Математические модели теоретической физики

(математика и компьютерные науки)

Математические основы физики

(математика и информатика)

профессор Игнатьев Юрий Геннадиевич

Казанский федеральный университет
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Казань, VI семестр, 2015 г.

Содержание лекции

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Лекция VII: Движение в центрально - симметрическом поле

Содержание лекции

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Постановка задачи
- Криволинейные координаты и принцип общей ковариантности
- Пример уравнений движения в полярной системе координат
- Уравнения движения в сферической системе координат и интегралы движения
- Задача о движении двух тел

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Постановка задачи
- Криволинейные координаты и принцип общей ковариантности
- Пример уравнений движения в полярной системе координат
- Уравнения движения в сферической системе координат и интегралы движения
- Задача о движении двух тел

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Постановка задачи
- Криволинейные координаты и принцип общей ковариантности
- Пример уравнений движения в полярной системе координат
- Уравнения движения в сферической системе координат и интегралы движения
- Задача о движении двух тел

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Постановка задачи
- Криволинейные координаты и принцип общей ковариантности
- Пример уравнений движения в полярной системе координат
- Уравнения движения в сферической системе координат и интегралы движения
- Задача о движении двух тел

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Постановка задачи
- Криволинейные координаты и принцип общей ковариантности
- Пример уравнений движения в полярной системе координат
- Уравнения движения в сферической системе координат и интегралы движения
- Задача о движении двух тел

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Постановка задачи
- Криволинейные координаты и принцип общей ковариантности
- Пример уравнений движения в полярной системе координат
- Уравнения движения в сферической системе координат и интегралы движения
- Задача о движении двух тел

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I. Механика. М: Наука – любое издание, начиная с 1965 г.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. – *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf.*
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

- Рассмотрим задачу о движении частицы во внешнем центрально - симметрическом поле $U(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$. Запишем функцию Лагранжа для такой системы:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(r). \quad (1)$$

- Тогда с учетом правила дифференцирования

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x^k} = \partial_k U(r) = \frac{dU}{dr}\partial_k\sqrt{x^2+y^2+z^2} = U'_r\frac{x^k}{r} \Rightarrow \nabla U = U'\frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2)$$

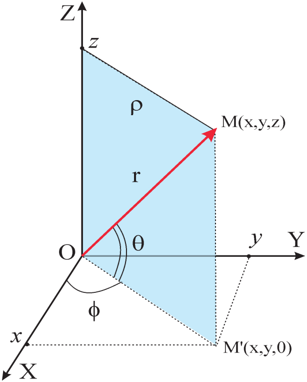


Figure 1. Сферическая система координат

уравнения Эйлера примут вид:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -U'\frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3)$$

Для их решения необходимо перейти в сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x = & r\cos\varphi\cos\theta; \\ y = & r\sin\varphi\cos\theta; \quad \varphi\in[0,2\pi]; \\ z = & r\sin\theta & \theta\in[-\pi/2,\pi/2] \end{cases} \quad (4)$$

- Рассмотрим задачу о движении частицы во внешнем центрально - симметрическом поле $U(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$. Запишем функцию Лагранжа для такой системы:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{2} - U(r). \qquad (1)$$

- Тогда с учетом правила дифференцирования

[illegible] (2)

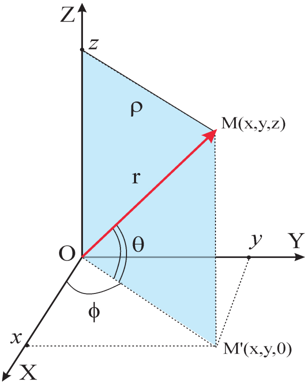


Figure 1. Сферическая система координат

уравнения Эйлера примут вид:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -U'\frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (3)$$

Для их решения необходимо перейти в сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x = & r\cos\varphi\cos\theta; \\ y = & r\sin\varphi\cos\theta; \quad \varphi \in [0, 2\pi); \\ z = & r\sin\theta \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases} \qquad (4)$$

- Рассмотрим задачу о движении частицы во внешнем центрально - симметрическом поле $U(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$. Запишем функцию Лагранжа для такой системы:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{2} - U(r). \tag{1}$$

- Тогда с учетом правила дифференцирования

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x^i} \equiv \partial_i U(r) = \frac{dU}{dr}\partial_i\sqrt{x^2+y^2+z^2} = U'_r\frac{x^i}{r} \Rightarrow \nabla U = U'\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{2}$$

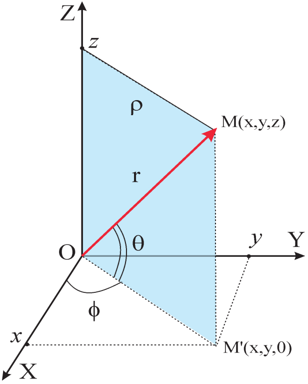


Figure 1. Сферическая система координат

уравнения Эйлера примут вид:

Для их решения необходимо перейти в сферическую систему координат:

- Рассмотрим задачу о движении частицы во внешнем центрально - симметрическом поле $U(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$. Запишем функцию Лагранжа для такой системы:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{2} - U(r). \qquad (1)$$

- Тогда с учетом правила дифференцирования

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x^i} \equiv \partial_i U(r) = \frac{dU}{dr}\partial_i\sqrt{x^2+y^2+z^2} = U'_r\frac{x^i}{r} \Rightarrow \nabla U = U'\frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (2)$$

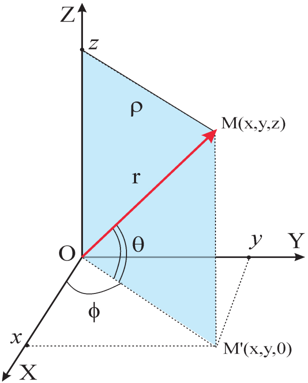


Figure 1. Сферическая система координат

уравнения Эйлера примут вид:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -U'\frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (3)$$

Для их решения необходимо перейти в сферическую систему координат:

$$\left\{\begin{array}{lll} x = & r\cos\varphi\cos\theta; & \\ y = & r\sin\varphi\cos\theta; & \varphi\in[0,2\pi]; \\ z = & r\sin\theta & \theta\in[-\pi/2,\pi/2] \end{array}\right. . \qquad (4)$$

Постановка задачи о движении частицы в центрально - симметрическом поле

- Рассмотрим задачу о движении частицы во внешнем центрально - симметрическом поле $U(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$. Запишем функцию Лагранжа для такой системы:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{2} - U(r). \tag{1}$$

- Тогда с учетом правила дифференцирования

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x^i} \equiv \partial_i U(r) = \frac{dU}{dr}\partial_i\sqrt{x^2+y^2+z^2} = U'_r\frac{x^i}{r} \Rightarrow \nabla U = U'\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{2}$$

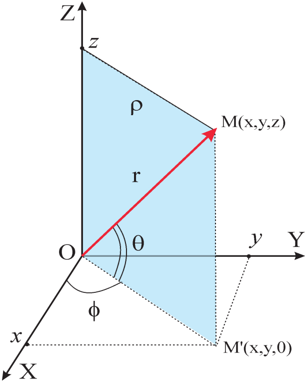


Figure 1. Сферическая система координат

уравнения Эйлера примут вид:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -U'\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{3}$$

Для их решения необходимо перейти в сферическую систему координат:

$$\left\{\begin{array}{lll} x = & r\cos\varphi\cos\theta; & \\ y = & r\sin\varphi\cos\theta; & \varphi\in[0,2\pi]; \\ z = & r\sin\theta & \theta\in[-\pi/2,\pi/2] \end{array}\right. . \tag{4}$$

- Рассмотрим задачу о движении частицы во внешнем центрально - симметрическом поле $U(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$. Запишем функцию Лагранжа для такой системы:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{2} - U(r). \qquad (1)$$

- Тогда с учетом правила дифференцирования

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x^i} \equiv \partial_i U(r) = \frac{dU}{dr}\partial_i\sqrt{x^2+y^2+z^2} = U'_r\frac{x^i}{r} \Rightarrow \nabla U = U'\frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (2)$$

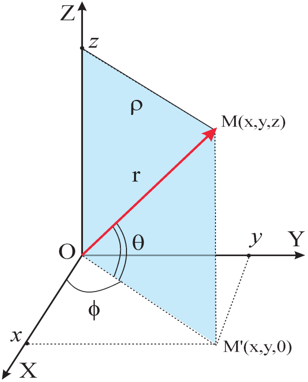


Figure 1. Сферическая система координат

уравнения Эйлера примут вид:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -U'\frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (3)$$

Для их решения необходимо перейти в сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x = & r\cos\varphi\cos\theta; \\ y = & r\sin\varphi\cos\theta; \qquad \varphi\in[0,2\pi]; \\ z = & r\sin\theta \qquad \theta\in[-\pi/2,\pi/2] \end{cases} .(4)$$

- Рассмотрим задачу о движении частицы во внешнем центрально - симметрическом поле $U(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$. Запишем функцию Лагранжа для такой системы:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{2} - U(r). \qquad (1)$$

- Тогда с учетом правила дифференцирования

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x^i} \equiv \partial_i U(r) = \frac{dU}{dr}\partial_i\sqrt{x^2+y^2+z^2} = U'_r\frac{x^i}{r} \Rightarrow \nabla U = U'\frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (2)$$

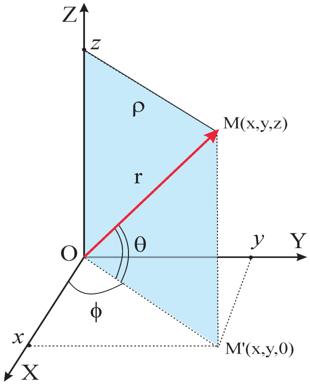


Figure 1. Сферическая система координат

уравнения Эйлера примут вид:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -U'\frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (3)$$

Для их решения необходимо перейти в сферическую систему координат:

$$\left\{\begin{array}{lll} x = & r\cos\varphi\cos\theta; & \\ y = & r\sin\varphi\cos\theta; & \varphi\in[0,2\pi]; \\ z = & r\sin\theta & \theta\in[-\pi/2,\pi/2] \end{array}\right. .(4)$$

- Все измеряемые классические физические величины являются тензорными объектами (иначе был бы невозможен их однозначный пересчет из одной системы отсчета в другую), поэтому все фундаментальные уравнения, описывающие физические объекты, должны иметь тензорный характер.

- Все измеряемые классические физические величины являются тензорными объектами (иначе был бы невозможен их однозначный пересчет из одной системы отсчета в другую), поэтому все фундаментальные уравнения, описывающие физические объекты, должны иметь тензорный характер.

- Все измеряемые классические физические величины являются тензорными объектами (иначе был бы невозможен их однозначный пересчет из одной системы отсчета в другую), поэтому все фундаментальные уравнения, описывающие физические объекты, должны иметь тензорный характер.
- 1. Пусть две системы координат, $\mathbf{X}$, и $\mathbf{X}'$, связаны преобразованием:
  $$\begin{aligned} \mathbf{X}' \to \mathbf{X}: \quad & x^{i'} = f^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad (i' = \overline{1,n}); \\ \mathbf{X} \to \mathbf{X}': \quad & x^{i} = g^{i}(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}), \quad (i = \overline{1,n}); \end{aligned} \tag{5}$$
  Пусть далее:
  2. $$C^{i'}_{k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}, \quad \det(C^{i'}_k) \neq 0; \quad C^{i}_{k'} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}, \quad \det(C^{i}_{k'}) \neq 0 \tag{6}$$
  – матрицы прямого и обратного преобразований, связанные соотношением (показать, почему, якобиан, невырожденность):
  3. $$C^{i'}_{k} C^{k}_{j'} = \delta^{i'}_{j'}; \quad C^{i}_{k'} C^{k'}_{j} = \delta^{i}_{j} \Rightarrow \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}. \tag{7}$$
  Тогда величины $\mathbf{T}^r_{n-r}$ с координатами $T^{i_1 \ldots i_r}_{k_{r+1} \ldots k_n}$, преобразующиеся при преобразовании координат (5) по закону:
  $$T^{i'_1 \ldots i'_r}_{k'_{r+1} \ldots k'_n} = \overbrace{C^{i'_1}_{i_1} \cdots C^{i'_r}_{i_r}}^{(r)} \underbrace{C^{k_{r+1}}_{k'_{r+1}} \cdots C^{k_n}_{k'_n}}_{(n-r)} T^{i_1 \ldots i_r}_{k_{r+1} \ldots k_n} \tag{8}$$
  $$\Rightarrow \qquad \mathbf{T'}^r_{n-r} = \mathbf{C}^r (\mathbf{C}^{-1})^{n-r} \mathbf{T}^r_{n-r}, \tag{9}$$
  называются тензорами валентности n: r раз контрвариантными и $n-r$ раз ковариантными.

