КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра математической статистики

Е. В. СТРЕБКОВ

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ

КАЗАНЬ - 2019

УДК 519.1(07)

ББК 22.176 я 7

Принято на заседании кафедры математической статистики

Протокол № 7 от 12 апреля 2019 года

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры информационных систем К(П)ФУ **А.Ф.Галимянов;**

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры высшей математики и математического моделирования К(П)ФУ **И.Б.Гарипов**

Стребков Е.В.

Основы комбинаторики / Е. В. Стребков – Казань: Казан. ун-т, 2019. – 31 с.

Настоящее пособие адресовано учащимся различных специальностей, изучающих комбинаторику и теорию вероятностей.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Комбинаторика – раздел математики, изучающий виды комбинаций различных объектов. Комбинаторные методы применяются в теории вероятностей, статистике, математическом программировании, вычислительной математике, планировании экспериментов.

По многим специальностям вузов в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика» при решении вероятностных задач необходимо применение комбинаторных формул, что вызывает у студентов определенные затруднения.

Пособие включает достаточно подробное изложение основанных теоретических вопросов с доказательством комбинаторных формул, задач, вопросы для самоконтроля.

Пособие основано на оригинальной методике, апробированной многолетним успешным опытом преподавания студентам и школьникам.

При определении видов соединений приводятся по два определения (по способу построения соединения и по его свойствам), что позволяет выработать достаточно общий алгоритм поэтапного решения комбинаторных задач.

В пособии нумерация формул имеет вид: Z.R, где число Z обозначает номер параграфа, а R – номер формулы в параграфе.

Комбинаторные задачи часто имеют реальную (содержательную) формулировку, что затрудняет формализованные подходы к их решению и требует определенных навыков математического моделирования.

Актуальность данного пособия обусловлена рядом существенных факторов:

1) применением комбинаторных формул при изучении теории вероятностей;

2) востребованностью апробированной и эффективной методики обучения теории и практике комбинаторных методов.

Данное пособие является самодостаточным и предназначено помочь учителям и учащимся преодолеть возникающие затруднения, т.к. содержит доступное и подробное изложение основных комбинаторных методов с иллюстрацией на наглядных примерах, а также широкий спектр реальных задач с объяснением их решения. Пособие включает два уровня обучения. Базовый уровень ограничивается теорией из Раздела 1 для социально-экономических, психолого-педагогических специальностей. Основной уровень включает полное обоснование теоретических вопросов и предназначен для физико-математических, биолого-медицинских, информационных и технических специальностей.

РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Комбинаторика занимается изучением способов составления наборов элементов любой природы, в зависимости от их свойств.

Рассмотрим множества $X_i,\ i = 1, 2, \dots, k$, состоящие соответственно из n_i различных элементов.

Определение. Набор $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $x_i \in X_i$, состоящий из k элементов, называется соединением длины k. Множество всех соединений длины k образуют декартовое произведение множеств $X_1 \times X_2 \times X_k$.

▲

Соединения можно классифицировать либо по способу построения, либо по их свойствам: важности расположения элементов; возможности одинаковых элементов. В данном пособии при определении вида соединения, а также при решении комбинаторных задач используются оба подхода.

Существуют два способа построения соединений: схема случайного выбора без возвращения и схема случайного выбора с возвращением.

§1. Схема случайного выбора без возвращения

Определение. Схема случайного выбора без возвращения состоит в том, что из множества $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, содержащего n различных элементов, наугад извлекается один элемент α_{i_k}, фиксируется и не возвращается во множество X (выбор каждого элемента равновозможен). После k таких извлечений получим соединение $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ длины k, в котором все элементы различные (не повторяются) и $k \leq n$.

▲

Определение. Размещением без повторений по k элементов из n называется **упорядоченный** набор k элементов, полученный из множества X по схеме случайного выбора без возвращения.

С другой точки зрения, размещение без повторений по k элементов из n – это соединение $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ длины k, у которого:

1) $k \leq n$;
2) все элементы различные;
3) **существенен** порядок расположения элементов.

▲

Замечание. Здесь и далее при определении вида соединения приводятся два определения: первое – по способу построения, второе – по свойствам соединения.

Утверждение. Число различных размещений без повторений по k элементов из n равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

▲

Определение. Сочетанием без повторений по k элементов из n называется набор k элементов, полученный из множества X по схеме случайного выбора без возвращения.

