ .

3. Если показатель преломления  $n \in C^2(\Omega)$ , а характеристическое число  $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$  простое, то существует такое  $\bar{h} > 0$ , что

$$|\lambda_h - \lambda_0| \leq ch^2, \quad h \in (0, \bar{h}).$$

При доказательстве этой теоремы будем опираться на общие результаты теории дискретной сходимости проекционных методов решения линейных спектральных задач для многомерных слабо сингулярных интегральных уравнений [96]. Поэтому предварим доказательство некоторыми определениями [96] и известными результатами.

Ядро  $K$  оператора  $T$  слабо полярно,  $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ , поэтому, если решение задачи (1) существует, то собственная функция  $u$  принадлежит (см., напр., [8], с. 327) пространству  $E = C(\bar{\Omega})$  с нормой

$$\|u\|_E = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|. \quad (5)$$

Будем рассматривать оператор  $T$  как оператор, действующий в пространстве  $E$ . Введем пространство  $E_h$  функций, заданных на сетке  $\Xi_h$ , с нормой

$$\|u_h\|_{E_h} = \max_{1 \leq j \leq N} |u_h(\xi_{j,h})|, \quad u_h \in E_h. \quad (6)$$

Введем оператор  $T_h$ , действующий в  $E_h$ :

$$(T_h u_h)(\xi_{i,h}) = \sum_{j=1}^N u_h(\xi_{j,h}) \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) dy. \quad (7)$$

Следуя [96], с. 52, введем оператор  $p_h : E \rightarrow E_h$  как оператор, определяющий сужение функции  $u \in E$  на сетку  $\Xi_h$ :  $p_h u \in E_h$  — сеточная функция со значениями

$$(p_h u)(\xi_{j,h}) = u(\xi_{j,h}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (8)$$

В [96], с. 52, доказано что оператор  $p_h$  принадлежит пространству линейных ограниченных операторов  $L(E, E_h)$ ,

$$\|p_h\|_{E \rightarrow E_h} = 1,$$

кроме того, оператор  $p_h$  удовлетворяет условию

$$\|p_h u\|_{E_h} \rightarrow \|u\|_E, \quad h \rightarrow 0, \quad \forall u \in E. \quad (9)$$

Семейство  $(u_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  элементов  $u_h \in E_h$  (где  $\bar{h}$  — некоторое положительное число) называется дискретно сходящимся к элементу  $u \in E$ , если

$$\|u_h - p_h u\|_{E_h} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Дискретную сходимость будем обозначать так:  $u_h \dashrightarrow u$ . Последовательность элементов  $(u_{h_k})$ , где  $u_{h_k} \in E_{h_k}$  и  $h_k \rightarrow 0$  называется дискретно сходящейся к элементу  $u \in E$ , если

$$\|u_{h_k} - p_{h_k} u\|_{E_{h_k}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Семейство  $(u_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  элементов  $u_h \in E_h$  называется дискретно компактным, если любая последовательность элементов  $u_{h_k}$ , для которой  $h_k \rightarrow 0$ , содержит дискретно сходящуюся подпоследовательность. Аналогично определяется дискретно компактная последовательность.

Семейство  $(T_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  операторов  $T_h \in L(E_h, E_h)$  называется дискретно сходящимся к оператору  $T \in L(E, E)$ , если из  $u_h \dashrightarrow u$  следует, что  $T_h u_h \dashrightarrow T u$ . Дискретную сходимость семейства операторов будем обозначать следующим образом:  $T_h \dashrightarrow T$ .

Говорят, что семейство  $(T_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  операторов  $T_h \in L(E_h, E_h)$  сходится к оператору  $T \in L(E, E)$  дискретно компактно, если  $T_h \dashrightarrow T$ , и, кроме того, из  $\|u_h\|_{E_h} < \text{const}$ ,  $h \in (0, \bar{h})$ , следует, что семейство  $(T_h u_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  дискретно компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.10. Оператор  $T \in L(E, E)$  — вполне непрерывный (см., напр., [83] с. 24). Следовательно, по теореме 4.2 [96] достаточно показать, что семейство  $(T_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  операторов  $T_h \in L(E_h, E_h)$  сходится к оператору  $T \in L(E, E)$  дискретно компактно и для  $u_0 = \lambda_0 T u_0$  получить оценку

$$\|T_h p_h u_0 - p_h T u_0\|_{E_h} \leq ch^2, \quad h \in (0, \bar{h}). \quad (11)$$

Доказательство дискретной компактной сходимости проводится аналогично доказательству лемм 5.1 и 5.2 [96].

Для доказательства оценки (11) прежде всего заметим, что, если показатель преломления  $n \in C^2(\Omega)$ , то при фиксированном  $\sigma > 0$  ядра интегральных операторов, определенных равенствами (4), с. 64, и (11), с. 71, а также при фиксированных  $\lambda > 0$  и  $\sigma > 0$  — равенством (19), с. 76, представимы в виде

$$K(x, y) = a(x, y) \ln |x - y| + b(x, y),$$

где  $a(x, y)$  — дважды непрерывно дифференцируемая в  $\Omega \times \Omega$  функция, а  $b(x, y)$  — непрерывная и непрерывно дифференцируемая в  $\Omega \times \Omega$  функция. Следовательно, (см. [96], с. 24) любая собственная функция принадлежит пространству  $C^{2,0}(\Omega)$  с нормой

$$\|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| + \sup_{x \in \Omega} |\nabla u(x)| + \sup_{x \in \Omega} \frac{|D^2 u(x)|}{1 + \ln \rho(x)}, \quad (12)$$

где  $\rho(x) = \inf_{y \in \Gamma} |x - y|$ . Далее доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5.3 [96].

В монографии [96] рассмотрен более общий случай многомерных интегральных операторов с полярными ядрами. В приложении к диссертации леммы 5.1–5.3 [96] будут сформулированы применительно к

рассматриваемому частному случаю, а их доказательства проведены более подробно.  $\square$

## § 2. Численное решение задач о поверхностных волнах

Опишем результаты численных экспериментов поиска поверхностных волн для волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде.

### 1. Волновод в однородной среде.

**1.1. Вычисление элементов матрицы.** Приведем формулы для вычисления элементов

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_j} K_0(\sigma|\xi_i - y|)p(\xi_i)p(y)dy, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

матрицы  $A = T_h$ , возникающей при построении системы уравнений (4), с. 82, методом коллокации. Здесь  $\xi_i$  — центр тяжести треугольника  $\Omega_i$ . Сначала опишем способ вычисления диагональных элементов  $a_{ii}$ . Функция  $p$  непрерывна в области  $\Omega$ . Аппроксимируем ее кусочно-постоянной функцией:

$$a_{ii} \approx \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \int_{\Omega_i} K_0(\sigma|\xi_i - y|)dy.$$

Функция  $K_0$  имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов. Выделим эту особенность явно следующим образом:

$$a_{ii} \approx \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \int_{\Omega_i} \ln \frac{1}{|\xi_i - y|} dy + \int_{\Omega_i} \Phi_0(\sigma; |\xi_i - y|) dy \right) = \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} (S_2 - S_1),$$

где

$$S_1 = \int_{\Omega_i} \ln |\xi_i - y| dy, \quad S_2 = \int_{\Omega_i} \Phi_0(\sigma; |\xi_i - y|) dy,$$

$$\Phi_0(\sigma; |\xi_i - y|) = K_0(\sigma|\xi_i - y|) - \ln \frac{1}{|\xi_i - y|}.$$

Функция  $\Phi_0$  не имеет особенностей. Вычислим интеграл  $S_1$ . Обозначим через  $B_{R_i}(\xi_i)$  круг радиуса  $R_i$  с центром в точке  $\xi_i$ , где  $R_i$  — расстояние от центра тяжести  $\xi_i$  до ближайшей стороны треугольника  $\Omega_i$ . Разделим область интегрирования в  $S_1$  на две (см. рис. 1):

$$\Omega_i = B_{R_i}(\xi_i) \cup (\Omega_i \setminus B_{R_i}(\xi_i)).$$

Интеграл по кругу  $B_{R_i}(\xi_i)$  вычислим точно. В интеграле по  $\Omega_i \setminus B_{R_i}(\xi_i)$  величину  $|\xi_i - y|$  положим равной  $R_i$ . Получим

$$S_1 \approx \int_{B_{R_i}(\xi_i)} \ln |\xi_i - y| dy + \int_{\Omega_i \setminus B_{R_i}(\xi_i)} \ln R_i dy = \ln R_i |\Omega_i| - \frac{\pi R_i^2}{2}.$$

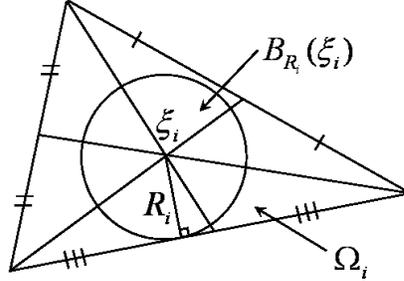


Рис. 1. К вычислению  $S_1$ .

Теперь вычислим интеграл  $S_2$ . Применим асимптотическую формулу для функции  $K_0(z)$  при  $z \rightarrow 0$ :

$$K_0(z) \approx \ln \frac{2}{\gamma z},$$

где  $\gamma = 0.5772156649\dots$  — константа Эйлера. Поэтому при  $|y - \xi_i| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\Omega_i} \left( K_0(\sigma|\xi_i - y|) - \ln \frac{1}{|\xi_i - y|} \right) dy \approx \\ &\approx \int_{\Omega_i} \left( \ln \frac{2}{\sigma\gamma|\xi_i - y|} - \ln \frac{1}{|\xi_i - y|} \right) dy = -\ln \frac{\sigma\gamma}{2} |\Omega_i|. \end{aligned}$$

Таким образом, при достаточно мелком разбиении элемент  $a_{ii}$  может быть вычислен по формуле

$$a_{ii} = \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \frac{\pi R_i^2}{2} - \ln R_i |\Omega_i| - \ln \frac{\sigma\gamma}{2} |\Omega_i| \right),$$

и именно этот способ применялся. Внедиагональные элементы вычислялись по формуле

$$a_{ij} = \frac{p(\xi_i)p(\xi_j)|\Omega_j|}{2\pi} K_0(\sigma|\xi_i - \xi_j|).$$

Симметризуем матрицу  $A$ , умножив ее на матрицу

$$B = \text{diag}(|\Omega_1|, |\Omega_2|, \dots, |\Omega_N|)/|\Omega|^2,$$

где  $|\Omega| = \max_{i=1, \dots, N} |\Omega_i|$ . Положим  $\mu = 1/\lambda$ . Таким образом, мы свели задачу (4), с. 82, к обобщенной задаче на собственные значения

$$BA(\sigma)u = \mu Bu. \quad (1)$$

**1.2. Численный метод решения спектральной задачи.** Для численного решения алгебраической задачи (1) в системе Matlab использовалась процедура `eigs`, которая реализует модифицированный метод Арнольди [78]. Эта процедура дает возможность находить заданное количество собственных значений, упорядоченных по возрастанию.

**1.3. Особенности построения дисперсионных кривых.** Опишем алгоритм построения дисперсионных кривых. Напомним, что исходная задача состоит в определении собственных значений  $\beta$  и  $\omega$ , а также соответствующих им собственных функций  $u$ . Предположим, что нас интересуют все решения задачи в интервале частот  $(0, \omega_0)$ . Мы знаем, что собственные значения  $(\beta, \omega)$ , соответствующие поверхностным волнам лежат в области

$$\Psi = \{(\beta, \omega) : \omega n_\infty \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} < \beta < \omega n_+ \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \omega \in (0, \omega_0)\}.$$

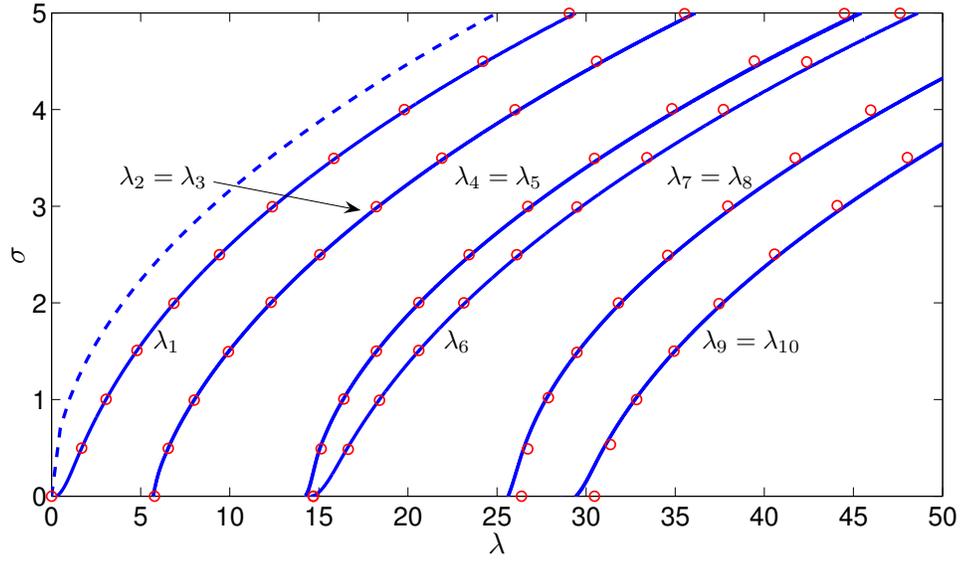


Рис. 2. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 6528$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом коллокации. Кресточками обозначено точное решение

С использованием предлагаемого нами метода эта задача решается следующим образом. Переформулируем задачу в терминах параметров  $\lambda$  и  $\sigma$ . Дисперсионными кривыми называются графики функций  $\sigma = \sigma(\lambda)$ . Области  $\Psi$  взаимно однозначно соответствует область  $\Theta$  параметров  $(\lambda, \sigma)$ :

$$\Theta = \{(\lambda, \sigma) : \lambda \in (0, \lambda_0), \sigma \in (0, \sqrt{\lambda})\},$$

где  $\lambda_0 = \omega_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2)$ .

На интервале  $(0, \sqrt{\lambda_0})$  введем по  $\sigma$  равномерную сетку. В каждой точке  $\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, N_\sigma$  для дискретной задачи найдем все собственные числа  $\lambda_{l,j}$ ,  $l = 1, \dots, L$ , которые попали в интервал  $(0, \lambda_0)$ . Построим кривую по точкам  $(\lambda_{l,j}, \sigma_j)$ , где  $j = 1, \dots, N_\sigma$ . В результате получим дисперсионную кривую под номером  $l$ .

**1.4. Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим однородный волновод кругового поперечного сечения с центром в начале координат единичного радиуса. Показатель преломления  $n(x)$  в  $\Omega$

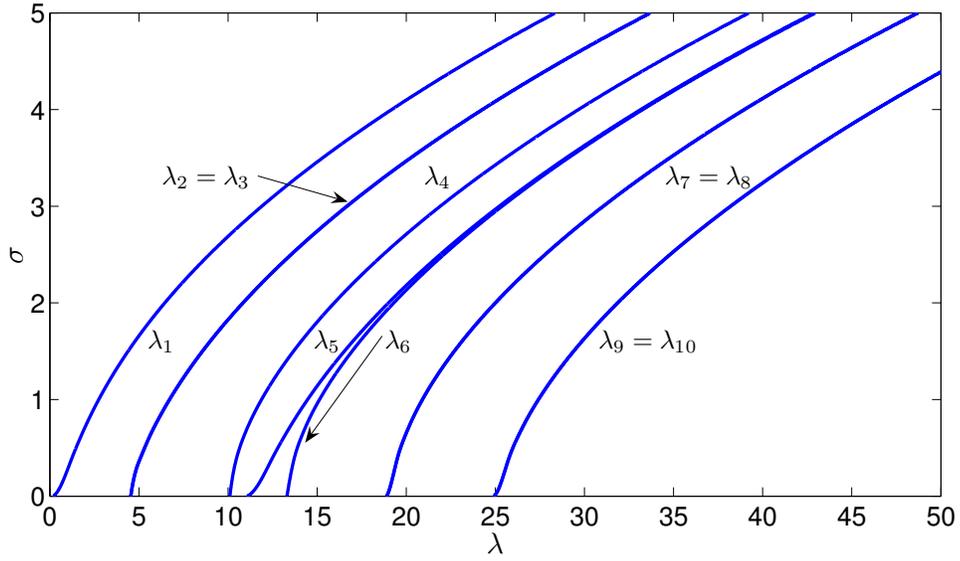


Рис. 3. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 7168$ .

принимает постоянное значение  $n_+ = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . Для волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления известно точное решение, полученное методом разделения переменных (см., напр., [18]). На рис. 2 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , вычисленные при  $N = 6528$ . Сплошными линиями показано приближенное решение, кружочками отмечено точное, штриховой линией построена кривая  $\sigma = \sqrt{\lambda}$ , определяющая часть границы области  $\Theta$ . Все дисперсионные кривые лежат ниже этой кривой. Имеются кратные характеристические числа:  $\lambda_2 = \lambda_3$ ,  $\lambda_4 = \lambda_5$ ,  $\lambda_7 = \lambda_8$  и  $\lambda_9 = \lambda_{10}$ .

На рисунках 7, 8 представлены линии уровня волновода кругового поперечного сечения, вычисленные при  $N = 6528$  и  $\sigma = 1$ .

В следующей таблице приведено исследование сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ , из которой видно, что метод имеет второй порядок точности. Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при  $\sigma = 1$  и разном числе треугольников, сравнивались с точным значением  $\lambda_6 = 18.4326$ , полученным методом разделения переменных.

$N$	64	256	512	1032	2304	4128	6528
$h$	0.4856	0.2573	0.1551	0.1217	0.0800	0.0618	0.0491
$\tilde{\lambda}_6$	16.0095	17.7529	18.1083	18.2402	18.3337	18.3842	18.4020
$e$	0.5576	0.5572	0.7315	0.7041	0.8384	0.6868	0.6881
$\varepsilon$	0.1315	0.0369	0.0176	0.0104	0.0054	0.0026	0.0017

Опишем обозначения, которые использованы здесь и в других подобных таблицах, приведенных ниже. Предложенный численный метод исследовался на сходимость для волноводов, имеющих различные поперечные сечения и показатели преломления, следующим образом. При разных значениях  $N$  и фиксированном параметре  $\sigma = 1$  вычислялось приближенное значение характеристического числа  $\tilde{\lambda}_j$  и сравнивалось с точным значением. Если для данного волновода точное решение неизвестно, то в этом случае исследовалась внутренняя сходимость метода, т. е. сравнение производилось со значением, вычисленным при максимально большом  $N$ . По полученным данным строилась таблица в которой отражены зависимости от  $N$  относительной ошибки  $\varepsilon = |\lambda_j - \tilde{\lambda}_j|/\lambda_j$  и величины  $e = \varepsilon/h^2$ , характеризующей скорость сходимости. Из всех полученных таблиц видно, что порядок сходимости метода не меньше двух, и с увеличением числа точек коллокации относительная погрешность  $\varepsilon$  убывает.

Рассмотрим однородный волновод квадратного поперечного сечения. Точка пересечения диагоналей квадрата расположена в начале координат. Стороны имеют единичную длину и параллельны осям координат. Показатель преломления  $n(x)$  в  $\Omega$  принимает постоянное значение  $n_+ = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . На рис. 3 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , вычисленных при  $N = 7168$ . Сплошными линиями обозначено приближенное решение. Имеются кратные собственные числа:  $\lambda_2 = \lambda_3$ ,  $\lambda_4 = \lambda_5$  и  $\lambda_9 = \lambda_{10}$ . В случае квадратного волновода количество кратных собственных чисел по сравнению с круговым волноводом уменьшилось. На рисунках 9 и 10 представлены

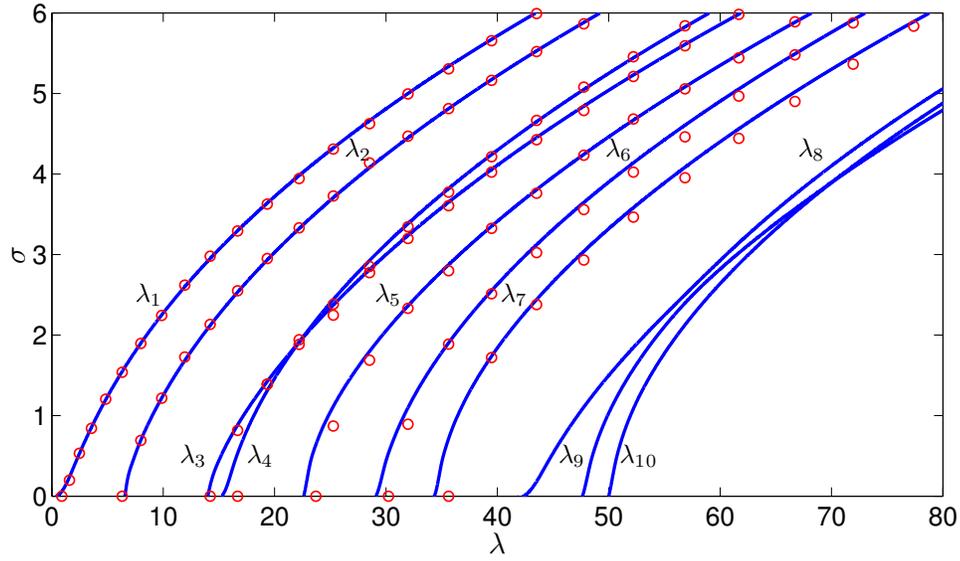


Рис. 4. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода прямоугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 6656$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом коллокации, кружочки — данные из работы [79]

линии уровня волновода квадратного поперечного сечения, вычисленные при  $N = 7168$  и  $\sigma = 1$ .

Рассмотрим однородный волновод прямоугольного поперечного сечения. Точка пересечения диагоналей прямоугольника расположена в начале координат. Стороны имеют длины 2 и 1 и параллельны осям координат. Показатель преломления  $n(x) = n_+ = \sqrt{2}$ . Показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . На рис. 4 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , вычисленных при  $N = 6656$ . Сплошными линиями обозначено приближенное решение, кружочки — данные из работы [79]. В случае прямоугольного волновода кратных собственных чисел не обнаружено. На рис. 11–12 представлены линии уровня волновода прямоугольного поперечного сечения, вычисленные при  $N = 6656$  и  $\sigma = 1$ .

Рассмотрим однородный волновод, поперечным сечением которого является равносторонний треугольник, вписанный в окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Одна из вершин

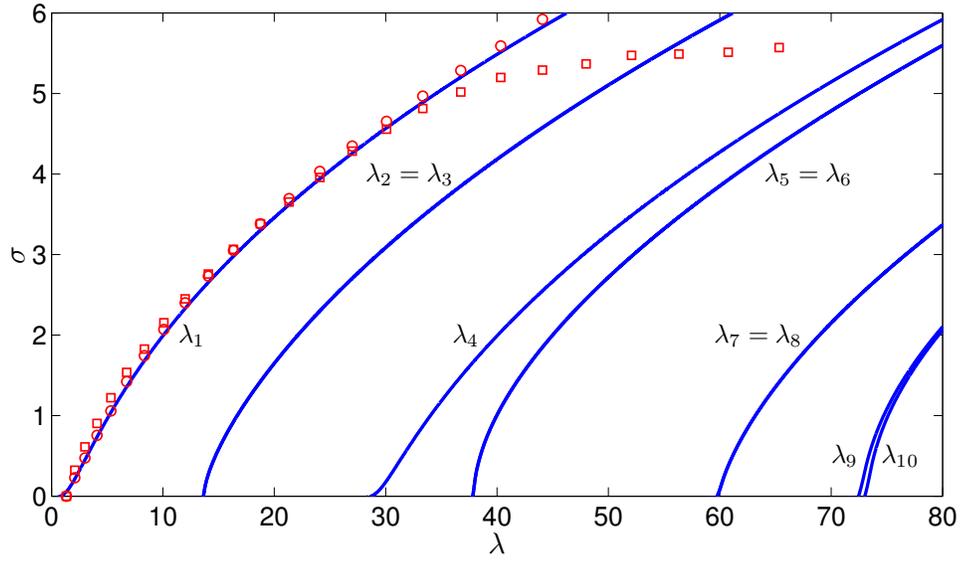


Рис. 5. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода треугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 6912$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом коллокации, квадратами обозначены данные из работы [82], кружочки — данные из работы [81]

треугольника лежит на оси  $x_2$ . Показатель преломления волновода  $n(x)$  равен константе  $n_+ = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . На рис. 5 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , вычисленные при  $N = 6912$ . Сплошными линиями обозначены результаты расчетов методом коллокации, квадратами — данные из работы [82], кружочками — из работы [81]. На рисунках 13, 14 представлены линии уровня волновода треугольного поперечного сечения, вычисленные при  $N = 6912$  и  $\sigma = 1$ .

Рассмотрим неоднородный волновод кругового поперечного сечения с центром в начале координат единичного радиуса. Показатель преломления в области  $\Omega$  изменяется по закону

$$n^2(r) = n_+^2 \left( 1 - \frac{n_+^2 - n_\infty^2}{n_+^2} r^4 \right). \quad (2)$$

Показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ .

На рис. 6 изображены первые десять дисперсионных кривых, вычисленных при  $N = 1032$ . Сплошными линиями обозначено прибли-

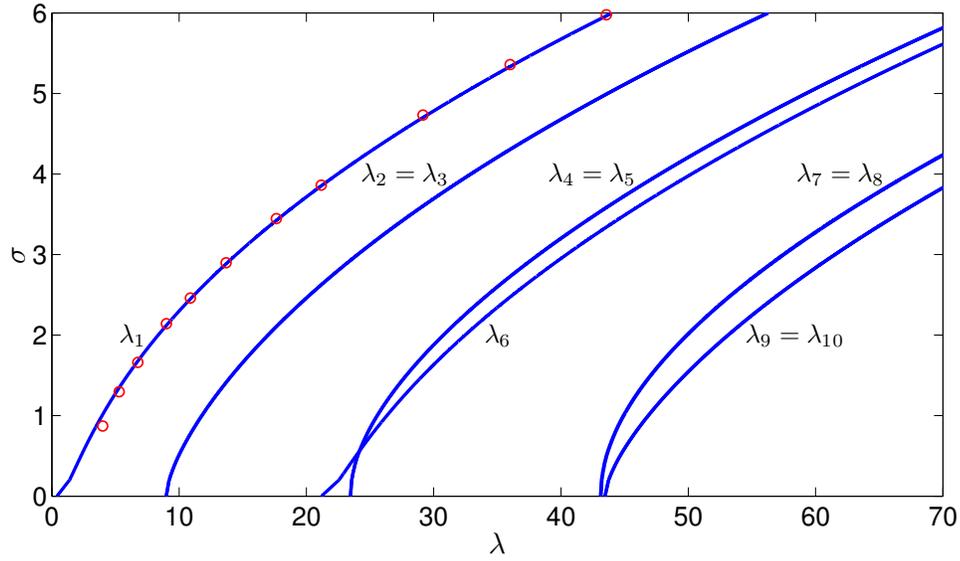


Рис. 6. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн неоднородного волновода кругового поперечного сечения,  $n(x)$ , изменяющемся по закону (2), где  $n_+ = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 1032$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом коллокации. Кружочками обозначены данные из работы [54]

женное решение, кружочками — данные из работы [54]. Имеются кратные собственные числа, а именно,  $\lambda_2 = \lambda_3$ ,  $\lambda_4 = \lambda_5$ ,  $\lambda_7 = \lambda_8$  и  $\lambda_9 = \lambda_{10}$ . В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ . Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при  $\sigma = 1$  и разным числе элементов триангуляции сравнивались со значением  $\lambda_6 = 26.3557$ , подсчитанном при  $N = 6528$ .

$N$	64	256	512	1032	2304	4128
$h$	0.4856	0.2594	0.1551	0.1184	0.0875	0.0620
$\tilde{\lambda}_6$	22.1432	25.1968	25.8107	26.0432	26.2193	26.3192
$e$	0.6778	0.6523	0.8605	0.8455	0.6755	0.3593
$\varepsilon$	0.1598	0.0439	0.0207	0.0119	0.0052	0.0014

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1032$ , и при этом  $|\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6|/\lambda_6 \approx 0.8h^2$ . На рисунках 15, 16 представлены линии уровня неоднородного волновода кругового поперечного сечения, вычисленные при  $N = 4128$  и  $\sigma = 1$ .

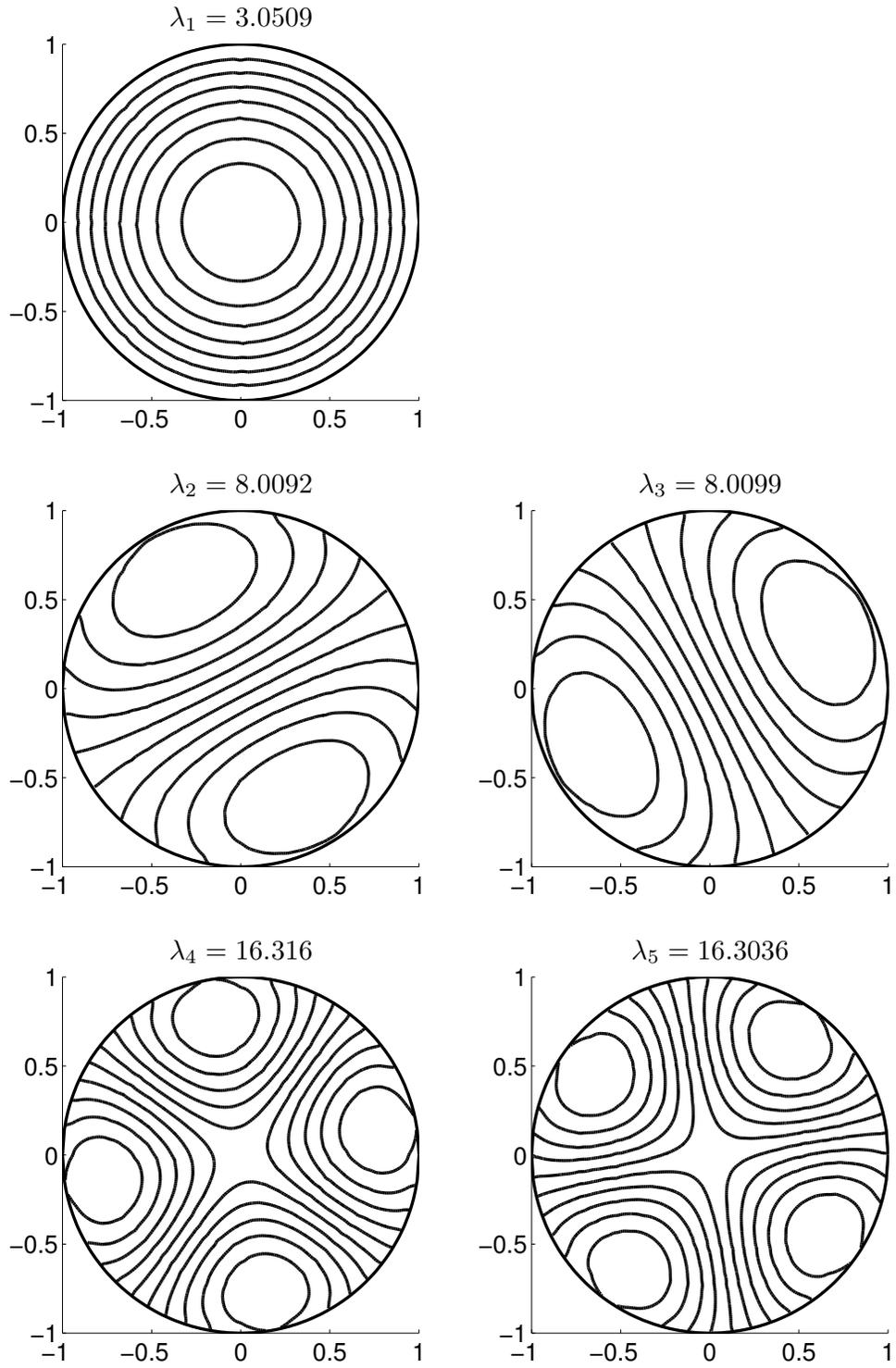


Рис. 7. Линии уровня функции  $u$  для волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6528$ .