- Все измеряемые классические физические величины являются тензорными объектами (иначе был бы невозможен их однозначный пересчет из одной системы отсчета в другую), поэтому все фундаментальные уравнения, описывающие физические объекты, должны иметь тензорный характер.
- 1. Пусть две системы координат, $\mathbf{X}$, и $\mathbf{X}'$, связаны преобразованием:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' \to \mathbf{X}: &\quad x^{i'} = f^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad (i' = \overline{1,n}); \\ \mathbf{X} \to \mathbf{X}': &\quad x^{i} = g^{i}(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}), \quad (i = \overline{1,n}); \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть далее:

2. $$C^{i'}_k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}; \quad \det(C^{i'}_k) \neq 0; \quad C^{k}_{i'} = \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{i'}}; \quad \det(C^{k}_{i'}) \neq 0 \tag{6}$$

– матрицы прямого и обратного преобразований, связанные соотношением (показать, почему, якобиан, невырожденность):

3. $$C^{i'}_k C^{k}_{j'} = \delta^{i'}_{j'}; \quad C^{k}_{i'} C^{i'}_{l} = \delta^{k}_{l} \Rightarrow C^{-1}C = 1 \tag{7}$$

Тогда величины $\mathbf{T}^r_{n-r}$ с координатами $T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}$, преобразующиеся при преобразовании координат (5) по закону:

$$T^{i'_1\ldots i'_r}_{k'_{r+1}\ldots k'_n} = \overbrace{C^{i'_1}_{i_1}\cdots C^{i'_r}_{i_r}}^{(r)} \underbrace{C^{k_{r+1}}_{k'_{r+1}}\cdots C^{k_n}_{k'_n}}_{(n-r)} T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{T}'^r_{n-r} = \mathbf{C}^r(\mathbf{C}^{-1})^{n-r}\mathbf{T}^r_{n-r}, \tag{9}$$

называются тензорами валентности n: r раз контрвариантными и $n-r$ раз ковариантными.

- Все измеряемые классические физические величины являются тензорными объектами (иначе был бы невозможен их однозначный пересчет из одной системы отсчета в другую), поэтому все фундаментальные уравнения, описывающие физические объекты, должны иметь тензорный характер.
- 1. Пусть две системы координат, $\mathbf{X}$, и $\mathbf{X}'$, связаны преобразованием:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' \to \mathbf{X}: &\quad x^{i'} = f^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad (i' = \overline{1,n}); \\ \mathbf{X} \to \mathbf{X}': &\quad x^{i} = g^{i}(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}), \quad (i = \overline{1,n}); \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть далее:

2. $$C^{i'}_{k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k}}; \quad \det(C^{i'}_{k}) \neq 0; \quad C^{i}_{k'} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}; \quad \det(C^{i}_{k'}) \neq 0 \tag{6}$$

– матрицы прямого и обратного преобразований, связанные соотношением (показать, почему, якобиан, невырожденность):

3.

Тогда величины $\mathbf{T}^{r}_{n-r}$ с координатами $T^{i_1 \ldots i_r}_{k_{r+1} \ldots k_n}$, преобразующиеся при преобразовании координат (5) по закону:

$$T^{i'_1 \ldots i'_r}_{k'_{r+1} \ldots k'_n} = \overbrace{C^{i'_1}_{i_1} \cdots C^{i'_r}_{i_r}}^{(r)} \underbrace{C^{k_{r+1}}_{k'_{r+1}} \cdots C^{k_n}_{k'_n}}_{(n-r)} T^{i_1 \ldots i_r}_{k_{r+1} \ldots k_n} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{T'}^{r}_{n-r} = \mathbf{C}^{r}(\mathbf{C}^{-1})^{n-r}\mathbf{T}^{r}_{n-r}, \tag{9}$$

называются тензорами валентности n: r раз контрвариантными и $n-r$ раз ковариантными.

Принцип общей ковариантности и определение тензора

- Все измеряемые классические физические величины являются тензорными объектами (иначе был бы невозможен их однозначный пересчет из одной системы отсчета в другую), поэтому все фундаментальные уравнения, описывающие физические объекты, должны иметь тензорный характер.
- 1. Пусть две системы координат, $\mathbf{X}$, и $\mathbf{X}'$, связаны преобразованием:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{X}' \to \mathbf{X}: & x^{i'} = f^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad (i' = \overline{1, n}); \\ \mathbf{X} \to \mathbf{X}': & x^i = g^i(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}), \quad (i = \overline{1, n}); \end{array} \tag{5}$$

   Пусть далее:

2. $$C^{i'}_k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}; \quad \det(C^{i'}_k) \neq 0; \quad C^i_{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}; \quad \det(C^i_{k'}) \neq 0 \tag{6}$$

   – матрицы прямого и обратного преобразований, связанные соотношением (показать, почему, якобиан, невырожденность):

3.

   Тогда величины $\mathbf{T}^r_{n-r}$ с координатами $T^{i_1 \cdots i_r}_{k_{r+1} \cdots k_n}$, преобразующиеся при преобразовании координат (5) по закону:

$$T^{i'_1 \cdots i'_r}_{k'_{r+1} \cdots k'_n} = \overbrace{C^{i'_1}_{i_1} \cdots C^{i'_r}_{i_r}}^{(r)} \underbrace{C^{k_{r+1}}_{k'_{r+1}} \cdots C^{k_n}_{k'_n}}_{(n-r)} T^{i_1 \cdots i_r}_{k_{r+1} \cdots k_n} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{T}'^r_{n-r} = \mathbf{C}^r (\mathbf{C}^{-1})^{n-r} \mathbf{T}^r_{n-r}, \tag{9}$$

   называются тензорами валентности n: r раз контрвариантными и $n - r$ раз ковариантными.

Принцип общей ковариантности и определение тензора

- Все измеряемые классические физические величины являются тензорными объектами (иначе был бы невозможен их однозначный пересчет из одной системы отсчета в другую), поэтому все фундаментальные уравнения, описывающие физические объекты, должны иметь тензорный характер.
- 1. Пусть две системы координат, $\mathbf{X}$, и $\mathbf{X}'$, связаны преобразованием:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{X}' \to \mathbf{X}: & x^{i'} = f^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n), & (i' = \overline{1,n}); \\ \mathbf{X} \to \mathbf{X}': & x^i = g^i(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}), & (i = \overline{1,n}); \end{array} \qquad (5)$$

Пусть далее:

2. $$C^{i'}_k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}; \quad \det(C^{i'}_k) \neq 0; \quad C^i_{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}; \quad \det(C^i_{k'}) \neq 0 \qquad (6)$$

– матрицы прямого и обратного преобразований, связанные соотношением (показать, почему, якобиан, невырожденность):

3. $$C^{i'}_k C^j_{i'} = \delta^i_j; \quad C^{i'}_k C^k_{j'} = \delta^{i'}_{j'}; \Rightarrow \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = 1. \qquad (7)$$

Тогда величины $\mathbf{T}^r_{n-r}$ с координатами $T^{i_1 \ldots i_r}_{k_{r+1} \ldots k_n}$, преобразующиеся при преобразовании координат (5) по закону:

$$T^{i'_1 \ldots i'_r}_{k'_{r+1} \ldots k'_n} = \overbrace{C^{i'_1}_{i_1} \cdots C^{i'_r}_{i_r}}^{(r)} \underbrace{C^{k_{r+1}}_{k'_{r+1}} \cdots C^{k_n}_{k'_n}}_{(n-r)} T^{i_1 \ldots i_r}_{k_{r+1} \ldots k_n} \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{T}'^r_{n-r} = \mathbf{C}^r (\mathbf{C}^{-1})^{n-r} \mathbf{T}^r_{n-r}, \qquad (9)$$

называются тензорами валентности n: r раз контрвариантными и $n-r$ раз ковариантными.

- Все измеряемые классические физические величины являются тензорными объектами (иначе был бы невозможен их однозначный пересчет из одной системы отсчета в другую), поэтому все фундаментальные уравнения, описывающие физические объекты, должны иметь тензорный характер.
- 1. Пусть две системы координат, $\mathbf{X}$, и $\mathbf{X}'$, связаны преобразованием:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' \to \mathbf{X}: \quad & x^{i'} = f^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (i' = \overline{1,n}); \\ \mathbf{X} \to \mathbf{X}': \quad & x^i = g^i(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}), \quad (i = \overline{1,n}); \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть далее:

2. $$C^{i'}_k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}; \quad \det(C^{i'}_k) \neq 0; \quad C^i_{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}; \quad \det(C^i_{k'}) \neq 0 \tag{6}$$

– матрицы прямого и обратного преобразований, связанные соотношением (показать, почему, якобиан, невырожденность):

3. $$C^{i'}_k C^j_{i'} = \delta^i_j; \quad C^{i'}_k C^k_{j'} = \delta^{i'}_{j'}; \Rightarrow \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{1}. \tag{7}$$

Тогда величины $\mathbf{T}^r_{n-r}$ с координатами $T^{i_1\dots i_r}_{k_{r+1}\dots k_n}$, преобразующиеся при преобразовании координат (5) по закону:

$$T^{i'_1\dots i'_r}_{k'_{r+1}\dots k'_n} = \overbrace{C^{i'_1}_{i_1}\cdots C^{i'_r}_{i_r}}^{(r)} \underbrace{C^{k_{r+1}}_{k'_{r+1}}\cdots C^{k_n}_{k'_n}}_{(n-r)} T^{i_1\dots i_r}_{k_{r+1}\dots k_n} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{T'}^r_{n-r} = \mathbf{C}^r(\mathbf{C}^{-1})^{n-r}\mathbf{T}^r_{n-r}, \tag{9}$$

называются тензорами валентности n: r раз контрвариантными и $n-r$ раз ковариантными.

Принцип общей ковариантности и определение тензора

- 4. Все измеряемые классические физические величины являются тензорными объектами (иначе был бы невозможен их однозначный пересчет из одной системы отсчета в другую), поэтому все фундаментальные уравнения, описывающие физические объекты, должны иметь тензорный характер.
- 1. Пусть две системы координат, $\mathbf{X}$, и $\mathbf{X}'$, связаны преобразованием:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{X}' \to \mathbf{X}: & x^{i'} = f^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad (i' = \overline{1,n}); \\ \mathbf{X} \to \mathbf{X}': & x^i = g^i(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}), \quad (i = \overline{1,n}); \end{array} \tag{5}$$

Пусть далее:

2. $$C^{i'}_k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}; \quad \det(C^{i'}_k) \neq 0; \quad C^i_{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}; \quad \det(C^i_{k'}) \neq 0 \tag{6}$$

– матрицы прямого и обратного преобразований, связанные соотношением (показать, почему, якобиан, невырожденность):

3. $$C^{i'}_k C^j_{i'} = \delta^i_j; \quad C^{i'}_k C^k_{j'} = \delta^{i'}_{j'}; \Rightarrow \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{1}. \tag{7}$$

Тогда величины $\mathbf{T}^r_{n-r}$ с координатами $T^{i_1\cdots i_r}_{k_{r+1}\cdots k_n}$, преобразующиеся при преобразовании координат (5) по закону:

$$T^{i'_1\cdots i'_r}_{k'_{r+1}\cdots k'_n} = \overbrace{C^{i'_1}_{i_1}\cdots C^{i'_r}_{i_r}}^{(r)} \underbrace{C^{k_{r+1}}_{k'_{r+1}}\cdots C^{k_n}_{k'_n}}_{(n-r)} T^{i_1\cdots i_r}_{k_{r+1}\cdots k_n} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{T'}^r_{n-r} = \mathbf{C}^r(\mathbf{C}^{-1})^{n-r}\mathbf{T}^r_{n-r}, \tag{9}$$

называются тензорами валентности n: r раз контрвариантными и $n-r$ раз ковариантными.

- Все измеряемые классические физические величины являются тензорными объектами (иначе был бы невозможен их однозначный пересчет из одной системы отсчета в другую), поэтому все фундаментальные уравнения, описывающие физические объекты, должны иметь тензорный характер.
- 1. Пусть две системы координат, $\mathbf{X}$, и $\mathbf{X}'$, связаны преобразованием:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' \to \mathbf{X}: &\quad x^{i'} = f^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad (i' = \overline{1,n}); \\ \mathbf{X} \to \mathbf{X}': &\quad x^{i} = g^{i}(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}), \quad (i = \overline{1,n}); \end{aligned} \qquad (5)$$

Пусть далее:

2. $$C^{i'}_k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}; \quad \det(C^{i'}_k) \neq 0; \quad C^{i}_{k'} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}; \quad \det(C^{i}_{k'}) \neq 0 \qquad (6)$$

– матрицы прямого и обратного преобразований, связанные соотношением (показать, почему, якобиан, невырожденность):

3. $$C^{i'}_k C^j_{i'} = \delta^i_j; \quad C^{i'}_k C^k_{j'} = \delta^{i'}_{j'}; \Rightarrow \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{1}. \qquad (7)$$

Тогда величины $\mathbf{T}^r_{n-r}$ с координатами $T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}$, преобразующиеся при преобразовании координат (5) по закону:

$$T^{i'_1\ldots i'_r}_{k'_{r+1}\ldots k'_n} = \overbrace{C^{i'_1}_{i_1}\cdots C^{i'_r}_{i_r}}^{(r)} \underbrace{C^{k_{r+1}}_{k'_{r+1}}\cdots C^{k_n}_{k'_n}}_{(n-r)} T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{T'}^r_{n-r} = \mathbf{C}^r(\mathbf{C}^{-1})^{n-r}\mathbf{T}^r_{n-r}, \qquad (9)$$

называются тензорами валентности n: r раз контрвариантными и $n-r$ раз ковариантными.