С другой точки зрения, сочетание без повторений по k элементов из n – это соединение длины k, у которого:

1) $k \leq n$;
2) все элементы различные;
3) **несущественен** порядок расположения элементов.

▲

Утверждение. Число различных сочетаний без повторений по k элементов из n равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

▲

§2. Схема случайного выбора с возвращением

Определение. Схема случайного выбора с возвращением состоит в том, что из множества $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, содержащего n различных элементов, наугад извлекается один элемент α_{i_k}, фиксируется и возвращается во множество X (выбор каждого элемента равновозможен). После k таких извлечений получим соединение $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k})$ длины k, в котором возможны одинаковые элементы.

▲

Определение. Размещением с повторениями по k элементов из n называется **упорядоченный** набор k элементов, полученный из множества X по схеме случайного выбора с возвращением.

Другими словами, размещение с повторениями по k элементов из n – это соединение длины k, у которого:

1) k – натуральное число;
2) возможны одинаковые элементы;
3) **существенен** порядок расположения элементов.

▲

Утверждение. Число различных размещений с повторениями по k элементов из n равно

$$\widetilde{A_n^k} = n^k$$

▲

Определение. Сочетанием с повторениями по k элементов из n называется набор k элементов, полученный из множества X по схеме случайного выбора с возвращением.

Другими словами, сочетание с повторениями по k элементов из n – это соединение длины k, у которого:

1) k – натуральное число;

2) возможны одинаковые элементы;

3) **несущественен** порядок расположения элементов.

▲

Утверждение. Число различных сочетаний с повторениями из k элементов из n равно

$$\widetilde{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$$

▲

Определение. Перестановкой называется соединение, полученное перестановкой элементов в исходном соединении.

▲

Определение. Соединение длины k, состоящее из m различных элементов $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_m}$ с соответствующими кратностями $k_1, k_2, \dots, k_m$ имеет состав $(k_1; k_2; \dots; k_m)$.

▲

Утверждение. Число различных перестановок в соединении длины k состава $(k_1; k_2; \dots; k_m)$ равно

$$P_k(k_1,; k_2; \dots; k_m) = \frac{k!}{k_1!\, k_2! \dots k_m!}$$

в частности, если в соединении все элементы различные, то число различных перестановок равно

$$P_k = k!$$

▲

РАЗДЕЛ 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ

§3. Правила суммы и произведения

Решение многих комбинаторных задач основывается на двух правилах, называемых соответственно правилами суммы и произведения. Очевидным является

Правило суммы: если элемент x_i может быть выбран n_i способами из множества $X_i, i = 1, 2, \dots, k$, причем множества X_i не пересекаются, то один элемент из объединения множеств $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ может быть выбран $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ способами.

▲

Правило произведения: если элемент x_i может быть выбран n_i способами из множества $X_i, i = 1, 2, \dots, k$, то соединение $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ может быть выбрано $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ способами.

В частности правило произведения утверждает, что в декартовом произведении $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ содержится $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ различных соединений длины k.

Правило произведения доказывается методом математической индукции по k для множеств $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}\}$.

При $k = 2$ декартово произведение $X_1 \times X_2$ состоит из пар, которые можно расположить следующим образом:

$$(x_{11}, x_{21}), (x_{11}, x_{22}), \dots, (x_{11}, x_{2n_2}),$$

$$(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), \dots, (x_{12}, x_{2n_2}),$$

$$\dots, \dots, \dots, \dots,$$

$$(x_{1n_1}, x_{21}), (x_{1n_1}, x_{22}), \dots, (x_{1n_1}, x_{2n_2}).$$

Получена n_1 строка по n_2 пары в каждой строке. Отсюда следует, что общее число соединений длины 2, входящих в $X_1 \times X_2$, равно $n_1 \times n_2$ и справедливо правило произведения при $k = 2$.

Предположим, что правило произведения справедливо при $k = m$, то есть число соединений $(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots, x_{mi_m})$ длины m, входящих в $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ равно $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$.