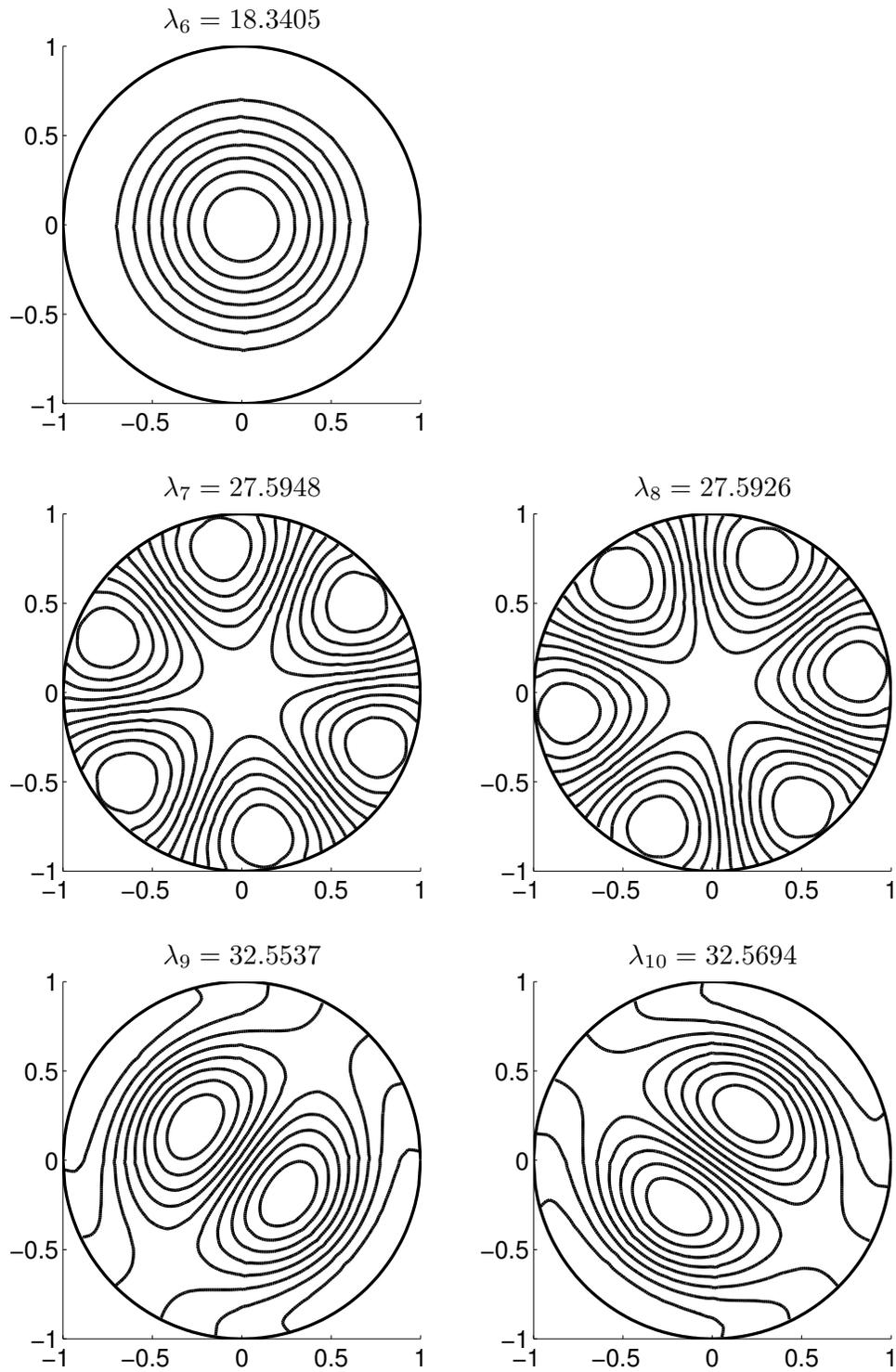


Рис. 8. Линии уровня функции  $u$  для волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6528$ .

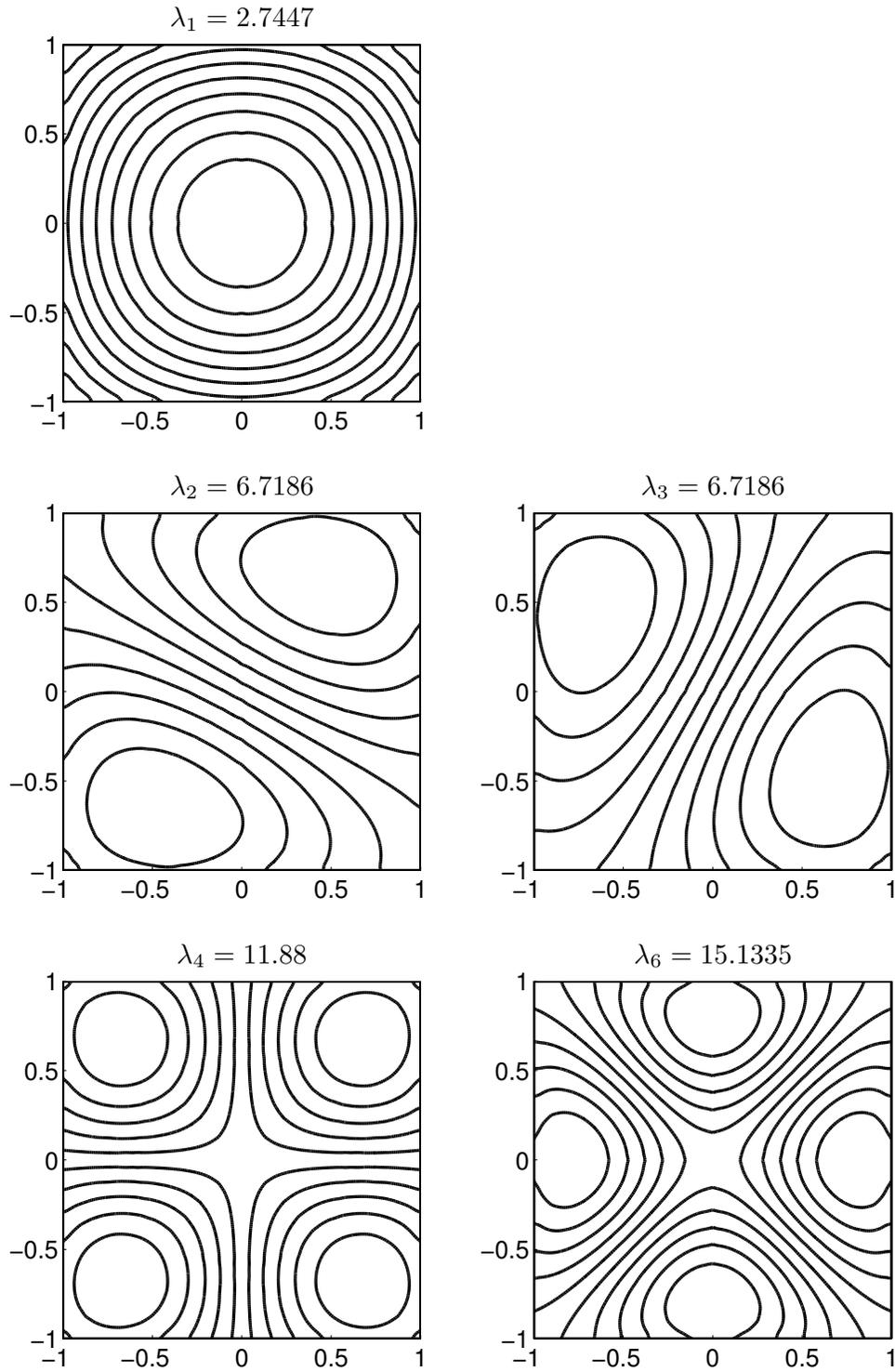


Рис. 9. Линии уровня функции  $u$  для волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 7168$ .

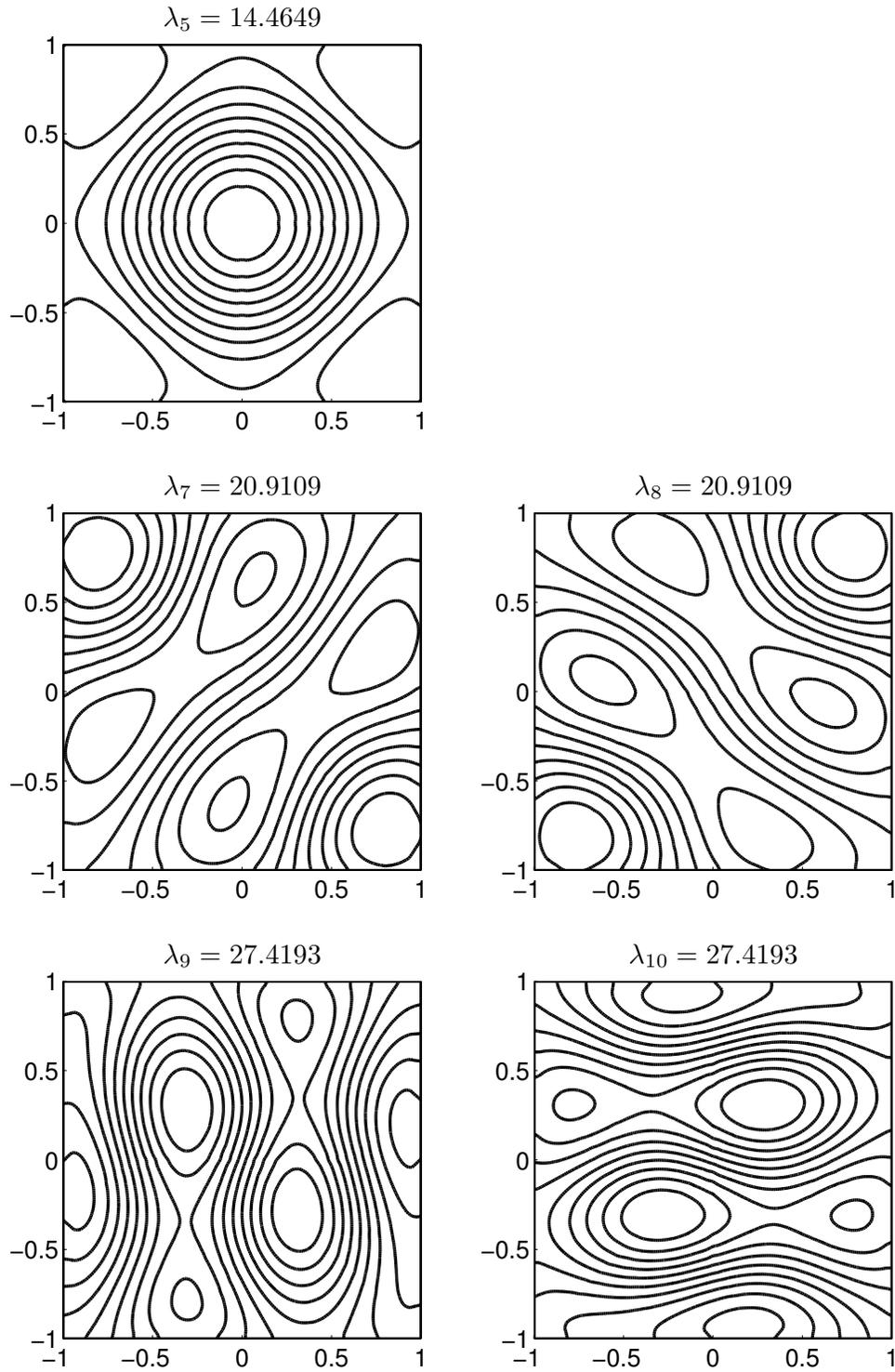


Рис. 10. Линии уровня функции  $u$  для волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 7168$ .

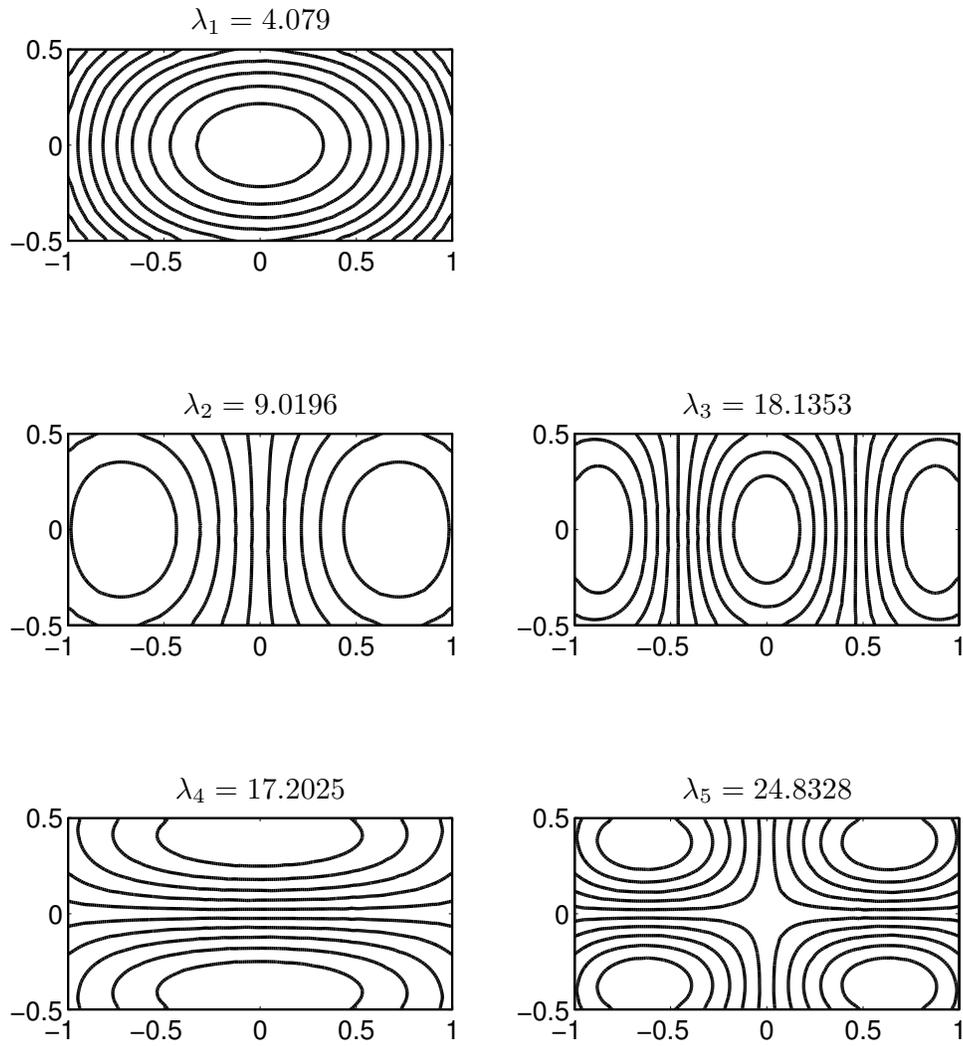


Рис. 11. Линии уровня функции  $u$  для волновода прямоугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6656$ .

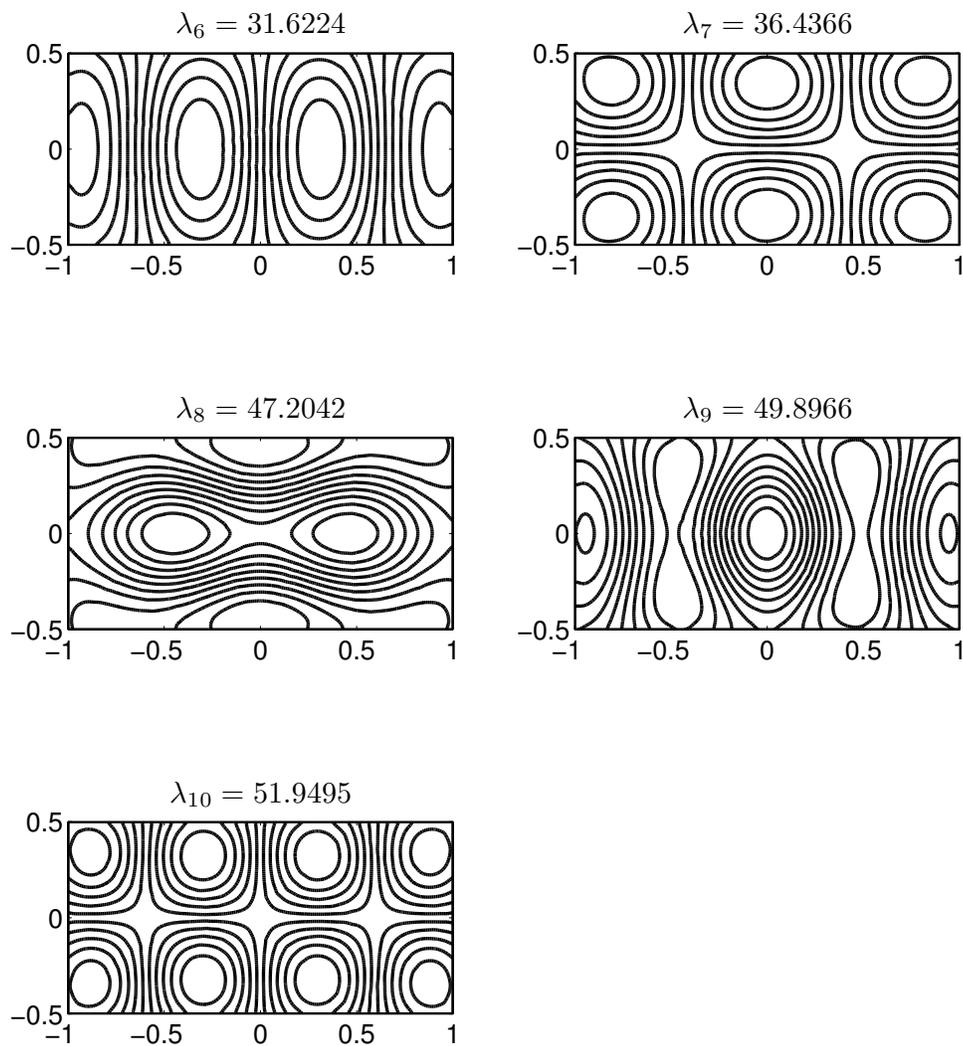


Рис. 12. Линии уровня функции  $u$  для волновода прямоугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6656$ .

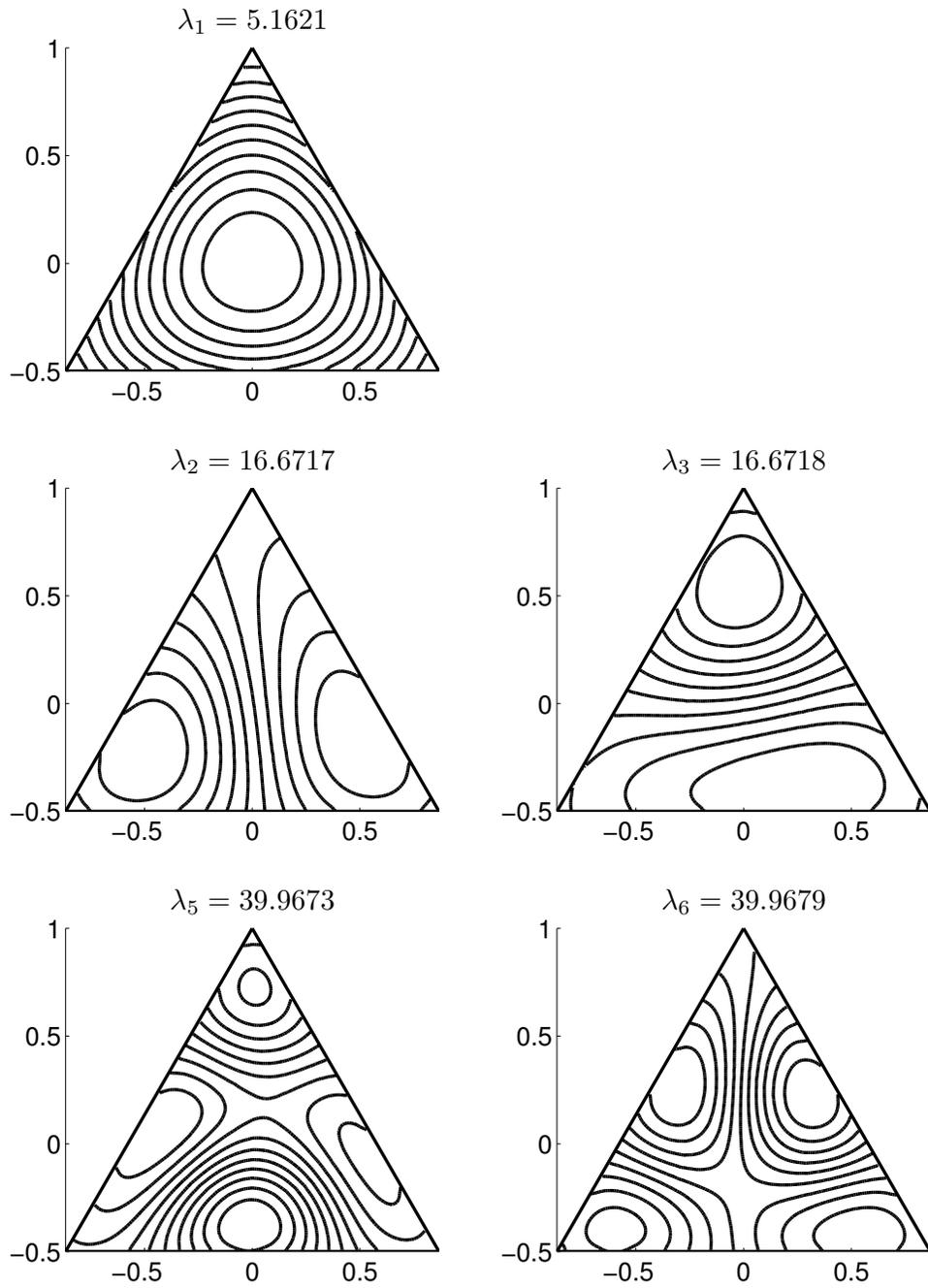


Рис. 13. Линии уровня функции  $u$  для волновода треугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6912$ .

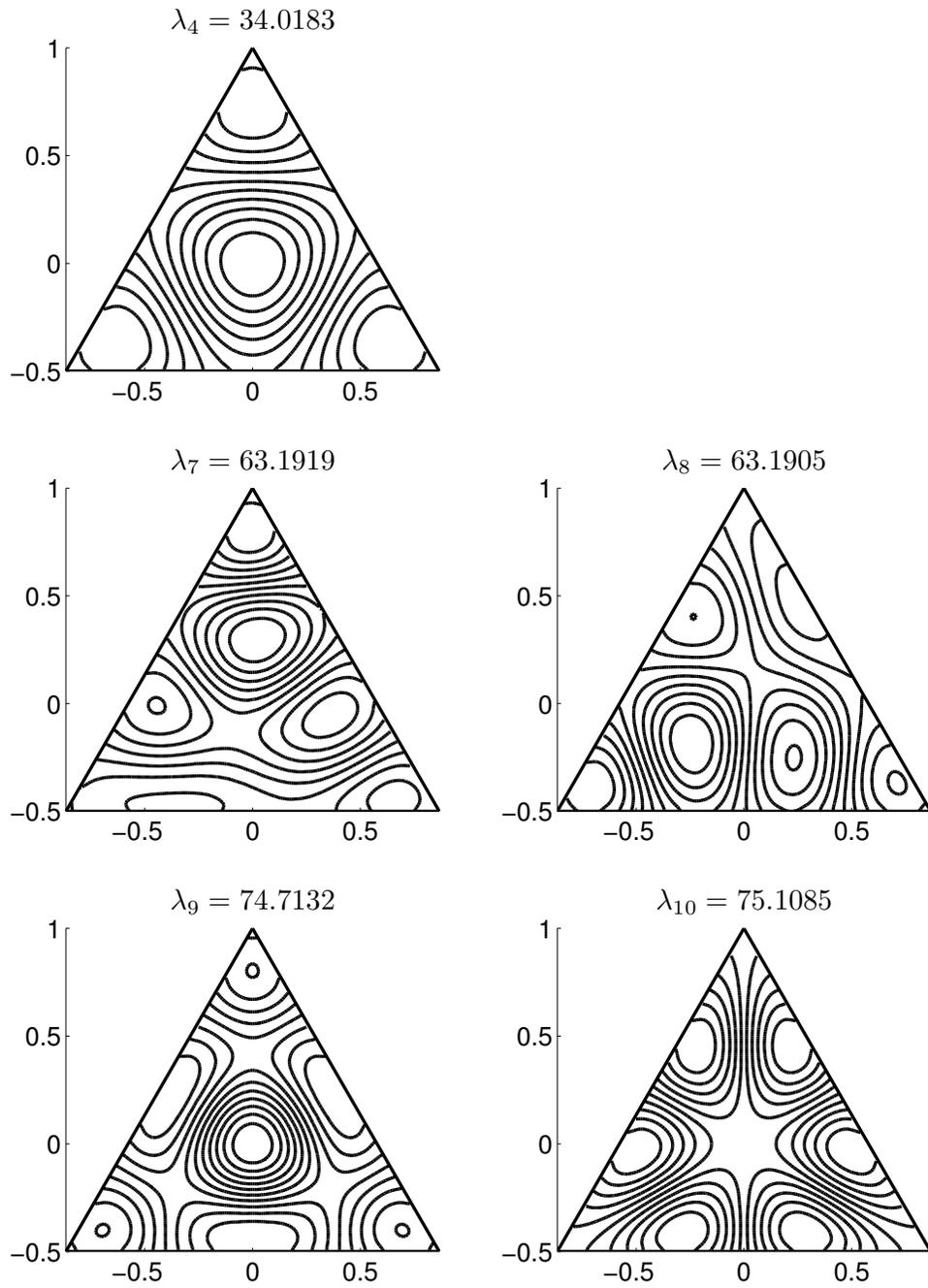


Рис. 14. Линии уровня функции  $u$  для волновода треугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6912$

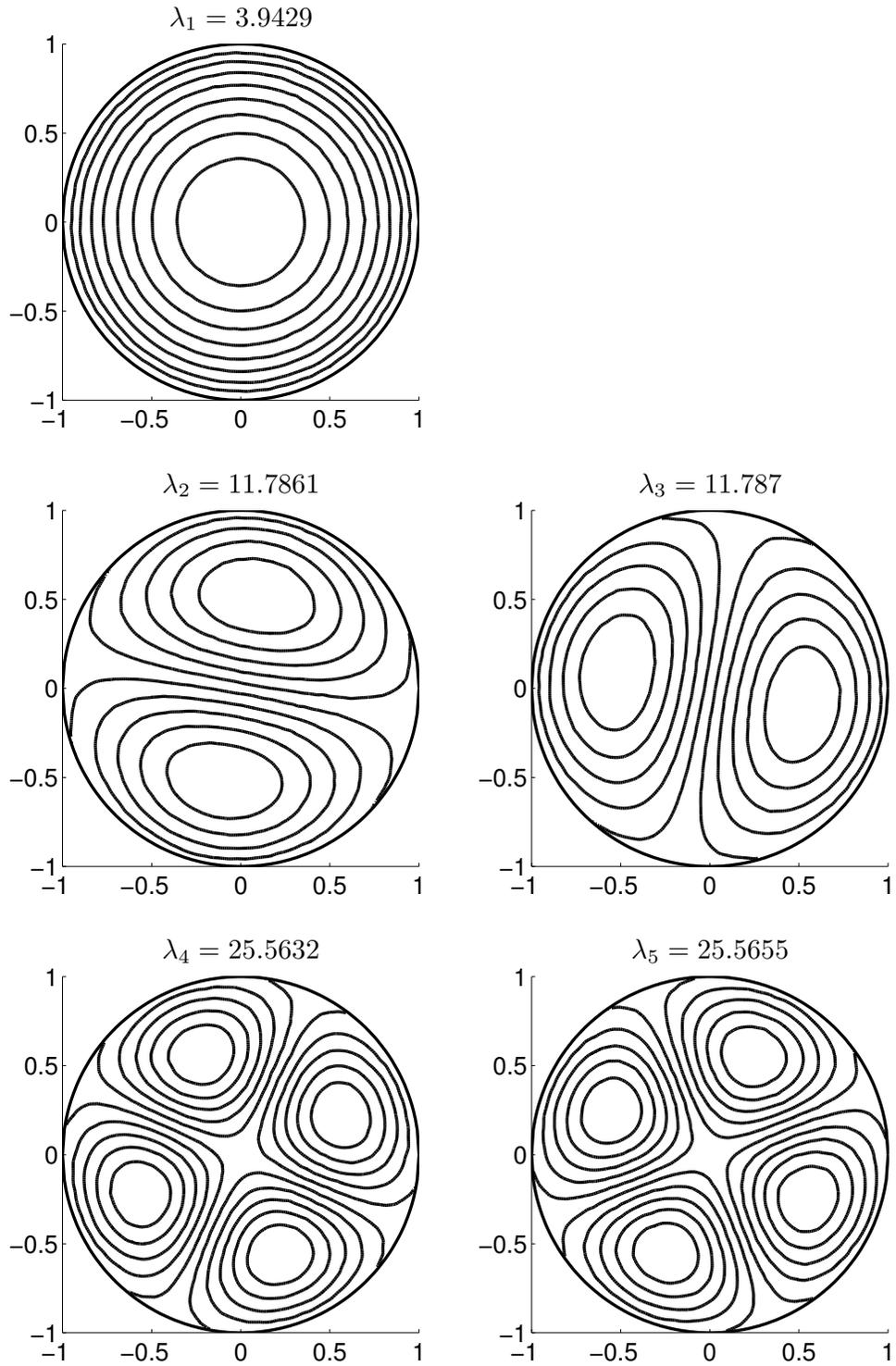


Рис. 15. Линии уровня функции  $u$  для неоднородного волновода кругового поперечного сечения с показателем преломления, изменяющимся по закону (2), построенные при  $n_+ = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 4128$