4. Для дифференциальных тензорных уравнений применяется аппарат ковариантного дифференцирования, поскольку частные производные от тензора валентности 0 (скаляр) являются компонентами ковариантного тензора валентности 1 (показать, почему), а, например, частные производные от ковариантного вектора уже не являются компонентами тензора (показать почему).

- Определение ковариантных производных от тензора:

$$\nabla_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} = \partial_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} + T^{m\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_1}_{jm} + \cdots + T^{i_1\ldots m}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_r}_{jm}$$
$$- T^{i_1\ldots i_r}_{m\ldots k_n}\Gamma^{m}_{jk_{r+1}} - \cdots - T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots m}\Gamma^{m}_{jk_n}, \quad (10)$$

  — все контрвариантные индексы обрабатываются символами Кристоффеля 2-рода со знаком «+», все ковариантные индексы — символами Кристоффеля со знаком «-».

- В результате применения к тензору $\mathbf{T}^r_{n-r}$ операции ковариантного дифференцирования получается тензор валентности на 1 больше, r раз контрвариантный и n-r+1 ковариантный, $\mathbf{T}^r_{n-r+1}$.

- **Лемма о ковариантном обобщении**
  Пусть в некоторой системе координат $\mathbf{X}_*$ для координат тензора $\mathbf{A}^r_{n-r}$ справедливы соотношения (знак $\underset{*}{=}$ как раз и означает, что данные соотношения имеют место быть в системе координат $\mathbf{X}_*$):

$$A^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} \underset{*}{=} T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}, \quad (11)$$

  где $\mathbf{T}^r_{n-r}$ – выражение в явно тензорной форме. Тогда соотношение (11) справедливо в любой системе координат.

- Для дифференциальных тензорных уравнений применяется аппарат ковариантного дифференцирования, поскольку частные производные от тензора валентности 0 (скаляр) являются компонентами ковариантного тензора валентности 1 (показать, почему), а, например, частные производные от ковариантного вектора уже не являются компонентами тензора (показать почему).
- Определение ковариантных производных от тензора:

$$\nabla_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} = \partial_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} + T^{m\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_1}_{jm} + \cdots + T^{i_1\ldots m}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_r}_{jm}$$
$$-T^{i_1\ldots i_r}_{m\ldots k_n}\Gamma^m_{jk_{r+1}} - \cdots - T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots m}\Gamma^m_{jk_n}, \quad (10)$$

  — все контрвариантные индексы обрабатыватся символами Кристоффеля 2-рода со знаком «+», все ковариантные индексы — символами Кристоффеля со знаком «-».
- В результате применения к тензору $\mathbf{T}^r_{n-r}$ операции ковариантного дифференцирования получается тензор валентности на 1 больше, r раз контрвариантный и n-r+1 ковариантный, $\mathbf{T}^r_{n-r+1}$.
- **Лемма о ковариантном обобщении**
  Пусть в некоторой системе координат $\mathbf{X}_*$ для координат тензора $\mathbf{A}^r_{n-r}$ справедливы соотношения (знак $\underset{*}{=}$ как раз и означает, что данные соотношения имеют место быть в системе координат $\mathbf{X}_*$):

  где $\mathbf{T}^r_{n-r}$ – выражение в явно тензорной форме. Тогда соотношение (11) справедливо в любой системе координат.

- Для дифференциальных тензорных уравнений применяется аппарат ковариантного дифференцирования, поскольку частные производные от тензора валентности 0 (скаляр) являются компонентами ковариантного тензора валентности 1 (показать, почему), а, например, частные производные от ковариантного вектора уже не являются компонентами тензора (показать почему).
- Определение ковариантных производных от тензора:

$$\nabla_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} = \partial_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} + T^{m\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_1}_{jm} + \cdots + T^{i_1\ldots m}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_r}_{jm} - T^{i_1\ldots i_r}_{m\ldots k_n}\Gamma^{m}_{jk_{r+1}} - \cdots - T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots m}\Gamma^{m}_{jk_n}, \quad (10)$$

  — все контрвариантные индексы обрабатыватся символами Кристоффеля 2-рода со знаком «+», все ковариантные индексы — символами Кристоффеля со знаком «-».
- В результате применения к тензору $\mathbf{T}^r_{n-r}$ операции ковариантного дифференцирования получается тензор валентности на 1 больше, r раз контрвариантный и n-r+1 ковариантный, $\mathbf{T}^r_{n-r+1}$.
- **Лемма о ковариантном обобщении**
  Пусть в некоторой системе координат $\mathbf{X}_*$ для координат тензора $\mathbf{A}^r_{n-r}$ справедливы соотношения (знак $\underset{*}{=}$ как раз и означает, что данные соотношения имеют место быть в системе координат $\mathbf{X}_*$):

  где $\mathbf{T}^r_{n-r}$ – выражение в явно тензорной форме. Тогда соотношение (11) справедливо в любой системе координат.

Ковариантное дифференцирование

- Для дифференциальных тензорных уравнений применяется аппарат ковариантного дифференцирования, поскольку частные производные от тензора валентности 0 (скаляр) являются компонентами ковариантного тензора валентности 1 (показать, почему), а, например, частные производные от ковариантного вектора уже не являются компонентами тензора (показать почему).
- Определение ковариантных производных от тензора:

$$\nabla_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} = \partial_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} + T^{m\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_1}_{jm} + \cdots + T^{i_1\ldots m}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_r}_{jm}$$
$$-T^{i_1\ldots i_r}_{m\ldots k_n}\Gamma^{m}_{jk_{r+1}} - \cdots - T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots m}\Gamma^{m}_{jk_n}, \quad (10)$$

  — все контрвариантные индексы обрабатывается символами Кристоффеля 2-рода со знаком «+», все ковариантные индексы — символами Кристоффеля со знаком «-».
- В результате применения к тензору $\mathbf{T}^r_{n-r}$ операции ковариантного дифференцирования получается тензор валентности на 1 больше, r раз контрвариантный и n-r+1 ковариантный, $\mathbf{T}^r_{n-r+1}$.
- **Лемма о ковариантном обобщении**
  Пусть в некоторой системе координат $\mathbf{X}_*$ для координат тензора $\mathbf{A}^r_{n-r}$ справедливы соотношения (знак $\underset{*}{=}$ как раз и означает, что данные соотношения имеют место быть в системе координат $\mathbf{X}_*$):

$$A^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} \underset{*}{=} T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}, \quad (11)$$

  где $\mathbf{T}^r_{n-r}$ – выражение в явно тензорной форме. Тогда соотношение (11) справедливо в любой системе координат.

Ковариантное дифференцирование

- Для дифференциальных тензорных уравнений применяется аппарат ковариантного дифференцирования, поскольку частные производные от тензора валентности 0 (скаляр) являются компонентами ковариантного тензора валентности 1 (показать, почему), а, например, частные производные от ковариантного вектора уже не являются компонентами тензора (показать почему).
- Определение ковариантных производных от тензора:

$$\nabla_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} = \partial_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} + T^{m\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_1}_{jm} + \cdots + T^{i_1\ldots m}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_r}_{jm}$$
$$-T^{i_1\ldots i_r}_{m\ldots k_n}\Gamma^{m}_{jk_{r+1}} - \cdots - T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots m}\Gamma^{m}_{jk_n}, \quad (10)$$

 — все контрвариантные индексы обрабатывается символами Кристоффеля 2-рода со знаком «+», все ковариантные индексы — символами Кристоффеля со знаком «-».
- В результате применения к тензору $\mathbf{T}^r_{n-r}$ операции ковариантного дифференцирования получается тензор валентности на 1 больше, r раз контрвариантный и n-r+1 ковариантный, $\mathbf{T}^r_{n-r+1}$.
- **Лемма о ковариантном обобщении**
  Пусть в некоторой системе координат $\mathbf{X}_*$ для координат тензора $\mathbf{A}^r_{n-r}$ справедливы соотношения (знак $\underset{*}{=}$ как раз и означает, что данные соотношения имеют место быть в системе координат $\mathbf{X}_*$):

$$A^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} \underset{*}{=} T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}, \quad (11)$$

  где $\mathbf{T}^r_{n-r}$ – выражение в явно тензорной форме. Тогда соотношение (11) справедливо в любой системе координат.

- Для дифференциальных тензорных уравнений применяется аппарат ковариантного дифференцирования, поскольку частные производные от тензора валентности 0 (скаляр) являются компонентами ковариантного тензора валентности 1 (показать, почему), а, например, частные производные от ковариантного вектора уже не являются компонентами тензора (показать почему).
- Определение ковариантных производных от тензора:

$$\nabla_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} = \partial_j T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} + T^{m\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_1}_{jm} + \cdots + T^{i_1\ldots m}_{k_{r+1}\ldots k_n}\Gamma^{i_r}_{jm}$$
$$-T^{i_1\ldots i_r}_{m\ldots k_n}\Gamma^{m}_{jk_{r+1}} - \cdots - T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots m}\Gamma^{m}_{jk_n}, \quad (10)$$

— все контрвариантные индексы обрабатыватся символами Кристоффеля 2-рода со знаком «+», все ковариантные индексы — символами Кристоффеля со знаком «-».
- В результате применения к тензору $\mathbf{T}^r_{n-r}$ операции ковариантного дифференцирования получается тензор валентности на 1 больше, r раз контрвариантный и n-r+1 ковариантный, $\mathbf{T}^r_{n-r+1}$.
- **Лемма о ковариантном обобщении**
Пусть в некоторой системе координат $\mathbf{X}_*$ для координат тензора $\mathbf{A}^r_{n-r}$ справедливы соотношения (знак $\underset{*}{=}$ как раз и означает, что данные соотношения имеют место быть в системе координат $\mathbf{X}_*$):

$$A^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n} \underset{*}{=} T^{i_1\ldots i_r}_{k_{r+1}\ldots k_n}, \quad (11)$$

где $\mathbf{T}^r_{n-r}$ – выражение в явно тензорной форме. Тогда соотношение (11) справедливо в любой системе координат.

- **Абсолютная производная вектора скорости.** Уравнения движения имеют вид:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{12}$$

где $\mathbf{a}$ – вектор ускорения, $\mathbf{F}$ – вектор силы. Вектор ускорения в декартовой системе координат определяется второй производной радиуса - вектора $\mathbf{r}$. Необходимо определить значение этого вектора в произвольной системе координат.

- Имеем:

$$\frac{d}{dt}v^i(x^1(t),\ldots,x^n(t),t) = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}. \tag{13}$$

- Поскольку частные производные от контрвариантного вектора не являются компонентами тензора, то согласно принципу общей ковариантности для сохранения векторного характера ускорения в произвольной системе координат мы должны заменить частные производные в формуле (13) ковариантными производными в произвольной системе координат:

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla_k v^i v^k = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma^i_{jk} v^j v^k \Rightarrow a^i = \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}. \tag{14}$$

- Таким образом, выражение для контрвариантного ускорения частицы совпадает с левой частью уравнения геодезических линий, о чем мы говорили в более ранних лекциях.

- Аналогично, для произвольного вектора U^i можно ввести понятие абсолютной производной в направлении $v^i = \frac{dx^i}{dt}$:

$$\frac{\delta U^i}{\delta t} = \frac{dU^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} U^j v^k. \tag{15}$$

- **Абсолютная производная вектора скорости.** Уравнения движения имеют вид:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{12}$$

где $\mathbf{a}$ – вектор ускорения, $\mathbf{F}$ – вектор силы. Вектор ускорения в декартовой системе координат определяется второй производной радиуса - вектора $\mathbf{r}$. Необходимо определить значение этого вектора в произвольной системе координат.

- Имеем:

- Поскольку частные производные от контрвариантного вектора не являются компонентами тензора, то согласно принципу общей ковариантности для сохранения векторного характера ускорения в произвольной системе координат мы должны заменить частные производные в формуле (13) ковариантными производными в произвольной системе координат:

- Таким образом, выражение для контрвариантного ускорения частицы совпадает с левой частью уравнения геодезических линий, о чем мы говорили в более ранних лекциях.