Для доказательства правила произведения при $k = m + 1$ любому соединению $(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots , x_{mi_m}, x_{m+1i_{m+1}})$ длины $m + 1$ поставим во взаимно однозначное соответствие пару $((x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots , x_{mi_m}), x_{m+1i_{m+1}})$, состоящую из соединения $(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots , x_{mi_m})$ длины m из $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ и элемента $x_{m+1i_{m+1}}$ из множества X_{m+1}. По предположению при $k = m$ число соединений $(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots , x_{mi_m})$ равно $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$, а в силу доказанного правила произведения при $k = 2$ число пар $((x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots , x_{mi_m}), x_{m+1i_{m+1}})$ равно $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{m+1}$. Тем самым доказано правило произведения для любого $k \in N$.

▲

Пример 1. В магазине имеется 4 сорта шоколадных конфет и 6 сортов карамели. Сколько различных покупок конфет одного сорта можно сделать в этом магазине? Сколько можно сделать различных покупок, содержащих один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели?

Решение. Имеются множества X_1 и X_2, состоящие соответственно из сортов шоколадных конфет и карамели. Множество X_1 содержит $n_1 = 4$ элемента и множество X_2 содержит $n_2 = 6$ элементов.

Сделать покупку конфет одного сорта означает, что нужно выбрать один элемент из множества $X_1 \cup X_2$, причем множества X_1 и X_2 не пересекаются. По правилу суммы выбор такого элемента можно осуществить $n_1 + n_2 = 4 + 6 = 10$ способами.

Сделать покупку, содержащую один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели, означает, что необходимо выбрать соединение (x_1 , x_2), где

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. По правилу произведения такое соединение можно выбрать $n_1 \times n_2 = 4 \cdot 6 = 24$ способами.

Ответ. Можно сделать 10 покупок конфет одного сорта. Можно сделать 24 покупки, содержащие один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели.

§4. Соединения без повторений

Пример 2. Для множества $X = \{0, 1, 2\}$ выпишем все размещения без повторений по 2 элемента из 3: $(0,1)$; $(1,0)$; $(0,2)$; $(2,0)$; $(1,2)$; $(2,1)$.

Утверждение. Число различных размещений без повторений по k элементов из n равно

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots\left(n-(k-1)\right) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{4.1}$$

Доказательство. Рассмотрим размещение без повторений по k элементов из n:

$$(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ik}) \tag{4.2}$$

в котором, согласно определения, элемент α_{i1} можно выбрать из множества X n способами, элемент α_{i2} можно выбрать $(n-1)$ способом и т. д. Наконец, элемент α_{ik} можно выбрать $(n-(k-1))$ способом.

Следовательно, по правилу произведения соединение (4.2) можно выбрать $(n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-(k-1)))$ способом и число различных размещений без повторений по k элементов из n вычисляется по формуле (4.1). ▲

Определение. Перестановкой без повторений из k элементов называется соединение, полученное перестановкой элементов в исходном соединении $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, состоящем из k различных элементов.

Таким образом, перестановки без повторения отличаются друг от друга только расположением элементов.

▲

Например, для соединения $(0,1,2)$ выпишем все перестановки без повторений: $(0,1,2)$; $(1,0,2)$; $(1,2,0)$; $(0,2,1)$; $(2,0,1)$; $(2,1,0)$.

Утверждение. Число различных перестановок без повторений из k элементов равно $P_k = k!$

Доказательство. Рассмотрим соединение

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \tag{4.3}$$

состоящее из k различных элементов.

Любая перестановка для соединения (4.3) может быть получена из множества $Y = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ по схеме случайного выбора без возвращения и будет являться размещением без повторений по k элементов из k. Число таких размещений, а, следовательно, и число различных перестановок без повторений для соединения (4.3), равно

$$P_k = A_k^k = \frac{k!}{(k-k)!} = \frac{k!}{0!} = k! \tag{4.3}$$

▲

Например, для множества $X = \{0,1,2\}$, выпишем все сочетания без повторений по 2 элемента из 3: $(0,1)$; $(0,2)$; $(1,2)$.

Замечание. Существуют связь между размещениями, перестановками и сочетаниями. Размещение без повторений по 2 элемента из 3, полученные из множества $X = \{0,1,2\}$, разобьем на классы:

I) $(0,1), (1,0)$;

II) $(0,2), (2,0)$;

III) $(1,2), (2,1)$.