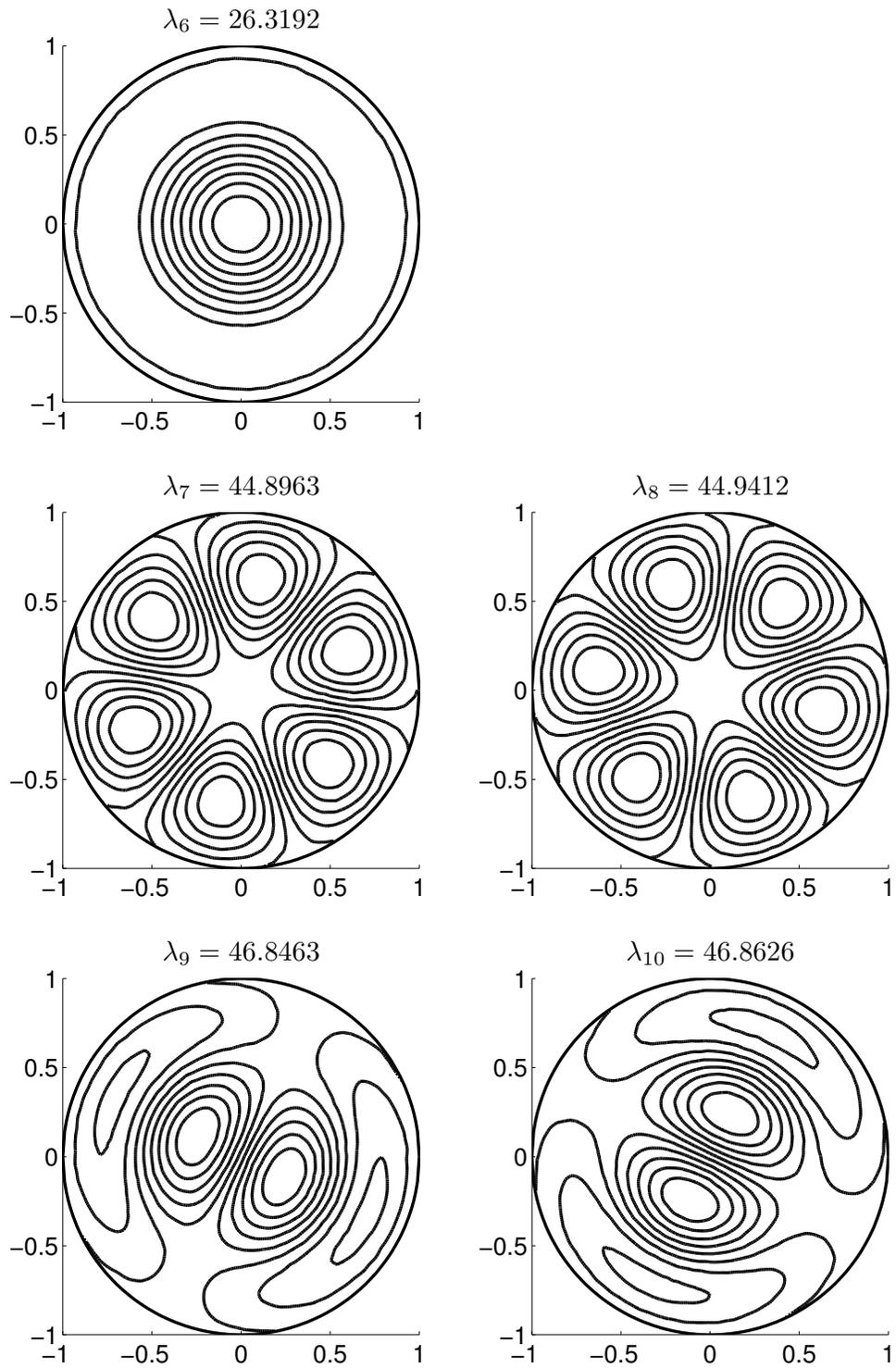


Рис. 16. Линии уровня функции  $u$  для неоднородного волновода кругового поперечного сечения с показателем преломления, изменяющимся по закону (2), построенные при  $n_+ = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 4128$

## 2. Волновод в полупространстве.

**2.1. Особенности вычислений.** Как и в случае волновода, находящегося в однородной среде, ядро интегрального оператора имеет логарифмическую особенность. Формулы для вычисления диагональных элементов матрицы  $A$  получены способом, описанным в первом пункте, и имеют вид:

$$a_{ii} = \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \frac{\pi R_i^2}{2} - \ln R_i |\Omega_i| - \ln \frac{\sigma\gamma}{2} |\Omega_i| - K_0(2\sigma|\xi_2^i|) |\Omega_i| \right).$$

Внедиагональные элементы вычислялись по формуле

$$a_{ij} = \frac{p(\xi_i)p(\xi_j)|\Omega_j|}{2\pi} (K_0(\sigma|\xi_i - \xi_j|) - K_0(\sigma|\xi_i - \xi_j^*|)).$$

Матрица  $A$  также симметризовывалась умножением на матрицу

$$B = \text{diag}(|\Omega_1|, |\Omega_2|, \dots, |\Omega_{N_h}|) / |\Omega|^2.$$

Таким образом, мы свели исходную задачу к обобщенной алгебраической задаче на собственные значения

$$BA(\sigma)u = \mu Bu, \quad \mu = 1/\lambda. \quad (3)$$

Для численного решения задачи (3) применялся метод, описанный в предыдущем пункте. Дисперсионные кривые также строились по алгоритму, описанному в предыдущем пункте.

**2.2. Результаты численных экспериментов.** Приведем результаты численных экспериментов для волноводов находящихся в полупространстве. Рассмотрим однородный волновод, поперечным сечением которого является полукруг единичного радиуса с центром в начале координат. Показатель преломления волновода равен  $n(x) = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды в верхней полуплоскости  $n_\infty = 1$ . На рис. 17 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , построенных при  $N = 2024$  и  $\sigma = 1$ . На рис. 19 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 2024$  и  $\sigma = 1$ .

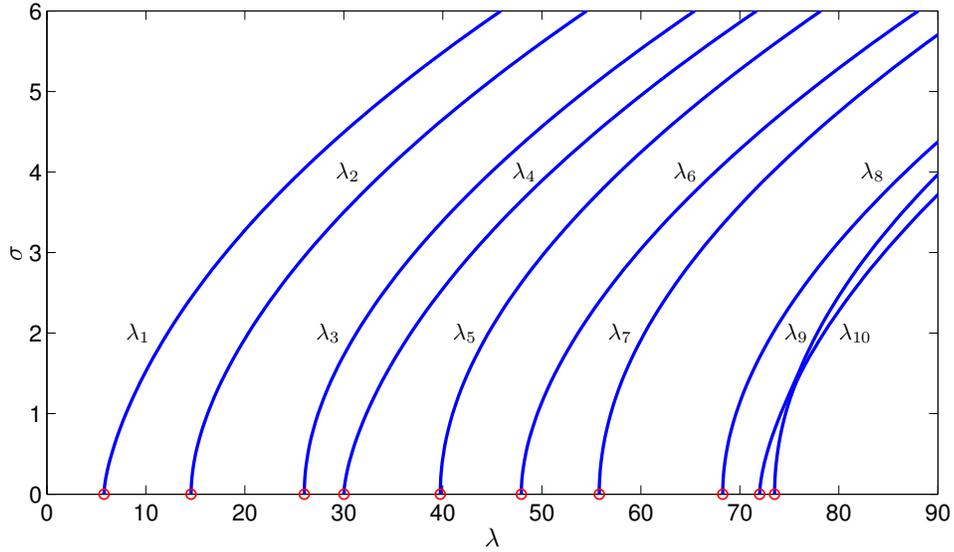


Рис. 17. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода с сечением в форме полукруга, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 2024$

В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ . Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при  $\sigma = 1$  и разным числе треугольников, сравнивались со значением  $\lambda_6 = 50.8596$ , подсчитанном при  $N = 8096$ .

$N$	61	240	506	1059	2024	4236
$h$	0.3531	0.1693	0.1210	0.0863	0.0605	0.0432
$\tilde{\lambda}_6$	39.3336	48.0972	49.5528	50.2392	50.5952	50.7702
$e$	1.8172	1.8956	1.7561	1.6377	1.4209	0.9432
$\varepsilon$	0.2266	0.0543	0.0257	0.0122	0.0052	0.0018

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1059$ , и при этом  $|\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6|/\lambda_6 \approx 1.6h^2$ .

Рассмотрим однородный волновод прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон, равным 2. Середина большей стороны совпадает с началом координат, а длина меньшей стороны равна единице. Показатель преломления волновода  $n(x) = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды в верхней полуплоскости  $n_\infty = 1$ . На рис. 18 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ ,

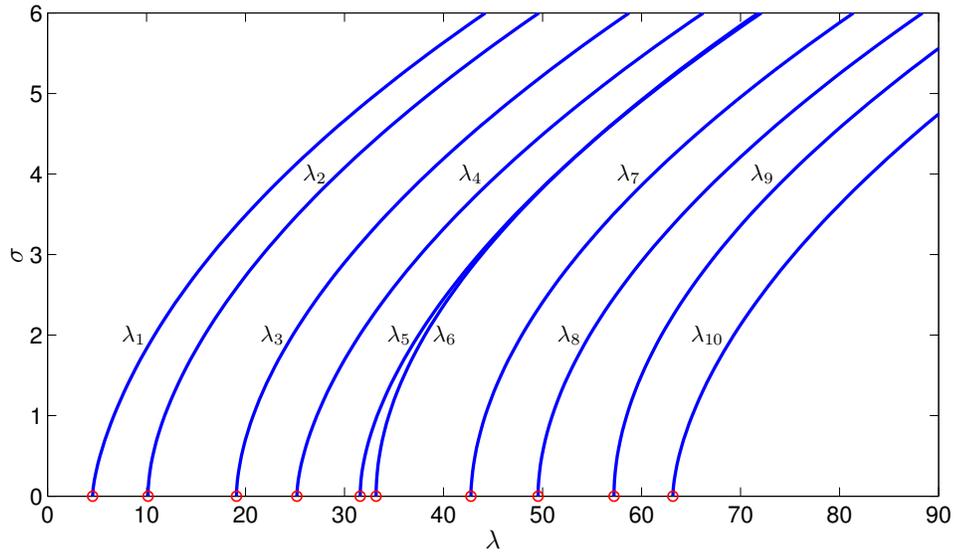


Рис. 18. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода прямоугольного поперечного сечения, находящегося в полупространстве, вычисленные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ , и  $N = 2556$

построенных при  $N = 2556$ . На рис. 20 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 2556$  и  $\sigma = 1$ .

В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ . Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при разном числе треугольников, сравнивались со значением  $\lambda_6 = 35.2225$ , вычисленном при  $N = 8032$  и  $\sigma = 1$ .

$N$	64	320	664	1280	2656	4800
$h$	0.3896	0.1598	0.1125	0.0799	0.0562	0.0454
$\tilde{\lambda}_6$	29.4901	33.6530	34.4707	34.8661	35.0785	35.1684
$e$	1.0720	1.7450	1.6866	1.5850	1.2929	0.7459
$\varepsilon$	0.1627	0.0446	0.0213	0.0101	0.0041	0.0015

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1280$ , и при этом  $|\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6|/\lambda_6 \approx 1.6h^2$ .

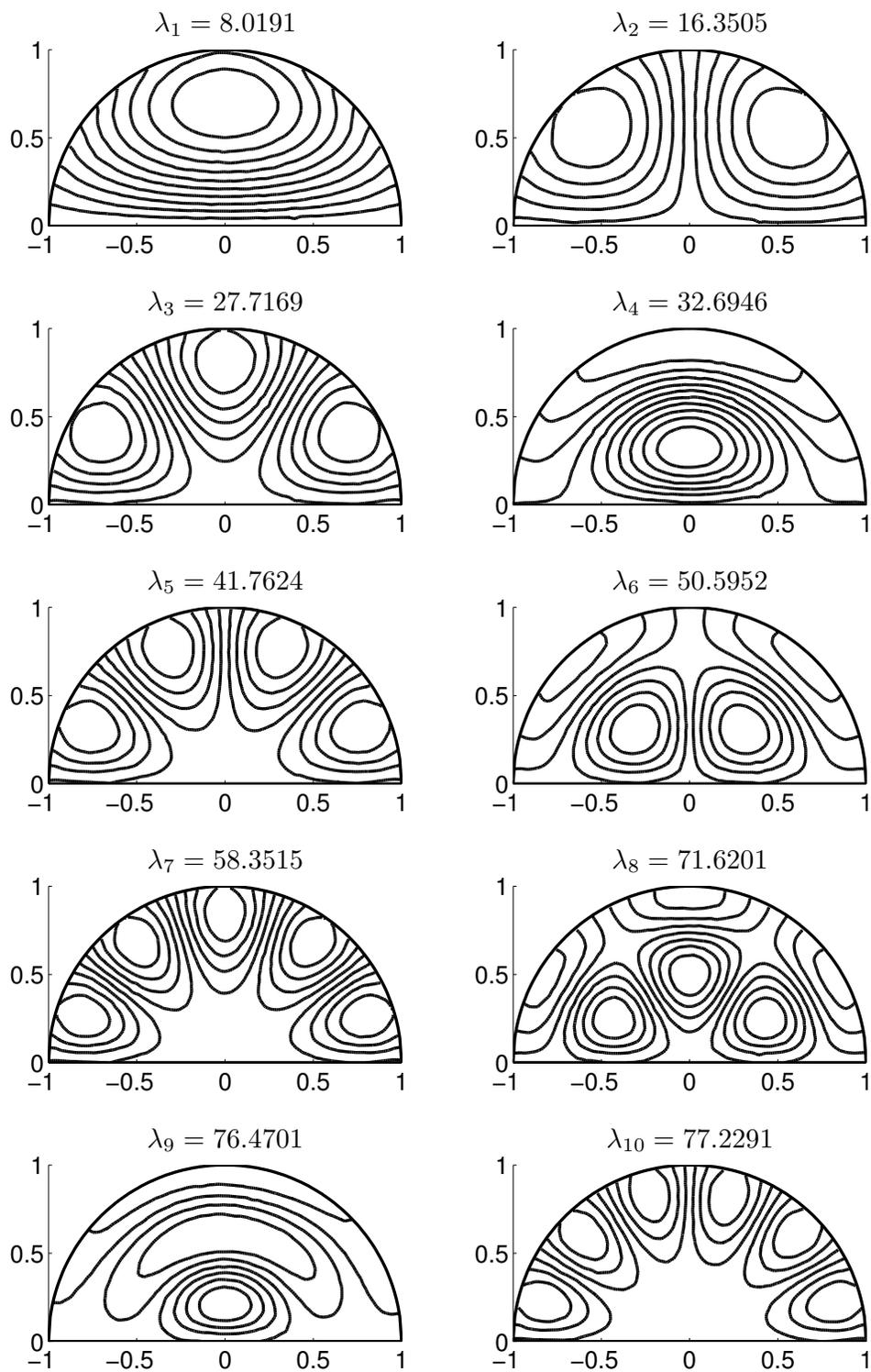


Рис. 19. Линии уровня функции  $u$  для волновода с сечением в форме полукруга, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 2024$ .

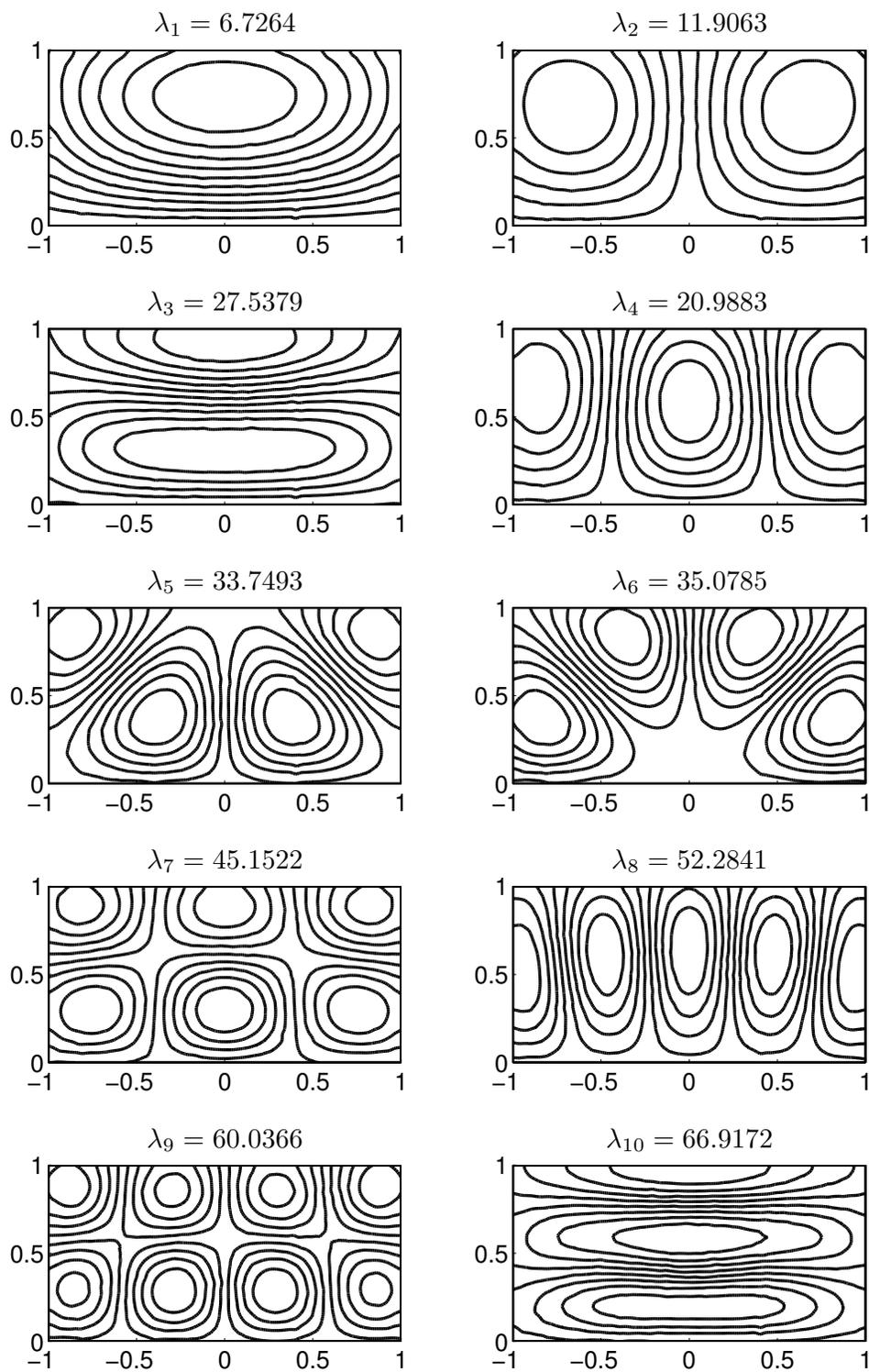


Рис. 20. Линии уровня функции  $u$  для волновода прямоугольного поперечного сечения в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 2556$ .

### 3. Волновод в слоистой среде.

**3.1. Вычисление элементов матрицы.** Функция Грина задачи сопряжения состоит из суммы двух слагаемых:

$$G_E = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma|x - y|) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{(x_2+y_2)\gamma} \frac{\gamma t - \gamma}{(\gamma t + \gamma)\gamma} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x, y \in \Omega.$$

Метод выделения логарифмической особенности в первом слагаемом описан в первом пункте этого параграфа. Второе слагаемое не имеет особенностей и представляет собой несобственный интеграл, зависящий от параметра  $\lambda$ . Заметим, что

$$\max_{x, y \in \Omega} |x_1 - y_1| = \text{diam } \Omega.$$

Так как на практике расчеты проводились для областей имеющих диаметр порядка единицы, то быстрых осцилляций у подынтегральной функции не возникало. Для вычисления несобственного интеграла использовалась процедура `quadgk` системы Matlab, которая реализует адаптивный квадратурный метод Гаусса — Кронрода. Приведем формулу для вычисления диагональных элементов:

$$a_{ii} = \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \frac{\pi R_i^2}{2} - \ln R_i |\Omega_i| - \ln \frac{\sigma\gamma}{2} |\Omega_i| \right) - \frac{p^2(\xi_i) |\Omega_i|}{2\pi} \int_0^\infty e^{2\xi_2^i \gamma} \frac{\gamma t - \gamma}{(\gamma t + \gamma)\gamma} d\theta.$$

Остальные элементы матрицы  $A$  вычислялись по формуле:

$$a_{ij} = \frac{p(\xi_i)p(\xi_j)}{2\pi} K_0(\sigma|\xi_i - \xi_j|) - \frac{p(\xi_i)p(\xi_j)}{2\pi} \int_0^\infty e^{(\xi_2^i + \xi_2^j)\gamma} \frac{\gamma t - \gamma}{(\gamma t + \gamma)\gamma} \cos(\theta(\xi_1^i - \xi_1^j)) d\theta.$$

Таким образом, мы приходим к алгебраической задаче вида

$$Bu = \lambda BA(\lambda, \sigma)u. \quad (4)$$

### 3.2. Численный метод решения спектральной задачи.

Опишем метод численного решения задачи (4). Случай волновода в слоистой среде отличается от остальных тем, что при фиксированном значении параметра  $\sigma$  мы получаем подзадачу для поиска  $\lambda_j$ , которую нужно решать для каждого  $j$  в отдельности, что существенно увеличивает время вычислений. Для волноводов, находящихся в однородном пространстве или полупространстве, мы сразу получаем нужное количество характеристических чисел  $\lambda_j$ .

Подзадача для поиска собственного значения  $\lambda_j$  решается следующим образом. Пусть  $\sigma = \sigma_0$ . Получаем нелинейную задачу для поиска  $\lambda$ :

$$Bu = \lambda BA(\lambda, \sigma_0)u. \quad (5)$$

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу:

$$Bu = \gamma BA(\lambda, \sigma_0)u. \quad (6)$$

При каждом фиксированном  $\lambda > 0$  она является линейной по  $\gamma$ , что позволяет нам находить собственные значения  $1/\gamma_j$ , используя ту же процедуру, что и в случае волновода в однородной среде. Другими словами, мы можем построить функцию  $\gamma_j(\lambda)$ . Далее, остается найти решение уравнения

$$\gamma_j(\lambda) - \lambda = 0. \quad (7)$$

Для его решения использовалась функция `fsolve` системы Matlab. Одним из входных параметров функции `fsolve` является начальное приближение  $\lambda_0$ . Численное исследование функций  $\gamma_j = \gamma_j(\lambda)$  показывает (см., напр., рис. 5, с. 77), что функция  $\gamma_j$  очень медленно возрастает при увеличении  $\lambda$  и, фактически, близка к постоянной  $\gamma_j(0)$ . Следовательно, в качестве начального приближения можно выбрать  $\lambda_0 = \gamma_j(0)$ . Это также сокращает и время вычислений, так

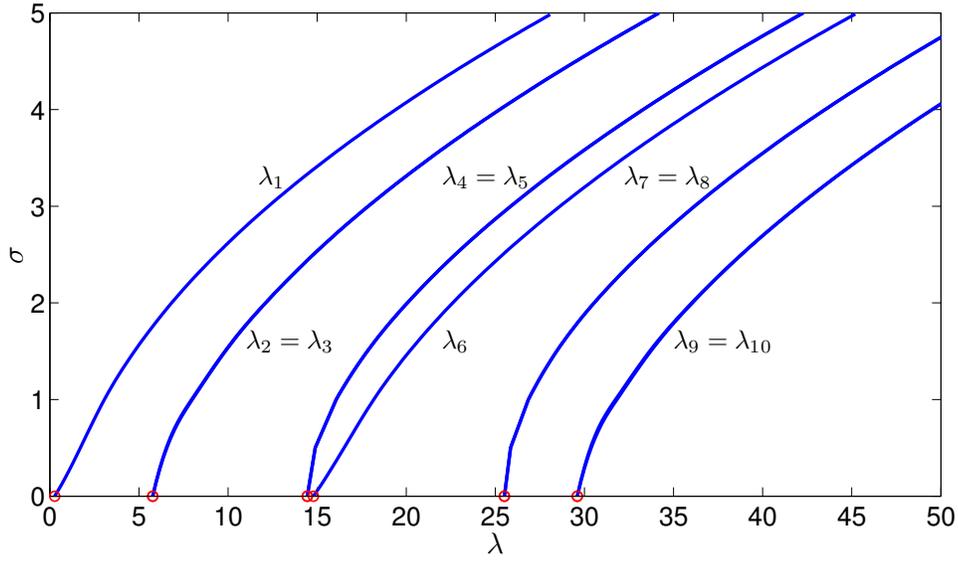


Рис. 21. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода кругового поперечного сечения в слоистой среде, построенные при  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$  и  $N = 512$

как при  $\lambda = 0$  несобственные интегралы, входящие в формулы для вычисления элементов матрицы, обращаются в нуль. Таким образом, решением исходной задачи является тройка  $\sigma_0$ ,  $\lambda_j$  и  $u_j$ .

**3.3. Особенности построения дисперсионных кривых.** Общий принцип построения дисперсионных кривых остается тем же, что и в случае волновода, находящегося в однородной среде. Основное отличие заключается в том, что при фиксированном  $\sigma$  нужно находить каждое собственное значение по алгоритму, описанному в предыдущем пункте.

**3.4. Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим однородный волновод кругового поперечного сечения с центром в точке  $(0, -2)$  единичного радиуса, находящийся в плоско-слоистой среде. Показатель преломления волновода  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $x \in \Omega$ . Показатель преломления  $n_\infty$  нижнего полупространства, в котором находится волновод, равен  $\sqrt{2}$ . Показатель преломления  $n_t$  верхнего полупространства равен единице. На рис. 21 изображены первые десять

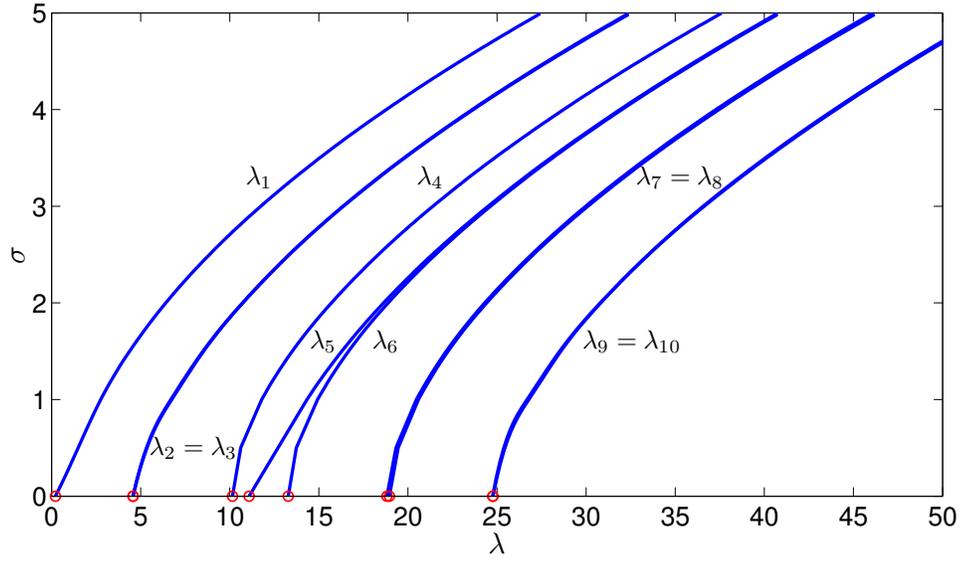


Рис. 22. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 592$

дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , построенных при  $N = 512$ .

В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ . Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при разном числе треугольников, сравнивались со значением  $\lambda_6 = 18.4730$ , вычисленном при  $N = 4236$  и  $\sigma = 1$ .

$N$	64	256	512	1032	2304
$h$	0.4856	0.2573	0.1551	0.0863	0.1217
$\tilde{\lambda}_6$	16.0566	17.8293	18.1924	18.3270	18.4221
$e$	0.5548	0.5265	0.6315	0.5332	0.4311
$\varepsilon$	0.1308	0.0348	0.0152	0.0079	0.0028

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1032$ , и при этом  $|\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6|/\lambda_6 \approx 0.5h^2$ .

На рисунках 23, 24 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 1032$ .

Рассмотрим однородный волновод квадратного поперечного сечения, диагонали которого пересекаются в точке  $(0, -2)$ . Стороны имеют единичную длину и параллельны осям координат. Показатель преломления волновода равен  $n(x) = \sqrt{3}$ , показатель преломления

окружающей среды  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ . На рис. 22 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , построенные при  $N = 592$ .

В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ . Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при разном числе элементов триангуляции, сравнивались со значением  $\lambda_6 = 15.2213$ , вычисленном при  $N = 4440$  и  $\sigma = 1$ .

$N$	74	312	592	1080	2136
$h$	0.4635	0.2358	0.1788	0.1332	0.1053
$\tilde{\lambda}_6$	13.0516	14.6674	14.9262	15.0868	15.1746
$e$	0.6635	0.6546	0.6064	0.4982	0.2767
$\varepsilon$	0.1425	0.0364	0.0194	0.0088	0.0031

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1080$  и при этом  $|\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6|/\lambda_6 \approx 0.5h^2$ .

На рисунках 25, 26 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 1080$ .

