§6. САМОСОПРЯЖЕННЫЙ И КОСОЭРМИТОВ ОПЕРАТОРЫ

Оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

называется ***самосопряженным*** (***эрмитовым***), если

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A},$$

иными словами, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \quad \forall\ x, y \in \mathbf{X}_n.$$

.

Оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

называется ***косоэрмитовым***, если

$$\mathcal{A}^* = -\mathcal{A},$$

то есть

$$(\mathcal{A}x, y) = -(x, \mathcal{A}y) \quad \forall\ x, y \in \mathbf{X}_n.$$

.

Поскольку в любом ортонормированном базисе матрицы взаимно сопряженных операторов взаимно сопряжены, то матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе эрмитова, матрица косоэрмитова оператора косоэрмитова.

.

Упражнение. Показать, что если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе эрмитова, то оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе косоэрмитова, то оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов.

.

Примером самосопряженного оператора является оператор ортогонального проектирования.

Пусть $\mathcal{P} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ — оператор ортогонального проектирования евклидова пространства $\mathbf{X}$ на подпространство $L \subset \mathbf{X}$. Тогда для любых x, $y \in \mathbf{X}$ имеем

$$x = \mathcal{P}x + x^2, \quad y = \mathcal{P}y + y^2,$$

где

$$x^2,\ y^2 \perp L.$$

Поэтому

$$(\mathcal{P}x, y) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y + y^2) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y) + (\mathcal{P}x, y^2) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y),$$

$$(x, \mathcal{P}y) = (\mathcal{P}x + x^2, \mathcal{P}y) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y) + (x^2, \mathcal{P}y) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y),$$

следовательно,

$$(\mathcal{P}x, y) = (y, \mathcal{P}x).$$

.

Любой оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве, однозначно представим в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2,$$

где i — мнимая единица,

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$$

есть самосопряженные операторы:

$$(A + \mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A} + \mathcal{A}^*, \quad \left(\frac{1}{i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)\right)^* = \frac{1}{i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*).$$

.

Если предположить, что наряду с

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2$$

возможно представление

$$\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 + i\widetilde{\mathcal{H}}_2$$

с эрмитовыми операторами $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, $\widetilde{\mathcal{H}}_2$, то

$$(\mathcal{H}_1 - \widetilde{\mathcal{H}}_1) + i(\mathcal{H}_2 - \widetilde{\mathcal{H}}_2) = 0.$$

Переходя в

$$(\mathcal{H}_1 - \widetilde{\mathcal{H}}_1) + i(\mathcal{H}_2 - \widetilde{\mathcal{H}}_2) = 0$$

к сопряженным операторам, получим

$$(\mathcal{H}_1 - \widetilde{\mathcal{H}}_1) - i(\mathcal{H}_2 - \widetilde{\mathcal{H}}_2) = 0.$$

Складывая почленно два этих равенства, будем иметь, что

$$\mathcal{H}_1 = \widetilde{\mathcal{H}}_1,$$

но тогда и

$$\mathcal{H}_2 = \widetilde{\mathcal{H}}_2,$$

т. е. представление

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2$$

однозначно.

.

Теорема. Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, был самосопряжен, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ было вещественным при любом $x \in \mathbf{X}_n$.

.

<u>Доказательство.</u> **Если**

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,$$

то

$$(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x) = (x, \mathcal{A}x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)},$$

т. е.

$$(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}.$$

.

Обратно, если

$$(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R},$$

то

$$(\mathcal{A}^* x, x) = (x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, x),$$

следовательно,

$$((\mathcal{A}^* - \mathcal{A})x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

откуда получаем, что

$$\mathcal{A} - \mathcal{A}^* = 0,$$

т. е.

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}. \ \square$$

.

<u>Теорема.</u> Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, был косоэрмитов, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ было мнимым при любом $x \in \mathbf{X}_n$.

.

Доказательство. **Если**

$$\mathcal{A}^* = -\mathcal{A},$$

то

$$(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^* x) = -(x, \mathcal{A}x) = -\overline{(\mathcal{A}x, x)},$$

т. е.

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, x) = 0.$$

.