В каждый класс включены размещения, составленные из одинакового набора элементов и отличающиеся порядком их расположения, т.е. являющейся перестановками. Все размещения одного класса дают одно и то же сочетание, поэтому число сочетаний равно числу классов размещений.

Утверждение. Число различных сочетаний без повторений по k элементов из n равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Доказательство. Рассмотрим сочетание без повторений по k элементов из n

$$(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}) \tag{4.5}$$

Переставляя элементы в соединении (4.5) из одного сочетания получим $k!$ различных размещений без повторений по k элементов из n, т.е.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

▲

Пример 3. На собрании группы присутствуют 25 студентов. Сколькими способами можно: а) выбрать президиум из 3 человек; б) выбрать 3-х человек: председателя, секретаря, члена президиума; в) рассадить в президиуме 3 человек.

Решение. Задаче соответствует математическая модель-схема случайного выбора без возвращения: из множества $X = \{1,2, \dots ,25\}$, состоящего из номеров по списку студентов группы, наугад последовательно выбираются без возвращения 3 числа. В результате получим соединение, состоящее из 3 различных элементов и соответствующее возможному выбору 3 студентов. Например, $(17, 5, 24)$.

Для случая а) в полученном соединении несущественен порядок расположения элементов, следовательно, это сочетание без повторений по 3 элемента из 25, число которых равно $C_{25}^3 = 2300$.

Для случая б) уже существенен порядок расположения элементов, т.к. небезразлично кто из трех выбранных будет председателем, секретарем и членом президиуме. поэтому, полученное соединение является размещением без повторений по 3 элемента из 25, число которых равно $A_{25}^{3} = 13800$.

В случае в) число способов, которыми можно рассадить 3 студентов, выбранных в президиуме собрания, равно числу перестановок без повторений из 3 элементов равно числу перестановок без повторений из 3 элементов, т.е. $P_3 = 3! = 6$.

Ответ. Выбрать 3 студентов в президиум можно 2300 способами. Выбранных трех студентов можно рассадить в президиуме 6 способами. Выбрать 3 студентов – председателя, секретаря и члена президиума можно 13800 способами.

§5. Соединения с повторениями

Пример 4. Для множества $X = \{0,1,2\}$ выпишем все сочетания с повторениями по 2 элемента из 3: $(0,1)$; $(0,2)$; $(1,2)$; $(0,0)$; $(1,1)$; $(2;2)$.

Утверждение. Число различных размещений с повторениями по k элементов из n равно

$$\widetilde{A_n^k} = n^k \tag{5.1}$$

Доказательство. Рассмотрим размещение с повторениями по k элементов из n

$$(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}) \tag{5.2}$$

в котором, согласно определения, каждый элемент можно выбрать из множества X n способами.

Следовательно, по правилу произведения соединения (5.2) можно выбрать n_k способами и число различных размещений с повторениями по k элементов из n вычисляется по формуле (5.1).

▲

Определение. Рассмотрим соединение $(\alpha_{i1}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik})$ длины k состава $(k_1;\ k_2;\ \dots;\ k_m)$, т.е. состоящее из m различных элементов $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots,\ \alpha_{jm}$ с соответствующими кратностями $k_1, k_2, \dots, k_m$, причем $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k$. **Перестановкой с повторениями** называется соединение, полученное перестановкой элементов в исходном соединении.

▲

Например, для соединения $(1,1,2)$ длины 3 и состава $(2; 1)$ выпишем все перестановки: $(1,2,1)$; $(2,1,1)$.

Утверждение. Число различных перестановок с повторениями в соединении длины k состава $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ равно

$$P_k(k_1; k_2; \dots; k_m) = \frac{k!}{k_1!\, k_2! \dots k_m!} \qquad (5.3)$$

Доказательство. Рассмотрим соединение

$$(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}) \qquad (5.4)$$

длины k, состоящее из m различных элементов $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jm}$. В соединение (5.4) элемент α_{j1} входит с кратностью k_1. Переставляя одинаковые элементы α_{j1} в (5.4), получим одно и то же соединение, причем число таких перестановок равно $k_1!$.

Аналогично, для элемента α_{j2} имеется $k_2!$ перестановок, не изменяющих соединение (5.4) и т.д..

Наконец, для элемента α_{jm} имеется $k_m!$ перестановок, не изменяющих соединение (5.4).