- Аналогично, для произвольного вектора U^i можно ввести понятие абсолютной производной в направлении $v^i = \frac{dx^i}{dt}$:

- **Абсолютная производная вектора скорости.** Уравнения движения имеют вид:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{12}$$

где $\mathbf{a}$ – вектор ускорения, $\mathbf{F}$ – вектор силы. Вектор ускорения в декартовой системе координат определяется второй производной радиуса - вектора $\mathbf{r}$. Необходимо определить значение этого вектора в произвольной системе координат.

- Имеем:

$$\frac{d}{dt}v^i(x^1(t),\ldots,x^n(t),t) = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}. \tag{13}$$

- Поскольку частные производные от контрвариантного вектора не являются компонентами тензора, то согласно принципу общей ковариантности для сохранения векторного характера ускорения в произвольной системе координат мы должны заменить частные производные в формуле (13) ковариантными производными в произвольной системе координат:

- Таким образом, выражение для контрвариантного ускорения частицы совпадает с левой частью уравнения геодезических линий, о чем мы говорили в более ранних лекциях.

- Аналогично, для произвольного вектора U^i можно ввести понятие абсолютной производной в направлении $v^i = \frac{dx^i}{dt}$:

- **Абсолютная производная вектора скорости.** Уравнения движения имеют вид:
$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{12}$$
где $\mathbf{a}$ – вектор ускорения, $\mathbf{F}$ – вектор силы. Вектор ускорения в декартовой системе координат определяется второй производной радиуса - вектора $\mathbf{r}$. Необходимо определить значение этого вектора в произвольной системе координат.
- Имеем:
$$\frac{d}{dt}v^i(x^1(t),\ldots,x^n(t),t) \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}. \tag{13}$$
- Поскольку частные производные от контрвариантного вектора не являются компонентами тензора, то согласно принципу общей ковариантности для сохранения векторного характера ускорения в произвольной системе координат мы должны заменить частные производные в формуле (13) ковариантными производными в произвольной системе координат:
$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla_k v^i v^k = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma^i_{jk} v^j v^k \Rightarrow a^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} \tag{14}$$
- Таким образом, выражение для контрвариантного ускорения частицы совпадает с левой частью уравнения геодезических линий, о чем мы говорили в более ранних лекциях.
- Аналогично, для произвольного вектора U^i можно ввести понятие абсолютной производной в направлении $v^i = \frac{dx^i}{dt}$:
$$\frac{\delta U^i}{dt} = \frac{dU^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} U^j v^k. \tag{15}$$

Ковариантное обобщение уравнений движения

- **Абсолютная производная вектора скорости.** Уравнения движения имеют вид:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{12}$$

где $\mathbf{a}$ – вектор ускорения, $\mathbf{F}$ – вектор силы. Вектор ускорения в декартовой системе координат определяется второй производной радиуса - вектора $\mathbf{r}$. Необходимо определить значение этого вектора в произвольной системе координат.

- Имеем:

$$\frac{d}{dt}v^i(x^1(t),\ldots,x^n(t),t) \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}. \tag{13}$$

- Поскольку частные производные от контрвариантного вектора не являются компонентами тензора, то согласно принципу общей ковариантности для сохранения векторного характера ускорения в произвольной системе координат мы должны заменить частные производные в формуле (13) ковариантными производными в произвольной системе координат:

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla_k v^i v^k \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma^i_{jk} v^j v^k \Rightarrow a^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}. \tag{14}$$

- Таким образом, выражение для контрвариантного ускорения частицы совпадает с левой частью уравнения геодезических линий, о чем мы говорили в более ранних лекциях.

- Аналогично, для произвольного вектора U^i можно ввести понятие абсолютной производной в направлении $v^i = \frac{dx^i}{dt}$:

$$\frac{\delta U^i}{dt} = \frac{dU^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} U^j v^k \tag{15}$$

- **Абсолютная производная вектора скорости.** Уравнения движения имеют вид:
$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{12}$$
где $\mathbf{a}$ – вектор ускорения, $\mathbf{F}$ – вектор силы. Вектор ускорения в декартовой системе координат определяется второй производной радиуса - вектора $\mathbf{r}$. Необходимо определить значение этого вектора в произвольной системе координат.
- Имеем:
$$\frac{d}{dt}v^i(x^1(t),\ldots,x^n(t),t) \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}. \tag{13}$$
- Поскольку частные производные от контрвариантного вектора не являются компонентами тензора, то согласно принципу общей ковариантности для сохранения векторного характера ускорения в произвольной системе координат мы должны заменить частные производные в формуле (13) ковариантными производными в произвольной системе координат:
$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla_k v^i v^k \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma^i_{jk} v^j v^k \Rightarrow a^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}. \tag{14}$$
- Таким образом, выражение для контрвариантного ускорения частицы совпадает с левой частью уравнения геодезических линий, о чем мы говорили в более ранних лекциях.
- Аналогично, для произвольного вектора U^i можно ввести понятие абсолютной производной в направлении $v^i = \frac{dx^i}{dt}$:
$$\frac{\delta U^i}{\delta t} = \frac{dU^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} U^j v^k \tag{15}$$

Ковариантное обобщение уравнений движения

- **Абсолютная производная вектора скорости.** Уравнения движения имеют вид:
$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{12}$$
где $\mathbf{a}$ – вектор ускорения, $\mathbf{F}$ – вектор силы. Вектор ускорения в декартовой системе координат определяется второй производной радиуса - вектора $\mathbf{r}$. Необходимо определить значение этого вектора в произвольной системе координат.
- Имеем:
$$\frac{d}{dt}v^i(x^1(t),\ldots,x^n(t),t) \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}. \tag{13}$$
- Поскольку частные производные от контрвариантного вектора не являются компонентами тензора, то согласно принципу общей ковариантности для сохранения векторного характера ускорения в произвольной системе координат мы должны заменить частные производные в формуле (13) ковариантными производными в произвольной системе координат:
$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla_k v^i v^k \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma^i_{jk}v^j v^k \Rightarrow a^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}. \tag{14}$$
- Таким образом, выражение для контрвариантного ускорения частицы совпадает с левой частью уравнения геодезических линий, о чем мы говорили в более ранних лекциях.
- Аналогично, для произвольного вектора U^i можно ввести понятие абсолютной производной в направлении $v^i = \frac{dx^i}{dt}$:

Ковариантное обобщение уравнений движения

- **Абсолютная производная вектора скорости.** Уравнения движения имеют вид:
$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{12}$$
где $\mathbf{a}$ – вектор ускорения, $\mathbf{F}$ – вектор силы. Вектор ускорения в декартовой системе координат определяется второй производной радиуса - вектора $\mathbf{r}$. Необходимо определить значение этого вектора в произвольной системе координат.
- Имеем:
$$\frac{d}{dt} v^i(x^1(t), \ldots, x^n(t), t) \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}. \tag{13}$$
- Поскольку частные производные от контрвариантного вектора не являются компонентами тензора, то согласно принципу общей ковариантности для сохранения векторного характера ускорения в произвольной системе координат мы должны заменить частные производные в формуле (13) ковариантными производными в произвольной системе координат:
$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla_k v^i v^k \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma^i_{jk} v^j v^k \Rightarrow a^i = \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}. \tag{14}$$
- Таким образом, выражение для контрвариантного ускорения частицы совпадает с левой частью уравнения геодезических линий, о чем мы говорили в более ранних лекциях.
- Аналогично, для произвольного вектора U^i можно ввести понятие абсолютной производной в направлении $v^i = \frac{dx^i}{dt}$:
$$\frac{\delta U^i}{\delta t} = \frac{dU^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} U^j v^k. \tag{15}$$

- **Абсолютная производная вектора скорости.** Уравнения движения имеют вид:
$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{12}$$
где $\mathbf{a}$ – вектор ускорения, $\mathbf{F}$ – вектор силы. Вектор ускорения в декартовой системе координат определяется второй производной радиуса - вектора $\mathbf{r}$. Необходимо определить значение этого вектора в произвольной системе координат.
- Имеем:
$$\frac{d}{dt}v^i(x^1(t),\ldots,x^n(t),t) \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}. \tag{13}$$
- Поскольку частные производные от контрвариантного вектора не являются компонентами тензора, то согласно принципу общей ковариантности для сохранения векторного характера ускорения в произвольной системе координат мы должны заменить частные производные в формуле (13) ковариантными производными в произвольной системе координат:
$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla_k v^i v^k \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma^i_{jk}v^j v^k \Rightarrow a^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}. \tag{14}$$
- Таким образом, выражение для контрвариантного ускорения частицы совпадает с левой частью уравнения геодезических линий, о чем мы говорили в более ранних лекциях.
- Аналогично, для произвольного вектора U^i можно ввести понятие абсолютной производной в направлении $v^i = \frac{dx^i}{dt}$:
$$\frac{\delta U^i}{\delta t} = \frac{dU^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}U^j v^k. \tag{15}$$

- **Абсолютная производная вектора скорости.** Уравнения движения имеют вид:
$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{12}$$
где $\mathbf{a}$ – вектор ускорения, $\mathbf{F}$ – вектор силы. Вектор ускорения в декартовой системе координат определяется второй производной радиуса - вектора $\mathbf{r}$. Необходимо определить значение этого вектора в произвольной системе координат.
- Имеем:
$$\frac{d}{dt}v^i(x^1(t),\ldots,x^n(t),t) \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}. \tag{13}$$
- Поскольку частные производные от контрвариантного вектора не являются компонентами тензора, то согласно принципу общей ковариантности для сохранения векторного характера ускорения в произвольной системе координат мы должны заменить частные производные в формуле (13) ковариантными производными в произвольной системе координат:
$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla_k v^i v^k \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma^i_{jk}v^j v^k \Rightarrow a^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}. \tag{14}$$
- Таким образом, выражение для контрвариантного ускорения частицы совпадает с левой частью уравнения геодезических линий, о чем мы говорили в более ранних лекциях.
- Аналогично, для произвольного вектора U^i можно ввести понятие абсолютной производной в направлении $v^i = \frac{dx^i}{dt}$:
$$\frac{\delta U^i}{\delta t} = \frac{dU^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}U^j v^k. \tag{15}$$

Уравнения движения в центрально - симметрическом поле

- Обратимся к уравнениям Эйлера для функции Лагранжа (1) в сферической системе координат. Из принципа общей ковариантности следует, что вектор силы в произвольной системе координат необходимо записать в виде:

$$F^i = -\nabla^i U \equiv -g^{ik}\partial_k U. \qquad (16)$$

- В сферической системе координат найдем $(r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3)$, выписываем ненулевые компоненты символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{1,22} = -\Gamma_{22,1} = r; \Gamma_{1,33} = -\Gamma_{33,1} = r\cos^2\theta; \Gamma_{33,2} = -\Gamma_{23,3} = r^2\cos\theta\sin\theta;$$
$$\Gamma^1_{22} = -r; \Gamma^1_{33} = -r\cos^2\theta; \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \Gamma^2_{33} = \cos\theta\sin\theta; \Gamma^3_{23} = -\operatorname{tg}\theta.$$

- Таким образом, уравнения движения в сферической системе координат принимают вид (показать, как):

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\cos^2\ \theta\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \qquad (18)$$

$$\ddot{\theta}^2 + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} + 2\cos\theta\sin\theta\ \dot{\theta}\dot{\varphi} = 0; \qquad (19)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} - 2\operatorname{tg}\theta\ \dot{\theta}\dot{\varphi} = 0. \qquad (20)$$

- Поделив обе части уравнения (20) на $\dot{\varphi} \neq 0$, получим известный первый интеграл из теории геодезических на поверхностях вращения (показать, как):

- Обратимся к уравнениям Эйлера для функции Лагранжа (1) в сферической системе координат. Из принципа общей ковариантности следует, что вектор силы в произвольной системе координат необходимо записать в виде:

$$F^i = -\nabla^i U \equiv -g^{ik}\partial_k U. \qquad (16)$$

- В сферической системе координат найдем $(r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3)$, выписываем ненулевые компоненты символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{1,22} = -\Gamma_{22,1} = r; \Gamma_{1,33} = -\Gamma_{33,1} = r\cos^2\theta; \Gamma_{33,2} = -\Gamma_{23,3} = r^2\cos\theta\sin\theta;$$
$$\Gamma^1_{22} = -r; \Gamma^1_{33} = -r\cos^2\theta; \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \Gamma^2_{33} = \cos\theta\sin\theta; \Gamma^3_{23} = -\operatorname{tg}\theta.$$

- Таким образом, уравнения движения в сферической системе координат принимают вид (показать, как):

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \qquad (18)$$

$$\ddot{\theta}^2 + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} + 2\cos\theta\sin\theta\;\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0; \qquad (19)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} - 2\operatorname{tg}\theta\;\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0. \qquad (20)$$

- Поделив обе части уравнения (20) на $\dot{\varphi} \neq 0$, получим известный первый интеграл из теории геодезических на поверхностях вращения (показать, как):