Обратно, если

$$(\mathcal{A}x, x) = \operatorname{Im}(\mathcal{A}x, x)$$

то

$$(\mathcal{A}^*x, x) = (x, \mathcal{A}x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)} = -\operatorname{Im}(\mathcal{A}x, x) = -(\mathcal{A}x, x),$$

следовательно,

$$((\mathcal{A}^* + \mathcal{A})x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

откуда получаем, что

$$\mathcal{A}^* + \mathcal{A} = 0,$$

т. е.

$$\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}. \ \Box$$

§8. УНИТАРНЫЙ ОПЕРАТОР

Оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *унитарным*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = I.$$

.

<u>Упражнения.</u>

1) Покажите, что для того чтобы оператор был унитарным необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ была унитарна.

.

2) Покажите, что определитель унитарного оператора по модулю равен единице.

.

3) Покажите, что произведение унитарных операторов — унитарный оператор.

.

Если оператор $\mathcal{A}$ унитарен, то для любых $x, y \in \mathbf{X}_n$ имеем

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y) = (x, y),$$

т. е. унитарный оператор не меняет скалярного произведения векторов, и, следовательно, не меняет длин векторов:

$$|\mathcal{A}x| = \sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)} = \sqrt{(x, x)} = |x|.$$

.

Обратно, если линейный оператор не меняет скалярного произведения любых двух векторов из $\mathbf{X}_n$, то он унитарен.

.

В самом деле, из равенства

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$$

вытекает, что

$$(x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y) = (x, y) \quad \forall\, x,\ y \in \mathbf{X}_n.$$

Поскольку последнее равенство выполнено для любых $x \in \mathbf{X}_n$, то

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}y = y \quad \forall\, y \in \mathbf{X}_n,$$

т. е.

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = I.$$

Докажем, что равенство

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I$$

также выполняется. Из равенства

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = I$$

вытекает, что

$$\det(\mathcal{A}) \neq 0,$$

следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет обратный. Умножая это равенство слева на $\mathcal{A}$, а затем справа на $\mathcal{A}^{-1}$, получим, что

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}I\mathcal{A}^{-1}$$

т. е.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I.$$

.

Упражнение. Покажите, что если

$$|\mathcal{A}x| = |x| \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

то $\mathcal{A}$ — унитарный оператор.

.

Таким образом, оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ является унитарным тогда и только тогда, когда он не меняет длины никакого вектора пространства $\mathbf{X}_n$.

§9. НОРМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР

Оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, называется *нормальным*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

.

Самосопряженный, косоэрмитов и унитарный операторы, очевидно, — нормальные операторы:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A},$$

$$\mathcal{A} = -\mathcal{A}^* \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A},$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I, \quad \mathcal{A}^*\mathcal{A} = I \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

.

<u>Упражнение.</u> Доказать, что для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ была нормальной.

.

<u>Теорема.</u> **Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — нормальный оператор. Тогда**

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^*).$$

.

Доказательство. **Пусть**

$$\mathcal{A}x = 0.$$

Тогда

$$0 = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*x, x) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x),$$

следовательно,

$$\mathcal{A}^*x = 0.$$

Эти же выкладки показывают, что

$$\mathcal{A}^*x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}x = 0.$$

Таким образом,

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^*). \;\; \square$$

.

Из

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^*)$$

и

$$\mathbf{X}_n = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*)$$

немедленно вытекает

<u>Следствие.</u> **Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — нормальный оператор. Тогда**

$$\mathbf{X}_n = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*),$$

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*).$$

.

Теорема. Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — нормальный оператор, x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$, т. е.

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Тогда x, $\overline{\lambda}$ — собственная пара оператора $\mathcal{A}^*$:

$$\mathcal{A}^* x = \overline{\lambda} x.$$

.

<u>Доказательство.</u> Имеем

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda} I.$$

Отсюда

$$(\mathcal{A}-\lambda I)(\mathcal{A}-\lambda I)^* = (\mathcal{A}-\lambda I)(\mathcal{A}^*-\overline{\lambda} I) = \mathcal{A}\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + \lambda\overline{\lambda} I,$$

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^*(\mathcal{A}-\lambda I) = (\mathcal{A}^*-\overline{\lambda} I)(\mathcal{A}-\lambda I) = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + \overline{\lambda}\lambda I.$$

Значит, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A},$$

то при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\mathcal{A}-\lambda I$ — также нормальный оператор:

$$(\mathcal{A}-\lambda I)(\mathcal{A}-\lambda I)^* = (\mathcal{A}-\lambda I)^*(\mathcal{A}-\lambda I).$$

.