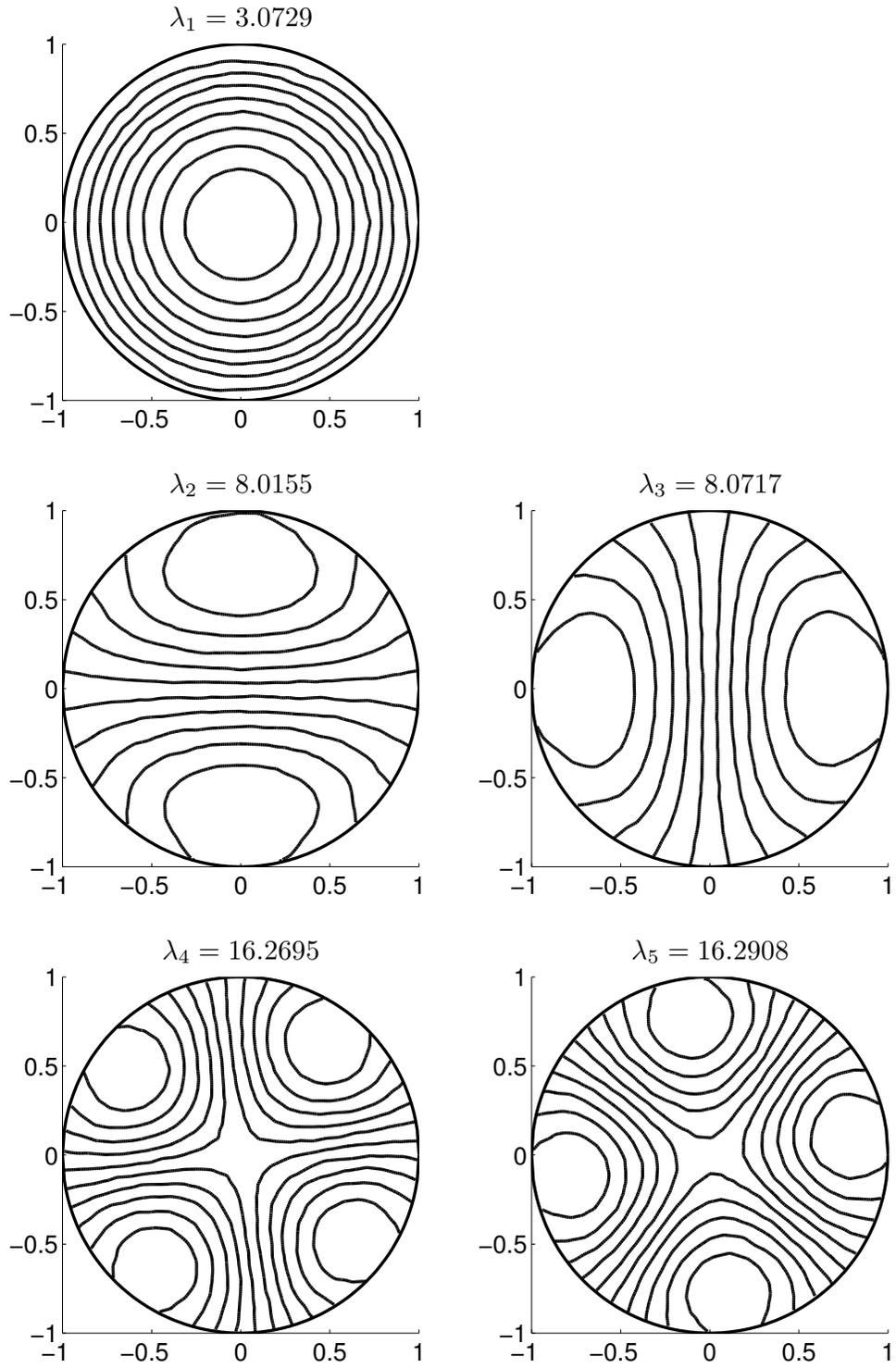


Рис. 23. Линии уровня функции  $u$  для волновода кругового поперечного сечения в слоистой среде, построенные при  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 1032$

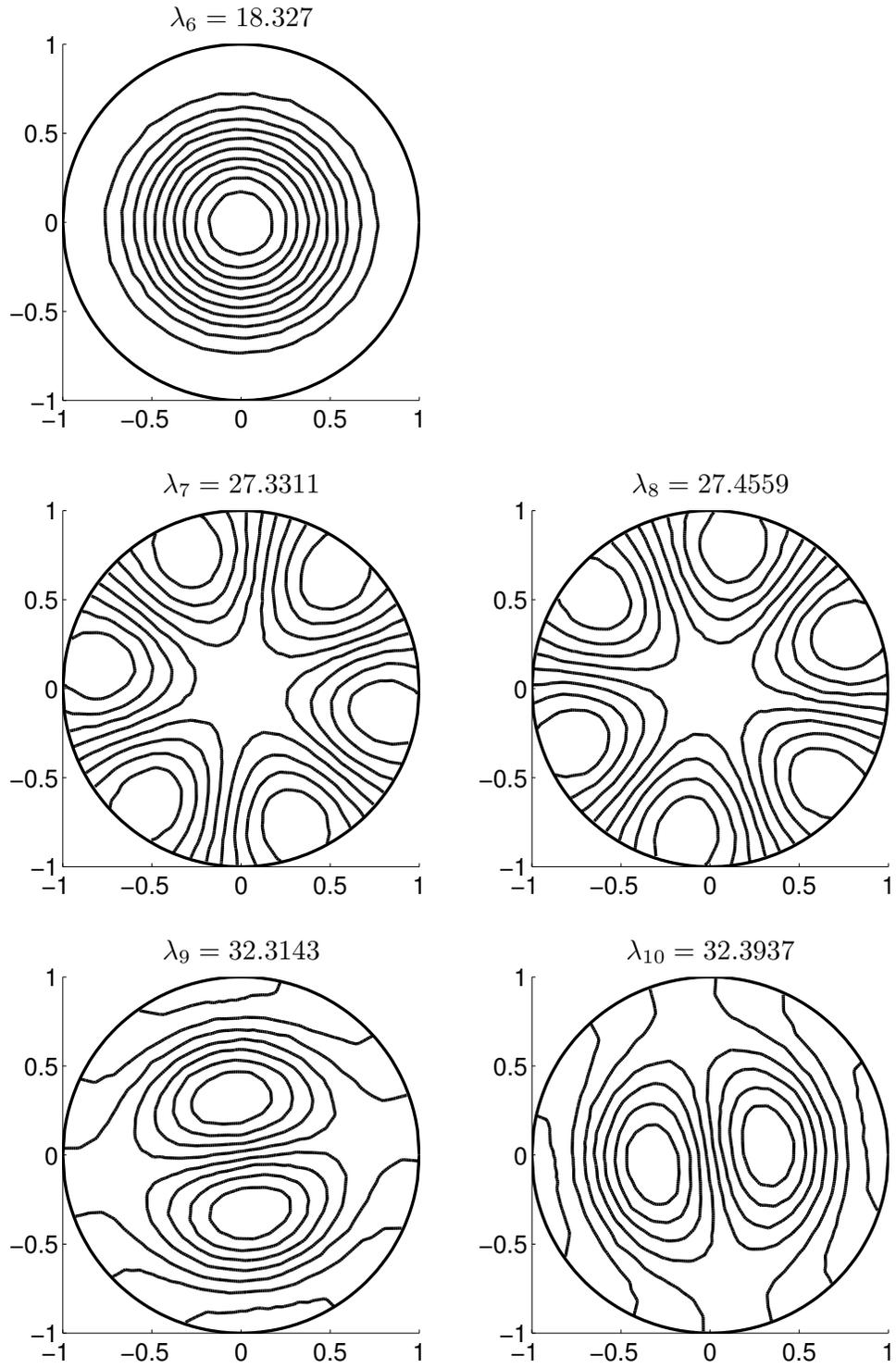


Рис. 24. Линии уровня функции  $u$  для волновода кругового поперечного сечения в слоистой среде, построенные при  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 1032$

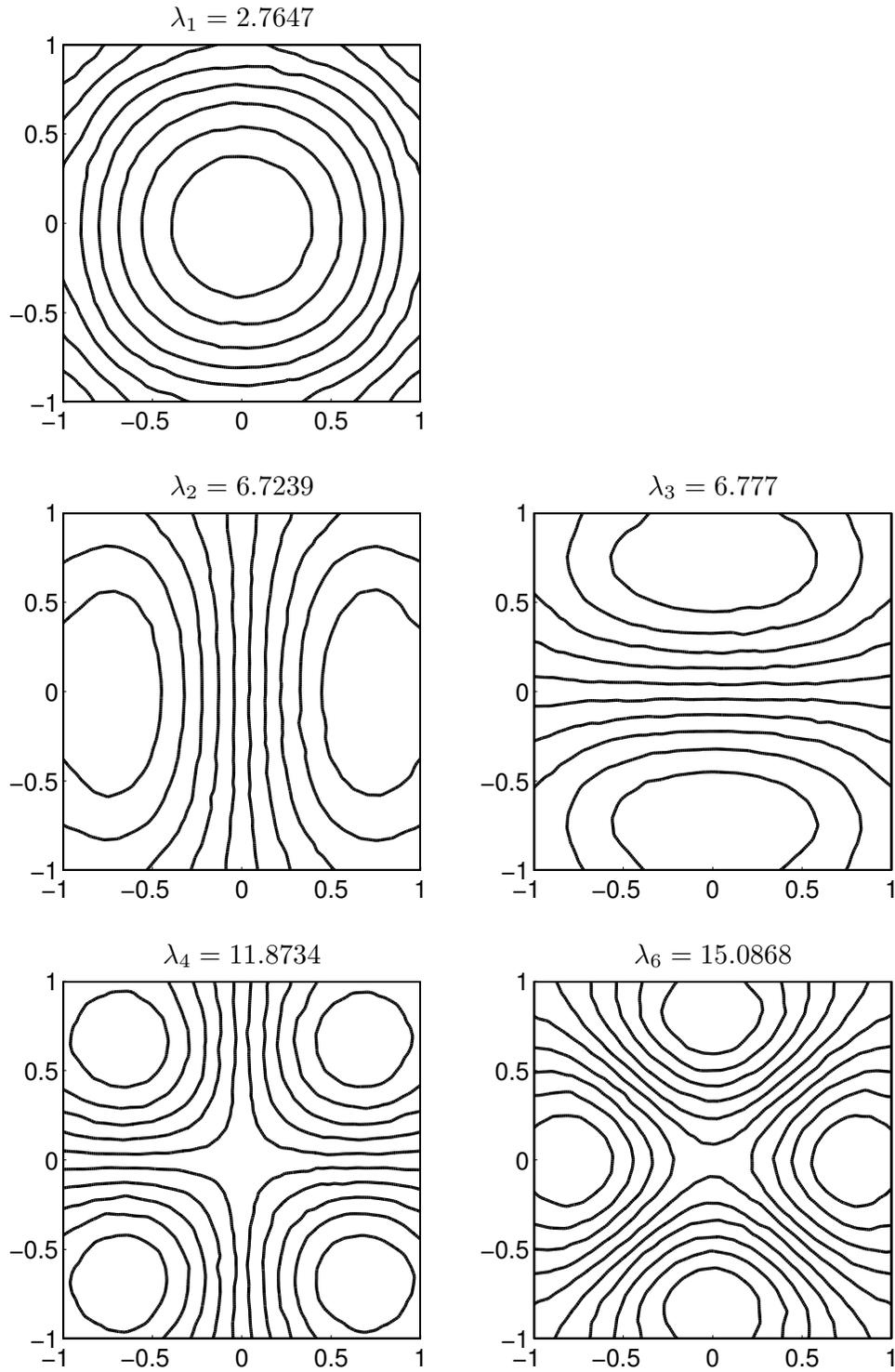


Рис. 25. Линии уровня функции  $u$  для волновода квадратного поперечного сечения в слоистой среде, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 1080$ .

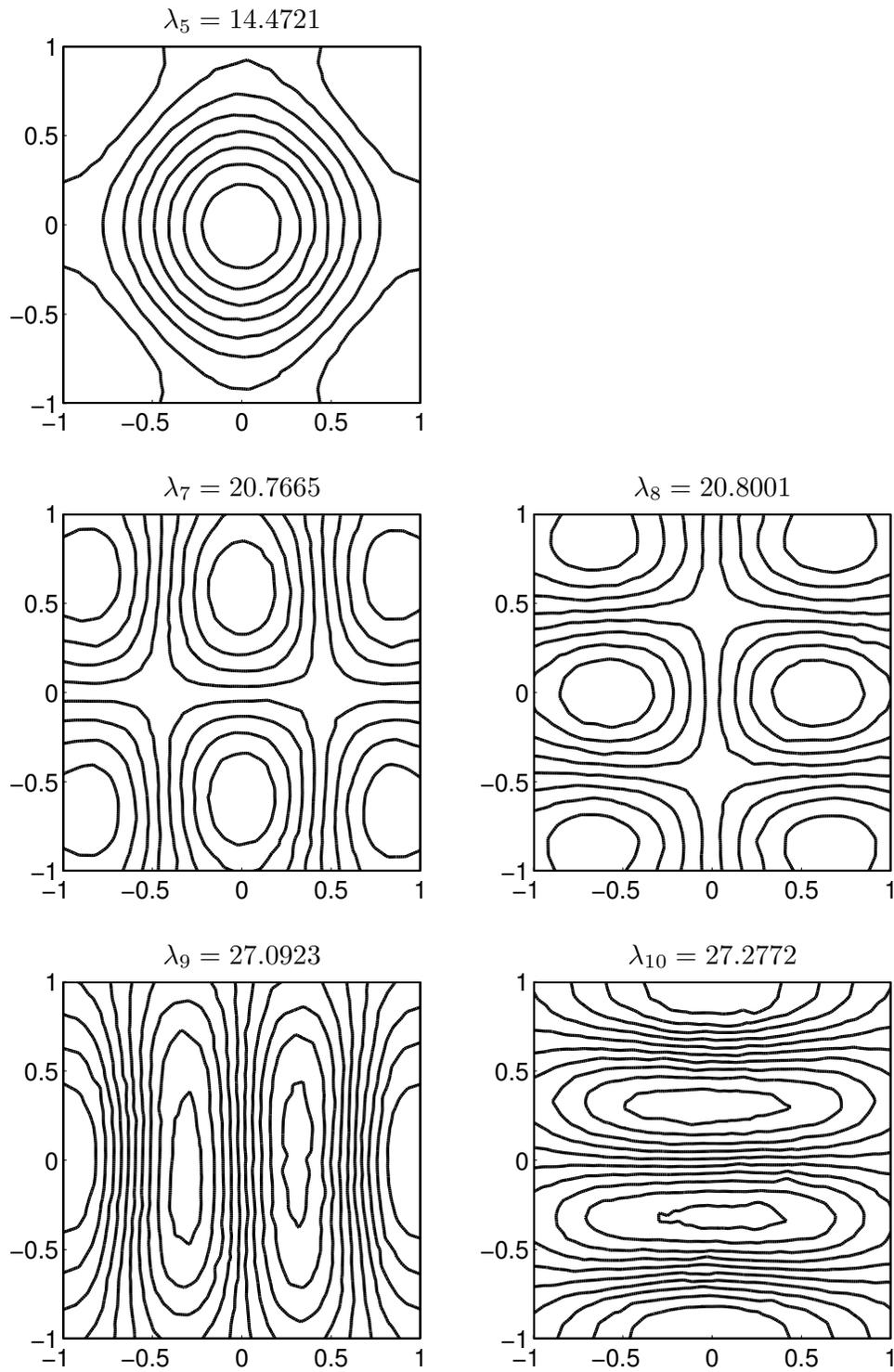


Рис. 26. Линии уровня функции  $u$  для волновода квадратного поперечного сечения в слоистой среде, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 1080$ .

### § 3. Метод коллокации решения нелинейных задач.

Пусть частота  $\omega > 0$  фиксирована. Тогда общие задачи о собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде (9), с. 58, и полупространстве (16), с. 61, имеют вид

$$A(\omega, \beta)u = (I - \lambda(\omega)T(\omega, \beta))u = 0, \quad (1)$$

где  $A$  — соответствующая фредгольмова, голоморфная по  $\beta \in \Lambda$  оператор-функция. Аппроксимируем оператор  $T$  точно также, как описано в первом параграфе этой главы. Приближением по методу коллокации к решению задачи (1) будем называть решение нелинейной алгебраической спектральной задачи

$$A_h(\omega, \beta)u_h = 0,$$

где  $A_h(\omega, \beta)$  — матрица с элементами, нелинейно зависящими от  $\beta$ :

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \lambda(\omega) \int_{\Omega_{j,h}} K(\omega, \beta; \xi_{i,h}, y) dy, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Напомним (см., с. 58), что характеристическое множество оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  обозначено символом  $\sigma(A)$ . Обозначим через  $\sigma(A_h)$  множество характеристических чисел  $\beta_h \in \Lambda$  матрицы  $A_h(\omega, \beta)$ .

**Теорема 2.11.** *Пусть частота  $\omega > 0$  фиксирована; оператор-функция  $T(\omega, \beta)$  параметра  $\beta \in \Lambda$  определена, либо равенством (6), с. 57, либо равенством (13), с. 59; оператор-функция  $A(\omega, \beta)$  параметра  $\beta \in \Lambda$  определена, соответственно, либо равенством (8), с. 57, либо равенством (15), с. 61. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , то существует такое семейство  $\beta_h \in \sigma(A_h)$ , что  $\beta_h \rightarrow \beta_0$  при  $h \rightarrow 0$ .

2. Если семейство чисел  $\beta_h \in \sigma(A_h)$  такое, что  $\beta_h \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$  при  $h \rightarrow 0$ , то  $\beta_0 \in \sigma(A)$ .

3. Пусть семейство  $\beta_h \in \Lambda$  и семейство  $u_h$  нормированных векторов такие, что  $\beta_h \in \sigma(A_h)$ ,  $A_h(\omega, \beta_h)u_h = 0$  и  $\beta_h \rightarrow \beta_0$ ,  $u_h \rightarrow u_0$  при  $h \rightarrow 0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\omega, \beta_0)u_0 = 0$ ,  $\|u_0\|_{L_2(\Omega)} = 1$ .

Напомним, что через  $E_h$  обозначено пространство сеточных функций с нормой (6), с. 83,  $p_h$  — проектор (8), с. 84.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро  $K$  оператора  $T$  слабо полярно, а контур  $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ , значит, если решение задачи (1) существует, то любая собственная функции  $u$  принадлежит (см., напр., [8], с. 327) пространству  $E = C(\overline{\Omega})$  с нормой (5), с. 83. Поэтому уравнение (1) будем трактовать как уравнение в пространстве  $E$ . Введем в рассмотрение дискретные аналоги операторов  $T(\omega, \beta)$  и  $A(\omega, \beta)$  — операторы, действующие в  $E_h$ :

$$(T_h(\omega, \beta)u_h)(\xi_{i,h}) = \sum_{j=1}^N u_{j,h} \int_{\Omega_{j,h}} K(\omega, \beta, \xi_{i,h}, y) dy, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

$$A_h(\omega, \beta) = I - \lambda T_h(\omega, \beta), \quad A_h(\omega, \beta) : E_h \rightarrow E_h, \quad (4)$$

где  $I$  — единичный оператор в  $E_h$ .

Пусть  $\omega > 0$  фиксированный параметр. Дальнейшее доказательство теоремы заключается в проверке условий 1–6 теорем 1 и 2 статьи [3] в рассматриваемом случае.

1. Оператор  $p_h : E \rightarrow E_h$  линеен и обладает свойством (9), с. 84.

2. Оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  и  $A_h(\omega, \beta)$  по  $\beta$  голоморфны на  $\Lambda$ . Это можно доказать, рассуждая аналогично [33], с. 459.

3. При любом  $\beta \in \Lambda$  операторы  $A(\omega, \beta)$  и  $A_h(\omega, \beta)$  фредгольмовы. Это непосредственно вытекает из полной непрерывности (см., напр., [83], с. 24) оператора  $T(\omega, \beta) : E \rightarrow E$  и конечномерности оператора  $T_h(\omega, \beta)$ .

4. Для любого  $\beta \in \Lambda$  семейство операторов  $(A_h(\omega, \beta))_{h \in (0, \bar{h})}$  существенно сходится к оператору  $A(\omega, \beta)$ . Согласно определению [3] се-

мейство операторов  $(A_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  называется собственно сходящимся к оператору  $A$ , если выполнены следующие два условия:

а) из  $u_h \dashrightarrow u$  следует, что  $A_h u_h \dashrightarrow Au$  (здесь и ниже используются определения и обозначения, введенные на с. 84);

б) для любой равномерно ограниченной последовательности  $(u_{h_k})$  элементов семейства  $(u_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  (т. е.  $\|u_{h_k}\|_{E_{h_k}} \leq \text{const}$ ,  $h_k \in (0, \bar{h})$ ), из того, что последовательность векторов  $(A_{h_k} u_{h_k})$  дискретно компактна, следует, что последовательность векторов  $(u_{h_k})$  дискретно компактна.

Покажем сначала, что выполняется условие а). Зависимость операторов от параметров  $\omega$  и  $\beta$  не всегда будем указывать для сокращения обозначений. Очевидно, что

$$\|A_h u_h - p_h A u\|_{E_h} \leq \|A_h u_h - A_h p_h u\|_{E_h} + \|A_h p_h u - p_h A u\|_{E_h}. \quad (5)$$

Для вектора  $p_h u \in E_h$  по формуле (3), с. 82, определим кусочно-постоянную функцию  $u^{(h)} \in L_\infty(\Omega)$ . Ясно, что тогда

$$A_h p_h u = p_h A u^{(h)},$$

где  $A : L_\infty(\Omega) \rightarrow E$ , следовательно,

$$\|A_h p_h u - p_h A u\|_{E_h} \leq \|p_h\|_{E \rightarrow E_h} \|A\|_{L_\infty \rightarrow E} \|u^{(h)} - u\|_{L_\infty}. \quad (6)$$

Объединяя неравенства (5) и (6), получаем оценку

$$\begin{aligned} & \|A_h u_h - p_h A u\|_{E_h} \leq \\ & \leq \|A_h\|_{E_h \rightarrow E_h} \|u_h - p_h u\|_{E_h} + \|p_h\|_{E \rightarrow E_h} \|A\|_{L_\infty \rightarrow E} \|u^{(h)} - u\|_{L_\infty}. \end{aligned} \quad (7)$$

Напомним (см. с. 84), что

$$\|p_h\|_{E \rightarrow E_h} = 1. \quad (8)$$

Ясно, что

$$\|u^{(h)} - u\|_{L_\infty} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (9)$$

Кроме того, при фиксированном  $\omega > 0$  имеет место оценка

$$\|A(\omega, \beta)\|_{L_\infty \rightarrow E} \leq c(\beta), \quad \beta \in \Lambda, \quad (10)$$

где  $c(\beta)$  — непрерывная в области  $\Lambda$  функция:

$$c(\beta) = 1 + \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(\omega, \beta, x, y)| dy.$$

Из определения оператора  $A_h(\omega, \beta)$  вытекает, что

$$\|A_h(\omega, \beta)\|_{E_h \rightarrow E_h} \leq \|A(\omega, \beta)\|_{L_\infty \rightarrow E}, \quad \beta \in \Lambda. \quad (11)$$

Теперь можно заключить, что условие а) выполняется в силу оценок (7)–(11).

Проверим теперь условие б). Дискретная компактность последовательности векторов  $(A_{h_k} u_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$  означает, что для любого подмножества  $\mathbb{N}'$  множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$  существует такое  $\mathbb{N}'' \subseteq \mathbb{N}'$ , что последовательность элементов  $(A_{h_k} u_{h_k} = u_{h_k} + \lambda T_{h_k} u_{h_k})_{k \in \mathbb{N}''}$  дискретно сходится к некоторому  $w \in E$ . Для вектора  $u_{h_k} \in E_{h_k}$  определим функцию  $u^{(h_k)} \in L_\infty(\Omega)$  по формуле (3), с. 82. Так как  $\|u_{h_k}\|_{E_{h_k}} \leq \text{const}$ , то  $\|u^{(h_k)}\|_{L_\infty} \leq \text{const}$  при  $k \in \mathbb{N}''$ . Интегральный оператор  $T : L_\infty(\Omega) \rightarrow E$  вполне непрерывен (см. [96], с. 14). Следовательно, множество  $(Tu^{(h_k)})_{k \in \mathbb{N}''}$  относительно компактно. Значит, из любой последовательности  $(Tu^{(h_k)})_{k \in \mathbb{N}''}$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $(Tu^{(h_k)})_{k \in \mathbb{N}''''}$ , т. е.

$$\|Tu^{(h_k)} - v\|_E \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{N}'''' , \quad v \in E.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\|T_{h_k} u_{h_k} - p_{h_k} v\|_{E_{h_k}} \leq \|p_{h_k}\|_{E \rightarrow E_{h_k}} \|Tu^{(h_k)} - v\|_E$$

и (8) следует, что последовательность  $(T_{h_k} u_{h_k})_{k \in \mathbb{N}''''}$  дискретно сходится к вектору  $v \in E$ . Значит последовательность  $(u_{h_k})_{k \in \mathbb{N}''''}$  дискретно сходится к вектору  $u = w - \lambda v \in E$ , и условие б) выполнено.

5. Нормы  $\|A_h(\omega, \beta)\|_{E_h \rightarrow E_h}$  ограничены равномерно по  $h$  и  $\beta$  на каждом компакте  $\Lambda_0 \subset \Lambda$ . Справедливость этого утверждения непосредственно следует из оценок (10) и (11).

6. Множество  $\rho(A)$  не пусто, т. е.  $\sigma(A) \neq \Lambda$ . Справедливость этого утверждения непосредственно следует из теоремы 1.3, с. 61, для задачи о собственных волнах волновода в полупространстве из соответствующего результата (см. с. 58) для задачи о собственных волнах волновода в однородной среде.  $\square$

## § 4. Численное решение задач о вытекающих волнах

В этом параграфе будут описаны численные эксперименты поиска вытекающих собственных волн волноводов, находящихся в однородной среде и полупространстве, методом коллокации. Напомним, что вытекающие волны отвечают комплексным постоянным распространения  $\beta$ , принадлежащим нефизическому листу  $\Lambda_0^{(2)}$  римановой поверхности  $\Lambda$ .

### 1. Волновод в однородной среде.

**1.1 Вычисление элементов матрицы.** Алгоритм вычисления элементов матрицы метода коллокации (2), с. 119, при комплексных  $\beta$  аналогичен способу, описанному во втором параграфе этой главы. Отличие заключается лишь в том, что в данном случае элементы матрицы являются комплексными. Для диагональных элементов формула имеют вид:

$$a_{ii} = 1 - \lambda \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \frac{\pi R_i^2}{2} - \ln R_i |\Omega_i| - \ln \frac{\chi\gamma}{2} |\Omega_i| \right).$$

Внедиагональные элементы вычислялись по формуле

$$a_{ij} = \frac{i}{4} \lambda p(\xi_i) p(\xi_j) |\Omega_j| H_0^{(1)}(\chi |\xi_i - \xi_j|).$$

**1.2. Метод обратных итераций с невязкой решения нелинейных конечномерных спектральных задач.** В предыдущем

параграфе методом коллокации была построена конечномерная нелинейная спектральная задача вида

$$A(\beta)u = 0, \quad (1)$$

где  $A$  — матрица, элементы которой являются комплекснозначными функциями комплексного параметра  $\beta$ ,  $u$  — собственный вектор с комплексными компонентами. Для решения этой задачи использовался вариант метода обратных итераций с невязкой, предложенный в работе [90]. Опишем его, следуя [90].

Пусть известно некоторое приближение  $\sigma \in \Lambda$  (где  $\Lambda$  — область на комплексной плоскости) к искомому характеристическому значению  $\beta$  такое, что матрица  $A(\sigma)$  обратима. Обозначим  $e(u)$  вектор с единицей в позиции максимальной по модулю компоненты вектора  $u$ , остальные компоненты вектора  $e(u)$  — нули. Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Пусть  $l = 0$ . Выберем начальное приближение  $u^{(0)}$  к  $u$ . Положим  $\beta_0 = \sigma$ .

2. Вычислим очередное приближение  $\beta_{l+1}$  к характеристическому значению  $\beta$  как ближайший к значению  $\beta_l$  корень уравнения

$$\left( e(u^{(l)}), A^{-1}(\sigma)A(\beta_{l+1})u^{(l)} \right) = 0.$$

3. Вычислим невязку

$$r^{(l)} = A(\beta_{l+1})u^{(l)}.$$

4. Решим следующее уравнение

$$A(\sigma)\hat{u}^{(l)} = r^{(l)}.$$

Вычислим очередное приближение  $u^{(l+1)}$  к собственному вектору  $u$

$$\bar{u}^{(l+1)} = u^{(l)} - \hat{u}^{(l)}, \quad u^{(l+1)} = \bar{u}^{(l+1)} / \|\bar{u}^{(l+1)}\|.$$

5. Итерационный процесс останавливается, если относительная ошибка характеристического значения достигает заданной точности  $\varepsilon$ :

$$\frac{|\beta_{l+1} - \beta_l|}{|\beta_l|} \leq \varepsilon.$$

В противном случае увеличим  $l$  на единицу и вернемся к шагу 2.

В реальных вычислениях предварительно строится  $LU$  разложение матрицы  $A(\sigma)$ . Это разложение вычисляется один раз и затем используется на шагах 2 и 4 всех итераций.

### 1.3. Особенности построения дисперсионных кривых.

Численные эксперименты показывают, что для различных волноводов, находящихся как в однородной среде, так и в полупространстве, постоянные распространения  $\beta$  с уменьшением частоты  $\omega$  переходят с физического листа римановой поверхности  $\Lambda$  на нефизический, т. е. поверхностные волны трансформируются в вытекающие. Этот эффект хорошо известен для волноводов кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления (см. с. 38). Значения частот  $\omega_{j,0}$ , при которых происходит такой переход, называются критическими.

Во втором параграфе этой главы для поверхностных волн был предложен метод построения дисперсионных кривых в терминах параметров  $\lambda > 0$  и  $\sigma = \text{Im } \chi$ . В этом случае  $\sigma > 0$ ,  $\text{Re } \chi = 0$ , но когда  $\omega$  принимает критические значения,  $\sigma = 0$ . Обозначим точки, в которых дисперсионные кривые  $\sigma_j = \sigma_j(\lambda)$  пересекают ось  $\lambda$ , через  $\lambda_{j,0}$  и назовем их точками отсечки. При переходе через точки отсечки значения  $\lambda$  уменьшаются, вещественная часть  $\chi$  становится отличной от нуля, а  $\text{Im } \chi$  — отрицательной. Поэтому дисперсионными кривыми для вытекающих волн будем называть графики функций  $\text{Im } \chi_j = \text{Im } \chi_j(\lambda)$  и  $\text{Re } \chi_j = \text{Re } \chi_j(\lambda)$ .