Уравнения движения в центрально - симметрическом поле

- Обратимся к уравнениям Эйлера для функции Лагранжа (1) в сферической системе координат. Из принципа общей ковариантности следует, что вектор силы в произвольной системе координат необходимо записать в виде:

$$F^i = -\nabla^i U \equiv -g^{ik}\partial_k U. \qquad (16)$$

- В сферической системе координат найдем ($r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3$), выписываем ненулевые компоненты символов Кристоффеля:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \equiv dr^2 + r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2); \qquad (17)$$

$$\Gamma_{1,22} = -\Gamma_{22,1} = r; \Gamma_{1,33} = -\Gamma_{33,1} = r\cos^2\theta; \Gamma_{33,2} = -\Gamma_{23,3} = r^2\cos\theta\sin\theta;$$
$$\Gamma^1_{22} = -r; \Gamma^1_{33} = -r\cos^2\theta; \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \Gamma^2_{33} = \cos\theta\sin\theta; \Gamma^3_{23} = -\operatorname{tg}\theta.$$

- Таким образом, уравнения движения в сферической системе координат принимают вид (показать, как):

$$\ddot r - r\dot\theta^2 - r\cos^2\ \theta\dot\varphi^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \qquad (18)$$

$$\ddot\theta^2 + \frac{2}{r}\dot r\dot\theta + 2\cos\theta\sin\theta\ \dot\theta\dot\varphi = 0; \qquad (19)$$

$$\ddot\varphi + \frac{2}{r}\dot r\dot\varphi - 2\operatorname{tg}\theta\ \dot\theta\dot\varphi = 0. \qquad (20)$$

- Поделив обе части уравнения (20) на $\dot\varphi \neq 0$, получим известный первый интеграл из теории геодезических на поверхностях вращения (показать, как):

$$r^2\cos^2\theta\,\dot\varphi = \mathrm{Const} \rightarrow \rho^2\dot\varphi = \mathrm{Const} = C. \qquad (21)$$

Уравнения движения в центрально - симметрическом поле

- Обратимся к уравнениям Эйлера для функции Лагранжа (1) в сферической системе координат. Из принципа общей ковариантности следует, что вектор силы в произвольной системе координат необходимо записать в виде:

$$F^i = -\nabla^i U \equiv -g^{ik}\partial_k U. \qquad (16)$$

- В сферической системе координат найдем $(r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3)$, выписываем ненулевые компоненты символов Кристоффеля:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \equiv dr^2 + r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2); \qquad (17)$$

$$\Gamma_{1,22} = -\Gamma_{22,1} = r; \Gamma_{1,33} = -\Gamma_{33,1} = r\cos^2\theta; \Gamma_{33,2} = -\Gamma_{23,3} = r^2\cos\theta\sin\theta;$$
$$\Gamma^1_{22} = -r; \Gamma^1_{33} = -r\cos^2\theta; \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \Gamma^2_{33} = \cos\theta\sin\theta; \Gamma^3_{23} = -\operatorname{tg}\theta.$$

- Таким образом, уравнения движения в сферической системе координат принимают вид (показать, как):

$$\ddot r - r\dot\theta^2 - r\cos^2\ \theta\dot\varphi^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \qquad (18)$$

$$\ddot\theta^2 + \frac{2}{r}\dot r\dot\theta + 2\cos\theta\sin\theta\ \dot\theta\dot\varphi = 0; \qquad (19)$$

$$\ddot\varphi + \frac{2}{r}\dot r\dot\varphi - 2\operatorname{tg}\theta\ \dot\theta\dot\varphi = 0. \qquad (20)$$

- Поделив обе части уравнения (20) на $\dot\varphi \neq 0$, получим известный первый интеграл из теории геодезических на поверхностях вращения (показать, как):

- Обратимся к уравнениям Эйлера для функции Лагранжа (1) в сферической системе координат. Из принципа общей ковариантности следует, что вектор силы в произвольной системе координат необходимо записать в виде:

$$F^i = -\nabla^i U \equiv -g^{ik}\partial_k U. \tag{16}$$

- В сферической системе координат найдем $(r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3)$, выписываем ненулевые компоненты символов Кристоффеля:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \equiv dr^2 + r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2); \tag{17}$$

$$\Gamma_{1,22} = -\Gamma_{22,1} = r; \Gamma_{1,33} = -\Gamma_{33,1} = r\cos^2\theta; \Gamma_{33,2} = -\Gamma_{23,3} = r^2\cos\theta\sin\theta;$$
$$\Gamma^1_{22} = -r; \Gamma^1_{33} = -r\cos^2\theta; \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \Gamma^2_{33} = \cos\theta\sin\theta; \Gamma^3_{23} = -\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

- Таким образом, уравнения движения в сферической системе координат принимают вид (показать, как):

$$\ddot r - r\dot\theta^2 - r\cos^2\theta\,\dot\varphi^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \tag{18}$$

$$\ddot\theta^2 + \frac{2}{r}\dot r\dot\theta + 2\cos\theta\sin\theta\,\dot\theta\dot\varphi = 0; \tag{19}$$

$$\ddot\varphi + \frac{2}{r}\dot r\dot\varphi - 2\,\mathrm{tg}\,\theta\,\dot\theta\dot\varphi = 0. \tag{20}$$

- Поделив обе части уравнения (20) на $\dot\varphi \neq 0$, получим известный первый интеграл из теории геодезических на поверхностях вращения (показать, как):

Уравнения движения в центрально - симметрическом поле

- Обратимся к уравнениям Эйлера для функции Лагранжа (1) в сферической системе координат. Из принципа общей ковариантности следует, что вектор силы в произвольной системе координат необходимо записать в виде:

$$F^i = -\nabla^i U \equiv -g^{ik}\partial_k U. \qquad (16)$$

- В сферической системе координат найдем $(r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3)$, выписываем ненулевые компоненты символов Кристоффеля:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \equiv dr^2 + r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2); \qquad (17)$$

$$\Gamma_{1,22} = -\Gamma_{22,1} = r; \Gamma_{1,33} = -\Gamma_{33,1} = r\cos^2\theta; \Gamma_{33,2} = -\Gamma_{23,3} = r^2\cos\theta\sin\theta;$$
$$\Gamma^1_{22} = -r; \Gamma^1_{33} = -r\cos^2\theta; \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \Gamma^2_{33} = \cos\theta\sin\theta; \Gamma^3_{23} = -\operatorname{tg}\theta.$$

- Таким образом, уравнения движения в сферической системе координат принимают вид (показать, как):

$$\ddot r - r\dot\theta^2 - r\cos^2\ \theta\dot\varphi^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \qquad (18)$$

$$\ddot\theta^2 + \frac{2}{r}\dot r\dot\theta + 2\cos\theta\sin\theta\ \dot\theta\dot\varphi = 0; \qquad (19)$$

$$\ddot\varphi + \frac{2}{r}\dot r\dot\varphi - 2\operatorname{tg}\theta\ \dot\theta\dot\varphi = 0. \qquad (20)$$

- Поделив обе части уравнения (20) на $\dot\varphi \neq 0$, получим известный первый интеграл из теории геодезических на поверхностях вращения (показать, как):

$$r^2\cos^2\theta\ \dot\varphi = \mathrm{Const} \Rightarrow \rho^2\dot\varphi = \mathrm{Const} \equiv C. \qquad (21)$$

- Обратимся к уравнениям Эйлера для функции Лагранжа (1) в сферической системе координат. Из принципа общей ковариантности следует, что вектор силы в произвольной системе координат необходимо записать в виде:

$$F^i = -\nabla^i U \equiv -g^{ik}\partial_k U. \tag{16}$$

- В сферической системе координат найдем $(r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3)$, выписываем ненулевые компоненты символов Кристоффеля:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \equiv dr^2 + r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2); \tag{17}$$

$$\Gamma_{1,22} = -\Gamma_{22,1} = r; \Gamma_{1,33} = -\Gamma_{33,1} = r\cos^2\theta; \Gamma_{33,2} = -\Gamma_{23,3} = r^2\cos\theta\sin\theta;$$
$$\Gamma^1_{22} = -r; \Gamma^1_{33} = -r\cos^2\theta; \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \Gamma^2_{33} = \cos\theta\sin\theta; \Gamma^3_{23} = -\operatorname{tg}\theta.$$

- Таким образом, уравнения движения в сферической системе координат принимают вид (показать, как):

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\cos^2\ \theta\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \tag{18}$$

$$\ddot{\theta}^2 + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} + 2\cos\theta\sin\theta\ \dot{\theta}\dot{\varphi} = 0; \tag{19}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} - 2\operatorname{tg}\theta\ \dot{\theta}\dot{\varphi} = 0. \tag{20}$$

- Поделив обе части уравнения (20) на $\dot{\varphi} \neq 0$, получим известный первый интеграл из теории геодезических на поверхностях вращения (показать, как):

$$r^2\cos^2\theta\ \dot{\varphi} = \mathrm{Const} \Rightarrow \rho^2\dot{\varphi} = \mathrm{Const} = C. \tag{21}$$

- Обратимся к уравнениям Эйлера для функции Лагранжа (1) в сферической системе координат. Из принципа общей ковариантности следует, что вектор силы в произвольной системе координат необходимо записать в виде:

$$F^i = -\nabla^i U \equiv -g^{ik}\partial_k U. \tag{16}$$

- В сферической системе координат найдем $(r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3)$, выписываем ненулевые компоненты символов Кристоффеля:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \equiv dr^2 + r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2); \tag{17}$$

$$\Gamma_{1,22} = -\Gamma_{22,1} = r; \Gamma_{1,33} = -\Gamma_{33,1} = r\cos^2\theta; \Gamma_{33,2} = -\Gamma_{23,3} = r^2\cos\theta\sin\theta;$$
$$\Gamma^1_{22} = -r; \Gamma^1_{33} = -r\cos^2\theta; \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \Gamma^2_{33} = \cos\theta\sin\theta; \Gamma^3_{23} = -\operatorname{tg}\theta.$$

- Таким образом, уравнения движения в сферической системе координат принимают вид (показать, как):

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\cos^2\ \theta\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \tag{18}$$

$$\ddot{\theta}^2 + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} + 2\cos\theta\sin\theta\ \dot{\theta}\dot{\varphi} = 0; \tag{19}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} - 2\operatorname{tg}\theta\ \dot{\theta}\dot{\varphi} = 0. \tag{20}$$

- Поделив обе части уравнения (20) на $\dot{\varphi} \neq 0$, получим известный первый интеграл из теории геодезических на поверхностях вращения (показать, как):

$$r^2\cos^2\theta\ \dot{\varphi} = \mathrm{Const} \Rightarrow \rho^2\dot{\varphi} = \mathrm{Const} = C. \tag{21}$$

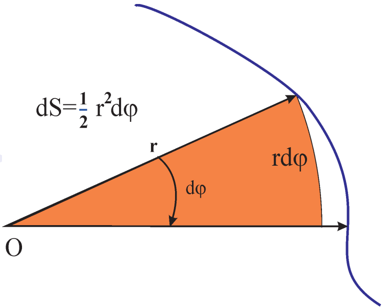


Figure 2. 2-й закон Кеплера: закон площадей

Интеграл движения (21) можно представить и в другом виде: $\dot{S} = \mathrm{Const}$ – 2-й закон Кеплера.

Интеграл движения (21) имеет следующий физический смысл: он выражает закон сохранения момента количества движения (доказать самостоятельно), (объяснить другой способ, основанный на группе $O(3)$):

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r}\times\mathbf{v} = \mathbf{M}_0. \qquad (22)$$

Очевидно, что $|\mathbf{M}_0| = C/m$. Вследствие (21) и (22) получим:

$$(\mathbf{r}\cdot\mathbf{M}_0) = 0, \qquad (23)$$

но это есть общее уравнение плоскости. Таким образом, движение в центральном поле происходит в одной плоскости.

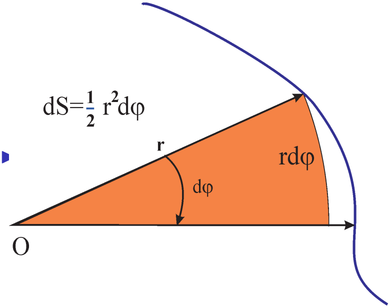


Figure 2. 2-й закон Кеплера: закон площадей

Интеграл движения (21) можно представить и в другом виде: $\dot{S} = \mathrm{Const}$ – 2-й закон Кеплера.

Интеграл движения (21) имеет следующий физический смысл: он выражает закон сохранения момента количества движения (доказать самостоятельно), (объяснить другой способ, основанный на группе $O(3)$):

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{M}_0. \qquad (22)$$

Очевидно, что $|\mathbf{M}_0| = C/m$. Вследствие (21) и (22) получим:

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}_0) = 0, \qquad (23)$$

но это есть общее уравнение плоскости. Таким образом, движение в центральном поле происходит в одной плоскости.