Итак, оператор $\mathcal{A} - \lambda I$ нормальный, причем

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda} I,$$

следовательно,

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda} I).$$

Это и означает, что если x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$, т. е.

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

то x, $\overline{\lambda}$ — собственная пара оператора $\mathcal{A}^*$:

$$\mathcal{A}^* x = \overline{\lambda} x. \ \square$$

.

Все собственные числа самосопряженного оператора вещественны.

Действительно, всякий самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ является нормальным, поэтому, если x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$, то

$$\mathcal{A}x = \lambda x, \quad \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* x = \overline{\lambda} x,$$

следовательно,

$$(\lambda - \overline{\lambda})x = 0,$$

но вектор

$$x \neq 0$$

как собственный вектор, значит,

$$\lambda = \overline{\lambda},$$

т. е.

$$\mathrm{Im}(\lambda) = 0.$$

.

Все собственные числа косоэрмитва оператора чисто мнимые.

.

Действительно, если x, λ — собственная пара косоэрмитва оператора $\mathcal{A}$, то выполняются равенства

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

$$\mathcal{A}x = -\mathcal{A}^* x = -\overline{\lambda} x,$$

следовательно,

$$\lambda = -\overline{\lambda},$$

т. е.

$$\mathrm{Re}(\lambda) = 0.$$

.

Все собственные числа унитарного оператора по модулю равны единице.

.

В самом деле, если

$$\mathcal{A}x = \lambda x, \quad x \neq 0,$$

то поскольку для унитарного оператора

$$|\mathcal{A}x| = |x|,$$

то

$$|\lambda||x| = |\mathcal{A}x| = |x|,$$

т. е.

$$|\lambda| = 1.$$

.

Укажем на очевидное, но полезное

<u>Следствие.</u>

У всякой эрмитовой матрицы все характеристические числа вещественны;

у всякой косоэрмитовой матрицы все характеристические числа чисто мнимые;

у всякой унитарной матрицы все характеристические числа по модулю равны единице.

ГЛАВА 11. ОПЕРАТОРЫ В ВЕЩЕСТВЕННОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Отметим некоторые особенности, связанные с рассмотрением линенйных операторов, действующих в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$.

.

В любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ взаимно транспонированы:

$$A_e^* = (A_e)^T.$$

.

Для того, чтобы оператор был самосопряжен,

$$A^* = A,$$

необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ его матрица была симметрична:

$$(A_e)^T = A_e.$$

.

Косоэрмитов оператор, действующий в вещественном евклидовом пространстве, обычно называют ***косoсимметричным***:

$$A^* = -A.$$

.

Для того, чтобы оператор был кососимметричным,

$$A^* = -A,$$

необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ его матрица была кососимметрична:

$$(A_e)^T = -A_e.$$

.

Любой оператор $\mathcal{A}$ однозначно представим в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2,$$

где $\mathcal{A}_1$ — самосопряженный, $\mathcal{A}_2$ — кососимметричный операторы, причем,

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*).$$

Действительно,

$$\mathcal{A}_1^* = \frac{1}{2}(\mathcal{A}^* + (\mathcal{A}^*)^*) = \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_2^* = \frac{1}{2}(\mathcal{A}^* - (\mathcal{A}^*)^*) = -\mathcal{A}_2.$$

.

Унитарный оператор, т. е. оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I,$$

действующий в вещественном евклидовом пространстве, называется *ортогональным*. Для него

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1},$$

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = I.$$

.

Для того, чтобы оператор был ортогональным,

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I,$$

необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе была ортогональной:

$$A_e(A_e)^T = I.$$

.

Из определения ортогонального оператора сразу же вытекает, что

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y) = (x, y),$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ не меняет длин векторов,

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)} = |\mathcal{A}x|,$$

и углов между векторами:

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)}{|\mathcal{A}x||\mathcal{A}y|} = \cos(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y).$$

.

Определитель ортогонального оператора равен плюс или минус единице.

.

Собственным числом ортогонального оператора может быть только плюс или минус единица.

.

Для того, чтобы оператор был нормальным,

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A},$$

необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе была нормальной:

$$A_e A_e^T = A_e^T A_e.$$