Согласно правила произведения, число перестановок, не изменяющих соединение (5.4), равно $k_1!, k_2!, \dots, k_m!$.

Так как число всех перестановок в соединении (5.4) равно $k!$, то число различных перестановок равно

$$P_k(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{k!}{k_1!\, k_2! \dots k_m!}$$

▲

Утверждение. Число различных сочетаний с повторениями по k элементов из n равно

$$\widetilde{C_n^k} = C_{n+k-1}^k \qquad (5.5)$$

Доказательство. Рассмотрим сочетание с повторениями по k элементов из n

$$(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}) \qquad (5.6)$$

в которое входят m различных элементов $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jm}$ с соответствующими кратностями $k_1, k_2, \dots, k_{n.}$

Сочетанию (5.6) поставим во взаимно-однозначное соответствие соединение длины $n + k - 1$, состоящие из k единиц и $(n - 1)$ нулей, по следующей схеме:

1. Возьмём элементы исходного множества $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ и отделим их друг от друга $(n - 1)$ нулями. В результате получим набор вида

$$(\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \dots, 0, \alpha_n) \qquad (5.7)$$

2. Преобразуем набор (5.7) следующим образом: если элемент α_i входит в (5.6) с кратностью k_i, то заменим его в (5.7) k штуками единиц; если элемент α_i не входит в (5.6), то α_i удаляется из (5.7)

В результате получим соединение длины $n + k - 1$, состоящее из k единиц и $(n - 1)$ нулей.

Проиллюстрируем приведенную схему на примере сочетания с повторениями по 6 элементов из 4 $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, полученного из исходного множества $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$.

На этапе 1 ему соответствует набор

$$(\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \alpha_3, 0, \alpha_4) \qquad (5.8)$$

а на втором этапе сопоставляется соединение

$$(1,1,1,0,1,1,0,1,0) \tag{5.9}$$

в котором элемент α_1 заменен тремя единицами, соответствующим его кратности $k_1 = 3$; элемент α_2 заменен двумя единицами; элемент α_3 заменен одной единицей; элемент α_4 удален, так как не входит в рассматриваемое соединение.

Соединение (5.9) не меняется при перестановке единиц, а также при перестановке нулей. Перестановка в (5.9) единиц с нулями соответствует изменению кратностей в наборе (5.8), то есть соответствует другому исходному соединению, число которых равняется числу различных перестановок в (5.9)

$$P_9(6;3) = \frac{9!}{6!\,3!} = C_9^6$$

Вернемся к основному доказательству.

Мы получили, что сочетанию (5.6) соответствует соединение длины $n+k-1$, состоящее из k единиц и $(n-1)$ нулей вида

$$(1,1,1,0,1,0,\dots,0,1) \tag{5.10}$$

Другое сочетание с повторениями по k элементов из n может быть получено перестановкой в (5.10) единиц с нулями, так как при этом изменятся состав входящих элементов и их кратности.

Следовательно, число сочетаний с повторениями по k элементов из n равно числу различных перестановок в соединении вида (5.10), то есть

$$\widetilde{C_n^k} = P_{n+k-1}(k;n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$$

▲

Пример 5. На школьной математической олимпиаде было предложено 5 задач. Среди участников олимпиады не оказалось двух, решивших одинаковый набор задач. Найти наибольшее возможное число участников олимпиады.

Решение. У конкретного участника по каждой задаче возможно одно из двух состояний: «0» - задача не решена, «1» - задача решена. Для получения конкретного набора решенных задач из исходного множества $X = \{0; 1\}$ наугад последовательно с возвращением выбираются пять чисел. В результате получаем соединение длины 5, состоящее из «0» и «1», в которых порядок расположения элементов существенен, т.к. первый элемент соответствует первой задаче, второй – второй и т.д. Следовательно, конкретный набор решенных задач является размещением с повторениями по 5 элементов из 2, число которых $\widetilde{A_n^k} = 2^5 = 32$.

Ответ. Наибольшее возможное число участников олимпиады равно 32.

§6. Свойства биномиальных коэффициентов

Сочетание без повторений по $\boldsymbol{k}$ элементов из $\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}})$ можно рассматривать как подмножество из $\boldsymbol{k}$ элементов в множестве $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}\}$, состоящем из $\boldsymbol{n}$ различных элементов, а $\boldsymbol{C_n^k}$ есть число таких подмножеств в $\boldsymbol{X}$.

