

МЕТРИКИ НА ПРОЕКТОРАХ АЛГЕБРЫ ФОН НЕЙМАНА, АССОЦИИРОВАННЫЕ СО СЛЕДОВЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть φ — положительный функционал на алгебре фон Неймана \mathcal{A} , \mathcal{A}^{pr} — решетка проекторов в \mathcal{A} . Для всех P, Q из \mathcal{A}^{pr} положим $\rho_\varphi(P, Q) = \varphi(|P - Q|)$ и $d_\varphi(P, Q) = \varphi(P \vee Q - P \wedge Q)$. Тогда $\rho_\varphi(P, Q) \leq d_\varphi(P, Q)$ для всех P, Q из \mathcal{A}^{pr} и $\rho_\varphi(P, Q) = d_\varphi(P, Q)$ при $PQ = QP$. Отображение ρ_φ (или d_φ) удовлетворяет неравенству треугольника тогда и только тогда, когда функционал φ следовый. Для точного следового функционала τ отображения ρ_τ и d_τ являются метриками на \mathcal{A}^{pr} . Если, кроме того, функционал τ нормален, то $(\mathcal{A}^{\text{pr}}, \rho_\tau)$ и $(\mathcal{A}^{\text{pr}}, d_\tau)$ являются полными метрическими пространствами. Сходимости в метриках ρ_τ и d_τ эквивалентны тогда и только тогда, когда алгебра \mathcal{A} абелева, при этом $\rho_\tau = d_\tau$. В терминах неравенств установлен еще один критерий абелевости алгебры \mathcal{A} .

DOI 10.33048/smzh.2019.60.603

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный ограниченный оператор, алгебра фон Неймана, проектор, перестановочность, нормальный функционал, состояние, след.

1. Определения и обозначения

Пусть \mathcal{H} — гильбертово пространство над полем \mathbb{C} , $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — *-алгебра всех линейных ограниченных операторов в \mathcal{H} . Пусть $\text{pr}(X)$ — проектор на замыкание области значений оператора $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, I — тождественный оператор в \mathcal{H} . Если $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$, то $P^\perp = I - P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$ и проектор $P \wedge Q$ определяется равенством $(P \wedge Q)\mathcal{H} = P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H}$, а $P \vee Q = (P^\perp \wedge Q^\perp)^\perp$ проектирует на $\overline{\text{lin}(P\mathcal{H} \cup Q\mathcal{H})}$. Коммутантом множества $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется множество

$$\mathcal{X}' = \{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XY = YX \text{ для всех } X \in \mathcal{X}\}.$$

Алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , называется *-подалгебра \mathcal{A} алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, для которой $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. Для алгебры фон Неймана \mathcal{A} через \mathcal{A}^+ и \mathcal{A}^{pr} будем обозначать ее подмножества положительных элементов и решетку проекторов соответственно.

Для $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ пишем $P \sim Q$ (эквивалентность Мюррея — Дж. фон Неймана), если $P = U^*U$ и $Q = UU^*$ для некоторого $U \in \mathcal{A}$. Проекторы $P, Q \in \mathcal{A}$ называются *изоклинными* (с углом $\theta \in (0, \pi/2)$), пишем $P \overset{\theta}{\approx} Q$,

Работа выполнена за счет субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

если $PQP = \cos^2 \theta P$ и $QPQ = \cos^2 \theta Q$. Если $A \in \mathcal{A}$, то $|A| = \sqrt{A^*A} \in \mathcal{A}^+$ и проектор $\text{pr}(A)$ на замыкание области значений оператора A лежит в \mathcal{A} . Положительный функционал φ на алгебре фон Неймана \mathcal{A} называется *точным*, если $\varphi(A) = 0$ ($A \in \mathcal{A}^+$) $\Rightarrow A = 0$; *следовым*, если $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$; *нормальным*, если $A_i \nearrow A$ ($A_i, A \in \mathcal{A}^+$) $\Rightarrow \varphi(A) = \sup_i \varphi(A_i)$; *состоянием*, если $\varphi(I) = 1$.