Пусть дана точка отсечки  $\lambda_{j,0}$ , где  $j$  — номер характеристического числа. Так как в точке отсечки  $\chi = 0$ , и функция Ханкеля в этом случае имеет особенность, то задавая начальное приближение  $(\lambda_1, \chi_1)$ ,

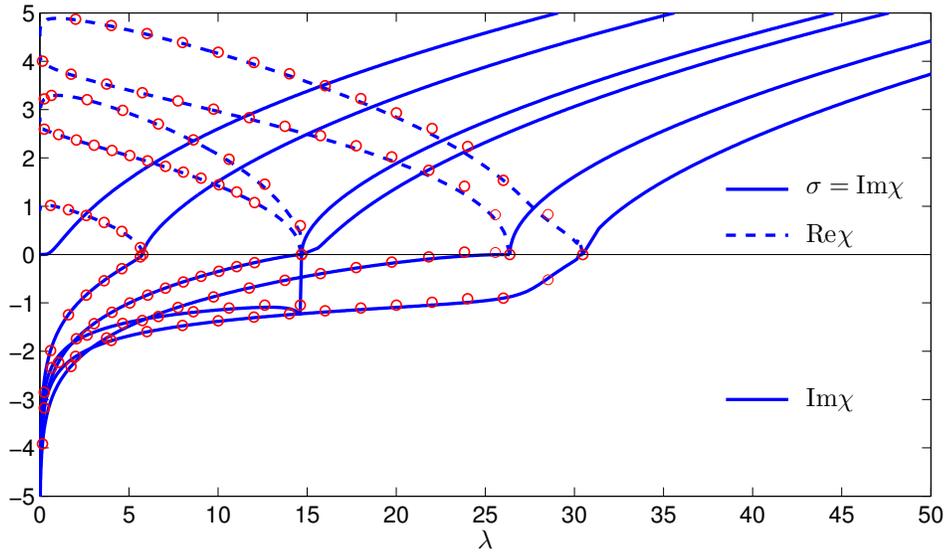


Рис. 27. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 1032$ . Сплошными и штриховыми линиями обозначено точное решение. Кружочки — результаты расчетов методом коллокации.

необходимо отступить от точки отсечки. Возьмем три малых положительных числа  $\varepsilon_\lambda$ ,  $\text{Re}\varepsilon_\chi$  и  $\text{Im}\varepsilon_\chi$ . Обозначим через  $s_\lambda$  шаг с которым будем двигаться по оси  $\lambda$ . Алгоритм построения дисперсионных кривых для вытекающих волн основан на применении метода обратных итераций с невязкой и состоит из следующих шагов.

1. Вычислим  $\lambda_1 = \lambda_{j,0} - \varepsilon_\lambda$  и  $\chi_1 = \text{Re}\varepsilon_\chi - i\text{Im}\varepsilon_\chi$ . В качестве начального приближения к характеристическому значению выберем  $\beta_1 = \beta(\lambda_1, \chi_1)$ , а к собственному вектору — вектор, состоящий из единиц.

2. Если при этом начальном приближении метод сходится, и в результате получается характеристическое число под нужным номером, что можно определить по характеру собственной функции, то приближение для второй точки кривой зададим по формулам

$$\text{Re}\chi_2 = \text{Re}\chi_1 \left( \frac{\varepsilon_\lambda + s_\lambda}{\varepsilon_\lambda} \right),$$

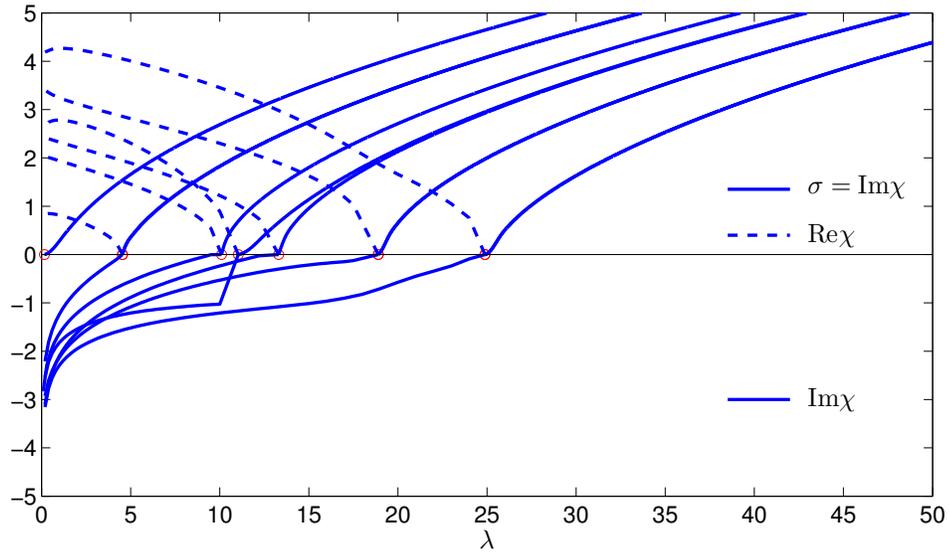


Рис. 28. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные методом коллокации при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 1248$

$$\text{Im}\chi_2 = \text{Im}\chi_1 \left( \frac{\varepsilon_\lambda + s_\lambda}{\varepsilon_\lambda} \right),$$

$$\lambda_2 = \varepsilon_\lambda + s_\lambda.$$

Иначе изменим значения  $\text{Re}\varepsilon_\chi$  и  $\text{Im}\varepsilon_\chi$  и вернемся к шагу 1.

3. Пусть построено  $q$  точек. Приближения для  $(q + 1)$ -ой точки зададим следующим образом

$$\text{Re}\chi_{q+1} = \frac{\text{Re}\chi_q - \text{Re}\chi_{q-1}}{\lambda_q - \lambda_{q-1}} \lambda_{q+1} + \frac{\text{Re}\chi_{q-1} \lambda_q - \text{Re}\chi_q \lambda_{q-1}}{\lambda_q - \lambda_{q-1}},$$

$$\text{Im}\chi_{q+1} = \frac{\text{Im}\chi_q - \text{Im}\chi_{q-1}}{\lambda_q - \lambda_{q-1}} \lambda_{q+1} + \frac{\text{Im}\chi_{q-1} \lambda_q - \text{Im}\chi_q \lambda_{q-1}}{\lambda_q - \lambda_{q-1}},$$

$$\lambda_{q+1} = \lambda_q - s_\lambda.$$

4. Процесс продолжается пока  $\lambda_{q+1} > 0$ . Для построения следующей дисперсионной кривой, нужно взять следующую точку отсечки в качестве начального приближения.

**1.4. Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим однородный волновод кругового поперечного сечения единичного ради-

уса с показателем преломления  $n(x) = n_+ = \sqrt{2}$ . Показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . Для такого волновода известно точное решение (см. с. 38).

На рис. 27 изображены первые пять дисперсионных кривых, вычисленных при  $N = 1032$ . Сплошными линиями на этом рисунке показано точное решение, кружочками отмечено приближенное. Анализ точности вычислений в зависимости от  $N$  проводился также, как было описано во втором параграфе этой главы. В следующей таблице приведено исследование сходимости для характеристического числа  $\chi_4$ . Значения  $\tilde{\chi}_4$ , вычисленные при  $\lambda = 10.02$  и разном числе треугольников сравнивались с точным значением  $\chi_4 = 2.9657 - 0.8469i$ , полученным методом разделения переменных.

N	512	1032	2304	4128
$h$	0.1551	0.1217	0.0800	0.0618
$\tilde{\chi}_4$	2.9984 - 0.8477i	2.9835 - 0.8511i	2.9696 - 0.8495i	2.9666 - 0.8488i
$e$	0.5186	0.5235	0.5048	0.5841
$\varepsilon$	0.0125	0.0078	0.0032	0.0022

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1032$  и при этом  $|\chi_4 - \tilde{\chi}_4|/|\chi_4| \approx 0.5h^2$ . На рисунках 30, 31 изображены линии уровня вытекающих собственных волн волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $N = 4128$  и соответствующих  $\lambda$ .

Рассмотрим однородный волновод квадратного поперечного сечения. Точка пересечения диагоналей квадрата расположена в начале координат. Стороны имеют единичную длину и параллельны осям координат. Показатель преломления  $n(x)$  принимает постоянное значение  $n_+ = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . На рис. 28 изображены первые шесть дисперсионных кривых, вычисленных при  $N = 1248$ .

На рисунках 32, 33 изображены линии уровня вытекающих собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $N = 4992$  и соответствующих  $\lambda$ . В следующей таблице приведено исследование сходимости для характеристического числа  $\chi_4$ .

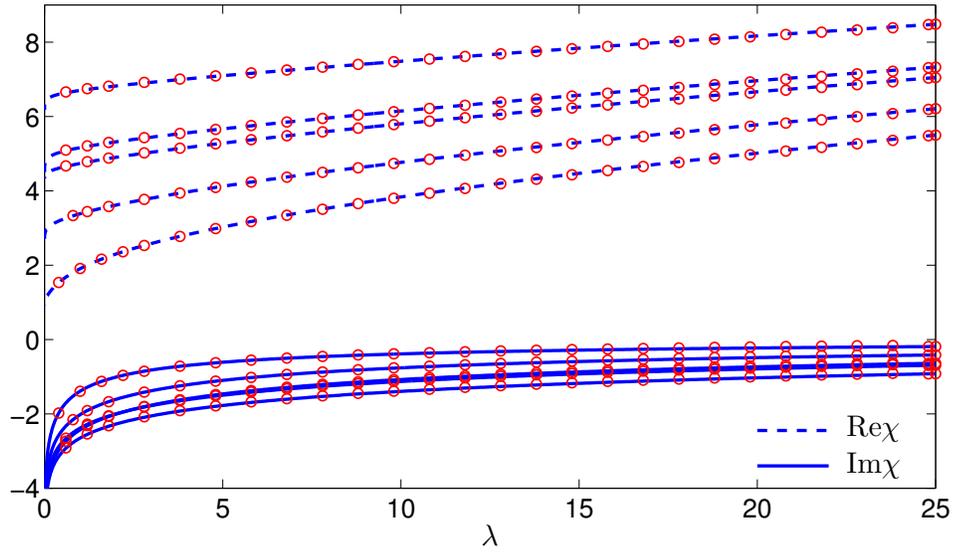


Рис. 29. Дисперсионные кривые для вытекающих собственных волн канального волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = 1$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$  и  $N = 1032$ . Сплошными и штриховыми линиями обозначено точное решение. Кружочки — результаты расчетов методом коллокации.

Значения  $\tilde{\chi}_4$ , вычисленные при  $\lambda = 6$  и разным числе треугольников сравнивались со значением  $\chi_4 = 1.7744 - 0.7294i$ , полученном при  $N = 4992$ .

$N$	312	592	1248	2368
$h$	0.2358	0.1788	0.1179	0.0894
$\tilde{\chi}_4$	1.7882 - 0.7006i	1.7808 - 0.7149i	1.7771 - 0.7238i	1.7753 - 0.7273i
$e$	0.2993	0.2589	0.2344	0.1542
$\varepsilon$	0.0166	0.0083	0.0033	0.0012

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1248$  и при этом  $|\chi_4 - \tilde{\chi}_4|/|\chi_4| \approx 0.2h^2$ .

Рассмотрим так называемый канальный волновод [73] кругового поперечного сечения с центром в начале координат и единичным радиусом. Основное его отличие заключается в том, что показатель преломления в области  $\Omega$  меньше показателя преломления окружающей среды. В нашем случае  $n(x) = n_+ = 1$ , а  $n_\infty = \sqrt{2}$ . Для такого волновода известно точное решение метода разделения переменных [73].

В канальном волноводе рабочими модами могут быть только вытекающие. На рис. 29 изображены первые пять дисперсионных кривых  $\chi = \chi(\tilde{\lambda})$ , где  $\tilde{\lambda} = \lambda/i$  и  $\tilde{\lambda} > 0$ , вычисленные при  $N = 1032$ . Сплошными линиями показано точное решение, кружочками отмечено приближенное. В следующей таблице приведено исследование сходимости для характеристического числа  $\chi_3$ . Значения  $\tilde{\chi}_3$ , вычисленные при  $\lambda = 10.05$  и разном числе треугольников сравнивались с точным значением  $\chi_3 = 5.8008 - 1.0778i$ .

$N$	512	1032	2304	4128
$h$	0.1551	0.1217	0.0800	0.0618
$\tilde{\chi}_3$	5.8018 - 1.0489i	5.8030 - 1.0655i	5.8047 - 1.0702i	5.8050 - 1.0726i
$e$	0.1859	0.1124	0.1300	0.1099
$\varepsilon$	0.0045	0.0017	0.0008	0.0004

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1032$  и при этом  $|\chi_3 - \tilde{\chi}_3|/|\chi_3| \approx 0.1h^2$ . На рисунках 34, 35 изображены линии уровня вытекающих собственных волн канального волновода, построенные при  $N = 4128$  и соответствующих  $\lambda$ .

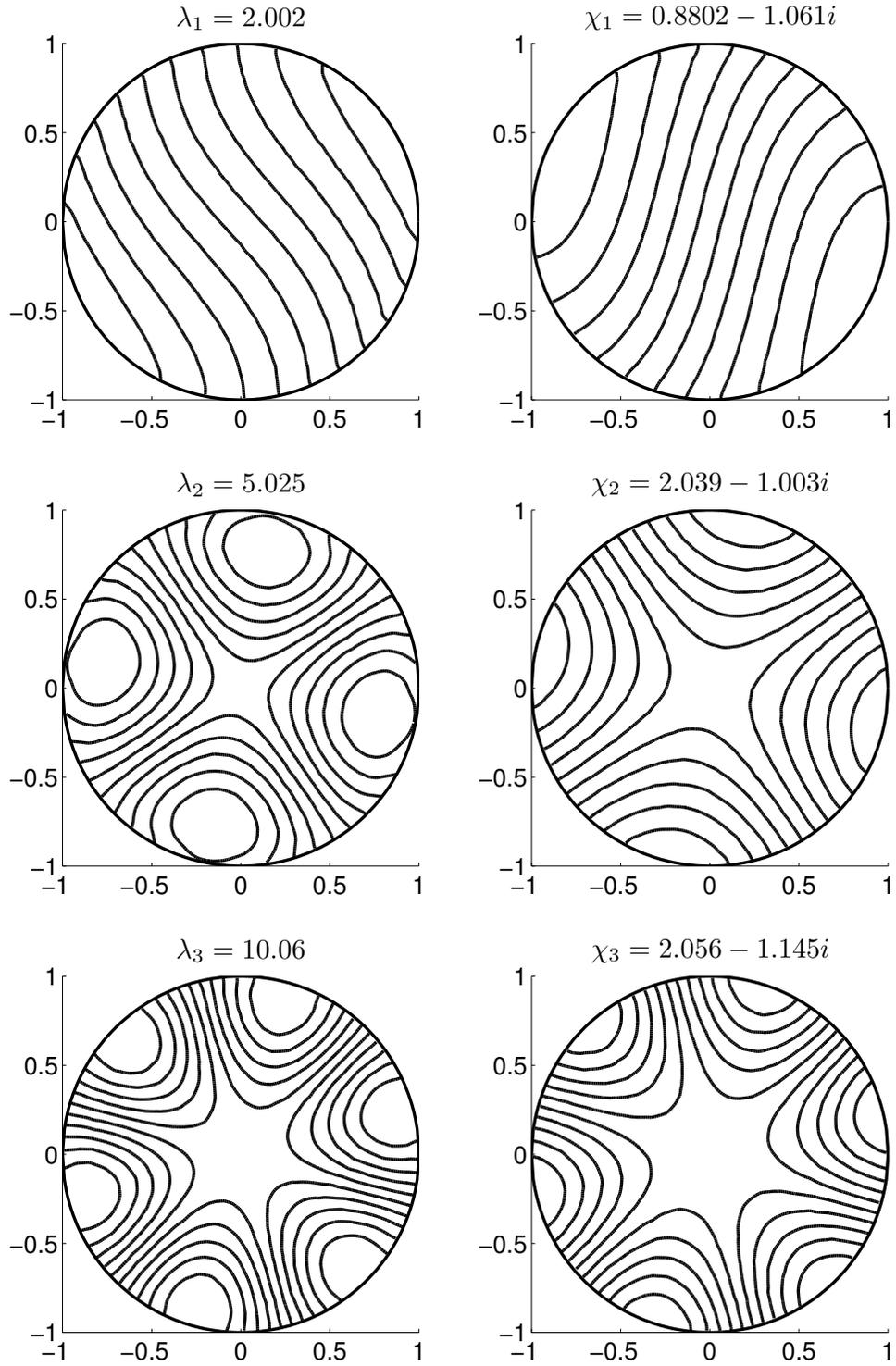


Рис. 30. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 4128$  и соответствующих  $\lambda$ .

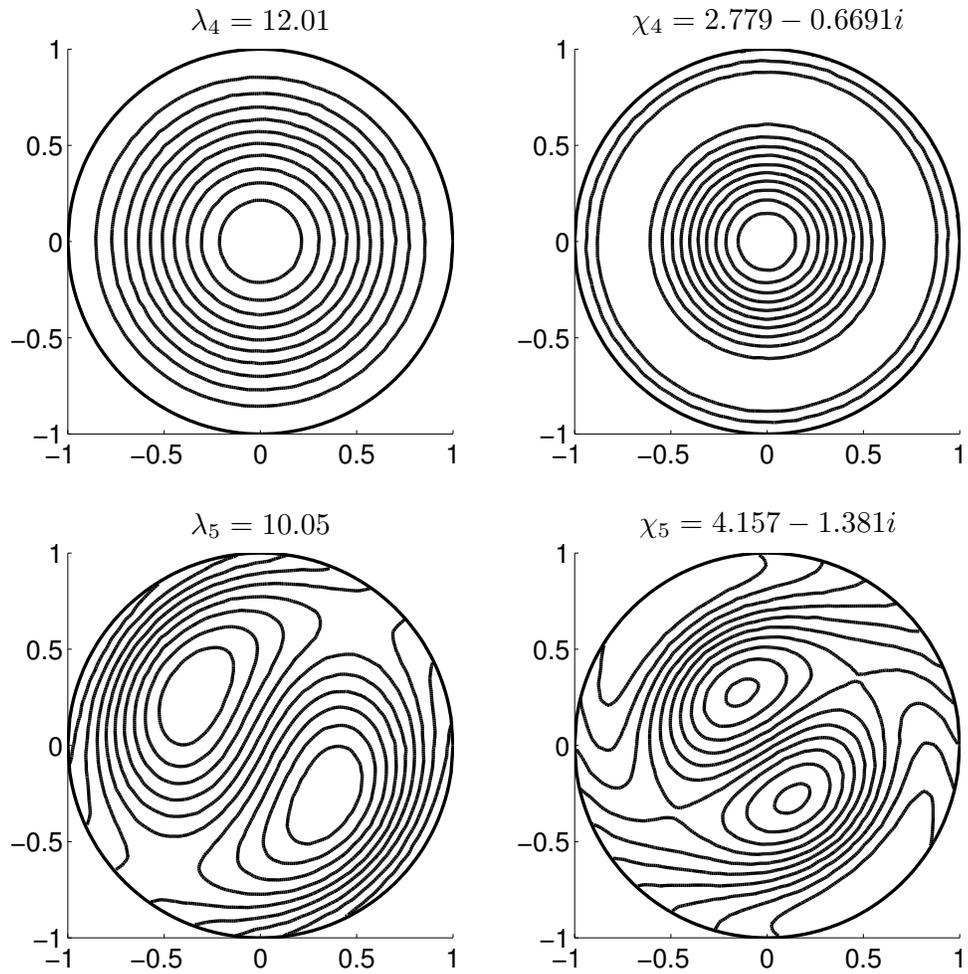


Рис. 31. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 4128$  и соответствующих  $\lambda$ .

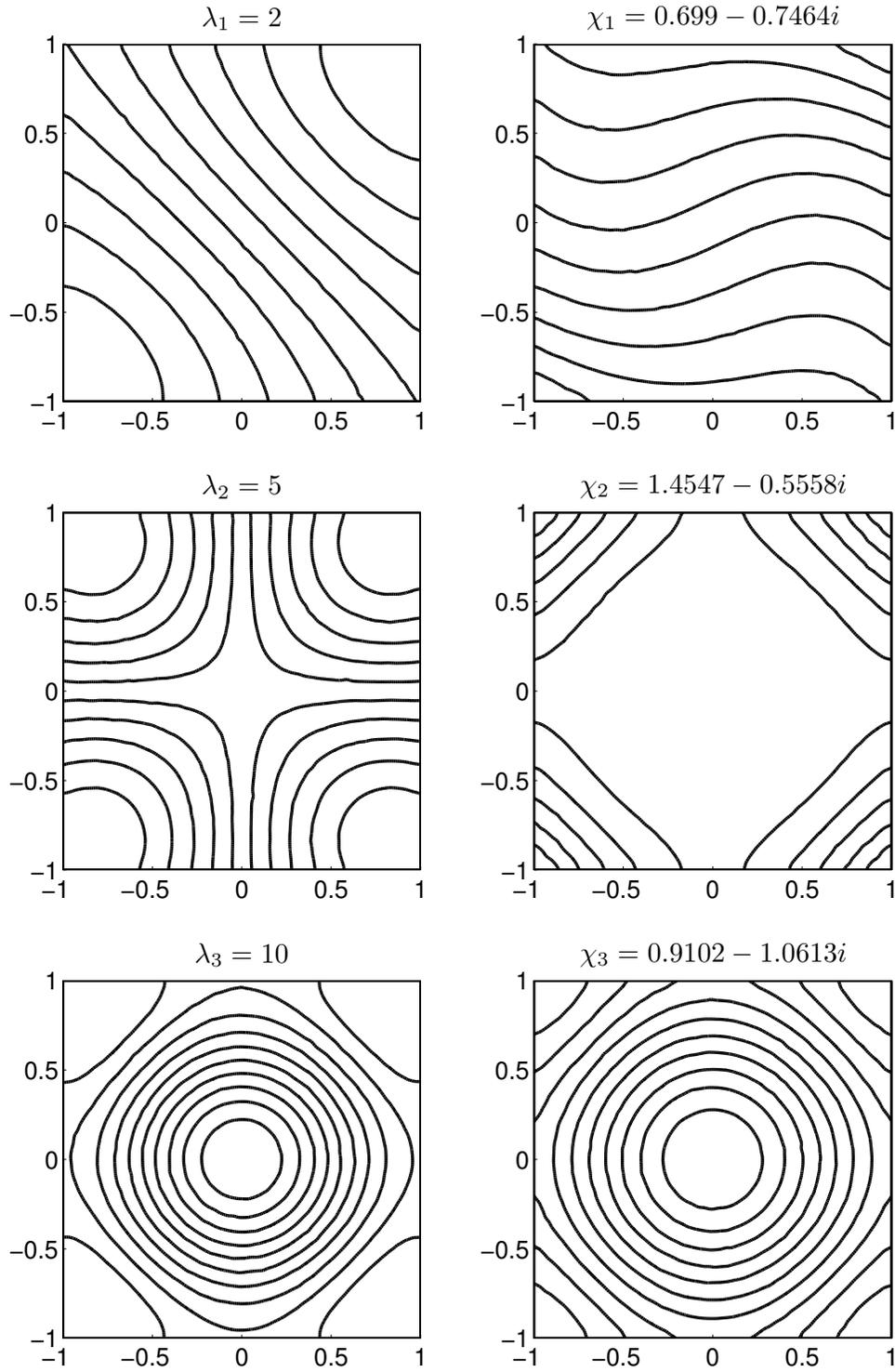


Рис. 32. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 4992$  и соответствующих  $\lambda$ .

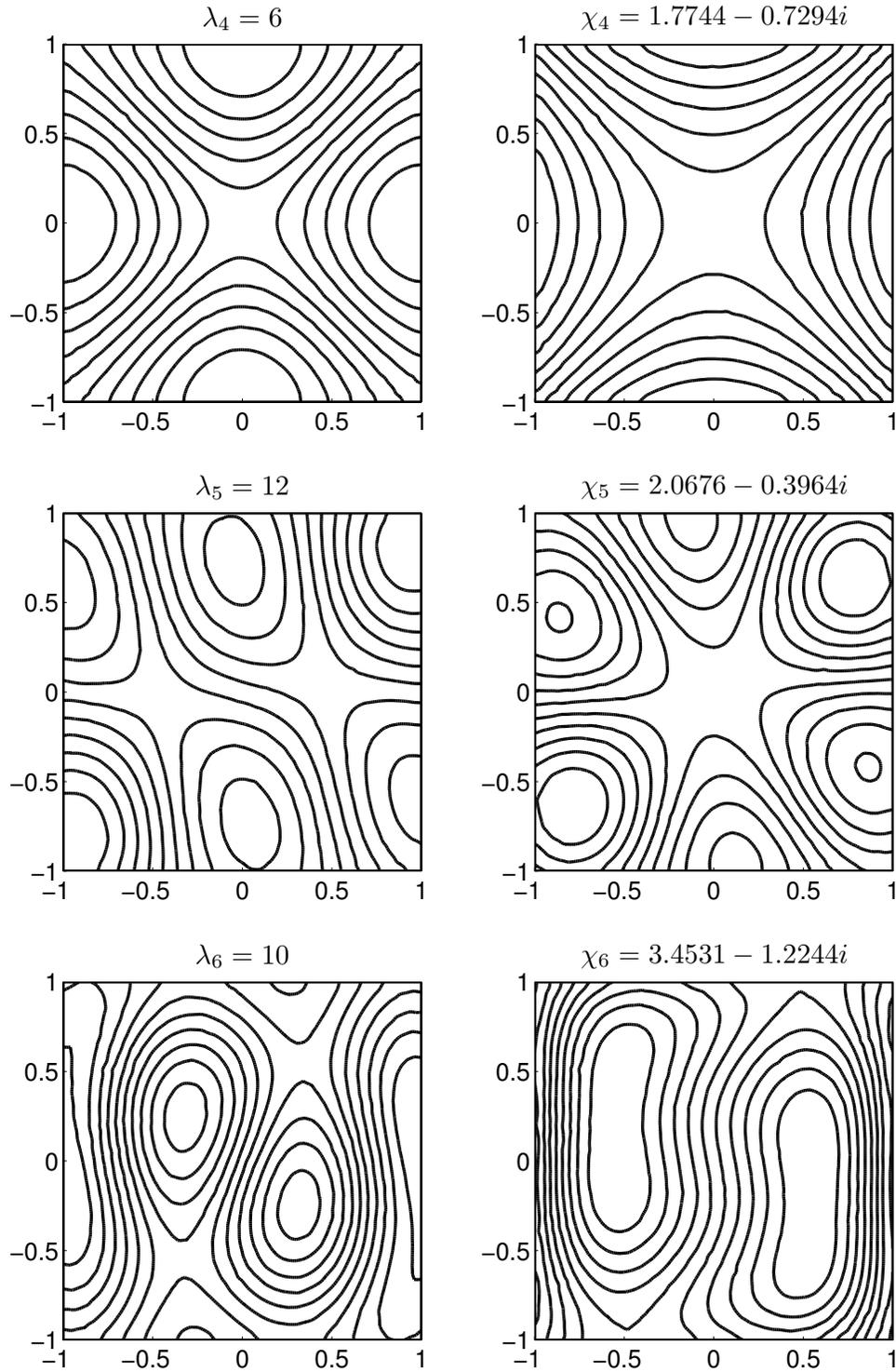


Рис. 33. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 4992$  и соответствующих  $\lambda$

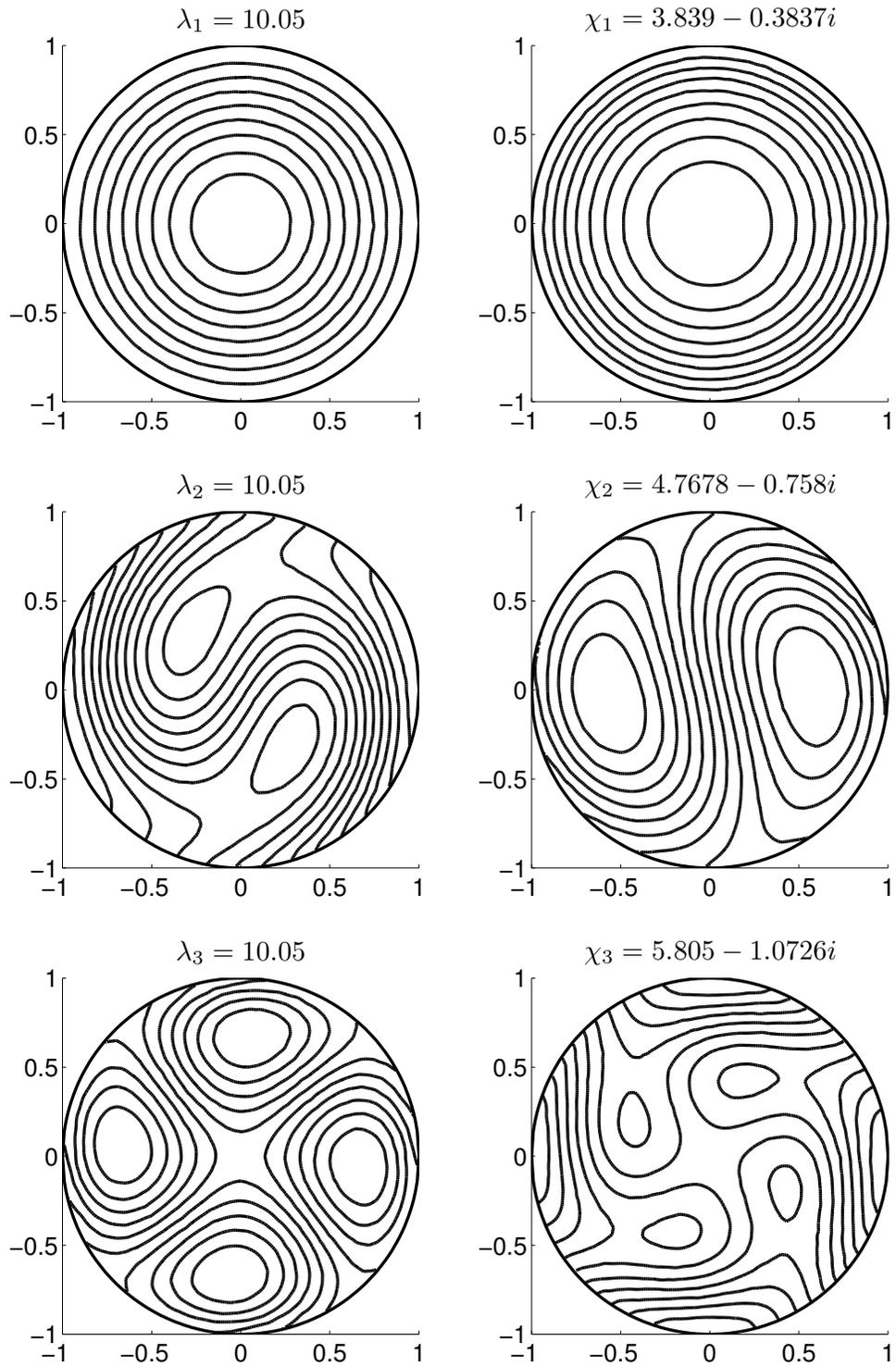


Рис. 34. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн канального волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = 1$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $\lambda = 10.05$  и  $N = 4128$