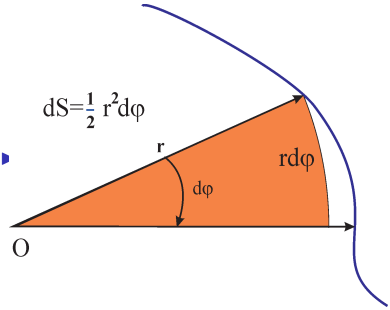


Figure 2. 2-й закон Кеплера: закон площадей

Интеграл движения (21) можно представить и в другом виде: $\dot{S} = \mathrm{Const}$ – 2-й закон Кеплера.

Интеграл движения (21) имеет следующий физический смысл: он выражает закон сохранения момента количества движения (доказать самостоятельно), (объяснить другой способ, основанный на группе $O(3)$):

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{M}_0. \qquad (22)$$

Очевидно, что $|\mathbf{M}_0| = C/m$. Вследствие (21) и (22) получим:

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}_0) = 0, \qquad (23)$$

но это есть общее уравнение плоскости. Таким образом, движение в центральном поле происходит в одной плоскости.

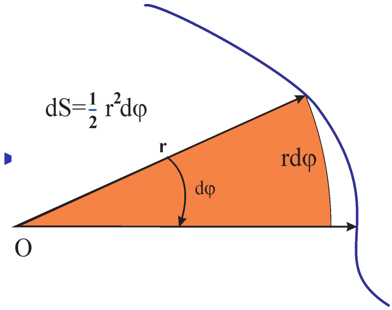


Figure 2. 2-й закон Кеплера: закон площадей

Интеграл движения (21) можно представить и в другом виде: $\dot{S} = \mathrm{Const}$ – 2-й закон Кеплера.

Интеграл движения (21) имеет следующий физический смысл: он выражает закон сохранения момента количества движения (доказать самостоятельно), (объяснить другой способ, основанный на группе $O(3)$):

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{M}_0. \qquad (22)$$

Очевидно, что $|\mathbf{M}_0| = C/m$. Вследствие (21) и (22) получим:

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}_0) = 0, \qquad (23)$$

но это есть общее уравнение плоскости. Таким образом, движение в центральном поле происходит в одной плоскости.

Решение уравнений движения в центрально - симметрическом поле: продолжение

- Кроме этого первого интеграла система уравнений (18) – (20) имеет еще и интеграл полной энергии, так как соответствующая динамическая система консервативна – потенциал не зависит от времени. Вычисляя в сферической системе координат квадрат скорости $v^2 = g_{ik}v^iv^k$, найдем этот интеграл:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \quad (= \mathrm{Const}). \tag{24}$$

- Согласно уравнениям движения (18) – (20) указанную в плоскость всегда можно выбрать в качестве экваториальной плоскости в заданной сферической системе координат $\theta = 0$. Тогда уравнения движения упрощаются:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \tag{25}$$

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L_0}{m}, \tag{26}$$

а интеграл энергии принимает вид:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}. \tag{27}$$

- Разделяя переменные в уравнении (27) и интегрируя, найдем:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}}. \tag{28}$$

- Кроме этого первого интеграла система уравнений (18) – (20) имеет еще и интеграл полной энергии, так как соответствующая динамическая система консервативна – потенциал не зависит от времени. Вычисляя в сферической системе координат квадрат скорости $v^2 = g_{ik}v^iv^k$, найдем этот интеграл:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\ \dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \quad (= \mathrm{Const}). \tag{24}$$

- Согласно уравнениям движения (18) – (20) указанную в плоскость всегда можно выбрать в качестве экваториальной плоскости в заданной сферической системе координат $\theta = 0$. Тогда уравнения движения упрощаются:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \tag{25}$$

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L_0}{m}, \tag{26}$$

а интеграл энергии принимает вид:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \to \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}. \tag{27}$$

- Разделяя переменные в уравнении (27) и интегрируя, найдем:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}}. \tag{28}$$

- Кроме этого первого интеграла система уравнений (18) – (20) имеет еще и интеграл полной энергии, так как соответствующая динамическая система консервативна – потенциал не зависит от времени. Вычисляя в сферической системе координат квадрат скорости $v^2 = g_{ik}v^i v^k$, найдем этот интеграл:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\ \dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \quad (= \mathrm{Const}). \tag{24}$$

- Согласно уравнениям движения (18) – (20) указанную в плоскость всегда можно выбрать в качестве экваториальной плоскости в заданной сферической системе координат $\theta = 0$. Тогда уравнения движения упрощаются:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \tag{25}$$

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L_0}{m}, \tag{26}$$

а интеграл энергии принимает вид:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2 r^2}}. \tag{27}$$

- Разделяя переменные в уравнении (27) и интегрируя, найдем:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2 r^2}}}. \tag{28}$$

- Кроме этого первого интеграла система уравнений (18) – (20) имеет еще и интеграл полной энергии, так как соответствующая динамическая система консервативна – потенциал не зависит от времени. Вычисляя в сферической системе координат квадрат скорости $v^2 = g_{ik}v^i v^k$, найдем этот интеграл:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\ \dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \quad (= \mathrm{Const}). \tag{24}$$

- Согласно уравнениям движения (18) – (20) указанную в плоскость всегда можно выбрать в качестве экваториальной плоскости в заданной сферической системе координат $\theta = 0$. Тогда уравнения движения упрощаются:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \tag{25}$$

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L_0}{m}, \tag{26}$$

а интеграл энергии принимает вид:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2 r^2}}. \tag{27}$$

- Разделяя переменные в уравнении (27) и интегрируя, найдем:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2 r^2}}} \tag{28}$$

Решение уравнений движения в центрально - симметрическом поле: продолжение

- Кроме этого первого интеграла система уравнений (18) – (20) имеет еще и интеграл полной энергии, так как соответствующая динамическая система консервативна – потенциал не зависит от времени. Вычисляя в сферической системе координат квадрат скорости $v^2 = g_{ik}v^iv^k$, найдем этот интеграл:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\ \dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \quad (= \mathrm{Const}). \tag{24}$$

- Согласно уравнениям движения (18) – (20) указанную в плоскость всегда можно выбрать в качестве экваториальной плоскости в заданной сферической системе координат $\theta = 0$. Тогда уравнения движения упрощаются:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \tag{25}$$

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L_0}{m}, \tag{26}$$

а интеграл энергии принимает вид:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}. \tag{27}$$

- Разделяя переменные в уравнении (27) и интегрируя, найдем:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}}. \tag{28}$$

Решение уравнений движения в центрально - симметрическом поле: продолжение

- Кроме этого первого интеграла система уравнений (18) – (20) имеет еще и интеграл полной энергии, так как соответствующая динамическая система консервативна – потенциал не зависит от времени. Вычисляя в сферической системе координат квадрат скорости $v^2 = g_{ik}v^i v^k$, найдем этот интеграл:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\ \dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \quad (= \mathrm{Const}). \tag{24}$$

- Согласно уравнениям движения (18) – (20) указанную в плоскость всегда можно выбрать в качестве экваториальной плоскости в заданной сферической системе координат $\theta = 0$. Тогда уравнения движения упрощаются:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \tag{25}$$

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L_0}{m}, \tag{26}$$

а интеграл энергии принимает вид:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}. \tag{27}$$

- Разделяя переменные в уравнении (27) и интегрируя, найдем:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}}. \tag{28}$$

- Кроме этого первого интеграла система уравнений (18) – (20) имеет еще и интеграл полной энергии, так как соответствующая динамическая система консервативна – потенциал не зависит от времени. Вычисляя в сферической системе координат квадрат скорости $v^2 = g_{ik}v^iv^k$, найдем этот интеграл:

$$\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\cos^2\theta\ \dot\varphi^2) + U(r) = E_0 \quad (= \mathrm{Const}). \tag{24}$$

- Согласно уравнениям движения (18) – (20) указанную в плоскость всегда можно выбрать в качестве экваториальной плоскости в заданной сферической системе координат $\theta = 0$. Тогда уравнения движения упрощаются:

$$\ddot r - r\dot\varphi^2 = -\frac{1}{m}U'_r; \tag{25}$$

$$r^2\dot\varphi = \frac{L_0}{m}, \tag{26}$$

а интеграл энергии принимает вид:

$$\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + U(r) = E_0 \Rightarrow \dot r = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}. \tag{27}$$

- Разделяя переменные в уравнении (27) и интегрируя, найдем:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}}. \tag{28}$$

- Далее из (26) найдем:

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2}dt \equiv \frac{L_0}{mr^2}\frac{dt}{dr}dr. \tag{29}$$

- Подставляя в это соотношение выражение для $\frac{dt}{dr}$ из (27) и интегрируя, найдем:

$$\varphi = L_0\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} + \mathrm{Const}. \tag{30}$$

- Центробежная энергия. Выражение для полной энергии (24) можно записать и в другом виде: $E_0 = m\dot{r}^2/2 + U_{\mathrm{eff}}(r)$

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}, \tag{31}$$

где второй член называется центробежной энергией. Из (27) следует, что при

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = 0, \tag{32}$$

т.е., радиальная скорость обращается в нуль. Поэтому (32) определяет границы движения по расстоянию от центра и точки поворота.

- Очевидно, что для существования границ движения необходима, во-первых, отрицательность потенциальной энергии, а. во-вторых, существование двух вещественных решений уравнения (32).

- Отрицательным значениям потенциальной энергии соответствует притяжение, а положительным — отталкивание.

- Далее из (26) найдем:

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2}dt \equiv \frac{L_0}{mr^2}\frac{dt}{dr}dr. \qquad (29)$$

- Подставляя в это соотношение выражение для $\frac{dt}{dr}$ из (27) и интегрируя, найдем:

$$\varphi = L_0 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} + \text{Const} \qquad (30)$$

- Центробежная энергия. Выражение для полной энергии (24) можно записать и в другом виде: $E_0 = m\dot{r}^2/2 + U_{\text{eff}}(r)$

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}, \qquad (31)$$

где второй член называется центробежной энергией. Из (27) следует, что при

$$U_{\text{eff}}(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = 0, \qquad (32)$$

т.е., радиальная скорость обращается в нуль. Поэтому (32) определяет границы движения по расстоянию от центра и точки поворота.

- Очевидно, что для существования границ движения необходима, во-первых, отрицательность потенциальной энергии, а. во-вторых, существование двух вещественных решений уравнения (32).
- Отрицательным значениям потенциальной энергии соответствует притяжение, а положительным — отталкивание.

- Далее из (26) найдем:

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2} dt \equiv \frac{L_0}{mr^2} \frac{dt}{dr} dr. \tag{29}$$

- Подставляя в это соотношение выражение для $\frac{dt}{dr}$ из (27) и интегрируя, найдем:

$$\varphi = L_0 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} + \mathrm{Const.} \tag{30}$$

- Центробежная энергия. Выражение для полной энергии (24) можно записать и в другом виде: $E_0 = m\dot{r}^2/2 + U_{\mathrm{eff}}(r)$

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}, \tag{31}$$

где второй член называется центробежной энергией. Из (27) следует, что при

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = E_0 \to \dot{r} = 0, \tag{32}$$

т.е., радиальная скорость обращается в нуль. Поэтому (32) определяет границы движения по расстоянию от центра и точки поворота.

- Очевидно, что для существования границ движения необходима, во-первых, отрицательность потенциальной энергии, а. во-вторых, существование двух вещественных решений уравнения (32).
- Отрицательным значениям потенциальной энергии соответствует притяжение, а положительным — отталкивание.

- Далее из (26) найдем:

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2}dt \equiv \frac{L_0}{mr^2}\frac{dt}{dr}dr. \tag{29}$$

- Подставляя в это соотношение выражение для $\frac{dt}{dr}$ из (27) и интегрируя, найдем:

$$\varphi = L_0 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} + \mathrm{Const.} \tag{30}$$

- Центробежная энергия. Выражение для полной энергии (24) можно записать и в другом виде: $E_0 = m\dot{r}^2/2 + U_{\mathrm{eff}}(r)$

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}, \tag{31}$$

где второй член называется центробежной энергией. Из (27) следует, что при

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = 0, \tag{32}$$

т.е., радиальная скорость обращается в нуль. Поэтому (32) определяет границы движения по расстоянию от центра и точки поворота.

- Очевидно, что для существования границ движения необходима, во-первых, отрицательность потенциальной энергии, а. во-вторых, существование двух вещественных решений уравнения (32).

- Отрицательным значениям потенциальной энергии соответствует притяжение, а положительным — отталкивание.

- Далее из (26) найдем:

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2}dt \equiv \frac{L_0}{mr^2}\frac{dt}{dr}dr. \tag{29}$$

- Подставляя в это соотношение выражение для $\frac{dt}{dr}$ из (27) и интегрируя, найдем:

$$\varphi = L_0 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} + \mathrm{Const}. \tag{30}$$

- Центробежная энергия. Выражение для полной энергии (24) можно записать и в другом виде: $E_0 = m\dot{r}^2/2 + U_{\mathrm{eff}}(r)$

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}, \tag{31}$$

где второй член называется центробежной энергией. Из (27) следует, что при

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = 0, \tag{32}$$

т.е., радиальная скорость обращается в нуль. Поэтому (32) определяет границы движения по расстоянию от центра и точки поворота.