2. Метрики на \mathcal{A}^{Pr} , ассоциированные со следовым состоянием

Лемма 1 [1, предложение 4.4]. *Вещественная функция $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ операторно монотонна на \mathbb{R}^+ .*

Пусть \mathcal{A} — алгебра фон Неймана. Для $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{Pr}}$ положим

$$P \circ Q = 2^{-1}(PQ + QP), \quad P \ominus Q = P \vee Q - P \wedge Q.$$

Имеем $P \circ Q \in \mathcal{A}^+ \Leftrightarrow PQ = QP$ (см. лемму в [2]). Если $U \in \mathcal{A}$ унитарен, то

$$U(P \circ Q)U^* = (UPU^*) \circ (UQU^*), \quad U(P \ominus Q)U^* = (UPU^*) \ominus (UQU^*).$$

Лемма 2. *Пусть \mathcal{A} — алгебра фон Неймана и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{Pr}}$. Тогда*

- (i) $|P \circ Q|^2 \leq 4^{-1}(P + Q)^2$;
- (ii) $P \wedge Q \leq |P \circ Q| \leq 2^{-1}(P + Q) \leq P \vee Q$;
- (iii) $P \ominus Q = Q \ominus P = \text{pr}(|P - Q|)$;
- (iv) $P \ominus Q = P^\perp \ominus Q^\perp$;
- (v) $|P - Q|^a \leq P \ominus Q$ для всех $a > 0$;
- (vi) $I \ominus P = P^\perp$, $0 \ominus P = P$, $P \ominus P^\perp = I$, $P \ominus P = 0$;
- (vii) если $PQ = QP$, то $P \ominus Q = |P - Q|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $P \wedge Q \leq |P \circ Q|$ и утверждение (i) достаточно проверить для одномерных проекторов $P, Q \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ (см. доказательство теоремы 1 в [3] или теоремы 1 в [4]). Не ограничивая общности, положим

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} t & \delta\sqrt{t(1-t)} \\ \bar{\delta}\sqrt{t(1-t)} & 1-t \end{pmatrix}$$

для $\delta \in \mathbb{C}$ с $|\delta| = 1$ и $0 \leq t \leq 1$. Теперь неравенство $P \wedge Q \leq |P \circ Q|$ очевидно и

$$(PQ + QP)^2 = t(P + Q)^2 \leq (P + Q)^2. \quad (1)$$

В силу леммы 1 из (1) получаем $|P \circ Q| \leq 2^{-1}(P + Q) \leq P \vee Q$.

Утверждения (iii) и (v) установлены в теореме 2 из [5]. Поскольку $P - Q = Q^\perp - P^\perp$, (iv) следует из (iii). Утверждение (vii) установлено в п. (iii) предложения 1 из [5]. Лемма доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Приведем простое доказательство неравенства $|P \circ Q| \leq P \vee Q$. Имеем $(P \pm Q)^2 \geq 0$ и $-2P \vee Q \leq -P - Q \leq PQ + QP \leq P + Q \leq 2P \vee Q$, т. е. $P \vee Q \leq P \circ Q \leq P \vee Q$. Тогда $|P \circ Q| \leq P \vee Q$ в силу теоремы 2.4 из [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для положительного функционала φ на алгебре фон Неймана \mathcal{A} введем отображения $\rho_\varphi, d_\varphi : \mathcal{A}^{\text{Pr}} \times \mathcal{A}^{\text{Pr}} \rightarrow \mathbb{R}^+$ по формулам

$$\rho_\varphi(P, Q) = \varphi(|P - Q|) \quad \text{и} \quad d_\varphi(P, Q) = \varphi(P \ominus Q) \quad \text{для всех } P, Q \in \mathcal{A}^{\text{Pr}}.$$

Предложение 1. Справедливы следующие утверждения:

- (i) $\rho_\varphi(P, Q) \leq d_\varphi(P, Q)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$;
- (ii) $d_\varphi(P, Q) \leq \sin^{-2} \theta \rho_\varphi(P, Q)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ с $P \overset{\theta}{\approx} Q$;
- (iii) если $PQ = QP$, то $\rho_\varphi(P, Q) = d_\varphi(P, Q)$;
- (iv) $\rho_\varphi(Q, P) = \rho_\varphi(P, Q) = \rho_\varphi(P^\perp, Q^\perp)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$;
- (v) $d_\varphi(Q, P) = d_\varphi(P, Q) = d_\varphi(P^\perp, Q^\perp)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$;
- (vi) $\rho_\varphi(P, 0) = d_\varphi(P, 0) = \varphi(P)$ для всех $P \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$;
- (vii) $\rho_\varphi(P, Q) = d_\varphi(P, Q) = \varphi(P + Q)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ с $PQ = 0$;
- (viii) $\varphi(|P \circ Q| - P \wedge Q) \leq d_\varphi(P, Q)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$;
- (ix) $\rho_\varphi(P, Q) + \rho_\varphi(Q, R) = \rho_\varphi(P, R)$ для всех $P, Q, R \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ с $P \leq Q \leq R$;
- (x) $d_\varphi(P, Q) + d_\varphi(Q, R) = d_\varphi(P, R)$ для всех $P, Q, R \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ с $P \leq Q \leq R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i), (iii) и (iv) вытекают из п. (v), (vii) и (iv) леммы 2 соответственно. В частности, если алгебра \mathcal{A} абелева, то $\rho_\varphi(P, Q) = d_\varphi(P, Q)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$.

