ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2016, т. 293, с. 73–82

УДК 517.983+517.986

О сходимости интегрируемых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана[1]

А. М. Бикчентаев[2]

Поступило 13 августа 2015 г.

Исследована сходимость в банаховом пространстве $L_1(\mathcal{M},\tau)$ интегрируемых относительно следового состояния τ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов. Введено понятие дисперсии операторов из $L_2(\mathcal{M},\tau)$, и установлены его основные свойства. Предложен критерий сходимости в $L_2(\mathcal{M},\tau)$ в терминах дисперсии. Показано, что для $X\in L_1(\mathcal{M},\tau)$ следующие условия эквивалентны: (i) $\tau(X)=0$; (ii) $\|I+zX\|_1\geq 1$ для всех $z\in\mathbb{C}$. Дополнен результат А.Р. Падманабхана (1979) об одном свойстве нормы пространства $L_1(\mathcal{M},\tau)$. Установлена сходимость в $L_2(\mathcal{M},\tau)$ мнимых компонент некоторых ограниченных последовательностей операторов из $\mathcal{M}$. Получены следствия о сходимости дисперсий.

DOI: 10.1134/S0371968516020059

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть τ — точное нормальное следовое состояние на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов в $\mathcal{M}$, I — единица $\mathcal{M}$. Нами исследована сходимость в банаховом пространстве $L_1(\mathcal{M},\tau)$ интегрируемых относительно τ операторов [1, 2]. Введена дисперсия $\mathbb{D}(X)=\|X-\tau(X)I\|_2^2$ оператора $X\in L_2(\mathcal{M},\tau)$, и установлены ее основные свойства (теорема 4.1, следствие 4.2). Показано, что $\inf_{a\in\mathbb{C}}\|X-aI\|_2^2=\mathbb{D}(X)$ для всех $X\in L_2(\mathcal{M},\tau)$ (теорема 4.4). Предложен критерий сходимости последовательностей операторов из $L_2(\mathcal{M},\tau)$ в терминах дисперсии (теорема 4.5). Пусть $\mathcal{K}_0=\{X\in L_2(\mathcal{M},\tau)\colon \tau(X)=0\}$. Для $X_n, X\in\mathcal{K}_0$ ($n\in\mathbb{N}$) доказана (следствие 4.6) эквивалентность следующих условий:

(i) $X_n\xrightarrow{\|\cdot\|_2}X$ при $n\to\infty$;

(ii) $X_n\xrightarrow{\tau}X$ и $\mathbb{D}(X_n)\to\mathbb{D}(X)$ при $n\to\infty$.

В теореме 4.8 показано, что для $X\in L_1(\mathcal{M},\tau)$ следующие условия эквивалентны:

(i) $\tau(X)=0$;

(ii) $\|I+zX\|_1\geq 1$ для всех $z\in\mathbb{C}$.

Дополнен результат А.Р. Падманабхана [3] об одном свойстве нормы пространства $L_1(\mathcal{M},\tau)$: если оператор $A\in L_1(\mathcal{M},\tau)^+$ несингулярен, то

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall P\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}\qquad\bigl(\tau(P)\geq\varepsilon\ \Rightarrow\ \|PAP\|_1\geq\delta\bigr)$$

(теорема 4.9). Установлена сходимость в $L_2(\mathcal{M},\tau)$ мнимых компонент некоторых ограниченных последовательностей операторов из $\mathcal{M}$ (теорема 4.13). Получены приложения к сходимости дисперсий (следствия 4.7 и 4.14).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Республики Татарстан (проект 15-41-02433).

[2]Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия.
E-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru