Дорогие студенты, вы зашли в так называемую "Виртуальную аудиторию," в которой к каждому понедельнику я буду заносить материал новых лекций. Если у вас возникают какие-либо вопросы, то вы можете присылать их мне по электронной почте

volodinstudent@gmail.com

На ваши вопросы я буду отвечать вам reply'ем. В конце текста каждой лекции будут предложены задания, которые вам следует выполнить и выслать мне по почте (или, по крайней мере, сообщать, что вы "на проводе"). О том, как их выполнить я могу вам рассказать в Виртуальной Аудитории, если нажмете на слово Форум и напишите ваши вопросы.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Лекция 5

Вероятностные модели надежности

Модель «отсутствие последействия»

(показательное распределение долговечности)

Показательное распределение $\mathrm{E}(\theta)$. Вы, наверное, обратили внимание, что большинство, по крайней мере, "серьезных" изделий, которые выпускают предприятия, снабжается гарантийным сроком службы t_0, и если изделие отказывает до момента t_0, то предприятие несет определенные убытки, связанные с ремонтом или заменой изделия. Естественно, долговечность x (или, как говорят англичане, "срок жизни" – lifetime) является реализацией случайной величины ξ, и только знание ее функции распределения $F(x)$ позволит предприятию установить тот гарантийный срок службы, который отвечает его финансовым возможностям по обеспечению ремонта или замены. Для расчета t_0 необходимо определиться с требуемой надежностью изделия P_0 – "средней" долей изделий, которые обязаны отработать гарантийное время. Зная надежность P_0, мы находим гарантийный срок t_0 из уравнения

$$P(\xi \geqslant t_0) = 1 - F(t_0) = \mathrm{P}_0.$$

В связи с этим функция $H(t) = 1 - F(t),\ t \geqslant 0$, называется *функцией надежности.*

Обычно построение модели надежности изделия опирается на некоторые постулаты, связанные с функционированием изделия, его старением, износом, подверженностью ударным нагрузкам и т.п. Мы рассмотрим сейчас один из таких постулатов применительно к изделиям, которые отказывают не в силу процессов старения, а только по причине резко возросших (так называемых "ударных") нагрузок на режим его работы. Естественно, в такой ситуации вероятность того, что изделие прослужит еще некоторое время t при условии, что оно уже отслужило срок s, не должна зависеть от s, то есть

$$P\{\xi \geqslant t+s \mid \xi \geqslant s\} = \frac{P(\{\xi \geqslant t+s\} \cap \{\xi \geqslant s\})}{P(\xi \geqslant s)} =$$

$$\frac{P(\xi \geqslant t+s)}{P(\xi \geqslant s)} = P(\xi \geqslant t).$$

Таким образом, функция надежности $H(t)$ изделия должна удовлетворять функциональному уравнению

$$H(t+s) = H(t)H(s), \quad t \geqslant 0,\ s \geqslant 0. \tag{1}$$

Предложение 1. *Если функция $H(t),\ t \geqslant 0$ удовлетворяет краевым условиям*

$$\lim_{t\to 0} H(t) = 1, \quad \lim_{t\to\infty} H(t) = 0$$

и непрерывна слева, то все решения уравнения (1) имеют вид

$$H(t) = e^{-\lambda t},$$

где $\lambda > 0$ –произвольный параметр.

Доказательство. Из уравнения (1) легко вывести, что для любого $c > 0$ и любого целого $n \geqslant 1$ имеет место соотношение

$$H(nc) = H^{\,n}(c). \tag{2}$$

Действительно, в силу (1), используя индукцию, получаем

$$H(nc) = H((n-1)\,c) + c) = H((n-1)\,c)H(c) =$$

$$= H((n-2)\,c)H^{\,2}(c) = \ldots = H^{\,n}(c).$$

Далее, для любых $c > 0$ и целого $m \geqslant 1$ справедливо равенство

$$H\,(c/m) = H^{1/m}(c), \tag{3}$$

которое немедленно следует из (2):

$$H(c) = H(mc/m) = H^{\,m}(c/m).$$

Соотношения (2) и (3) позволяют установить строгое неравенство $0 < H(1) < 1$. Действительно, если допустить противное: $H(1) = 0$, то в силу (3) для любого целого $m \geqslant 1$ получаем

$$H(1/m) = H^{1/m}(1) = 0.$$

Устремляя m к бесконечности и используя свойство непрерывности H в нуле, получаем противоречие

$$1 = H(0) = \lim_{m\to\infty} H(1/m) = 0.$$

Аналогично, если предположить, что $H(1) = 1$, то, в силу (2), для любого целого n $H(n) = H^n(1) = 1$ и, в то же время,

$$\lim_{n\to\infty} H(n) = 0.$$

Неравенство $0 < H(1) < 1$ означает, что существует такое $\lambda > 0$, что $H(1) = e^{-\lambda}$. Но тогда, в силу (2) и (3), для любых целых n и m имеем

$$H(n) = e^{-n\lambda},\ \ H(n/m) = H^{1/m}(n) = \exp\{-n\lambda/m\}.$$

Это означает, что наше предположение доказано для всех рациональных t. Любое другое значение t на положительной полуоси можно сколь угодно точно оценить снизу рациональным числом и затем воспользоваться непрерывностью слева $H(t)$ при переходе в оценке t к пределу.

Итак, мы нашли функцию распределения случайной величины ξ, реализующую долговечность изделия,

$$F(x) = 1 - H(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$$

в области $x > 0$. Как будет показано в дальнейшем, это распределение тесно связано с распределением Пуассона и параметр λ, как и в модели $\mathrm{P}(\lambda)$, характеризует *интенсивность потока отказов*. Однако в теории вероятностей обычно модель показательного распределения параметризуется иным способом, через параметр $\theta = 1/\lambda$, который имеет смысл средней долговечности. Таким образом, показательное распределение $\mathrm{E}(\theta)$, которое будет в дальнейшем рассматриваться, имеет функцию распределения $F(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и

$$F(x) = 1 - \exp\{-x/\theta\},$$

если $x > 0$.

Итак, показательное распределение долговечности было получено нами, исходя из постулата “отсутствие последействия” – независимости остаточной долговечности от предшествующей работы (жизнедеятельности) объекта. Существует другая модель для распределения долговечности, из которой также получается показательное распределение времени “жизни” испытуемого на отказ объекта. Эта модель напрямую связана с процессов Пуассона, модель которого была получена нами в прошлой лекции. Показательному распределению следует время ожидания первого события (инцидента) в процессе Пуассона. Однако можно доказать и более сильный результат, относящийся к распределению временных промежутков между появления событий.

Предложение 2. *Случайные величины $\tau_1, \ldots, \tau_n$, реализации которых указывают промежутки времени между появлениями событий в процессе Пуассона, независимы и одинаково распределены по показательному закону* $\mathrm{E}(\lambda^{-1})$.

Доказательство.Требуется показать, что совместная функция плотности случайных величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$

$$f_n(t_1, \ldots, t_n) = \lambda^n \exp\left\{-\lambda \sum_1^n t_k\right\}, \tag{4}$$

в области $t_{[1]} = \min\{t_1, \ldots, t_n\} > 0$.

Выберем $\Delta t < t_{[1]}$ и подсчитаем вероятность того, что в каждом из промежутков $[T_k, T_k + \Delta t)$, где $T_k = t_1 + \ldots + t_k$, $k = 1, \ldots, n$, произошло только по одному событию, в то время как в промежутках $[0, t_1)$ и $[T_k + \Delta t, T_{k+1})$, $k = 1, \ldots, n-1$, событий не было. Очевидно, при $\Delta t \to 0$ асимптотика этой вероятности должна иметь вид $f_n(t_1, \ldots, t_n)(\Delta t)^n$, и это обстоятельство позволит нам получить искомую функцию плотности f_n.

В силу постулата (P2) независимости приращений все из рассматриваемых $2n$ событий о появлении по одному или полному отсутствию инцидентов в указанных временных промежутках являются независимыми; вероятность появления ровно одного события в каждом из промежутков $[T_k, T_k + \Delta t)$, $k = 1, \ldots, n$, равна (постулат (P1)) $p_1(\Delta t)$, а вероятности отсутствия событий в промежутках $[0, t_1)$ и $[T_k + \Delta t, T_{k+1})$ равны соответственно $p_0(t_1)$ и $p_0(t_{k+1} - \Delta t)$, $k = 1, \ldots, n-1$. Таким образом, вероятность совместного осуществления всех $2n$ событий в терминах функции $p_x(t)$ равна

$$p_0(t_1) p_1^n(\Delta t) \prod_1^{n-1} p_0\left(t_{k+1} - \Delta t\right). \tag{5}$$

Если $\Delta t \to 0$, то применение распределения Пуассона дает

$$p_0(t_1) = \exp\{-\lambda t_1\}, \quad p_1^n(\Delta t) = \lambda^n \exp\{-n\lambda\Delta t\}(\Delta t)^n \sim \lambda^n (\Delta t)^n,$$

$$p_0\left(t_{k+1} - \Delta t\right) = \exp\left\{-\lambda t_{k+1} + \lambda \Delta t\right\} \sim \exp\left\{-\lambda t_{k+1}\right\}.$$

Подставляя полученные асимптотики в (5), получаем с точностью до множителя $(\Delta t)^n$ правую часть (4).