Покажем (ii). Для $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ с $P \overset{\theta}{\approx} Q$ в силу п. (iii) теоремы 10.5 из [1] имеем $P \wedge Q = 0$ и $P \vee Q = \sin^{-2} \theta (P - Q)^2$. Поскольку $\|P - Q\| \leq 1$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, имеем $(P - Q)^2 \leq \sqrt{(P - Q)^2} = |P - Q|$.

Из п. (ii) леммы 2 для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ получаем $0 \leq |P \circ Q| - P \wedge Q \leq P \ominus Q$, что влечет (viii). Предложение доказано. \square

Теорема 1. Пусть τ — точный следовый функционал на алгебре фон Неймана \mathcal{A} . Тогда ρ_τ и d_τ являются метриками на \mathcal{A}^{pr} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P, Q, R \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Для каждой пары операторов $X, Y \in \mathcal{A}$ существуют такие частичные изометрии $U, V \in \mathcal{A}$, что $|X + Y| \leq U|X|U^* + V|Y|V^*$ [7, теорема 2.2]. Взяв $X = P - R$ и $Y = R - Q$, получаем неравенство треугольника для ρ_τ .

Из п. (iii) леммы 2 следует, что $d_\tau(P, Q) = d_\tau(Q, P)$ и $d_\tau(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$. Если $A, B \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, то $A \vee B - B \sim B - A \wedge B$ [8, гл. III, теорема 1.1.3]. Следовательно,

$$\tau(A \vee B) + \tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B). \quad (2)$$

Докажем неравенство треугольника для d_τ , т. е.

$$\tau(P \vee Q) - \tau(P \wedge Q) \leq \tau(P \vee R) - \tau(P \wedge R) + \tau(R \vee Q) - \tau(R \wedge Q). \quad (3)$$

Из (2) имеем $\tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \vee B)$, поэтому (3) перепишется в виде

$$\tau(P \vee Q) \leq \tau(P \vee R) + \tau(R \vee Q) - \tau(R). \quad (4)$$

Положив $A = P \vee R$, $B = R \vee Q$ в (2), имеем

$$\tau(P \vee R) + \tau(R \vee Q) = \tau(P \vee Q \vee R) + \tau((P \vee R) \wedge (R \vee Q)). \quad (5)$$

Перепишем (4) с учетом (5):

$$\tau(P \vee Q) \leq \tau(P \vee Q \vee R) + \tau((P \vee R) \wedge (R \vee Q)) - \tau(R). \quad (6)$$

Поскольку $P \vee Q \vee R \geq P \vee Q$ и $(P \vee R) \wedge (R \vee Q) \geq R$, в силу монотонности следового функционала τ на \mathcal{A}^+ неравенство (6) выполнено. Следовательно, (3) также выполнено. Теорема доказана. \square

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 функционал τ нормален, то $(\mathcal{A}^{\text{Pr}}, \rho_\tau)$ и $(\mathcal{A}^{\text{Pr}}, d_\tau)$ являются полными метрическими пространствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В алгебре \mathcal{A} вводится топология t_τ сходимости по мере [9], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\varepsilon, \delta) = \{X \in \mathcal{A} : \exists P \in \mathcal{A}^{\text{Pr}} (\|XP\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(P^\perp) \leq \delta)\}, \quad \varepsilon > 0, \delta > 0.$$

Известно, что (\mathcal{A}, t_τ) является метризуемой топологической $*$ -алгеброй. Определим L_1 -норму на \mathcal{A} , положив $\|X\|_1 = \tau(|X|)$ для всех $X \in \mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}_1 = \{X \in \mathcal{A} : \|X\|_1 \leq 1\}$.

Для $(\mathcal{A}^{\text{Pr}}, \rho_\tau)$ утверждение теоремы следует из $\|\cdot\|_1$ -полноты пространства $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_1)$, непрерывности вложения $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_1)$ в топологическую $*$ -алгебру (\mathcal{A}, t_τ) и t_τ -замкнутости решетки \mathcal{A}^{Pr} .