- Очевидно, что для существования границ движения необходима, во-первых, отрицательность потенциальной энергии, а. во-вторых, существование двух вещественных решений уравнения (32).

- Отрицательным значениям потенциальной энергии соответствует притяжение, а положительным — отталкивание.

Решение уравнений движения в центрально - симметрическом поле: продолжение

- Далее из (26) найдем:

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2}dt \equiv \frac{L_0}{mr^2}\frac{dt}{dr}dr. \tag{29}$$

- Подставляя в это соотношение выражение для $\frac{dt}{dr}$ из (27) и интегрируя, найдем:

$$\varphi = L_0 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} + \mathrm{Const.} \tag{30}$$

- Центробежная энергия. Выражение для полной энергии (24) можно записать и в другом виде: $E_0 = m\dot{r}^2/2 + U_{\mathrm{eff}}(r)$

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}, \tag{31}$$

где второй член называется центробежной энергией. Из (27) следует, что при

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = 0, \tag{32}$$

т.е., радиальная скорость обращается в нуль. Поэтому (32) определяет границы движения по расстоянию от центра и точки поворота.

- Очевидно, что для существования границ движения необходима, во-первых, отрицательность потенциальной энергии, а. во-вторых, существование двух вещественных решений уравнения (32).
- Отрицательным значениям потенциальной энергии соответствует притяжение, а положительным — отталкивание.

- Далее из (26) найдем:

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2}dt \equiv \frac{L_0}{mr^2}\frac{dt}{dr}dr. \tag{29}$$

- Подставляя в это соотношение выражение для $\frac{dt}{dr}$ из (27) и интегрируя, найдем:

$$\varphi = L_0 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} + \mathrm{Const}. \tag{30}$$

- Центробежная энергия. Выражение для полной энергии (24) можно записать и в другом виде: $E_0 = m\dot{r}^2/2 + U_{\mathrm{eff}}(r)$

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}, \tag{31}$$

где второй член называется центробежной энергией. Из (27) следует, что при

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = 0, \tag{32}$$

т.е., радиальная скорость обращается в нуль. Поэтому (32) определяет границы движения по расстоянию от центра и точки поворота.

- Очевидно, что для существования границ движения необходима, во-первых, отрицательность потенциальной энергии, а. во-вторых, существование двух вещественных решений уравнения (32).

- Отрицательным значениям потенциальной энергии соответствует притяжение, а положительным — отталкивание.

- Далее из (26) найдем:

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2}dt \equiv \frac{L_0}{mr^2}\frac{dt}{dr}dr. \tag{29}$$

- Подставляя в это соотношение выражение для $\frac{dt}{dr}$ из (27) и интегрируя, найдем:

$$\varphi = L_0 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} + \mathrm{Const}. \tag{30}$$

- Центробежная энергия. Выражение для полной энергии (24) можно записать и в другом виде: $E_0 = m\dot{r}^2/2 + U_{\rm eff}(r)$

$$U_{\rm eff}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}, \tag{31}$$

где второй член называется центробежной энергией. Из (27) следует, что при

$$U_{\rm eff}(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = 0, \tag{32}$$

т.е., радиальная скорость обращается в нуль. Поэтому (32) определяет границы движения по расстоянию от центра и точки поворота.

- Очевидно, что для существования границ движения необходима, во-первых, отрицательность потенциальной энергии, а. во-вторых, существование двух вещественных решений уравнения (32).
- Отрицательным значениям потенциальной энергии соответствует притяжение, а положительным — отталкивание.

- Далее из (26) найдем:

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2}dt \equiv \frac{L_0}{mr^2}\frac{dt}{dr}dr. \qquad (29)$$

- Подставляя в это соотношение выражение для $\frac{dt}{dr}$ из (27) и интегрируя, найдем:

$$\varphi = L_0 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} + \mathrm{Const}. \qquad (30)$$

- Центробежная энергия. Выражение для полной энергии (24) можно записать и в другом виде: $E_0 = m\dot{r}^2/2 + U_{\rm eff}(r)$

$$U_{\rm eff}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}, \qquad (31)$$

где второй член называется центробежной энергией. Из (27) следует, что при

$$U_{\rm eff}(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = 0, \qquad (32)$$

т.е., радиальная скорость обращается в нуль. Поэтому (32) определяет границы движения по расстоянию от центра и точки поворота.

- Очевидно, что для существования границ движения необходима, во-первых, отрицательность потенциальной энергии, а. во-вторых, существование двух вещественных решений уравнения (32).

- Отрицательным значениям потенциальной энергии соответствует притяжение, а положительным — отталкивание.

- Далее из (26) найдем:

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2}dt \equiv \frac{L_0}{mr^2}\frac{dt}{dr}dr. \tag{29}$$

- Подставляя в это соотношение выражение для $\frac{dt}{dr}$ из (27) и интегрируя, найдем:

$$\varphi = L_0 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}} + \mathrm{Const.} \tag{30}$$

- Центробежная энергия. Выражение для полной энергии (24) можно записать и в другом виде: $E_0 = m\dot{r}^2/2 + U_{\mathrm{eff}}(r)$

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}, \tag{31}$$

где второй член называется центробежной энергией. Из (27) следует, что при

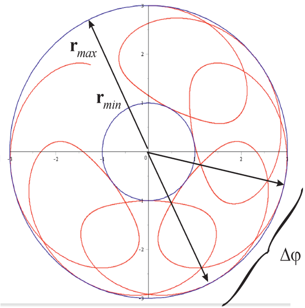
$$U_{\mathrm{eff}}(r) = E_0 \Rightarrow \dot{r} = 0, \tag{32}$$

т.е., радиальная скорость обращается в нуль. Поэтому (32) определяет границы движения по расстоянию от центра и точки поворота.

- Очевидно, что для существования границ движения необходима, во-первых, отрицательность потенциальной энергии, а. во-вторых, существование двух вещественных решений уравнения (32).
- Отрицательным значениям потенциальной энергии соответствует притяжение, а положительным — отталкивание.

- Если область движения ограничена сверху и снизу, т.е., уравнение (32) имеет 2 решения, $r_{\min}$ и $r_{\max}$, то траектория частицы лежит внутри кольца $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$. За время движения внутри этих пределов угол φ изменяется на величину $\Delta\varphi$ (фактор 2 появляется за счет пути туда и обратно):

$$\Delta\varphi = 2L_0 \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}}. \qquad (33)$$



- **Figure 3. Траектория частицы в центральном поле.**

Для того, чтобы траектория была замкнутой, необходимо:

$$m\Delta\varphi = 2\pi n. \qquad (34)$$

Оказывается это возможно лишь в двух случаях зависимости $U(r)$: $U(r) \sim 1/r$ и $U(r) \sim 1/r^2$.

Анимационная модель в Maple

Исследование движения в центрально - симметрическом поле: продолжение

- Если область движения ограничена сверху и снизу, т.е., уравнение (32) имеет 2 решения, $r_{\min}$ и $r_{\max}$, то траектория частицы лежит внутри кольца $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$. За время движения внутри этих пределов угол φ изменяется на величину $\Delta\varphi$ (фактор 2 появляется за счет пути туда и обратно):

$$\Delta\varphi = 2L_0 \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}}. \tag{33}$$

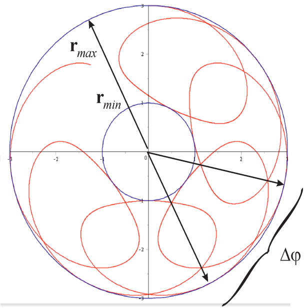


Figure 3. Траектория частицы в центральном поле.

- Для того, чтобы траектория была замкнутой, необходимо:

$$m\Delta\varphi = 2\pi n. \tag{34}$$

Оказывается это возможно лишь в двух случаях зависимости $U(r)$: $U(r) \sim 1/r$ и $U(r) \sim 1/r^2$.

Анимационная модель в Maple

Исследование движения в центрально - симметрическом поле: продолжение

- Если область движения ограничена сверху и снизу, т.е., уравнение (32) имеет 2 решения, $r_{\min}$ и $r_{\max}$, то траектория частицы лежит внутри кольца $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$. За время движения внутри этих пределов угол φ изменяется на величину $\Delta\varphi$ (фактор 2 появляется за счет пути туда и обратно):

$$\Delta\varphi = 2L_0 \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}}. \qquad (33)$$

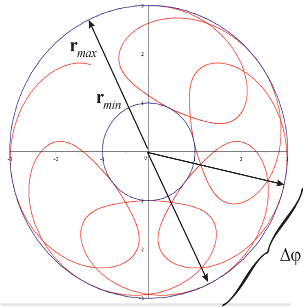


Figure 3. Траектория частицы в центральном поле.

Для того, чтобы траектория была замкнутой, необходимо:

- $$m\Delta\varphi = 2\pi n. \qquad (34)$$

Оказывается это возможно лишь в двух случаях зависимости $U(r)$: $U(r) \sim 1/r$ и $U(r) \sim 1/r^2$.

Анимационная модель в Maple

- Если область движения ограничена сверху и снизу, т.е., уравнение (32) имеет 2 решения, $r_{\min}$ и $r_{\max}$, то траектория частицы лежит внутри кольца $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$. За время движения внутри этих пределов угол φ изменяется на величину $\Delta\varphi$ (фактор 2 появляется за счет пути туда и обратно):

$$\Delta\varphi = 2L_0 \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}}. \qquad (33)$$

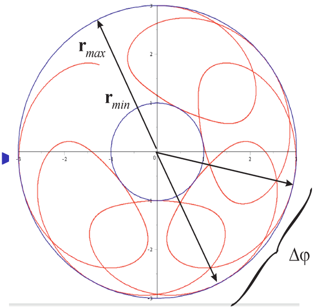


Figure 3. Траектория частицы в центральном поле.
Для того, чтобы траектория была замкнутой, необходимо:

$$m\Delta\varphi = 2\pi n. \qquad (34)$$

Оказывается это возможно лишь в двух случаях зависимости $U(r)$: $U(r) \sim 1/r$ и $U(r) \sim 1/r^2$.

Анимационная модель в Maple

- Если область движения ограничена сверху и снизу, т.е., уравнение (32) имеет 2 решения, $r_{\min}$ и $r_{\max}$, то траектория частицы лежит внутри кольца $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$. За время движения внутри этих пределов угол φ изменяется на величину $\Delta\varphi$ (фактор 2 появляется за счет пути туда и обратно):

$$\Delta\varphi = 2L_0 \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E_0 - U(r)) - \frac{L_0^2}{r^2}}}. \tag{33}$$

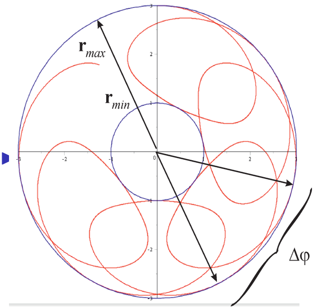


Figure 3. Траектория частицы в центральном поле.

Для того, чтобы траектория была замкнутой, необходимо:

$$m\Delta\varphi = 2\pi n. \tag{34}$$

Оказывается это возможно лишь в двух случаях зависимости $U(r)$: $U(r) \sim 1/r$ и $U(r) \sim 1/r^2$.

Анимационная модель в Maple

- Классическое гравитационное поле массивной частицы, как кулоновское поле заряженной частицы, имеют потенциал, обратно пропорциональный r. Рассмотрим сначала поле притяжения:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \tag{35}$$

где $\alpha > 0$. Для гравитационного поля $\alpha = MmG$, где M – масса центрального тела, G – гравитационная постоянная; для электрического поля $\alpha = -Qe$, где Q – центральный заряд, e – заряд пробной частицы, $Qe < 0$.

- В этом случае интеграл (30) примет вид (сделаем замену $r = 1/\xi$):

$$\varphi = L_0 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m\left(E_0 + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L_0^2}{r^2}}} = \int\limits_{1/r}^{1/r_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2}}.$$

- Доводя выражение под радикалом до полного квадрата:

$$\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2 \equiv -\left(\xi - \frac{m\alpha}{L_0^2}\right)^2 + b^2; \quad b = \frac{m\alpha}{L_0^2}\sqrt{1 + \frac{2E_0L_0^2}{m\alpha^2}}.$$

- Делая замену:

$$\xi = \frac{\alpha m}{L_0^2} - b\cos z,$$

получим окончательно:

Исследование движения в центрально - симметрическом поле: Кеплерова задача

- Классическое гравитационное поле массивной частицы, как кулоновское поле заряженной частицы, имеют потенциал, обратно пропорциональный r. Рассмотрим сначала поле притяжения:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \tag{35}$$

где $\alpha > 0$. Для гравитационного поля $\alpha = MmG$, где M – масса центрального тела, G – гравитационная постоянная; для электрического поля $\alpha = -Qe$, где Q – центральный заряд, e – заряд пробной частицы, $Qe < 0$.