Пример 1. *Тестирование надежности объекта при показательном распределении долговечности.* Существующие методы испытания на надежность выпускаемой предприятием продукции, состоит или в получении информации от потребителей по календарным моментам отказа эксплуатируемого изделия, или в испытании на долговечность отобранных n изделий на специальном стенде. Мы рассмотрим последний способ испытаний, результат которого состоит в наблюдении случайной выборки $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$. Напомним, что $X^{(n)}$ представляет ряд независимых значений случайной величина $\xi = \xi(\omega)$ с некоторой функцией распределения $F(x)$, $x \geqslant 0$. Реализация x_k каждой компоненты X_k случайной выборки соответствует промежутку времени от начала работы до момента отказа k-го, изделия (его долговечности, $k = 1, \ldots, n$). Статистическая проблема состоит в проверке надежности выпускаемых изделий – в проверке гипотезы, что значение функции надежности $H(t_{P_0})$, когда $t = t_{P_0}$ есть гарантийный срок службы, больше, чем заданное значение P_0.

Пусть долговечность ξ распределена по показательному закону с функцией распределения

$$F(x \,|\, \theta) = 1 - \exp\{-x/\theta\},$$

значение параметра θ которой не известно. Итак, мы должны удостовериться, что надежность выпускаемых изделий достаточно высока: $H(t) \geqslant P_0$, где P_0 –наименьшая допустимая доля изделий, которые должны прослужить гарантийный срок t.

Это типичная задача проверки гипотез, решение которой начинается с определения нулевой гипотезы H_0. При этом следует помнить, что в статистическом критерии контролируется вероятность отклонения H_0, когда она в действительности верна. В нашей конкретной проблеме спецификация нулевой гипотезы во многом зависит от того, что повлечет за собой отказ изделия. Если мы выпускаем бытовые приборы, то отказ изделия до гарантийного срока t повлечет издержки на ремонт, которые могут быть незначительными по сравнению со стоимостью изделия. В таком случае естественно выбрать в качестве нулевой гипотезы утверждение о надежности изделий – отклонив эту гипотезу, когда она верна, мы потеряем дорогостоящую продукцию, ремонт которой нам обошелся бы значительно дешевле, чем ее уничтожение или продажа по бросовой цене. Если же отказ изделия приводит к катастрофическим последствиям, например, к гибели людей, то здесь рассуждать нечего, и за нулевую гипотезу следует брать утверждение о “ненадежности”. Отклонив такую гипотезу, когда она в действительности верна, мы столкнемся с неприемлемо большой долей отказов до истечения гарантийного срока, и поэтому риск от принятия “плохих” изделий должен быть контролируем. Остановимся на этом варианте и приступим к построению равномерно наиболее мощного критерия проверки гипотезы “ненадежности” $H_0: \; H(t) < P_0$ при альтернативе $H_1: \; H(t) \geqslant P_0$, когда $H(t) = \exp\{-t/\theta\}$.

В терминах значений параметра θ нулевая гипотеза принимает вид $H_0: \; \theta < \theta_0 = -t/\ln P_0$. Зафиксируем некоторое альтернативное значение $\theta_1 > \theta_0$, и рассмотрим задачу проверки простой гипотезы $H_0': \; \theta = \theta_0$ при простой альтернативе $H_1': \; \theta = \theta_1$. Наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы при простой альтернативе имеет критическую область вида (см. теорему 8.1)

$$L(X^{(n)}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_1(X_k)}{f_0(X_k)} = \frac{\theta_0}{\theta_1} \exp\left\{ \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) \sum\nolimits_1^n X_k \right\} > C,$$

где критическая константа C определяется по заданному уровню значимости α из условия $P_{\theta_0}\big(L(X^{(n)}) > C\big) \leqslant \alpha$. Поскольку статистика

$$T_n = \sum\nolimits_1^n X_k$$

имеет гамма-распределение $\mathrm{G}(n,\, \theta_0)$, то для определения C в последнем неравенстве следует положить знак равенства. Кроме этого, статистика отношения правдоподобия $L(X^{(n)})$ есть монотонная функция статистики T_n, поэтому критическую область $L(X^{(n)}) > C$ можно записать в эквивалентной форме $T_n > C$ и находить новое C из равенства

$$P_{\theta_0}(T_n > C) = 1 - G_n(C/\theta_0) = \alpha$$

(собственно говоря, нам все равно, какое C определять, но на практике, вне сомнения, удобнее иметь дело с критической областью $T_n > C$).