Ниже приведены некоторые свойства чисел C_n^k, которые часто называют биномиальными коэффициентами.

Утверждение. Справедливы следующие равенства:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n; \qquad (6.1)$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, k = 1, \dots, n. \qquad (6.2)$$

Доказательство. Равенство (6.1) непосредственно следует из формулы (4.4):

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}$$

Смысл равенства (6.1) состоит в том, что в множестве X число C_n^k всех -элементных подмножеств равно числу C_n^{n-k} всех $(n-k)$-элементных подмножеств, поскольку каждому k-элементному подмножеству однозначно соответствует его дополнение в множестве X

Формула (4.4) позволяет доказать равенство (6.2):

$$C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k)!}[(n-k)+k] =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k$$

▲

Утверждение: справедливы следующие равенства:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k} \qquad (6.3)$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \qquad (6.4)$$

Формула (6.3) называется формулой бинома Ньютона.

Доказательство. Формула (6.3) доказывается методом математической индукции по n.

Очевидна справедливость формулы (6.3) при $n = 1$:

$$(a+b)^1 = C_1^0 b^0 a^{1-0} + C_1^1 b^1 a^{1-1} = a + b$$

Предположим, что формула (6.3) справедлива при $n = m$ и докажем ее для $n = m + 1$:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m(a+b) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k b^k a^{m-k}(a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k b^k a^{m+1-k} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k b^{k+1} a^{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k b^k a^{m+1-k} + \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} b^k a^{m+1-k}$$

$$= C_m^0 b^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^k + C_m^{k-1}) b^k a^{m+1-k} + C_m^m b^{m+1} a^0$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k b^k a^{m+1-k},$$

так как $C_m^0 = C_{m+1}^0 = 1; C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k; C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1.$

Равенство (6.4) получается из формулы (6.3) при $a = b = 1$. Так как C_n^k равно числу -элементных подмножеств, то равенство (6.4) означает что всех подмножеств во множество X, содержащий n различных элементов, равно 2^n. ▲

Пример 6. Для множества из 10 различных элементов подсчитать: а) число подмножеств из 3 элементов; б) число подмножеств из 5 элементов; в) число всех подмножеств.

Решение. Любое подмножество является сочетанием без повторений, т.к. в нем все элементы различные и несущественен порядок их расположения.

Для случая а) каждое подмножество из 3 элементов является сочетанием без повторений по 3 элемента из 10 и, следовательно, число таких подмножеств равно

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$$

Для случая б) аналогично число подмножеств из 5 элементов равно

$$C_{10}^{5}=\frac{10!}{5!\,5!}=252$$

Для случая в) число всех подмножеств совпадает с суммой количеств всех сочетаний без повторений из 10 элементов и равно

$$\sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k}=2^{10}=1024$$

Ответ. Число подмножеств из 3 элементов равно 120, число подмножеств из 5 элементов – 252, число всех подмножеств во множестве из 10 элементов равно 1024.

Пример 7. Найти коэффициент при x^6 в выражении $(1+x^2)^4$.

Решение. Используя формулу бинома Ньютона, имеем

$$(1+x^2)^4=\sum_{k=0}^{4} C_4^k (x^2)^k$$

Степень x^6 в выражении появляется при $k=3$, следовательно, коэффициент при этой степени равен $C_4^3=4$.

Ответ. В выражении $(1+x^2)^4$ при x^6 коэффициент равен 4.

Для вычисления биномиальных коэффициентов C_n^k удобно пользоваться треугольником Паскаля:

				1					n=0
			1		1				n=1
		1		2		1			n=2
	1		3		3		1		n=3
1		4		6		4		1	n=4
	..	..	..	..	..	..	..	..	...

В -той строке стоят числа C_n^0, $C_n^1, \ldots, C_n^n$, причем $C_n^0 = C_n^n = 1$. Согласно формуле (1.4), коэффициент $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, то есть вычисляются как сумма ближайших чисел в предыдущей строке.

РАЗДЕЛ 3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

§7. Рекомендации по решению задач

Решение комбинаторных задач часто состоит из двух этапов.