- В этом случае интеграл (30) примет вид (сделаем замену $r = 1/\xi$):

$$\varphi = L_0 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m\left(E_0 + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L_0^2}{r^2}}} = \int\limits_{1/r}^{1/r_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2}}.$$

- Доводя выражение под радикалом до полного квадрата:

$$\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2 \equiv -\left(\xi - \frac{m\alpha}{L_0^2}\right)^2 + b^2; \quad b = \frac{m\alpha}{L_0^2}\sqrt{1 + \frac{2E_0L_0^2}{m\alpha^2}}.$$

- Делая замену:

$$\xi = \frac{\alpha m}{L_0^2} - b\cos z,$$

получим окончательно:

Исследование движения в центрально - симметрическом поле: Кеплерова задача

- Классическое гравитационное поле массивной частицы, как кулоновское поле заряженной частицы, имеют потенциал, обратно пропорциональный r. Рассмотрим сначала поле притяжения:
$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad (35)$$
где $\alpha > 0$. Для гравитационного поля $\alpha = MmG$, где M – масса центрального тела, G – гравитационная постоянная; для электрического поля $\alpha = -Qe$, где Q – центральный заряд, e – заряд пробной частицы, $Qe < 0$.
- В этом случае интеграл (30) примет вид (сделаем замену $r = 1/\xi$):
$$\varphi = L_0 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m\left(E_0 + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L_0^2}{r^2}}} = \int\limits_{1/r}^{1/r_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2}}.$$
- Доводя выражение под радикалом до полного квадрата:
$$\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2 \equiv -\left(\xi - \frac{m\alpha}{L_0^2}\right)^2 + b^2; \quad b = \frac{m\alpha}{L_0^2}\sqrt{1 + \frac{2E_0L_0^2}{m\alpha^2}}.$$
- Делая замену:
$$\xi = \frac{\alpha m}{L_0^2} - b\cos z,$$
получим окончательно:

- Классическое гравитационное поле массивной частицы, как кулоновское поле заряженной частицы, имеют потенциал, обратно пропорциональный r. Рассмотрим сначала поле притяжения:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \tag{35}$$

где $\alpha > 0$. Для гравитационного поля $\alpha = MmG$, где M – масса центрального тела, G – гравитационная постоянная; для электрического поля $\alpha = -Qe$, где Q – центральный заряд, e – заряд пробной частицы, $Qe < 0$.

- В этом случае интеграл (30) примет вид (сделаем замену $r = 1/\xi$):

$$\varphi = L_0 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m\left(E_0 + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L_0^2}{r^2}}} = \int\limits_{1/r}^{1/r_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2}}.$$

- Доводя выражение под радикалом до полного квадрата:

$$\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2 \equiv -\left(\xi - \frac{m\alpha}{L_0^2}\right)^2 + b^2; \quad b = \frac{m\alpha}{L_0^2}\sqrt{1 + \frac{2E_0L_0^2}{m\alpha^2}}.$$

- Делая замену:

$$\xi = \frac{\alpha m}{L_0^2} - b\cos z,$$

получим окончательно:

- Классическое гравитационное поле массивной частицы, как кулоновское поле заряженной частицы, имеют потенциал, обратно пропорциональный r. Рассмотрим сначала поле притяжения:
$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \tag{35}$$
где $\alpha > 0$. Для гравитационного поля $\alpha = MmG$, где M – масса центрального тела, G – гравитационная постоянная; для электрического поля $\alpha = -Qe$, где Q – центральный заряд, e – заряд пробной частицы, $Qe < 0$.
- В этом случае интеграл (30) примет вид (сделаем замену $r = 1/\xi$):
$$\varphi = L_0 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m\left(E_0 + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L_0^2}{r^2}}} = \int\limits_{1/r}^{1/r_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2}}.$$
- Доводя выражение под радикалом до полного квадрата:
$$\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2 \equiv -\left(\xi - \frac{m\alpha}{L_0^2}\right)^2 + b^2; \quad b = \frac{m\alpha}{L_0^2}\sqrt{1 + \frac{2E_0L_0^2}{m\alpha^2}}.$$
- Делая замену:
$$\xi = \frac{\alpha m}{L_0^2} - b\cos z,$$
получим окончательно:

- Классическое гравитационное поле массивной частицы, как кулоновское поле заряженной частицы, имеют потенциал, обратно пропорциональный r. Рассмотрим сначала поле притяжения:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \tag{35}$$

где $\alpha > 0$. Для гравитационного поля $\alpha = MmG$, где M – масса центрального тела, G – гравитационная постоянная; для электрического поля $\alpha = -Qe$, где Q – центральный заряд, e – заряд пробной частицы, $Qe < 0$.

- В этом случае интеграл (30) примет вид (сделаем замену $r = 1/\xi$):

$$\varphi = L_0 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m\left(E_0 + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L_0^2}{r^2}}} = \int\limits_{1/r}^{1/r_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2}}.$$

- Доводя выражение под радикалом до полного квадрата:

$$\frac{2mE_0}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2}\xi - \xi^2 \equiv -\left(\xi - \frac{m\alpha}{L_0^2}\right)^2 + b^2; \quad b = \frac{m\alpha}{L_0^2}\sqrt{1 + \frac{2E_0L_0^2}{m\alpha^2}}.$$

- Делая замену:

$$\xi = \frac{\alpha m}{L_0^2} - b\cos z,$$

получим окончательно:

Исследование движения в центрально - симметрическом поле: Кеплерова задача

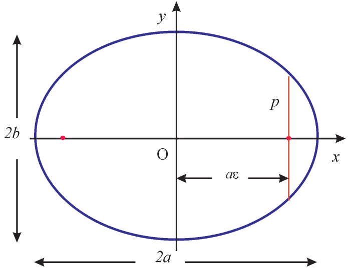
- 

Figure 4. Кривые 2-го порядка!!!

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{br} - \frac{\alpha m}{L_0^2 b}\right) + \mathrm{Const}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1+\mathrm{e}\cos\varphi}, \qquad (36)$$

$$p = \frac{L_0^2}{m\alpha}; \mathrm{e} = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L_0^2}{m\alpha^2}}. \qquad (37)$$

Как известно, уравнение (36) является уравнением кривой 2-го порядка в полярных координатах,

- Отсюда следует:

$$E_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – эллипс;} \qquad (38)$$

$$E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – парабола;} \qquad (39)$$

$$E_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – гипербола.} \qquad (40)$$

- Соотношение (38) известно как 1-й закон Кеплера.
- Из полученных выше формул можно получить и 3-й закон Кеплера — гармонический закон:

где T – период обращения частицы вокруг центрального тела

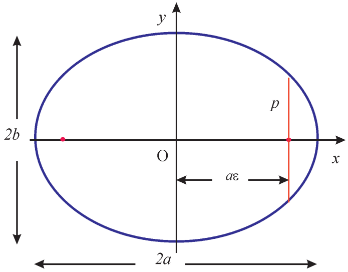
- 

Figure 4. Кривые 2-го порядка!!!

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{br} - \frac{\alpha m}{L_0^2 b}\right) + \mathrm{Const}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1+\mathrm{e}\cos\varphi}, \quad (36)$$

$$p = \frac{L_0^2}{m\alpha}; \mathrm{e} = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L_0^2}{m\alpha^2}}. \quad (37)$$

Как известно, уравнение (36) является уравнением кривой 2-го порядка в полярных координатах,

- Отсюда следует:

$$E_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – эллипс;} \quad (38)$$
$$E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – парабола;} \quad (39)$$
$$E_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – гипербола.} \quad (40)$$

- Соотношение (38) известно как 1-й закон Кеплера.
- Из полученных выше формул можно получить и 3-й закон Кеплера — гармонический закон:

где T – период обращения частицы вокруг центрального тела

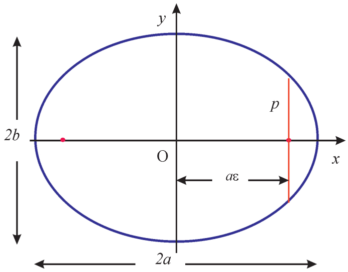
- 

Figure 4. Кривые 2-го порядка!!!

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{br} - \frac{\alpha m}{L_0^2 b}\right) + \mathrm{Const}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + \mathrm{e}\cos\varphi}, \qquad (36)$$

$$p = \frac{L_0^2}{m\alpha}; \mathrm{e} = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L_0^2}{m\alpha^2}}. \qquad (37)$$

Как известно, уравнение (36) является уравнением кривой 2-го порядка в полярных координатах,

- Отсюда следует:

$$E_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – эллипс;} \qquad (38)$$

$$E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – парабола;} \qquad (39)$$

$$E_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – гипербола.} \qquad (40)$$

- Соотношение (38) известно как 1-й закон Кеплера.
- Из полученных выше формул можно получить и 3-й закон Кеплера — гармонический закон:

где T – период обращения частицы вокруг центрального тела

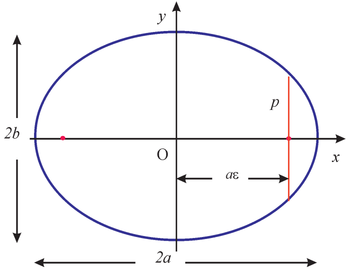
- 

Figure 4. Кривые 2-го порядка!!!

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{br} - \frac{\alpha m}{L_0^2 b}\right) + \mathrm{Const}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + \mathrm{e}\cos\varphi}, \qquad (36)$$

$$p = \frac{L_0^2}{m\alpha}; \mathrm{e} = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L_0^2}{m\alpha^2}}. \qquad (37)$$

Как известно, уравнение (36) является уравнением кривой 2-го порядка в полярных координатах,

- Отсюда следует:

$$E_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – эллипс;} \qquad (38)$$

$$E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – парабола;} \qquad (39)$$

$$E_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – гипербола.} \qquad (40)$$

- Соотношение (38) известно как 1-й закон Кеплера.
- Из полученных выше формул можно получить и 3-й закон Кеплера — гармонический закон:

$$\frac{T^2}{a^3} = \mathrm{Const}, \qquad (41)$$

где T — период обращения частицы вокруг центрального тела

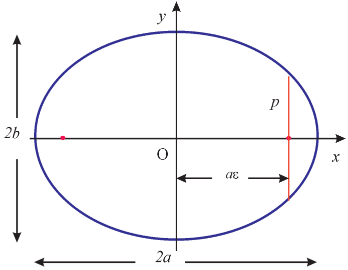
- 

Figure 4. Кривые 2-го порядка!!!

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{br} - \frac{\alpha m}{L_0^2 b}\right) + \mathrm{Const}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1+\mathrm{e}\cos\varphi}, \qquad (36)$$

$$p = \frac{L_0^2}{m\alpha}; \mathrm{e} = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L_0^2}{m\alpha^2}}. \qquad (37)$$

Как известно, уравнение (36) является уравнением кривой 2-го порядка в полярных координатах,

- Отсюда следует:

$$E_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – эллипс;} \qquad (38)$$

$$E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – парабола;} \qquad (39)$$

$$E_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – гипербола.} \qquad (40)$$

- Соотношение (38) известно как 1-й закон Кеплера.
- Из полученных выше формул можно получить и 3-й закон Кеплера — гармонический закон:

$$\frac{T^2}{a^3} = \mathrm{Const}, \qquad (41)$$

где T – период обращения частицы вокруг центрального тела

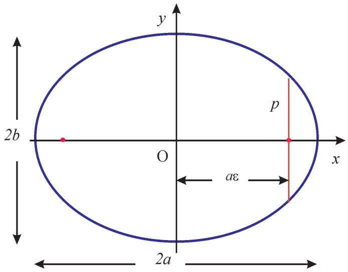
- 

Figure 4. Кривые 2-го порядка!!!

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{br} - \frac{\alpha m}{L_0^2 b}\right) + \mathrm{Const}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1+\mathrm{e}\cos\varphi}, \qquad (36)$$

$$p = \frac{L_0^2}{m\alpha};\ \mathrm{e} = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L_0^2}{m\alpha^2}}. \qquad (37)$$

Как известно, уравнение (36) является уравнением кривой 2-го порядка в полярных координатах,

- Отсюда следует:

$$E_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – эллипс;} \qquad (38)$$

$$E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – парабола;} \qquad (39)$$

$$E_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Траектория – гипербола.} \qquad (40)$$

- Соотношение (38) известно как 1-й закон Кеплера.
- Из полученных выше формул можно получить и 3-й закон Кеплера — гармонический закон:

$$\frac{T^2}{a^3} = \mathrm{Const}, \qquad (41)$$

где T – период обращения частицы вокруг центрального тела