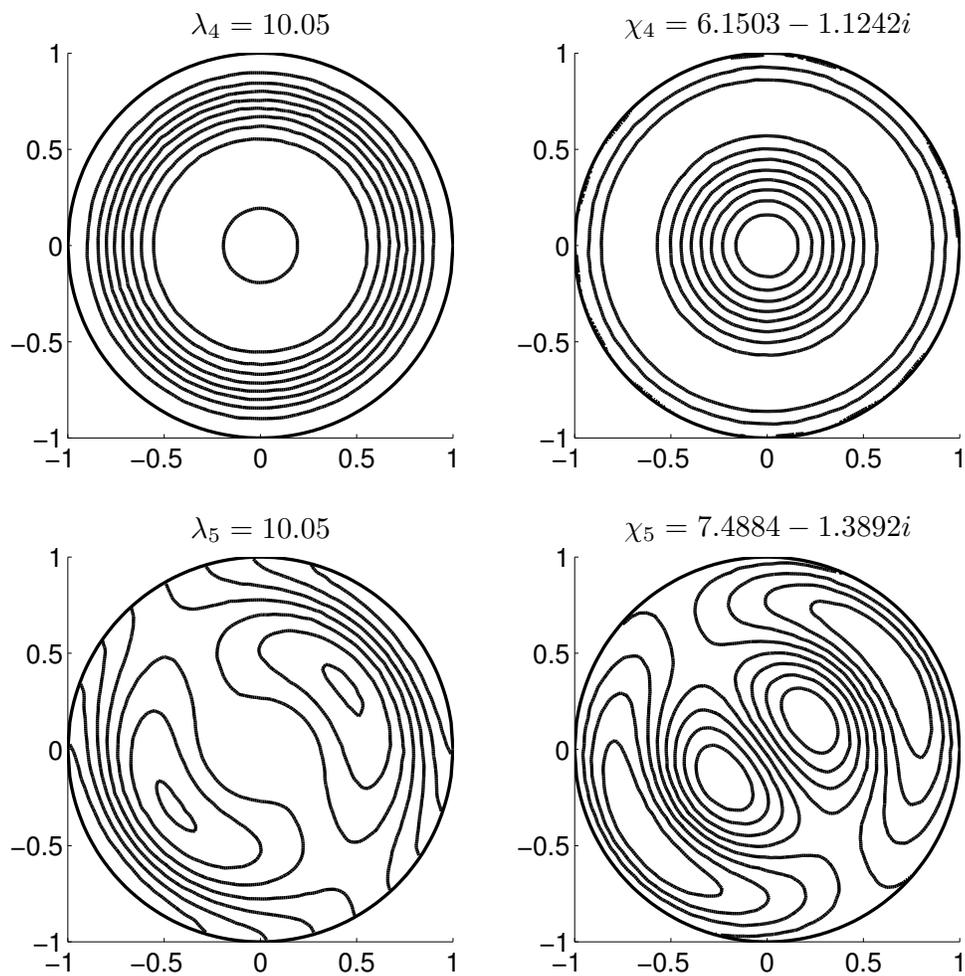


Рис. 35. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн канального волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = 1$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $\lambda = 10.05$  и  $N = 4128$

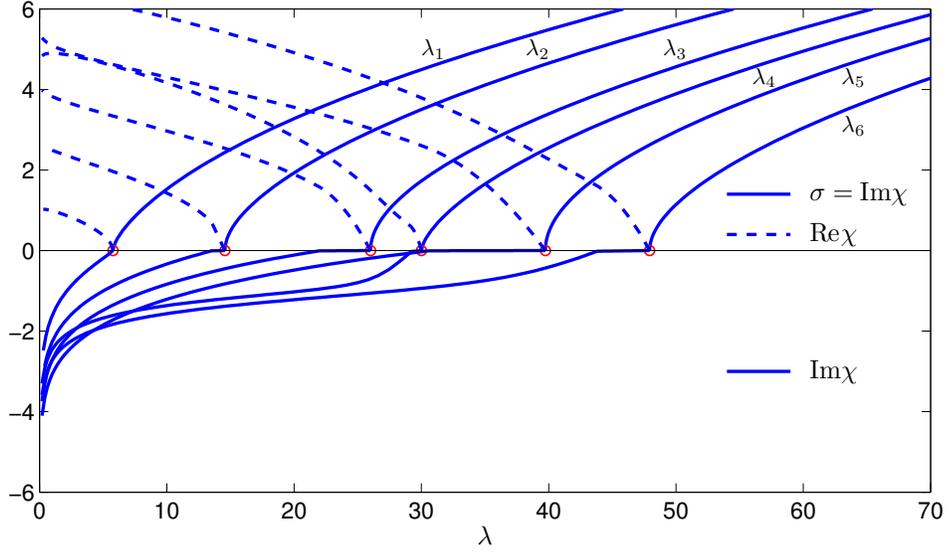


Рис. 36. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн волновода с сечением в форме полукруга, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 506$ . Сплошными линиями обозначено  $\text{Im}\chi$ , штриховыми —  $\text{Re}\chi$ .

## 2. Волновод в полупространстве.

**2.1. Особенности вычислений.** Алгоритм вычисления элементов матрицы аналогичен способу, применявшемуся при решении задачи поиска поверхностных волн, волновода в полупространстве. Основное отличие заключается в том, что в данном случае функция Ханкеля  $H_0^{(1)}$  является комплекснозначной. Для диагональных элементов формула имеют вид:

$$a_{ii} = 1 - \lambda \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \frac{\pi R_i^2}{2} - \ln R_i |\Omega_i| - \ln \frac{\chi \gamma}{2} |\Omega_i| - \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(2\chi |\xi_2^i|) |\Omega_i| \right).$$

Внедиагональные элементы вычислялись по формуле:

$$a_{ij} = \frac{i}{4} \lambda p(\xi_i) p(\xi_j) |\Omega_j| \left( H_0^{(1)}(\chi |\xi_i - \xi_j|) - H_0^{(1)}(\chi |\xi_i - \xi_j^*|) \right).$$

Дисперсионные кривые строились по алгоритму описанному в предыдущем пункте.

**2.2. Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим однородный волновод, поперечным сечением которого является полу-

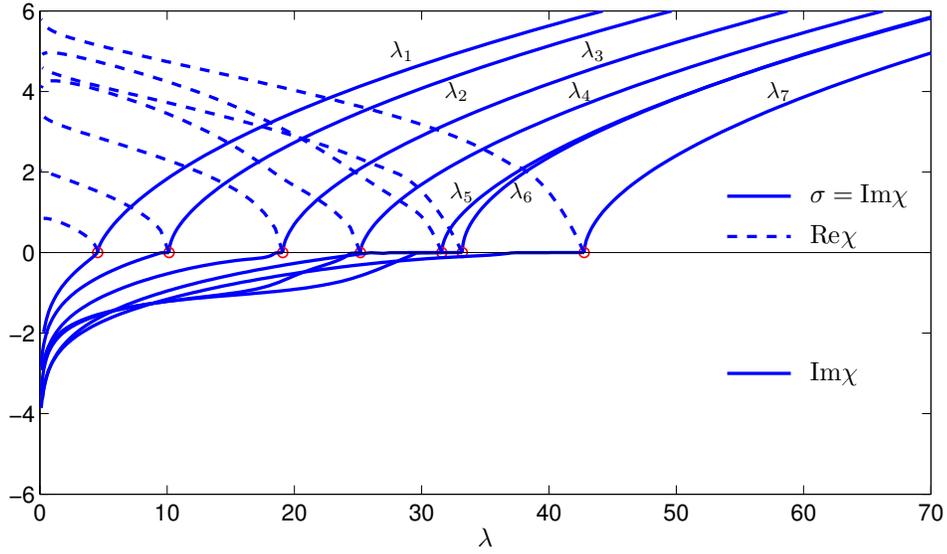


Рис. 37. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн волновода прямоугольного поперечного сечения, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 664$ . Сплошными линиями обозначено  $\text{Im}\chi$ , пунктирными —  $\text{Re}\chi$ .

круг с центром в начале координат единичного радиуса. Показатель преломления волновода равен  $\sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды в верхней полуплоскости  $n_\infty = 1$ . На рис. 36 изображены первые шесть дисперсионных кривых  $\chi = \chi(\lambda)$ , построенных при  $N = 506$ . На рис. 38 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 506$ . В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\chi_4$ . Значения  $\tilde{\chi}_4$ , вычисленные при разном числе треугольников, сравнивались со значением  $\tilde{\chi}_4 = 2.8042 - 1.0803i$ , вычисленном при  $N = 4236$  и  $\lambda = 20.2$ .

$N$	240	506	1059	2024
$h$	0.1693	0.1210	0.0863	0.0605
$\tilde{\chi}_4$	2.7616 - 0.9311i	2.7897 - 1.0195i	2.7978 - 1.0556i	2.8020 - 1.0715i
$e$	1.8019	1.4209	1.1408	0.8241
$\varepsilon$	0.0516	0.0208	0.0085	0.0030

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1059$  и при этом  $|\chi_4 - \tilde{\chi}_4|/|\chi_4| \approx 1.1h^2$ .

Рассмотрим однородный волновод прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон, равным 2. Середина его большей стороны совпадает с началом координат, а длина меньшей — равна единице. Показатель преломления  $n(x)$  волновода равен  $\sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды в верхней полуплоскости  $n_\infty = 1$ . На рис. 37 изображены первые семь дисперсионных кривых  $\chi = \chi(\lambda)$ , построенных при  $N = 664$ . На рис. 39 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 664$ . В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\chi_4$ . Значения  $\tilde{\chi}_4$ , вычисленные при разном числе треугольников, сравнивались со значением  $\chi_4 = 2.6630 - 1.0437i$ , вычисленном при  $N = 4800$  и  $\lambda = 15.2$ .

$N$	320	664	1280	2656
$h$	0.1598	0.1125	0.0799	0.0562
$\tilde{\chi}_4$	2.6492 - 0.9372i	2.6523 - 1.0056i	2.6597 - 1.0224i	2.6612 - 1.0389i
$e$	1.4703	1.0922	1.1777	0.5662
$\varepsilon$	0.0375	0.0138	0.0075	0.0018

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1280$ , и при этом  $|\chi_4 - \tilde{\chi}_4|/|\chi_4| \approx 1.2h^2$ .

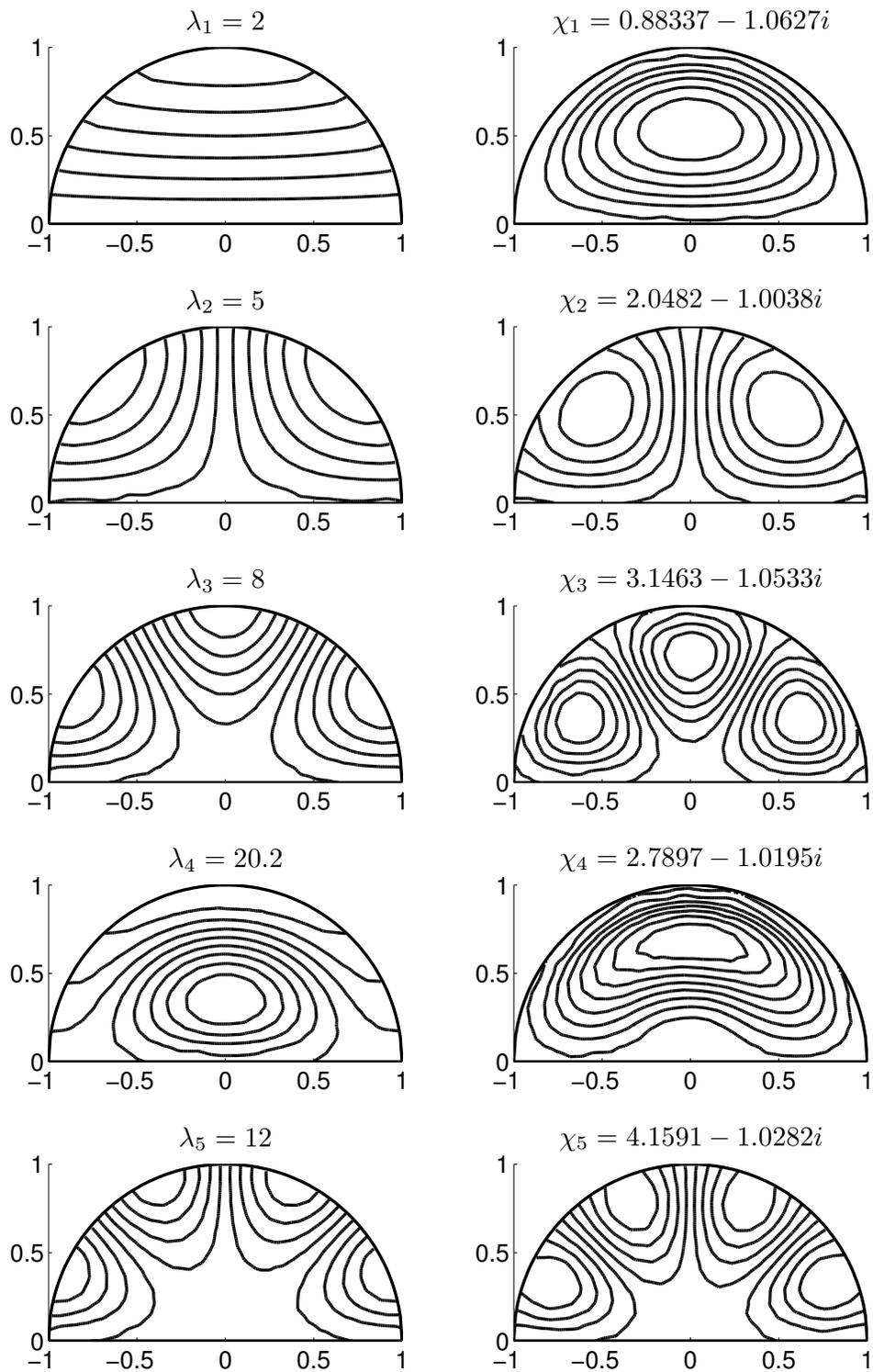


Рис. 38. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для волновода с сечением в форме полукруга, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 506$  и соответствующих  $\lambda$ .

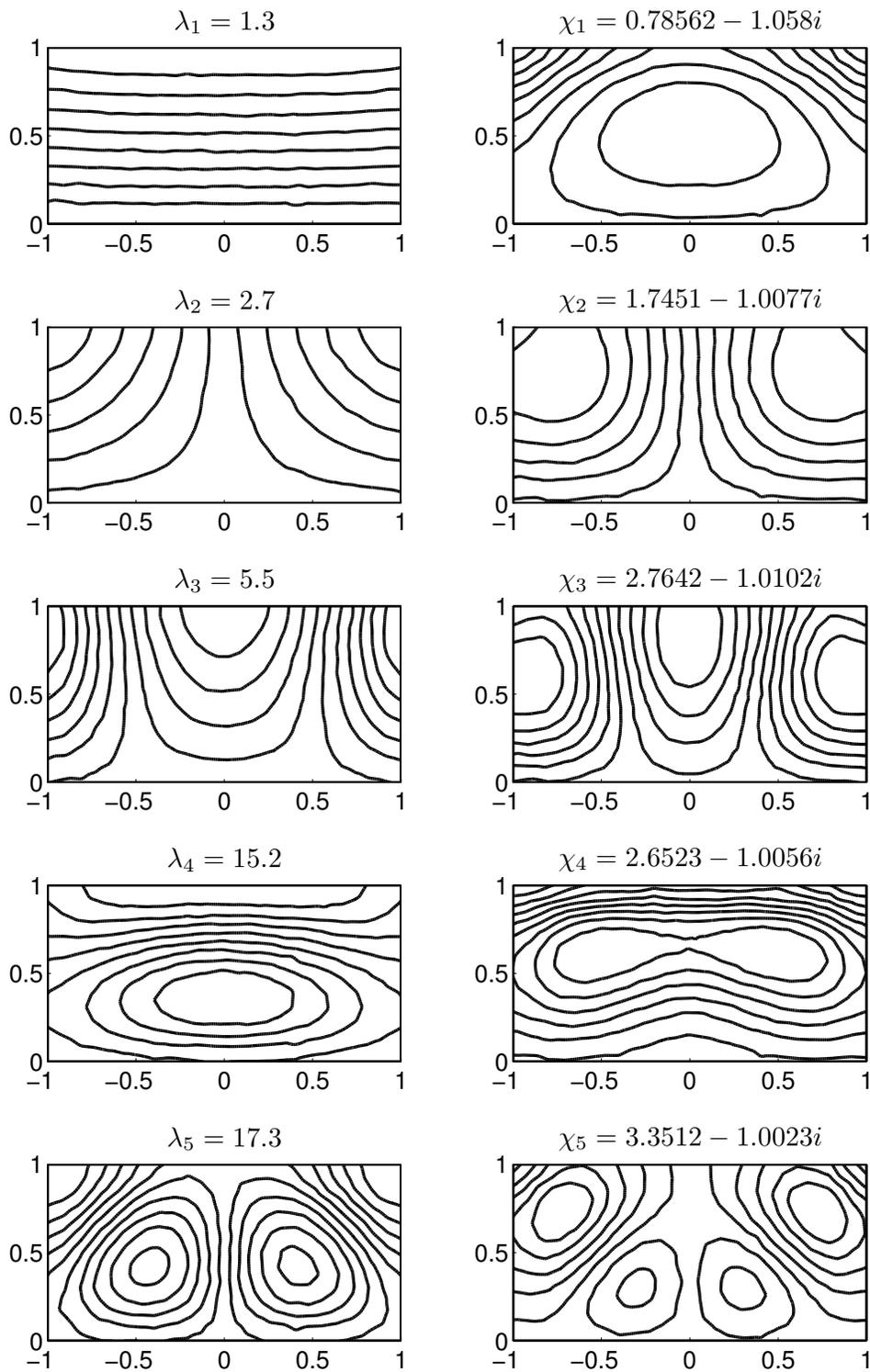


Рис. 39. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для волновода прямоугольного поперечного сечения, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 664$  и соответствующих  $\lambda$ .

## § 5. Программный комплекс

Предложенные методы и алгоритмы реализованы в виде комплекса программ в системе MatLab, состоящего из трех частей. Первая часть служит для поиска вытекающих волн в общей задаче ( $A$ ), с. 34, о собственных волнах волновода в однородной среде и в общей задаче ( $C$ ), с. 40, о собственных волнах волновода в полупространстве; вторая — для численного решения задачи ( $B$ ), с. 37, о поверхностных волнах волновода в однородной среде и задачи ( $D$ ), с. 41, о поверхностных волнах волновода в полупространстве; третья — для численного решения задачи задачи ( $E$ ), с. 42, о поверхностных волнах волновода в плоско-слоистой среде. Приведем список программ каждой части комплекса с указанием иерархии их вызова.

Комплекс программ для поиска вытекающих волн волноводов, находящихся в однородной среде (задача ( $A$ ), с. 34) и полупространстве (задача ( $C$ ), с. 40) состоит из следующих функций.

CurvesConstrFreeSpaceLeaky (CurvesConstrHalfSpaceLeaky)

1. Triangulator
2. RefrIndDescr
3. NeumaierMethod
  - 1) TargetFun
    - a. AFillFreeSpace (AFillHalfSpace)
      - a) FreeSpaceKernelDiag (HalfSpaceKernelDiag)
      - b) FreeSpaceKernel (HalfSpaceKernel)
4. LambdaSearch

Схема комплекса программ для решения задач ( $B$ ), с. 37, ( $D$ ), с. 41 имеет следующий вид.

CurvesConstrFreeSpaceSurf (CurvesConstrHalfSpaceSurf)

1. Triangulator
2. RefrIndDescr
3. AFillFreeSpace (AFillHalfSpace)
  - 1) FreeSpaceKernelDiag (HalfSpaceKernelDiag)
  - 2) FreeSpaceKernel (HalfSpaceKernel)

#### 4. LambdaSearch

Схема комплекса программ для решения задачи ( $E$ ), с. 42.

CurvesConstrLayeredMediaSurf

1. Triangulator
2. RefrIndDescr
3. AFillFreeSpace
  - 1) FreeSpaceKernelDiag
  - 2) FreeSpaceKernel
4. LambdaSearch
  - 1) LambdaSearchFsolve
    - a. AFillLayeredMedia
      - a) FreeSpaceKernelDiag
      - b) FreeSpaceKernel
      - c) GreenFunIntDiag
      - d) GreenFunInt

Отметим, что программы `Triangulator`, `RefDescrInd` и программы, имена которых начинаются с идентификатора `AFill`, являются аналогичными для всех комплексов. С помощью программы `Triangulator` производится триангуляция области интегрирования. Функция `RefrDescrInd` описывает показатель преломления волновода. Программы с префиксом `AFill` предназначены для заполнения матриц  $A$  в соответствующих случаях. Приведем подробное описание функций комплекса программ `CurvesConstrLayeredMediaSurf`. В остальных двух комплексах соответствующие функции аналогичны функциям этого комплекса.

**1. Триангуляция области  $\Omega$ .** Для триангуляции области поперечного сечения волновода предназначена программа `Triangulator`. При ее создании были использованы рекомендации Р.З. Даутова [19]. Работа программы основывается на применении функций пакета `PDE Toolbox` системы `MatLab`. Функция `initmesh` позволяет строить треугольные сетки для достаточно сложных областей. В качестве одного

из входных параметров в функцию подается имя файла, описывающего геометрию области  $\Omega$ . Пусть этот файл называется `GeomDescr`.

Перечислим требования, которым должна удовлетворять функция `GeomDescr`, обусловленные особенностями функции `initmesh`. Поперечное сечение волновода может представлять собой многосвязную область, состоящую из непересекающихся ограниченных областей:  $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ . Односвязные области  $\Omega_i$  и  $\Omega_k$  могут иметь общий участок границы. Области должны быть пронумерованы. Номер области  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  полагается равным нулю. Границы областей  $\Omega_i$  состоят из сегментов  $\partial\Omega_i = \bigcup_{j=n_i}^{m_i} \Gamma_j$ . Сегменты  $\Gamma_j$  не могут пересекаться, а могут иметь лишь общие конечные точки. Замкнутые сегменты не допускаются. Таким образом, контур  $\Gamma = \partial\Omega$  может состоять минимум из двух сегментов. Границы малых по размеру областей (по сравнению с остальными) рекомендуется разбивать на три и более частей. Каждый сегмент задается параметрически:

$$x_1 = x_1(s), \quad x_2 = x_2(s), \quad s \in [s_0, s_1].$$

Кроме того, при написании функции `GeomDescr` предусматривается возможность ее вызова одним из трех следующих способов.

1) `ne = GeomDescr`

Функция вызывается без параметров, на выход подается значение `ne`, равное количеству сегментов контура.

2) `d = GeomDescr(bs)`

Входным параметром `bs` является порядковый номер сегмента границы. Возвращаемым результатом является вектор столбец с компонентами:

- $s_0$  – начальное значение переменной  $s$ ;
- $s_1$  – конечное значение переменной  $s$ ;

- номер области, остающейся слева от сегмента при изменении значений переменной  $s$  от начального к конечному;
- номер области, остающейся справа от сегмента при изменении значений переменной  $s$  от начального к конечному.

3)  $[x1, x2] = \text{GeomDescr}(bs, s)$

Входной параметр  $bs$  определяет номера сегментов, а  $s$  — значения переменной  $s$ , для которых вычисляются декартовы координаты точек соответствующих сегментов. Параметр  $s$  представляет собой прямоугольную матрицу столбцами которой являются векторы значений переменной  $s$ .

Если  $s$  является вектором и задает один сегмент контура, параметр  $bs$  может быть скаляром, значение которого равно порядковому номеру этого сегмента.

Являясь вектором, параметр  $s$  может задавать и несколько сегментов. Тогда значения для разных сегментов будут выстроены в один столбец. В этом случае на соответствующих позициях вектора  $bs$  будут стоять номера сегментов контура. Приведем пример. Пусть в векторе  $s$  находятся 20 элементов. Первые 10 отвечают сегменту под номером  $j$ , следующие 10 — сегменту под номером  $k$ . Тогда вектор  $bs$  будет состоять из 20 элементов. А именно, первые 10 будут равны  $j$ , следующие 10 будут равны  $k$ .

Если  $s$  — матрица, то размерности  $s$  и  $bs$  должны совпадать. Уточним, какие значения должны содержаться в матрице  $bs$ . Если  $j$ -ый столбец матрицы  $s$  задает значения переменной  $s$  для  $k$ -го сегмента, то  $j$ -ый столбец матрицы  $bs$  должен состоять из чисел, равных  $k$ .

В качестве результата функция возвращает две прямоугольные матрицы  $x1$  и  $x2$ , размерности которых равны размерности мат-

рицы  $\mathbf{s}$ . Столбцами этих матриц являются координаты  $x_1$  и  $x_2$  точек соответствующих сегментов контура.

В качестве примера функции `GeomDescr`, написанной по описанным выше правилам, представим листинг функции `ThreeCircle`. Эта функция задает область  $\Omega_{tc} = \bigcup_{k=1}^3 B_k$ , состоящую из трех касающихся друг друга кругов единичного радиуса. Каждая окружность  $\partial B_k = \bigcup_{j=4*(k-1)+1}^{4k} \Gamma_j$  разделена на четыре равные части. Сегменты окружностей задаются в полярной системе координат. Для  $j$ -го сегмента окружности  $\partial B_1$  отрезок изменения переменной  $s$  имеет вид

$$\Delta_j = [(j - 1)\pi/2, j\pi/2], \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Остальные сегменты имеют аналогичную параметризацию. Используемая в тексте программы функция `find` возвращает индексы ненулевых элементов.

```
function [x, y] = ThreeCircle(bs, s)
% ThreeCircle Geometry File defining the geometry of domain
% which consists of three circles.
% ne = ThreeCircle gives the number of boundary segment
%
% d = ThreeCircle(bs) gives a matrix with one column for each
% boundary segment
% specified in bs.
% Row 1 contains the start parameter value.
% Row 2 contains the end parameter value.
% Row 3 contains the number of the left hand region.
% Row 4 contains the number of the right hand region.
%
% [X, Y] = ThreeCircle(bs, s) gives coordinates of boundary points.
% bs specifies the boundary segments and s the corresponding
% parameter values.
% bs may be a scalar.
nbs = 12;
r = 1;
```

```

xc = [1, 0, -1]; % x-coordinates of circles' centers
yc = [-1/sqrt(3), 2/sqrt(3), -1/sqrt(3)]; % y-coordinates of circles'
                                         % centers

if nargin == 0
    x = nbs;
    return
end
% parameters for the first circle
d1 = [ 0  pi/2  pi  3*pi/2
      pi/2  pi  3*pi/2  2*pi
      1  1  1  1
      0  0  0  0  ];
% parameters for the second circle
d2 = [ 0  pi/2  pi  3*pi/2
      pi/2  pi  3*pi/2  2*pi
      2  2  2  2
      0  0  0  0  ];
% parameters for the third circle
d3 = [ 0  pi/2  pi  3*pi/2
      pi/2  pi  3*pi/2  2*pi
      3  3  3  3
      0  0  0  0  ];

d1 = [d1 d2 d3];

if nargin == 1
    x = dl(:, bs);
    return
end

x = zeros(size(s));
y = zeros(size(s));
[m, n] = size(bs);
if m == 1 & n == 1,
    bs = bs*ones(size(s)); % expand bs
elseif m ~= size(s,1) | n ~= size(s,2),
    error('bs must be scalar or of same size as s');
end

```

```

if ~isempty(s),
    for k = 1:3
        for j = (k-1)*4+1:k*4
            ind = find(bs == j);
            if ~isempty(ind)
                x(ind)=r*cos(s(ind)) + xc(k);
                y(ind)=r*sin(s(ind)) + yc(k);
            end
        end
    end
end
end
end

```

Сделаем одно замечание по поводу параметризации сегментов. В отношении построения сеток наиболее удачным является выбор в качестве  $s$  параметра длины дуги сегмента (или пропорционального ему параметра, как например, выбор полярного угла в случае окружности). Однако, такой выбор не всегда осуществим практически. В этом случае для равномерного распределения точек на сегменте можно использовать функцию `pdearcl`. Ее вызов выглядит так.

```
ss = pdearcl(s,xy,l,s0,s1).
```

Функция имеет следующие входные и выходные параметры:

- $\mathbf{s}$  — вектор-строка с монотонно возрастающими значениями переменной  $s$  параметрического задания кривой;
- $\mathbf{xy}$  — матрица, состоящая из двух строк, элементами которых являются соответствующие декартовы координаты точек этой кривой;
- функция возвращает значения параметра  $\mathbf{ss}$ , которые соответствуют длине дуги, определенной в  $\mathbf{l}$ ;
- $\mathbf{s0}$  и  $\mathbf{s1}$  начальное и конечное значение переменной  $s$ , соответственно.

Теперь представим синтаксис вызова функции `initmesh`, которая проводит триангуляция области, заданной файлом `GeomDescr`.

```
[p, e, t] = initmesh('GeomDescr', 'Hmax', Hmax).
```

Здесь `Hmax` это значение параметра  $h$  (максимальная длина стороны треугольника в триангуляции  $\Omega_h$ ).

Укажем каким способом представляется информация о полученной сетке. Пусть количество узлов сетки равно  $N_p$ , количество треугольников —  $N_t$ , а количество ребер, попавших на границу, равно  $N_e$ . В качестве выходных параметров мы получаем следующие матрицы.

- В матрице `p` размера  $2 \times N_p$  хранятся координаты узлов сетки. В  $j$ -ом столбце матрицы `p` находятся координаты  $j$ -ой точки.
- В матрице `e` размера  $7 \times N_e$  располагается информация о ребрах, которые попали на границы областей. Точнее, в `e(1:2,k)` стоят номера вершин ребра с номером  $k$ ; в `e(3:4,k)` — соответствующие им значения параметра  $s$ ; в `e(5,k)` — номер сегмента, которому принадлежит ребро, а в `e(6:7,k)` — номера подобластей слева и справа от ребра, если следовать параметризации.
- В матрице `t` размера  $3 \times N_t$  хранятся номера вершин треугольников в порядке обхода против часовой стрелки и метка области, в которую попал треугольник. А именно, в `t(1:3,j)` стоят номера точек, являющихся вершинами  $j$ -ого треугольника, а в `t(4,j)` — номер подобласти.

Полученную сетку позволяет визуализировать функция `pdemesh`. Вызвать ее можно следующим образом:

```
pdemesh(p, e, t).
```

Пример триангуляции для функции `ThreeCircle` приведен на рис. 40.  
Функция

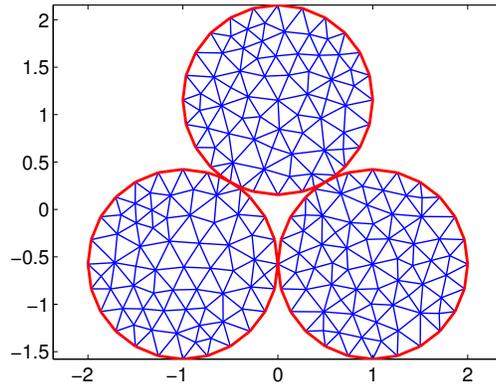


Рис. 40. Триангуляция области  $\Omega$ , состоящей из трех касающихся друг друга кругов единичного радиуса при  $N_t = 376$ ,  $N_p = 231$  и  $H_{max} = 0.3$ .