Этап 1. На первом этапе необходимо построить математическую модель реальной задачи: выяснить какой набор элементов соответствует изучаемому объекту; из какого множества X этот набор элементов выбирается; по какой схеме (модели) этот набор элементов (соединение) выбирается из множества X (либо по схеме случайного выбора без возвращения, либо по схеме случайного выбора с возвращением). В результате на первом этапе получаем соединение, которое соответствует изучаемому объекту реальной задачи.

Этап 2. На втором этапе необходимо определить, исходя из условий реальной задачи, свойства полученного соединения: важен или не важен порядок расположения элементов; возможность повторения элементов или все элементы различные. В зависимости от этих свойств соединение согласно

Таблице 1 относится к одному из 4 видов:

1) размещение без повторений;
2) размещение с повторениями;
3) сочетание без повторений;
4) сочетание с повторениями.

В Таблице 1 приведены также формулы для вычисления количества соединений в зависимости от вида соединения, где n- число элементов в исходном множестве X, k–длина построенного соединения.

Таблица 1

Свойства	Порядок важен	Порядок не важен
Все элементы различные	Размещение без повторений по k из n $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Сочетание без повторений по k из n $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
Элементы могут повторяться	Размещение с повторениями по k из n $\widetilde{A_n^k} = n^k$	Сочетание с повторениями по k из n $\widetilde{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$

Применение предлагаемого метода проиллюстрируем на конкретной задаче.

Пример 8. Сколько существует различных вариантов доставки на 5 этажей стройки 6 ящиков различных материалов?

Решение проведём по этапам согласно изложенного алгоритма моделирования комбинаторной задачи.

Этап 1. Математической моделью данной задачи является схема случайного выбора с возвращением. Из множества этажей $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ последовательно наугад выбирается этаж и закрепляется соответственно за первым ящиком, а затем номер этажа возвращается назад во множество X, т.к. на данный этаж могут быть доставлены и другие ящики. После 6 таких извлечений этажей с возвращением получим соединение длины 6 соответствующее распределению по этажам

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \tag{7.1}$$

Этап 2. Определим вид полученного соединения (7.1) руководствуясь Таблицей 1. Согласно условию задачи в соединении (7.1) важен порядок расположения элементов (ящики являются различными) и элементы могут повторяться. Поэтому полученное соединение (7.1) является размещением с повторениями по 6 элементов из 5. Число таких размещений равно

$$\widetilde{A_5^6} = 5^6 = 15625$$

Ответ. Существует 15625 вариантов доставки 6 ящиков различных материалов по 5 этажам стройки.

§8. Примеры решения задач

Задача 1. У одного человека имеется 7 книг по математике, а у другого - 9. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?

Решение. Однократный обмен является соединением (x, y), где книга x от одного, а книга y от другого меняющегося. Это соединение по правилу произведения может быть реализовано $7 \cdot 9 = 63$ способами.

Ответ. Существует 63 варианта обмена.

Задача 2. В классе из 30 учеников учитель назначает 2 дежурных. Сколько существует различных вариантов

Решение. Выбор дежурных производится из множества $X = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$, состоящего из номеров учащихся по списку. Назначение дежурных является построением соединения (x, y), в котором элементы не повторяются и их порядок несущественен, т.е. это соединение является сочетанием без повторений по 2 элемента из 30 и число таких сочетаний равно

$$C_{30}^2 = \frac{30!}{2!\,28!} = 435.$$

Ответ. Существует 435 различных вариантов назначения дежурных.

Задача 3. В лифт девятиэтажного дома вошли 4 человека (на первом этаже). Сколько всего имеется способов их выхода на этажах?

Решение. В данной задаче этажи дома из множества $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ распределяются по 4 людям, т.е. реализуется схема случайного выбора с возвращением из множества X четырех элементов. Поскольку порядок распределения является существенным, то конкретное распределение является размещением с повторениями по 4 элемента (люди) из 8 (этажи 2…9), число которых равно:

$$A_8^4 = 8^4 = 4096$$

Ответ. Существует 4096 различных вариантов выхода из лифта.

Задача 4. Среди учеников класса пятеро бегают быстрее других, четверо прыгают выше других, трое прыгают дальше других. Сколькими способами учитель может составить команду из 6 человек, в которую входят по 2 участника по каждому из видов спорта?

Решение. Рассматривается три множества учеников: $X = \{$«Бегуны»$\}$ из 5 человек, $Y = \{$«Прыгуны выше»$\}$ из 4 человек, $Z = \{$«Прыгуны дальше»$\}$ из 3 человек, которые не пересекаются.