Для $(\mathcal{A}^{\text{Pr}}, d_\tau)$ утверждение теоремы следует из совпадения метрики d_τ с сужением известной метрики $d_{s,\tau}(A, B) = \tau(\text{pr}(|A - B|))$, $A, B \in \mathcal{A}$, на \mathcal{A}^{Pr} , непрерывности вложения $(\mathcal{A}, d_{s,\tau})$ в (\mathcal{A}, t_τ) (см. [10, 11]) и t_τ -замкнутости решетки \mathcal{A}^{Pr} . Теорема доказана. \square

Теорема 3. Пусть τ — точный следовый функционал на алгебре фон Неймана \mathcal{A} . Сходимости в метриках ρ_τ и d_τ эквивалентны тогда и только тогда, когда алгебра \mathcal{A} абелева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если алгебра \mathcal{A} абелева, то $\rho_\tau(P, Q) = d_\tau(P, Q)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{Pr}}$ в силу п. (iii) предложения 1.

Если алгебра фон Неймана \mathcal{A} не абелева, то она содержит $*$ -подалгебру, $*$ -изоморфную полной матричной алгебре $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Рассмотрим в $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ последовательность одномерных проекторов

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \sqrt{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})} \\ \sqrt{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})} & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $P_n \rightarrow \text{diag}(0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$ в метрике ρ_τ , но $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ не фундаментальна в метрике d_τ : имеем $P_n \vee P_m = I$ и $P_n \wedge P_m = 0$ при $n \neq m$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Теорема доказана. \square

3. Характеризация следовых функционалов

Покажем, что отображение ρ_φ (или d_φ) удовлетворяет неравенству треугольника тогда и только тогда, когда функционал φ следовый. Пусть $P, Q, R \in \mathcal{A}^{\text{Pr}}$. Неравенство треугольника для ρ_φ и d_φ при $R = 0$ приобретает вид $\rho_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P + Q)$ и $d_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P + Q)$ соответственно.

Теорема 4. Для положительного нормального функционала φ на алгебре фон Неймана \mathcal{A} следующие условия эквивалентны:

- (i) φ следовый;
- (ii) $\rho_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P + Q)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{Pr}}$;
- (iii) $d_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P + Q)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{Pr}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) \implies (ii) Установлено в доказательстве теоремы 1.

(i) \implies (iii) Следует из (2).

(ii) \implies (i) Установлено в п. (v) теоремы 3.4 из [12].

Ниже показывается, что аналогично тому, как было проделано в ряде других подобных случаев (см. [13] или [14]), доказательство импликации (iii) \implies (i) для произвольной алгебры фон Неймана сводится к случаю алгебры $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

Известно [13], что положительный нормальный функционал φ на алгебре фон Неймана \mathcal{A} является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(P) = \varphi(Q)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ с $PQ = 0$ и $P \sim Q$ (см. также [14, лемма 2]). Пусть $*$ -алгебра \mathcal{B} в редуцированной алгебре $(P+Q)\mathcal{A}(P+Q)$ порождена частичной изометрией $V \in \mathcal{A}$, реализующей эквивалентность P и Q . Тогда \mathcal{B} $*$ -изоморфна $M_2(\mathbb{C})$, а неравенство в (ii) остается справедливым для операторов из \mathcal{B} и ограничения функционала $\varphi|_{\mathcal{B}}$. Покажем, что такое ограничение является следовым функционалом на \mathcal{B} , поэтому $\varphi(P) = \varphi(Q)$.

Известно, что каждый линейный функционал φ на $M_2(\mathbb{C})$ может быть представлен в виде $\varphi(\cdot) = \text{tr}(S_\varphi \cdot)$. Матрица $S_\varphi \in M_2(\mathbb{C})$ называется *матрицей плотности* для φ . Следуя доказательству теоремы 4 из [15], предположим, что S_φ имеет два собственных значения λ и μ , и пусть u и v — соответствующие взаимно ортогональные собственные векторы. Пусть P_w — ортогональный проектор на прямую $\mathbb{C}w$, число $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем линейно независимые векторы x и y так, что $|\varphi(P_x - P_v)| < \varepsilon$, $|\varphi(P_y - P_v)| < \varepsilon$. Заметим, что $P_x \vee P_y = I$ и $P_x \wedge P_y = 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \lambda + \mu = \text{tr}(S_\varphi) = \varphi(I) = \varphi(P_x \vee P_y - P_x \wedge P_y) &\leq \varphi(P_x) + \varphi(P_y) \\ &\leq 2\varphi(P_v) + 2\varepsilon = 2\mu + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

имеем $\lambda \leq \mu + 2\varepsilon$. Так как число ε произвольное и λ, μ можно поменять ролями, получаем $\lambda = \mu$. Теорема доказана. \square

О других характеристиках следа см. [16–18] и библиографию в них.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Известно, что неравенство $d_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P + Q)$ выполнено для каждого положительного нормального функционала φ на алгебре фон Неймана \mathcal{A} и каждой пары перестановочных проекторов $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ [19, с. 168]. В силу п. (iii) предложения 1 неравенство $\rho_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P + Q)$ также выполнено для каждого положительного нормального функционала φ на алгебре фон Неймана \mathcal{A} и каждой пары перестановочных проекторов $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Теорема 4 показывает, что любое из этих неравенств выполняется для всех пар $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ тогда и только тогда, когда φ следовый.