Итак,

$$C(\alpha) = \theta_0 \cdot G_n^{-1}(1-\alpha),$$

где $G_n^{-1}(\cdot)$ – квантиль стандартного гамма-распределения $\mathrm{G}(n,\, 1)$, и критерий

$$\varphi^*(X^{(n)}) = \mathrm{I}_{\{T_n > C(\alpha)\}}(X^{(n)})$$

заданного размера α является наиболее мощным в классе всех критериев уровня α, проверяющих гипотезу H_0' при альтернативе H_1'. Это означает, что для любого другого критерия φ с

$$\mathbf{E}_{\theta_0}\, \varphi(X^{(n)}) \leqslant \alpha$$

выполняется неравенство

$$\mathbf{E}_{\theta_1}\, \varphi(X^{(n)}) \leqslant \mathbf{E}_{\theta_1}\, \varphi^*(X^{(n)}). \tag{6}$$

Но критерий φ^* не зависит от выбора альтернативного значения θ_1 параметра θ – критическая константа $C(\alpha) = \theta_0 \cdot G_n^{-1}(1-\alpha)$! Следовательно, неравенство (6) справедливо при любых $\theta_1 > \theta_0$, и мы приходим к заключению, что *критерий φ^* есть* *равномерно наиболее мощный критерий в классе всех критериев уровня* α, *проверяющих простую гипотезу* $H_0' : \ \theta = \theta_0$ *при сложной альтернативе* $H_1 : \ \theta > \theta_0$.

Далее, функция мощности критерия φ^*, как критерия различения исходных сложных гипотез $H_0 : \ \theta < \theta_0$ и $H_1 : \ \theta \geqslant \theta_0$, равна

$$m(\theta) = \mathbf{E}_\theta \, \varphi^*(X^{(n)}) = P_\theta(T_n > C(\alpha)) = 1 - G_n(G_n^{-1}(1-\alpha)\theta_0/\theta), \ \theta > 0.$$

Это – возрастающая функция θ, поэтому максимум вероятности ошибки первого рода (размер критерия) равен

$$m(\theta_0) = 1 - G_n\left(G_n^{-1}(1-\alpha)\right) = \alpha.$$

Таким образом, *критерий* φ^* *есть критерий размера* α *проверки гипотезы* H_0 *при альтернативе* H_1, *обладающий равномерно наибольшей мощностью в классе всех критериев* φ *с ограничением* $\mathbf{E}_{\theta_0} \varphi(X^{(n)}) = \alpha$. Но в таком случае он будет равномерно наиболее мощным и в более узком классе критериев уровня α, то есть критериев φ, удовлетворяющих ограничению $\mathbf{E}_\theta \, \varphi(X^{(n)}) \leqslant \alpha$ при любом $\theta < \theta_0$.

Более того, нетрудно убедиться, что критерий φ^* обладает минимальной вероятностью ошибки первого рода $\alpha(\theta) = m(\theta), \ \theta \leqslant \theta_0$ в классе всех критериев уровня α. Для этого достаточно поменять местами нулевую гипотезу и альтернативу и выбрать уровень значимости, равный $1 - \alpha$.

В этом примере построение равномерно наиболее мощного критерия стало возможным благодаря особому свойству статистической структуры показательного распределения: *статистика* $L(X^{(n)})$ *отношения правдоподобия есть монотонная функция статистики* $T_n = \sum_1^n X_k$. Это – частный случай статистических структур, обладающих достаточной статистикой T, ибо в силу теоремы факторизации у таких структур $L(X^{(n)}) = g_{\theta_1}(T)/g_{\theta_0}(T)$ зависит от $X^{(n)}$ только через значения $T(X^{(n)})$. Дополнительное свойство монотонности отношения правдоподобия относительно T обеспечивает существование и возможность конструктивного построения равномерно наиболее мощного критерия, причем критическая область такого критерия обязательно имеет вид $T > C$ или $T < C$.

Контрольные вопросы.

1. Найдите функцию правдоподобия $L(\theta \,|\, X(n))$ случайной выборки из показательного распределения.

2. Найдите оценки по методу моментов и мет оду максимального правдоподобия для параметра θ показательного распределения.

3. Докажите, что выборочное среднее есть эффективная оценка параметра θ в классе всех несмещенных оценок, то есть на выборочном среднем достигается нижняя граница Рао–Крамера для дисперсии оценки.