`q = pdetriq(p, t)`

дает возможность вычислить качество треугольников по формуле

$$q = \frac{4S\sqrt{3}}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}.$$

Здесь  $S$  — площадь треугольника,  $h_i$  — длина стороны треугольника. Если для выбранного треугольника  $q = 1$ , то треугольник равносторонний. Считается, что если  $q > 0.6$ , то качество треугольника приемлемое.

Для улучшения качества сетки можно воспользоваться функцией

`p1 = jigglemesh(p, e, t, 'iter', MaxIter)`,

которая возвращает набор точек с измененными координатами. Каждая точка, расположенная не на границе области, перемещается к центру масс многоугольника, образованного смежными треугольниками. Параметр `MaxIter` задает максимальное количество итераций данного метода.

Функция

`[p1, e1, t1] = refinemesh(GeomDescr, p, e, t)`

дает возможность увеличить количество треугольников в четыре раза. Для внутренних треугольников новые треугольники получаются путем соединения середин сторон.

После того как построена сетка, удовлетворяющая заданным свойствам, матрицы  $p$ ,  $e$ ,  $t$  необходимо сохранить. Синтаксис функции, используемой для этой цели, имеет вид:

```
save(fileName, 'p', 'e', 't').
```

Строка `fileName` задает имя файла, в котором будут сохранены значения переменных  $p$ ,  $e$ ,  $t$ .

Приведем текст программы `Triangulator`, которая строит и сохраняет в отдельные файлы набор треугольных сеток для области, описанной в файле `ThreeCircle`. Каждая сетка определяется соответствующим параметром `hmax`. Имя файла для каждой сетки задается командой

```
TriangName=['ThreeCircleTriangNt', num2str(size(t,2)), '.mat'];
```

Она формирует строку, состоящую из слова `'ThreeCircleTriangNt'`, числа элементов триангуляции и расширения файла `'.mat'`. Функция `num2str` преобразует числовое значение в символьное.

```
% Triangulator creates triangular meshes with different maximal
% sides for geometry described in ThreeCircle
MaxIter = 20;
for Hmax = [0.1:0.05:0.5]
    [p, e, t] = initmesh('Circle', 'Jiggle', 'off', 'hmax', Hmax);
    p1 = jigglemesh(p,e,t, 'iter',MaxIter);
    p = p1;
    % produces triangulation name marked by number of triangulation
    TriangName = ['ThreeCircleTriangNt', num2str(size(t,2)), '.mat'];
    save(TriangName, 'p', 'e', 't');
end
```

**2. Описание показателя преломления волновода.** Показатель преломления волновода  $n = n(x)$ ,  $x \in \Omega$ , описывается функцией

`RefIndexDescr`. В каждой области может быть задан свой закон изменения показателя преломления. Поскольку значения функции вычисляются в центрах масс треугольников, то для определения принадлежности точки к какой-либо области можно использовать метку соответствующего треугольника.

Приведем пример функции `RefIndexDescr`, написанной, в соответствии с этими рекомендациям. Эта функция называется `n` и задает значения показателя преломления в области  $\Omega_{tc}$ . Геометрия области  $\Omega_{tc}$  описана в файле `ThreeCircle` (см. первый пункт). В каждом из трех кругов  $B_k$  функция  $n = n(x)$  имеет вид

$$n^2(r) = n_+^2 \left( 1 - \frac{n_+^2 - n_\infty^2}{n_+^2} r^{p_k} \right), \quad k = 1, 2, 3.$$

Входными параметрами являются:

- `KsiK` — матрица размера  $2 \times N_p$ ,  $j$ -ый столбец которой содержит координаты центра тяжести  $j$ -ого треугольника;
- `t` — матрица размера  $2 \times N_t$ , описывающая треугольники сетки;
- `nPlus` — значение константы  $n_+$ ;
- `nInf` — значение константы  $n_\infty$ .

Приведем листинг функции `n`.

```
function RefrInd = n(KsiK, t, nPlus, nInf)
% n returns values of refractive index in triangles' barycenters
RefrInd = zeros(1, size(t,2));
pow = [4, 6, 8]; % powers in each domain
xc = [1 + 1e-4, 0, -1 - 1e-4]; % x-coordinate of circles' centers
yc = [-1/sqrt(3), 2/sqrt(3), -1/sqrt(3)]; % y-coordinate of circles'
%                                     centers
rc = sqrt(xc.^2 + yc.^2); % radial coordinates of circles' centers
r = sqrt(KsiK(1,:).^2 + KsiK(2,:).^2); % radial coordinates of
%                                     barycenters
for j = 1:3
    ind = t(4,:) == j; % indexes of corresponding triangles
```

```

    RefrInd(ind) = nPlus - ((r(ind) - rc(j)).^pow(j))*(nPlus - nInf);
end

```

**3. Заполнение матрицы  $A(\sigma, 0)$  с помощью функции `AFillFreeSpace`.** При каждом фиксированном  $\sigma$  процесс поиска собственных значений для волновода, находящегося в плоско-слоистой среде, требует задания начального приближения. В качестве начального приближения выбиралось значение  $\gamma_i(0)$ , то есть решение вспомогательной задачи

$$BA(\sigma, 0)u = \gamma Bu.$$

В этом случае несобственный интеграл в функции Грина равен нулю и мы получаем задачу аналогичную задаче для волновода в однородной среде. Заполнения матрицы  $A(\sigma, 0)$  для поиска начального приближения производится с помощью функции, заполняющей матрицу в случае волновода, находящегося в однородной среде. Опишем эту функцию. Она имеет название `AFillFreeSpace`. В функции описаны следующие глобальные переменные:

```

global A B Nt TriangMes KsiK Ri P

```

Поясним, что они обозначают:

- `A` — матрица  $A$ ;
- `B` — матрица  $B$ ;
- `Nt` — количество треугольников сетки;
- `TriangMes` — вектор, состоящий из значений площадей треугольников;
- `KsiK` — матрица с координатами центров тяжести треугольников;
- `Ri` — вектор, каждый элемент которого это расстояние от центра тяжести треугольника до ближайшей из его сторон;

- $P$  — вектор значений функции  $p^2$  в центрах тяжести треугольников.

Для экономии памяти переменная  $A$  является глобальной. Приведем листинг программы `AFillFreeSpace`.

```
% AFillFreeSpace fills matrix A for sigma
function AFillFreeSpace(sigma)
% declaration of global variables
global A B Nt TriangMes KsiK Ri P
% diagonal elements
ajj = FreeSpaceKernelDiag(sigma, Ri, P, TriangMes);
%nondiagonal elements
for j = 1:Nt
    KsiJ = KsiK(:,j);
    A(j, j) = ajj(j);
    temp = FreeSpaceKernel(sigma, KsiJ, KsiK(:,j+1:end), P(j:end));
    A(j+1:end, j) = temp*TriangMes(j);
    A(j, j+1:end) = temp.*TriangMes(j+1:end);
    A(j, :) = B(j, j)*A(j, :);
end;
```

Опишем функции, использующиеся в работе `AFillFreeSpace`. С целью экономии времени вычислений, код программ в системе `MatLab` следует писать так, чтобы минимизировать количество циклов и вычислять значения для всех элементов вектора одновременно. Этот процесс называется векторизацией вычислений. Таким образом, заполнение матрицы следует производить построчно. Однако, принимая во внимание симметрию ядра интегрального оператора можно сократить количество вычислений функции ядра в два раза, так как

$$p(\xi_i)p(\xi_j)K_0(\sigma|\xi_i - \xi_j|) = p(\xi_j)p(\xi_i)K_0(\sigma|\xi_j - \xi_i|).$$

Для вычисления значений ядра интегрального оператора для диагональных и внедиагональных элементов предназначены функции `FreeSpaceKernelDiag` и `FreeSpaceKernel`, соответственно. Функция `FreeSpaceKernelDiag` возвращает значения всех диагональных элементов. Ее входными параметрами являются: `sigma`, `Ri`, `P`

и `TriangMes`. Функция `FreeSpaceKernelDiag` вызывается для вычисления ядер элементов  $A(j, j+1:end)$  и  $A(j+1:end, j)$  матрицы. Входными параметрами этой функции являются: `sigma`, `KsiJ`, `KsiK`, `P`. Приведем соответствующие листинги программ. Листинг программы `FreeSpaceKernelDiag`:

```
% FreeSpaceKernelDiag evaluates diagonal elements of matrix A
% with lambda=0
function KernelValues = FreeSpaceKernelDiag(sigma, Ri, P, TriangMes)
KernelValues = (1/(2*pi))*(P.^2).*((pi*Ri.^2)/2 - log(Ri).*TriangMes ...
    - log(sigma*0.5772156649/2).*TriangMes);
end
```

Листинг программы `FreeSpaceKernel`:

```
% FreeSpaceKernel evaluates nondiagonal elements of matrix A
% with lambda=0
function KernelValues = FreeSpaceKernel(sigma, KsiJ, KsiK, P)
KernelValues = 1i/4 * P(1).*P(2:end).*besselh(0, 1, 1i*sigma*...
    sqrt((KsiJ(1) - KsiK(1,:)).^2 + (KsiJ(2) - KsiK(2,:)).^2));
end
```

После того как матрица  $A(\sigma, 0)$  сформирована вызывается стандартная функция `eigs`, которая позволяет находить заданное количество наибольших собственных значений и соответствующих собственных векторов обобщенной алгебраической задачи на собственные значения

$$Au = \mu Bv.$$

Синтаксис ее вызова имеет вид:

```
[V,D] = eigs(A, B, k).
```

Параметр `k` задает количество возвращаемых собственных значений и векторов. Результатом являются матрицы `V` и `D`. На диагонали матрицы `V` стоят собственные значения, а столбцами матрицы `D` служат соответствующие собственные векторы.

**4. Поиск собственных значений  $\lambda$  с помощью функции `LambdaSearch`.** В качестве результата функция `LambdaSearch` возвращает заданное количество собственных значений  $\lambda$  задачи

$$BA(\sigma, \lambda)u = \lambda Bu.$$

Входными параметрами являются:

- `sigma` — значение  $\sigma$ ;
- `lambda0` — вектор, состоящий из начальных приближений  $\gamma_i(0)$ ;
- `EigsCount` — количество возвращаемых собственных значений.

Для поиска каждого собственного значения в отдельности с помощью стандартной функции `fsolve` решается нелинейная задача

$$\gamma_i(\lambda) - \lambda = 0, \quad i = 0, 1, \dots, L.$$

Синтаксис ее вызова имеет вид:

```
x = fsolve(@(x)fun(x), x0).
```

На вход в функцию `fsolve` подаются следующие параметры:

- `@(x)fun(x)` — указатель на функцию, реализующую нелинейное уравнение, с уточнением по какой переменной решается задача;
- `x0` — начальное приближение.

Заметим, что нелинейное уравнение должно быть записано так, чтобы в его правой части стоял нуль. Приведем листинг функции `LambdaSearch`.

```
% LambdaSearch returns eigenvalues lambda with initial approximation
% lambda0
function Lambda = LambdaSearch(sigma, lambda0, EigsCount)
Lambda = zeros(1, EigsCount);
for EigNumber = 1:EigsCount
    %solves nonlinear problem: gamma_i(lambda)-lambda = 0
    Lambda(EigNumber) = fsolve(@(lambda)LambdaSearchFsolve(lambda, ...
        sigma, EigNumber), lambda0(EigNumber))
end end
```

Опишем функцию `LambdaSearchFsolve`, указатель на которую является одним из входных параметров функции `LambdaSearch`. Для заданного номера собственного числа и значений  $\sigma$  и  $\lambda$  функция `LambdaSearchFsolve` находит значение выражения  $\gamma_i(\lambda) - \lambda$ . Приведем листинг функции `LambdaSearchFsolve`.

```
% LambdaSearchFsolve evaluates expression: gamma_i(lambda) - lambda
function DeltaLambda = LambdaSearchFsolve(lambda, sigma, EigNumber)
global A B EigsCount
AFillLayeredMedia(lambda, sigma); %fills matrix A with sigma and lambda
mu = eigs(A, B, EigsCount); %returnes eigenvalues gamma_i(lambda)
DeltaLambda = 1./mu(EigNumber) - lambda;
end
```

Для поиска собственных значений вспомогательной задачи

$$BA(\sigma, \lambda)u = \gamma Bu$$

предварительно необходимо заполнить матрицу  $A(\sigma, \lambda)$ . Для этого предназначена функция `AFillLayeredMedia`. Ее входными параметрами являются `sigma` и `lambda`. Приведем листинг функции `AFillLayeredMedia`.

```
% AFillLayeredMedia fills matrix A for sigma and lambda
function AFillLayeredMedia(lambda, sigma)
% declaration of global variables
global A B Ri P Nt KsiJ KsiK j TriangMes n2 n3
for j = 1:Nt
    %diagonal elements
    KsiJ = KsiK(:,j);
    diag1j = FreeSpaceKernelDiag(sigma, Ri(j), TriangMes(j));
    diag2j = (1/(2*pi))*quadgk(@(teta)GreenFunIntDiag(teta,...
        sigma, lambda, KsiJ, n2, n3), 0, Inf).*TriangMes(j);
    A(j, j) = P(j)^2.*(diag1j - diag2j);
    %nondiagonal elements
    temp1 = FreeSpaceKernel(sigma, KsiJ, KsiK(:,j+1:end));
    temp2 = zeros(1,Nt-j);
    for k = j+1:Nt
```

```

        temp2(k - j) = (1/(2*pi))*quadgk(@(teta)GreenFunInt(teta,...
        sigma, lambda, KsiJ, KsiK(:,k), n2, n3), 0, Inf);
    end
    temp = (temp1 - temp2).* P(j).*P(j+1:end);
    A(j+1:end, j) = temp*TriangMes(j);
    A(j, j+1:end) = temp.*TriangMes(j+1:end);
    A(j, :) = B(j, j)*A(j, :);
end;
end

```

Функция Грина для волновода, находящегося в плоскостой среде состоит из суммы двух слагаемых. При вычислении первого слагаемого использовались описанные в предыдущем пункте функции `FreeSpaceKernelDiag` и `FreeSpaceKernel`. Значения несобственного интеграла во втором слагаемом вычислялось с помощью стандартной функции `quadgk`, которая реализует метод адаптивных квадратур Гаусса—Кронрода. Синтаксис ее вызова выглядит так:

```
q = quadgk(fun, a, b).
```

Здесь `fun` — указатель на подынтегральную функцию, `a` и `b` — границы интегрирования. В частности параметры `a` и `b` могут быть равны бесконечности.

Для вычисления подынтегральных функций для диагональных и внедиагональных элементов матрицы предназначены программы `GreenFunIntDiag` и `GreenFunInt`, соответственно. Приведем листинги этих программ. Листинг функции `GreenFunIntDiag` имеет вид:

```

function I = GreenFunIntDiag(teta, sigma, lambda, KsiJ, n2, n3)
alpha = teta.^2 + sigma.^2;
gamma2 = sqrt(alpha);
gamma3 = sqrt(alpha + lambda*(n2 - n3));
I = exp((2*KsiJ(2)).*gamma2).*((gamma3 - gamma2)./(gamma3 +...
gamma2).*gamma2);
end

```

Листинг функции `GreenFunInt` выглядит так:

```

function I = GreenFunInt(teta, sigma, lambda, KsiJ, KsiK, n2, n3)
alpha = teta.^2 + sigma.^2;
gamma2 = sqrt(alpha);
gamma3 = sqrt(alpha + lambda*(n2 - n3));
I = exp((KsiJ(2) + KsiK(2)).*gamma2).*((gamma3 - gamma2)...
    ./(gamma3 + gamma2).*gamma2).*cos(teta.*(KsiJ(1) - KsiK(1)));
end

```

**5. Построение дисперсионных кривых.** Вернемся к описанию программы `CurvesConstrLayeredMediaSurf`. В начале ее работы происходит очищение памяти командной и закрытие окон с графиками. Далее объявляются глобальные переменные и загружается триангуляция области. Затем задаются значения констант  $n_+$ ,  $n_t$  и  $n_\infty$ . Также задается отрезок на оси  $\sigma$  и шаг разбиения. После выделения памяти и вычисления значений необходимых переменных запускается цикл по  $\sigma$ . Для каждого значения  $\sigma$  вычисляются собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$ . В конце строятся графики функций  $\sigma_j = \sigma_j(\lambda)$ , при  $j = 1, \dots, L$ , и происходит сохранение данных в файл. Приведем листинг программы `CurvesConstrLayeredMediaSurf`.

```

%clear workspace, close open figures, clear command line
clear all; close all; clc
% define global variables
global sigma A B Nt b n1 n2 n3 P KsiK Ri TriangMes EigsCount
%load triangulation data
load ThreeCircleTriangNt376.mat p e t
% define initial parameters
n1 = 3; n2 = 2; n3 = 1; %refractive index constants
p(2,:) = p(2,:) - b; b = 3; %moves triangles to bottom half-plane
EigsCount = 10; %number of eigenvalues
SigmaMin = 1.e-3; SigmaMax = 5.0 + SigmaMin; Sigmah = 1;
sigma = SigmaMin:SigmaMax:SigmaMax;
% memory allocation
Nt = size(t, 2); A = zeros(Nt, Nt); d = zeros(3, Nt);
Lambda = zeros(numel(sigma), EigsCount);
KsiK = (p(:,t(1,:)) + p(:,t(2,:)) + p(:,t(3,:)))/3; %barycenters
TriangMes = ((p(1,t(2,:)) - p(1,t(1,:))) * (p(2,t(3,:)) - p(2,t(1,:))))...

```

```

        -(p(1,t(3,:)) - p(1,t(1,:)))...
        .*(p(2,t(2,:)) - p(2,t(1,:)))/2; %triangles' measures
ind = [1 2; 2 3; 3 1];
for j = 1:3 %distances from barycenter to triangle's side
    d(j,:) = abs(((p(2,t(ind(j,1),:)) - p(2,t(ind(j,2),:)))*KsiK(1,:))...
    + (p(1,t(ind(j,2),:)) - p(1,t(ind(j,1),:)))*KsiK(2,:))...
    + p(1,t(ind(j,1),:))*p(2,t(ind(j,2),:)) - p(1,t(ind(j,2),:))...
    .*(p(2,t(ind(j,1),:)))) ./ sqrt((p(1,t(ind(j,2),:)) ...
    - p(1,t(ind(j,1),:))).^2 + (p(2,t(ind(j,2),:)) - ...
    p(2,t(ind(j,1),:))).^2);
end
%minimal distance from barycenter to triangle's side
Ri = min([d(1,:); d(2,:); d(3,:)]);
P = sqrt((n(sqrt(KsiK(1,:).^2 + KsiK(2,:).^2), nPlus, nInf)...
    - nInf)/(nPlus - nInf)); %values of function p
omega = max(TriangMes)^2; %maximal triagle measure
B = sparse(1:Nt, 1:Nt, TriangMes/omega, Nt, Nt); %matrix B
%searching eigenvalues for each sigma
for m = 1:numel(sigma)
    AFillFreeSpace(sigma(m)); %fills values of matrix A
    mu0 = eigs(A, B, EigsCount); %returnes eigenvalues for lambda = 0
    lambda0 = (1./mu0)'; %initial approximation
    %returnes eigenvalues
    Lambda(m,:) = LambdaSearch(sigma(m), lambda0, EigsCount);
end
plot(Lambda, sigma);
save('DispersionCurvesData.mat', 'Lambda', 'sigma');

```

## Приложение

Доказательство теоремы 2.10 базируется на леммах 5.1–5.3 [96]. В монографии [96] рассмотрен более общий, чем в этой теореме, случай многомерных интегральных операторов с полярными ядрами. Сформулируем леммы 5.1–5.3 [96] в виде соответствующих утверждений 1–3 для двумерных операторов, а их доказательство проведем более подробно. Буквой  $c$  будем обозначать константы, не зависящие от  $h$ .

**Утверждение 1.** Пусть кривая  $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ ,

$$\Gamma_{h,-} = \{x \in \Omega : x = y - nt, y \in \Gamma, t \in [0, h]\}, \quad h > 0,$$

есть внутренний пограничный слой толщины  $h$ . Здесь  $n$  — внешняя нормаль к контуру  $\Gamma$  в точке  $y$ . Предположим, что функция  $K(x, y)$  удовлетворяет условию

$$|K(x, y)| \leq b|x - y|^{-\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1, \quad x, y \in \Omega. \quad (1)$$

Тогда

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{h,-}} |K(x, y)| dy \leq c h. \quad (2)$$

Пусть

$$\Gamma_{h,+} = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega : x = y + nt, y \in \Gamma, t \in [0, h]\}, \quad h > 0,$$

есть внешний пограничный слой толщины  $h$ . Предположим, что функция  $K(x, y)$  удовлетворяет условию

$$|K(x, y)| \leq b|x - y|^{-\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1, \quad x, y \in \Omega \cup \Gamma_{h,+}. \quad (3)$$

Тогда

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{h,+}} |K(x, y)| dy \leq c h. \quad (4)$$

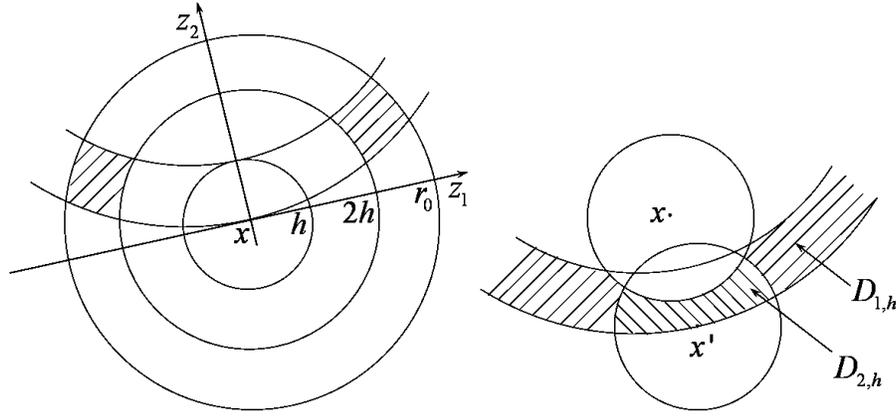


Рис. 41. К доказательству утверждения 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Второе доказывается аналогично. Функция  $K(x, y)$  при  $x = y$  имеет особенность (см. (1)). Выделим ее явно, вычислив интеграл по кругу радиуса  $ah$ :

$$\int_{B(x, ah)} |x - y|^{-\nu} dy = \frac{2\pi}{(2 - \nu)} (ah)^{2-\nu} = ch^{2-\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1.$$

Очевидно имеем

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{h,-}} |K(x, y)| dy \leq \sup_{x \in \Omega} \int_{B(x, ah)} |x - y|^{-\nu} dy + \sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{h,-} \setminus B(x, ah)} |x - y|^{-\nu} dy,$$

Следовательно, для доказательства (2) нужно показать, что

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{h,-} \setminus B(x, ah)} |x - y|^{-\nu} dy \leq ch, \quad 0 < \nu \leq 1, \quad (5)$$

где константа  $c$  не зависит от  $h$ . Обозначим  $x'$  ближайшую к  $x \in \Omega$  точку на  $\Gamma$ . Тогда, для  $y \in \Gamma_{h,-} \setminus B(x, ah)$  имеем  $|x - y| \geq ah$ ,

$$|x - x'| \leq |x - y| + \text{dist}(y, \Gamma) \leq |x - y| + h \leq (1 + a^{-1})|x - y|.$$

Учитывая последнее неравенство, получим

$$|x' - y| \leq |x' - x| + |x - y| \leq (2 + a^{-1})|x - y|.$$

Следовательно,

$$|x - y|^{-\nu} \leq (2 + a^{-1})^{-\nu} |x' - y|^{-\nu}. \quad (6)$$

Разделим область интегрирования в (5) на две подобласти

$$D_{1,h} = \Gamma_{h,-} \setminus [B(x, ah) \cup B(x', ah)], \quad D_{2,h} = [\Gamma_{h,-} \cap B(x', ah)] \setminus B(x, ah).$$

Используя неравенство (6), получим оценку

$$\int_{D_{1,h}} |x - y|^{-\nu} dy \leq (2 + a^{-1})^{-\nu} \int_{\Gamma_{h,-} \setminus B(x', ah)} |x' - y|^{-\nu} dy, \quad x' \in \Gamma, x \in \Omega. \quad (7)$$

Кроме того, имеем

$$\int_{D_{2,h}} |x - y|^{-\nu} dy \leq (ah)^{-\nu} \int_{D_{2,h}} dy \leq (ah)^{-\nu} \int_{B(x', ah)} dy = ch^{2-\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1.$$

В дальнейшем знак «'» у  $x'$  будем опускать. Оценим теперь интеграл в правой части (7)

$$\int_{\Gamma_{h,-} \setminus B(x, ah)} |x - y|^{-\nu} dy \leq \int_{\Gamma_{h,-}^x} |x - y|^{-\nu} dy + \int_{\Gamma_h \setminus B(x, r_0)} |x - y|^{-\nu} dy,$$

где

$$\Gamma_{h,-}^x = \{y \in \Omega : \text{dist}(y, \Gamma) < h, \quad 2h < |x - y| < r_0\},$$

$r_0$  — константа, определяемая условием 1, с. 32. При определении  $\Gamma_{h,-}^x$  было зафиксировано  $a = 2$ . Подынтегральная функция во втором интеграле не имеет особенностей, следовательно, ограничена. И так как область интегрирования имеет ширину  $h$ , то

$$\int_{\Gamma_{h,-} \setminus B(x, r_0)} |x - y|^{-\nu} dy \leq ch.$$

Осталось показать, что

$$\int_{\Gamma_{h,-}^x} |x - y|^{-\nu} dy \leq ch.$$

Обозначим через  $y'$  ближайшую к  $y$  точку на  $\Gamma$ . При  $x \in \Gamma$ ,  $y \in \Gamma_{h,-}^x$  справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|x - y'| \leq |x - y| + |y - y'| \leq |x - y| + h \leq 2|x - y|.$$

Поэтому, переходя от интеграла по области к повторному, получим оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{h,-}^x} |x - y|^{-\nu} dy &\leq 2^\nu \int_{\Gamma_{h,-}^x} |x - y'(y)|^{-\nu} dy \leq \\ &\leq c'h \int_{\Gamma \cap [B(x, r_0) \setminus B(x, h)]} |x - y'|^{-\nu} dl(y'). \end{aligned}$$

Контур  $\Gamma$  удовлетворяет условиям 1–3, с. 32. Положим

$$c_0 = \max_{z_1 \in [0, r_0]} |\varphi'(z_1)|.$$

$$\begin{aligned} &\Gamma \cap [B(x, r_0) \setminus B(x, h)] = \\ &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : z_2 = \varphi(z_1), h^2 \leq z_1^2 + (\varphi(z_1))^2 \leq r_0^2\} \subset \\ &\subset \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : z_2 = \varphi(z_1), \frac{h}{\sqrt{1 + c_0^2}} < |z_1| < r_0\}. \end{aligned}$$

Для  $y' \in \Gamma \cap B(x, r_0)$  справедлива следующая оценка

$$|x - y'| = \sqrt{z_1^2 + \varphi^2(z_1)} \geq |z_1|.$$

Дифференциал дуги  $dl(y')$  оценивается так

$$dl(y') = \sqrt{1 + \varphi'^2(z_1)} dz_1 \leq \sqrt{1 + c_0^2} dz_1.$$

Используя две последние оценки, окончательно получим

$$\int_{\Gamma_{h,-}^x} |x - y|^{-\nu} dy \leq ch \sqrt{1 + c_0^2} \int_{\{z_1 \in \mathbb{R} : h/\sqrt{1+c_0^2} < |z_1| < r_0\}} |z_1|^{-\nu} dz_1 \leq ch. \quad \square$$

**Утверждение 2.** Пусть  $T \in L(E, E)$  и  $T_h \in L(E_h, E_h)$  — операторы, определяемые по формулам (2), с. 81, и (7), с. 83, соответственно. Тогда  $T_h \dashrightarrow T$  компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что если выполнены условия

$$\|T_h p_h u - p_h T u\|_{E_h} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad \forall u \in E, \quad (8)$$

$$\|T_h\|_{E_h} < c, \quad h \in (0, \bar{h}), \quad (9)$$

то  $T_h \dashrightarrow T$ .

Действительно, пусть  $u_h \dashrightarrow u$ . Докажем, что  $T_h u_h \dashrightarrow T u$ . Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|T_h u_h - p_h T u\|_{E_h} &\leq \|T_h u_h - T_h p_h u\|_{E_h} + \|T_h p_h u - p_h T u\|_{E_h} \leq \\ &\leq \|T_h\|_{E_h} \|u_h - p_h u\|_{E_h} + \|T_h p_h u - p_h T u\|_{E_h}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как  $\|T_h\|_{E_h} < c$ ,  $h \in (0, \bar{h})$ , и  $\|u_h - p_h u\|_{E_h} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то

$$\|T_h\|_{E_h} \|u_h - p_h u\|_{E_h} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (11)$$

Используя условие (8), получаем  $T_h \dashrightarrow T$ .

В соответствии с только что доказанным свойством и определением дискретной компактной сходимости достаточно показать, что существует такое  $\bar{h} > 0$ , что

$$\|T_h\|_{E_h} < c, \quad h \in (0, \bar{h}); \quad (12)$$

$$\|T_h p_h u - p_h T u\|_{E_h} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0 \quad \forall u \in E; \quad (13)$$

$$\|u_h\|_{E_h} \leq 1, \quad 0 < h < \bar{h} \implies (T_h u_h) \text{ дискретно компактно.} \quad (14)$$

Докажем неравенство (12). Имеем

$$\begin{aligned} \|T_h\|_{E_h} &\leq \sup_{\|u_h\| \leq 1} \left( \max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) u_h(\xi_{j,h}) dy \right| \right) \leq \\ &\leq \sup_{\|u_h\| \leq 1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h}} |K(\xi_{i,h}, y)| |u_h(\xi_{j,h})| dy \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h}} |K(\xi_{i,h}, y)| dy \leq \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega_h} |K(x, y)| dy. \end{aligned}$$

С помощью утверждения 1 легко проверить, что

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega_h} |K(x, y)| dy \rightarrow \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)| dy = \|T\|_E, \quad h \rightarrow 0.$$

Оператор  $T$  ограничен, следовательно, существует такое  $\bar{h}$ , что выполняется (12).