В первую очередь необходимо определить, сколько способов выбора в команду существует по каждому из виду спорта (рассмотреть соединения), а затем по правилу произведения получаем количество всевозможных команд

$$C_5^2 \times C_5^2 \times C_3^2 = 180$$

Ответ. команду из 6 спортсменов можно сформировать 180 способами.

Задача 5. Сколькими способами владелец одной карточки лотереи «Спортлото» (5 из 36) может зачеркнуть 5 номеров?

Решение. Задача аналогична выбору 5 элементов из 36. Естественно решать данную задачу по формуле числа сочетаний по 5 из 36

$$C_{36}^5 = \frac{36!}{5!\,31!} = 376992$$

Ответ. Существует 376992 способов.

Задача 6. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123153?

Решение. Рассматривается множество элементов $X = \{2, 3, 1, 5\}$. Рассмотрим четырехзначное число как кортеж цифр. Поскольку порядок является существенным, то конкретное число является размещением с повторениями по 4 элемента из 4 и их количество равно:

$$A_4^4 = 4^4 = 256$$

Ответ. Можно составить 256 различных чисел.

Задача 7. В пассажирском поезде 8 вагонов. Сколькими способами можно разместить в поезде 5 человек так, чтобы они ехали в разных вагонах?

Решение. Выбор вагонов производится из множества $X = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$, состоящего из их номеров в составе. Рассадка является построением соединения $(x_1, x_2, .., x_5)$, в котором элементы не повторяются и их порядок существенен, т.е. это соединение является размещением без повторений по 5 элемента из 8 и число таких сочетаний равно

$$A_8^5 = \frac{8!}{3!} = 6720.$$

Ответ. Существует 6720 различных вариантов размещения пассажиров.

РАЗДЕЛ 4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется соединением?
2. В чем различие между схемами случайного выбора с возвращением и без возвращения?
3. Какие существуют виды соединений?
4. По каким свойствам определяется вид соединения?
5. Чем отличаются сочетания от размещений?
6. Укажите общие и различные свойства у размещений без повторений и сочетаний без повторений.
7. Укажите общие и различные свойства у размещений с повторениями и сочетаний с повторениями.
8. Укажите общие и различные свойства у сочетаний без повторений и сочетаний с повторениями.
9. Укажите общие и различные свойства у размещений без повторений и размещений с повторениями.
10. Укажите связь между размещениями, перестановками и сочетаниями.
11. Каким видом соединения является подмножество k различных элементов во множестве из n элементов?
12. Укажите число различных подмножеств по k элементов во множестве из n элементов.
13. Укажите число всех подмножеств во множестве из n элементов.
14. На какой формуле основано построение треугольника Паскаля?

Задания

1. Сколько существует различных вариантов выбора старосты и помощника старосты в группе из 25 студентов.

2. Замок автоматической камеры хранения содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 10 секторов. В каждом секторе первого диска написана одна буква русского алфавита, а на трех последующих дисках в каждом секторе по одному целому числу от 0 до 9. Шифр набирается установкой определенного сектора на каждом диске. Сколько существует различных вариантов шифра при закрытии замка?

3. Для школьного спектакля из 17 мальчиков необходимо выбрать четверых на роли Атоса, Партоса, Арамиса и д'Артаньяна. Сколькими способами можно произвести такой выбор?

4. На вершину горы ведут 7 тропинок. Сколькими способами турист может подняться в гору и потом спуститься с нее, если подъем и спуск должны происходить по различным тропинкам?

5. Сколько существует различных вариантов доставки 4 одинаковых ящиков материалов на 6 этажей стройки.

6. В автомате по продаже открыток имеется 3 различных вида открыток. Сколькими способами можно выбрать 5 открыток?

7. Сколькими способами можно распределить 12 различных учебников между тремя студентами?

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, А.Н. Виленкин. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006 – 400 с.

2. Стребков Е.В. Комбинаторика: учебное пособие / Е.В. Стребков, В.С. Желтухин, И.А. Бородаев. – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 104 с.

3. Виленкин Н.Я. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики / Н.Я. Виленкин, В.Г. Потапов. – М.: Просвещение, 1979. – 114 с.