Следствие. Для алгебры фон Неймана \mathcal{A} следующие условия эквивалентны:

- (i) алгебра \mathcal{A} абелева;
- (ii) $\rho_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P + Q)$ для всех нормальных состояний φ на \mathcal{A} и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$;
- (iii) $d_\varphi(P, Q) \leq \varphi(P + Q)$ для всех нормальных состояний φ на \mathcal{A} и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 4 каждое нормальное состояние на \mathcal{A} следовое. Множество нормальных состояний на \mathcal{A} разделяет точки \mathcal{A} [8, гл. III, теорема 2.4.5], поэтому алгебра \mathcal{A} коммутативна. \square

Автор благодарит рецензента за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерстнев А. Н. Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. М.: Физматлит, 2008.
2. Uchiyama M. Commutativity of selfadjoint operators // Pac. J. Math. 1993. V. 161, N 2. P. 385–392.

3. Бикчентаев А. М. Перестановочность проекторов и характеристика следа на алгебрах фон Неймана. II // *Мат. заметки*. 2011. Т. 89, № 4. С. 483–494.
4. Бикчентаев А. М. Перестановочность операторов и характеристика следа на C^* -алгебрах // *Докл. АН*. 2013. Т. 448, № 5. С. 506–509.
5. Бикчентаев А. М. Разности идемпотентов в C^* -алгебрах // *Сиб. мат. журн.* 2017. Т. 58, № 2. С. 243–250.
6. Bikchentaev A. M. On hermitian operators X and Y meeting the condition $-Y \leq X \leq Y$ // *Lobachevskii J. Math.* 2013. V. 34, N 3. P. 227–233.
7. Akemann C. A., Anderson J., Pedersen G. K. Triangle inequalities in operator algebras // *Lin. Multilin. Algebra*. 1982. V. 11, N 2. P. 167–178.
8. Blackadar B. Operator algebras. Theory of C^* -algebras and von Neumann algebras. Operator algebras and non-commutative geometry. III. Berlin: Springer-Verl., 2006. (Encycl. Math. Sci.; V. 122).
9. Nelson E. Notes on non-commutative integration // *J. Funct. Anal.* 1974. V. 15, N 2. P. 103–116.
10. Ciach L. J. Linear-topological spaces of operators affiliated with a von Neumann algebra // *Bull. Acad. Pol. Sci. Math.* 1983. V. 31, N 3–4. P. 161–166.
11. Бикчентаев А. М. О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // *Мат. заметки*. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349.
12. Бикчентаев А. М. Перестановочность проекторов и характеристика следа на алгебрах фон Неймана // *Сиб. мат. журн.* 2010. Т. 51, № 6. С. 1228–1236.
13. Gardner L. T. An inequality characterizes the trace // *Can. J. Math.* 1979. V. 31, N 6. P. 1322–1328.
14. Tikhonov O. E. Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals // *Positivity*. 2005. V. 9, N 2. P. 259–264.
15. Petz D., Zemánek J. Characterizations of the trace // *Linear Algebra Appl.* 1988. V. 111. P. 43–52.
16. Bikchentaev A. M. Commutation of projections and characterization of traces on von Neumann algebras. III // *Int. J. Theor. Phys.* 2015. V. 54, N 12. P. 4482–4493.
17. Бикчентаев А. М. Неравенство для следа на унитарной C^* -алгебре // *Мат. заметки*. 2016. Т. 99, № 4. С. 483–488.
18. Бикчентаев А. М. След и разности идемпотентов в C^* -алгебрах // *Мат. заметки*. 2019. Т. 105, № 5. С. 647–655.
19. Kadison R. V., Ringrose J. R. Fundamentals of the theory of operator algebras. V. I. Elementary theory. New York; London: Acad. Press, 1983. (Pure Appl. Math.; V. 100).

Поступила в редакцию 6 апреля 2018 г.

После доработки 19 декабря 2018 г.

Принята к публикации 24 июля 2019 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович
 Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского
 Казанского (Приволжского) федерального университета,
 ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
 Airat.Bikchentaev@kpfu.ru