Далее, для любой функции  $u \in E$  имеем

$$\begin{aligned} & \|p_h T u - T_h p_h u\|_{E_h} = \\ & = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \int_{\Omega} K(\xi_{i,h}, y) u(y) dy - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) u(\xi_{j,h}) dy \right| \leq \\ & \leq \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h}} K(x, y) u(\xi_{j,h}) dy \right| \leq \\ & \leq \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega'_h} K(x, y) u(y) dy + \int_{\Omega \setminus \Omega_h} K(x, y) u(y) dy - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y) u(\xi_{j,h}) dy - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h} \setminus \Omega'_{j,h}} K(x, y) u(\xi_{j,h}) dy \right| \leq \sup_{x \in \Omega} \left| \sum_{j=1}^N \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y) [u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| + \\ & + \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_h} K(x, y) u(y) dy \right| + \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega_h \setminus \Omega'_h} K(x, y) u(\xi_{j,h}) dy \right|. \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega'_{j,h} = \Omega_{j,h} \cap \Omega$  (для невыпуклых областей треугольники, находящиеся на границе, могут целиком не принадлежать  $\Omega$ ). Очевидно, что

$$\Omega = \Omega'_h \cup (\Omega \setminus \Omega_h),$$

где  $\Omega'_h = \sum_{j=1}^N \Omega'_{j,h}$ . Кроме того,  $\Omega \setminus \Omega_h \subset \Gamma_{ch^2,-}$  и  $\Omega_h \setminus \Omega'_h \subset \Gamma_{ch^2,+}$  (см. [20], с. 115).

Известно [96], с. 72, что для любой функции  $u \in E$  первое слагаемое в правой части последней оценки стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ :

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \sum_{j=1}^N \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y)[u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Кроме того, если дополнительно предположить, что  $u \in C^{2,0}$ , то скорость этой сходимости имеет второй порядок по  $h$  (см. ниже доказательство утверждения 3).

Кривая  $\Gamma$  принадлежит классу  $C^{1,\alpha}$ . Ядро  $K(x, y)$  слабо полярно. Поэтому, используя утверждение 1, имеем

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_h} K(x, y)u(y) dy \right| \leq \sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{ch^2,-}} |K(x, y)| dy \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq ch^2, \quad (16)$$

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega_h \setminus \Omega'_h} K(x, y)u(\xi_{j,h}) dy \right| \leq \sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{ch^2,+}} |K(x, y)| dy \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq ch^2. \quad (17)$$

В оценке (17) используется тот факт, что даже если треугольник для невыпуклой области частично выходит за ее пределы, то при достаточно малом  $h$  его центр масс все равно остается внутри области [20]. Следовательно, (13) выполнено.

Теперь докажем справедливость (14). Для произвольного элемента  $u_h \in E_h$  определим кусочно постоянную функцию  $u^{(h)} \in L_\infty(\Omega)$  по формуле (3), с. 82. Так как  $\|u_h\|_{E_h} \leq 1$ , то  $\|u^{(h)}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq 1$ , при  $h \in (0, \bar{h})$ . Оператор  $T : L_\infty(\Omega) \rightarrow E$  компактный (см. [96], с. 14). Следовательно, семейство  $(Tu^{(h)})$ ,  $h \in (0, \bar{h})$  относительно компактно. Значит из любой последовательности  $Tu^{(h_n)}$ , этого семейства можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $Tu^{(h_{n_k})}$ . Пусть

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} Tu^{(h_{n_k})} = v \in E. \quad (18)$$

Легко проверить, что если семейство элементов  $(u^{(h)})_{h \in (0, \bar{h})} \subset E$  относительно компактно, то семейство  $(p_h u^{(h)})_{h \in (0, \bar{h})}$  дискретно компактно. Действительно, так как семейство  $(u^{(h)})_{h \in (0, \bar{h})} \subset E$  относительно компактно, то из любой последовательности  $(u^{(h_n)})$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $(u^{(h_{n_k})})$  (см., напр., [29], с. 42). Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(h_{n_k})} = u \in E.$$

Очевидно, что

$$\|p_{h_{n_k}} u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} u\|_{E_{h_{n_k}}} \leq \|p_{h_{n_k}}\|_{E_{h_{n_k}}} \|u^{(h_{n_k})} - u\|_E \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Следовательно семейство  $(p_h u^{(h)})_{h \in (0, \bar{h})}$  дискретно компактно. Используя этот факт, получим, что семейство  $p_h T u^{(h)}$  дискретно компактно.

Заметим, что  $p_h u^{(h)} = u_h$ , значит,

$$\begin{aligned} & \|T_{h_{n_k}} u_{h_{n_k}} - p_{h_{n_k}} v\|_{E_{h_{n_k}}} = \\ & = \|T_{h_{n_k}} u_{h_{n_k}} - p_{h_{n_k}} v + p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})}\|_{E_{h_{n_k}}} \leq \\ & \leq \|p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} v\|_{E_{h_{n_k}}} + \|T_{h_{n_k}} p_{h_{n_k}} u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})}\|_{E_{h_{n_k}}}. \end{aligned}$$

В силу (18)

$$\|p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} v\|_{E_{h_{n_k}}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Кроме того, известно [96], с. 73, что для  $u^{(h_{n_k})} \in L_\infty(\Omega)$

$$\|T_{h_{n_k}} p_{h_{n_k}} u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})}\|_{E_{h_{n_k}}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, семейство  $(T_h u_h)$  дискретно компактно.  $\square$

**Утверждение 3.** Пусть  $T \in L(E, E)$ , и  $T_h \in L(E_h, E_h)$  — операторы, определяемые по формулам (2), с. 81, и (7), с. 83, соответственно. Тогда для любой функции  $u \in C^{2,0}(\Omega)$  существует такое число  $\bar{h} > 0$ , что справедлива оценка

$$\|T_h p_h u - p_h T u\|_{E_h} \leq c h^2, \quad h \in (0, \bar{h}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (15)–(17) для доказательства леммы достаточно показать, что для любой функции  $u \in C^{2,0}(\Omega)$  выполняется неравенство

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \sum_{j=1}^N \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y)[u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| \leq ch^2.$$

Используем то, что  $|y - \xi_{j,h}| \leq h$  при  $y \in \Omega'_{j,h}$ . Запишем неравенство Липшица для функции  $u$ :

$$|u(x) - u(y)| \leq c_L |x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (19)$$

Получим

$$\max_{1 \leq j \leq N} \sup_{y \in \Omega'_{j,h}} |u(y) - u(\xi_{j,h})| \leq c_L h. \quad (20)$$

Введем множества индексов

$$N(x) = \{j : 1 \leq j \leq N, \text{dist}(x, \partial\Omega_{j,h}) < h\},$$

$$N(\partial\Omega) = \{j : 1 \leq j \leq N, \text{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_{j,h}) < h\}.$$

Так как в рассматриваемом случае кривая  $\Gamma$  принадлежит  $C^{1,\alpha}$ , а ядро  $K(x, y)$  слабо полярно, то можно использовать утверждение 1. Согласно (2) и (20) имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in N(\partial\Omega)} \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y)[u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| &\leq \\ &\leq c_L h \int_{\Gamma_{2h}} |K(x, y)| dy \leq ch^2. \end{aligned}$$

Используя аналогичные рассуждения, получим, что для суммы с индексами  $j \in N(x)$  справедлива оценка:

$$\left| \sum_{j \in N(x)} \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y)[u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| \leq$$

$$\leq c_L h \int_{B(x, 2h)} |K(x, y)| dy \leq ch^2.$$

Действительно, ядро удовлетворяет условию

$$|K(x, y)| \leq c(1 + |\ln |x - y||). \quad (21)$$

В силу (21)

$$\begin{aligned} \int_{B(x, 2h)} |K(x, y)| dy &\leq c \int_{B(x, 2h)} dy + c \int_{B(x, 2h)} |\ln |x - y|| dy \leq \\ &\leq c(4\pi h^2 + ch). \end{aligned}$$

Теперь оценим оставшуюся часть суммы с индексами

$$j \notin N(x) \cup N(\partial\Omega).$$

Получим

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \sum_{j \notin N(x) \cup N(\partial\Omega)} \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y)[u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| \leq s_h^1 + s_h^2,$$

где

$$s_h^1 = \sup_{x \in \Omega} \sum_{j \notin N(x) \cup N(\partial\Omega)} \int_{\Omega'_{j,h}} |K(x, y)| |u(y) - u(\xi_{j,h}) - (\nabla u(\xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h}))| dy,$$

$$s_h^2 = \sup_{x \in \Omega} \sum_{j \notin N(x) \cup N(\partial\Omega)} \left| \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y) (\nabla u(\xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h})) dy \right|.$$

Так как  $u \in C^{2,0}(\Omega)$ , то для нее справедливо разложение по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$u(x + z) = u(x) + (\nabla u(x), z) + \int_0^1 (1 - t)(D^2 u(x + tz)z, z) dt, \quad (22)$$

где

$$(D^2u(x+z)z, z) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u(x+z)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j.$$

Применяя формулу (22), запишем разложение функции  $u$  в окрестности точки  $\xi_{j,h}$  по степеням  $(y - \xi_{j,h})$ :

$$\begin{aligned} u(y) &= u(\xi_{j,h} + (y - \xi_{j,h})) = u(\xi_{j,h}) + (\nabla u(\xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h})) + \\ &+ \int_0^1 (1-t)(D^2u(\xi_{j,h} + t(y - \xi_{j,h}))(y - \xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h})) dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Оценим  $s_h^1$  при  $y \in \Omega'_{j,h}$ ,  $j \notin N(\partial\Omega)$ . Вследствие (23) имеем

$$\begin{aligned} &|u(y) - u(\xi_{j,h}) - (\nabla u(\xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h}))| = \\ &= \left| \int_0^1 (1-t)(D^2u(\xi_{j,h} + t(y - \xi_{j,h}))(y - \xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h})) dt \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} |D^2u(\xi_{j,h} + t(y - \xi_{j,h}))| |y - \xi_{j,h}|^2 \int_0^1 (1-t) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{l,m=1,2} \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_m}(ty + (1-t)\xi_{j,h}) \right| |y - \xi_{j,h}|^2. \end{aligned}$$

Заметим, что если  $y \in \Omega_{j,h}$ ,  $j \notin N(\partial\Omega)$ , то

$$\frac{1}{2}\rho(y) \leq \rho(ty + (1-t)\xi_{j,h}) \leq 2\rho(y),$$

следовательно, используя оценку второй производной (12) функции  $u$ , получим:

$$s_h^1 \leq ch^2 \sup_{x \in \Omega} \int_{F_h} |K(x, y)| (1 + |\ln \rho(y)|) dy \leq ch^2 \left( \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)| dy + \right.$$

$$+ \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)| |\ln \rho(y)| dy \Big) \leq ch^2.$$

Так как точки коллокации  $\xi_{j,h}$  являются центрами масс треугольников  $\Omega'_{j,h}$ , то

$$\int_{\Omega'_{j,h}} (y - \xi_{j,h}) dy = 0.$$

Следовательно, слагаемое  $s_h^2$  представимо в виде:

$$s_h^2 = \sup_{x \in \Omega} \sum_{j \notin N(x) \cup N(\partial\Omega)} \left| \int_{\Omega'_{j,h}} [K(x, y) - K(x, \xi_{j,h})] (\nabla u(\xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h})) dy \right|.$$

Запишем разложение функции  $K(x, y)$  по формуле Тейлора по переменной  $y$  по степеням  $(y - \xi_{j,h})$ :

$$K(x, y) = K(x, \xi_{j,h}) + \int_0^1 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial K(x, \xi_{j,h} + t(y - \xi_{j,h}))}{\partial y_l} (y_l - \xi_{j,h}^l) dt. \quad (24)$$

Для  $y \in \Omega'_{j,h}$ ,  $j \notin N(x)$  имеем

$$\frac{1}{2}|x - y| \leq |x - (ty + (1-t)\xi_{j,h})| \leq 2|x - y|, \quad t \in (0, 1).$$

Используя разложение (24) и предыдущее неравенство, получим

$$|K(x, y) - K(x, \xi_{j,h})| \leq ch \sum_{i=1}^2 \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{\partial K(x, ty + (1-t)\xi_{j,h})}{\partial y_i} \right| \leq ch|x-y|^{-1}.$$

Окончательно оценка для  $s_h^2$  будет иметь вид:

$$s_h^2 \leq ch^2 \int_{\Omega} |x - y|^{-1} dy \leq ch^2. \quad \square$$

## Литература

1. Боголюбов, А.Н. Расчет оптических волноводов методом конечных разностей [Текст] / А.Н. Боголюбов, И.В. Митина, А.Г. Свешников // Математические модели прикладной электродинамики. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — С. 136–155.
2. Вайникко, Г.М. О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений [Текст] / Г.М. Вайникко, О.О. Карма // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1974. — Т. 14. — № 4. — С. 828–837.
3. Вайникко, Г.М. О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра [Текст] / Г.М. Вайникко, О.О. Карма // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1974. — Т. 14. — № 6. — С. 1393–1408.
4. Васильев, Е.Н. Возбуждение тел вращения [Текст] / Е.Н. Васильев — М.: Радио и связь, 1987. — 272 с.
5. Васильев, Е.Н. Численные методы в задачах расчета диэлектрических волноводов, диэлектрических резонаторов и устройств на их основе [Текст] / Е.Н. Васильев, В.В. Солодухов // Моск. энерг. ин-т. Научн. тр. — 1983. — № 19. — С. 68–78.
6. Веселов, Г.И. Алгоритм расчета собственных волн открытого диэлектрического волновода произвольного сечения [Текст] / Г.И. Веселов, Г.Г. Воронин, Н.И. Платонов // Микроэлектронные радиотехнические устройства и техника СВЧ: сб. науч. тр. по проблемам микроэлектроники. — М.: МИЭТ, 1980. — С. 53–67.

7. Векуа, И.Н. О метагармонических функциях [Текст] / И.Н. Векуа // Труды Тбилисского Матем. ин-та. — 1943. — Т. 12. — С. 105–174.
8. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — 527 с.
9. Войтович, Н.Н. Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения [Текст] / Н.Н. Войтович, Б.З. Каценеленбаум, А.Н. Сивов, А.Д. Шатров // Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24. — № 7. — С. 1245–1263.
10. Войтович, Н.Н. Расчет диэлектрических волноводов сложного профиля методом наименьших квадратов [Текст] / Н.Н. Войтович // Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24. — № 5. — С. 1058–1060.
11. Вычислительные методы в электродинамике [Текст] / Под ред. Р. Миттры. — М.: Мир, 1977. — 485 с.
12. Габдулхаев, Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода [Текст] / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во КГУ, 1994. — 288 с.
13. Габдулхаев, Б.Г. Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы [Текст] / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во КГУ, 1995. — 231 с.
14. Галишникова, Т.Н. Численные методы в задачах дифракции [Текст] / Т.Н. Галишникова, А.С. Ильинский. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 208 с.
15. Гончаренко, А.М. Основы теории оптических волноводов [Текст] / А.М. Гончаренко, В.А. Карпенко. — Минск: Наука и техника, 1983. — 237 с.

16. Гохберг, И.Ц. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов [Текст] / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн // Успехи матем. наук. — 1957. — Т. 12. — Вып. 2. — С. 44–118.
17. Дианов, Е.М. Волоконная оптика: проблемы и перспективы [Текст] / Е.М. Дианов // Вестн. АН СССР. — 1989. — № 10. — С. 41–51.
18. Даутов, Р.З. Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов [Текст] / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. — 271 с.
19. Даутов, Р.З. Программирование МКЭ в MATLAB. Учебное пособие [Текст] / Р.З. Даутов. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2010. — 71 с.
20. Даутов, Р.З. Введение в теорию метода конечных элементов [Текст] / Р.З. Даутов, М.М. Карчевский. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2004. — 239 с.
21. Ермаков, О.Н. Прикладная оптоэлектроника [Текст] / О.Н. Ермаков. — М.: Техносфера, 2004. — 416 с.
22. Завадский, В.Ю. Моделирование волновых процессов [Текст] / В.Ю. Завадский. — М.: Наука, 1991. — 248 с.
23. Захаров, Е.В. Метод расчета собственных волн диэлектрических волноводов произвольного сечения [Текст] / Е.В. Захаров, Х.Д. Икрамов, А.Н. Сивов // Вычислительные методы и программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1980. — Вып. 32. — С. 71–85.
24. Захаров, Е.В. Численный анализ дифракции радиоволн [Текст] / Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. — М.: Радио и связь, 1982. — 184 с.

25. Ильинский, А.С. Математические модели электродинамики [Текст] / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников. — М.: Высшая школа, 1991. — 224 с.
26. Ильинский, А.С. Развитие методов Тихонова в прикладной электродинамике [Текст] / А.С. Ильинский, А.Г. Свешников // Вестн. МГУ. Выч. математика и кибернетика. — 1986. — Вып. 3. — С. 28–42.
27. Ильинский, А.С. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции) [Текст] / А.С. Ильинский, Ю.Г. Смирнов. — М.: ИПРЖР, 1996. — 176 с.
28. Ильинский, А.С. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн [Текст] / А.С. Ильинский, Ю.В. Шестопапов. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 184 с.
29. Канторович, Л.В. Функциональный анализ [Текст] / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов — М.: Наука, 1984. — 752 с.
30. Карчевский, Е.М. Математические модели спектральной теории диэлектрических волноводов: Учебное пособие [Текст] / Е.М. Карчевский. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2008. — 140 с.
31. Карчевский, Е.М. Собственные моды диэлектрических волноводов с размытой границей [Текст] / Е.М. Карчевский, А.И. Носич, С.И. Соловьев // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: НИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 79–114.
32. Карчевский, М.М. Уравнения математической физики. Дополнительные главы: учебное пособие [Текст] / М.М. Карчевский, М.Ф. Павлова. — Казань: Казан. гос. ун.-т, 2007. — 212 с.

33. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
34. Каценеленбаум, Б.З. Симметричное и несимметричное возбуждение бесконечного диэлектрического цилиндра [Текст] / Б.З. Каценеленбаум // Журнал технической физики. — 1949. — Т. 19. — № 10. — С. 1168–1181.
35. Клеев, А.И. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Частные методы (обзор) [Текст] / А.И. Клеев, А.Б. Маненков, А.Г. Рожнев // Радиотехн. и электроника. — 1993. — Т. 38. — № 5. — С. 769–788.
36. Клеев, А.И. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Универсальные методики (обзор) [Текст] / А.И. Клеев, А.Б. Маненков, А.Г. Рожнев // Радиотехн. и электроника. — 1993. — Т. 38. — № 11. — С. 1938–1968.
37. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния [Текст] / Д. Колтон, Р. Кресс. — М.: Мир, 1987. — 312 с.
38. Кузнецов, В.А. Дисперсионные характеристики прямоугольного диэлектрического волновода [Текст] / В.А. Кузнецов, А.М. Лерер // Радиотехника и электроника. — 1982. — Т. 27. — № 4. — С. 651–657.
39. Купрадзе, В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения [Текст] / В.Д. Купрадзе. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 280 с.
40. Лифанов, И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн [Текст] / И.К. Лифанов. — М.: ТОО «Янус», 1995. — 519 с.

41. Любимов, Л.А. Диэлектрический волновод эллиптического сечения [Текст] / Л.А. Любимов, Г.И. Веселов, Н.А. Бей // Радиотехника и электроника. — 1961. — Т. 51. — Вып. 11. — С. 1871–1880.
42. Малов, А.В. Расчет собственных волн диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения методом интегральных уравнений [Текст] / А.В. Малов, В.В. Солодухов, А.А. Чурилин // Антенны. — М.: Радио и связь, 1984. — Вып. 31. — С. 189–195.
43. Мартинес-Дуарт, Дж.М. Нанотехнологии для микро- и оптоэлектроники [Текст] / Дж.М. Мартинес-Дуарт, Р.Дж. Мартин-Палма, Ф. Агулло-Руеда. — М.: Техносфера, 2007. — 368 с.
44. Никифоров, А.Ф. Основы теории специальных функций [Текст] / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. — М.: Наука, 1974. — 303 с.
45. Панасюк, В.В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук. — Киев: Наук. думка, 1984. — 344 с.
46. Пресдорф, З. Линейные интегральные уравнения [Текст] / З. Пресдорф // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальн. направления. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1988. — Т. 27. — С. 5–130.
47. Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу [Текст] / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. — М.: Мир, 1979. — 587 с.
48. Самохин, А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии [Текст] / А.Б. Самохин. — М.: Радио связь, 1998. — 160 с.
49. Свешников, А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода [Текст] / А.Г. Свешников // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 80. — № 3. — С. 345–347.

50. Свешников, А.Г. Применение метода конечных разностей к расчету световодов [Текст] / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов // Вычисл. математика и программирование. — 1978. — Вып. 28. — С. 104–117.
51. Свешников, А.Г. Расчет плоского волновода-трансформатора конечно-разностным методом [Текст] / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов // Вычисл. математика и программирование. — 1978. — Вып. 28. — С. 118–133.
52. Семенов, А.Б. Волоконно-оптические подсистемы современных СКС [Текст] / А.Б. Семенов. — М.: Академия АйТи, ДМК Пресс, 2007. — 632 с.
53. Смирнов, Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики [Текст] / Ю. Г. Смирнов. — Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2009. — 268 с.
54. Снайдер, А. Теория оптических волноводов [Текст] / А. Снайдер, Дж. Лав. — М.: Радио и связь, 1987. — 656 с.
55. Соловьев, С.И. Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости [Текст] / Е.М. Карчевский, С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — № 4. — С. 563–565.
56. Соловьев, С.И. Существование собственных значений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов [Текст] / Е.М. Карчевский, С.И. Соловьев // Известия вузов. Математика. — 2003. — № 3. — С. 78–80.
57. Стейн, И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций [Текст] / И. Стейн. — М.: Мир, 1973. — 342 с.
58. Унгер, Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы [Текст] / Х.-Г. Унгер. — М.: Мир, 1980. — 656 с.

59. Фролов, А.Г. Математическая модель диэлектрического волновода [Текст] / Е.М. Карчевский, Э.Р. Миниахметов, А.Г. Фролов // Супервычисления и математическое моделирование, XI международный семинар, 5–9 апреля 2009 г.: тезисы. — Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2009. — С. 75–76.
60. Фролов, А.Г. Задача о собственных волнах оптического волновода [Текст] / А.Г. Фролов // Итоговая научно–образовательная конференция студентов Казанского государственного университета 2009 года: сборник тезисов. — Казань: Казан. гос. ун–т, 2009. — С. 92–93.
61. Фролов, А.Г. Собственные волны градиентного волновода [Текст] / А.Г. Фролов // Итоговая научно–образовательная конференция студентов Казанского государственного университета 2010 года: сборник тезисов. — Казань: Казан. гос. ун–т, 2010. — С. 99–100.
62. Фролов, А.Г. Метод коллокации для решения спектральных задач теории диэлектрических волноводов [Текст] / А.Г. Фролов // Итоговая научно–образовательная конференция студентов Казанского университета 2011 года: сборник тезисов. — Казань: Казан. ун–т, 2011. — С. 104–105.
63. Фролов, А.Г. Собственные волны градиентного диэлектрического волновода [Текст] / А.Г. Фролов // Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы Девятой молодёжной научной школы–конференции «Лобачевские чтения – 2010»; Казань, 1 – 6 октября 2010 г. — Казань: Казан. мат. о–во, 2010. — Т.40. — С. 353–357.
64. Фролов, А.Г. Метод коллокации поиска постоянных пространств слабонаправляющего диэлектрического волновода

[Текст] / А.Г. Фролов // Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы Десятой молодёжной научной школы–конференции «Лобачевские чтения – 2011»; Казань, 1 – 5 ноября 2011 г. — Казань: Казан. мат. о-во, 2011. — Т.44. — С. 324–327.

65. Фролов, А.Г. Численное решение задачи о распространении электромагнитных волн в слабонаправляющих волноводах [Текст] / Е.М. Карчевский, А.Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2011. — №1(17). — С. 47–57.
66. Фролов, А.Г. Собственные волны слабонаправляющего волновода в полупространстве [Текст] / Е.М. Карчевский, А.Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2012. — №1(21). — С. 22–30.
67. Фролов, А.Г. Метод коллокации для спектральных задач теории диэлектрических волноводов [Текст] / А.Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2012. — №2(22). — С. 3–15.
68. Фролов, А.Г. Метод коллокации для поиска собственных волн диэлектрического волновода [Текст] / А.Г. Фролов // Исследования по прикладной математике и информатике. — Казань: Изд-во Казан. федерал. ун-та, 2011. — Вып. 27. — С. 171–178.
69. Шестопапов, В.П. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции [Текст] / В.П. Шестопапов, А.А. Кириленко, С.А. Масалов. — Киев: Наук. думка, 1984. — 296 с.
70. Янке, Е. Специальные функции [Текст] / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. — М.: Наука, 1968. — 344 с.

71. Bonnet-Ben Dhia, A.S. Computation of the modes of dielectric waveguides by finite elements coupled with an integral representation [Текст] / A.S. Bonnet-Ben Dhia, N. Gmati // Numerical Methods in Engineering. — 1992. — P. 73–77.
72. Boriskina, S.V. Highly Efficient Full-Vectorial Integral Equation Solution for the Bound, Leaky, and Complex Modes of Dielectric Waveguides [Текст] / S.V. Boriskina, T.M. Benson, P. Sewell, A.I. Nosich // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. — 2002. — V. 8. — N 6. — P. 1225–1232.
73. Eliseev, M.V. Analysis of Leaky Modes by a Modified Finite-Element Method [Текст] / M.V. Eliseev, A.B. Manenkov, A.G. Rozhnev // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2006. — V. 51. — N 12. — P. 1329–1337.
74. Frolov, A. Natural modes of weakly guiding optical fiber [Электронный ресурс] / A. Frolov, E. Karchevskiy // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kyiv, Ukraine, 6–8 September 2010. — Proceedings, Kyiv, Ukraine, 2010. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). — IEEE Catalog Number: CFP10761-CDR . — ISBN: 978-1-4244-8860-5.
75. Frolov A. Generalized modes of optical fiber [Текст] / Frolov, A. Generalized modes of optical fiber / A. Frolov, E. Karchevskiy // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction' 2011. Saint Petersburg, May 30 – June 3, 2011. — IEEE, 2011. — IEEE Catalog No.: CFP11489-PRT. — P. 67–71.
76. Frolov, A. Generalized modes of optical fiber [Текст] / A. Frolov, E. Karchevskiy // Days on Diffraction' 2011. Int. Conf. Saint Petersburg, May 30 – June 3, 2011: Abstracts. Universitas Petropolitava. — P. 35–36.

77. Kartchevski, E.M. Mathematical analysis of the generalized natural modes of an inhomogeneous optical fiber [Текст] / E.M. Kartchevski, A.I. Nosich, G.W. Hanson // SIAM J. Appl. Math. — 2005. — V. 65. — № 6. — P. 2033–2048.
78. Lehoucq, R.B. Deflation Techniques for an Implicitly Re-Started Arnoldi Iteration [Текст] / R.B. Lehoucq, D.C. Sorensen // SIAM J. Matrix Analysis and Applications, Vol. 17, 1996, pp. 789-821.
79. Eyges, L. Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape [Текст] / L. Eyges, P. Gianino, P. Wintersteiner // J. Opt. Soc. Am. — 1979. — V. 69. — № 9. — P. 1226–1235.
80. James, J.R. Point-matched solutions for propagating modes on arbitrarily-shaped dielectric rods [Текст] / J.R. James, I.N.L. Gallet // Radio and Electron. Eng. — 1972. — V. 42. — P. 103–113.
81. James, J.R. Modal analysis of triangular-cored glass-fibre waveguide [Текст] / J.R. James, I.N.L. Gallett // IEE Proc. — 1973. — V. 120. — № 11. — P. 1362–1370.
82. Keuster, E.F. Fundamental mode propagation on dielectric fibres of arbitrary cross-section [Текст] / E.F. Keuster, R.C. Pate // IEE PROC-H. 1980. — V. 126. — № 1. — P. 41–47.
83. Kress, R. Linear Integral Equations [Текст] / R. Kress. — New York: Springer-Verlag, 1999. — 365 p.
84. Lifante, G. Integrated photonics: fundamentals [Текст] / G. Lifante. — John Wiley and Sons, 2003. — 184 p.
85. Lu, M. Anisotropic dielectric waveguides [Текст] / M. Lu, M.M. Fejer // J. Opt. Soc. Am. A. — Feb. 1993. — V. 10. — № 2. — P. 246–261.

86. Miller, C.M. Optical Fiber Splices and Connectors: Theory and Methods [Текст] / C.M. Miller. — Marcel Dekker, 1986. — 378 p.
87. Mitra, R. Analysis of open dielectric waveguides using mode-matching technique and variational methods [Текст] / R. Mitra, V. Jamnejad, Y. Hou // IEEE Trans. on MTT. — 1980. — V. 28. — № 1. — P. 36–43.
88. Muller, C. Grundprobleme der Mathematischen Theorie Elektromagnetischer Schwingungen [Текст] / C. Muller. — Berlin: Springer, 1957. — 345 p.
89. Nosich, A.I. Radiation conditions, limiting absorption principle, and general relations in open waveguide scattering [Текст] / A.I. Nosich // J. Electromag. Waves Applicat. — 1994. — V. 8. — № 3. — P. 329–353.
90. Neumaier, A. Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem [Текст] / A. Neumaier // SIAM J. Numer. Anal. — 1985. — V. 22. — № 5. — P. 914–923.
91. Shestopalov, Yu.V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics [Текст] / Yu.V. Shestopalov, Yu.G. Smirnov, E.V. Chernokozhin. — VSP, 2000. — 117 p.
92. Snyder, A.W. Anisotropic fibers with nonaligned optical (stress) axes [Текст] / A.W. Snyder, A. Ankiewicz // J. Opt. Soc. Am. A. — June 1986. — V. 3. — № 6. — P. 856–863.
93. Solbach, K. The electromagnetic fields and the phase constants of dielectric image lines [Текст] / K. Solbach, I. Wolff // IEEE Trans. on MTT. — 1978. — V. 26. — № 4. — P. 266–274.
94. Solov'ëv, S.I. Existence of the guided modes of an optical fiber [Текст] / S.I. Solov'ëv. — Preprint SFB393/03-02 — Chemnitz: Technische Universität Chemnitz, 2003. — 21 p.

95. Steinberg, S. Meromorphic families of compact operators [Текст] / S. Steinberg // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1968. — V. 31. — № 5. — P. 372–379.
96. Vainikko, G. Multidimensional weakly singular integral equations [Текст] / G. Vainikko. — Springer, 1993. — p. 159.
97. Wilczewski, F. Bending loss of leaky modes in optical fibers with arbitrary index profiles [Текст] / F. Wilczewski // Optics Letters. — July 1994. — V. 19. — № 14. — P. 1031–1033.