Научно-методический центр
"Образование"
(г. Казань)

Камалеева А.Р.

Гиззатуллина Л.Р.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Казань 2017

Печатается по рекомендации Редакционно-издательского совета
Научно-методического центра "Образование"

УДК 53(075.8)
ББК 22.3 Я 73
К45

Автор – составитель:
А.Р. Камалеева, доктор педагогических наук, профессор РАЕ, ведущий научный сотрудник ФГБНУ "Институт педагогики, психологии и социальных проблем.
Л.Р. Гиззатуллина, учитель математики МБОУ "СОШ №62 с углубленным изучением отдельных предметов" г.Казани.

Рецензенты:
П.П. Головин, Народный учитель СССР, кандидат педагогических наук, директор ученической учебно-методической и производственной фирмы «Импульс».
В.М. Сарро, доцент кафедры теории и методики обучения физике Казанского федерального университета.

К45 **Камалеева А.Р., Гиззатуллина Л.Р. Математический аппарат физики**: учебное пособие. – Казань: Отечество, 2017. .– 42 с.
ISBN 978-5-9222-1196-3

Учебное пособие переиздано вторично и адресовано студентам педвуза, учителям школ, гимназий, лицеев и колледжей, слушателям подготовительных курсов и учащимся старших классов. Отбор материала проведен в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта по физике.

В данном учебном пособии используются минимальные сведения из курса математики, которые необходимы при изучении физики и при решении физических задач.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3 Я 73

ISBN 978-5-9222-1196-3

Камалеева Алсу Рауфовна

Гиззатуллина Лейсан Рашитовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Издательство «Отечество»,
420126, г. Казань, ул. Чистопольская, д.27а

Подписано в печать 01.11.2017. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 2,7. Тираж 300. Заказ № 2410/1

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии «Вестфалика» (ИП Колесов В.Н.)
420111, г. Казань, ул. Московская, 22. Тел.: 292-98-92
e-mail: westfalika@inbox.ru

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a),$$

где a; b - нижний и верхний пределы интегрирования.

Пример.

Скорость движения тела задана уравнением $\vartheta = (2t^2 + t)$ *см/с*. Найти путь, пройденный им за 6 *с* от начала движения.

Решение:

$$\int_0^6 (2t^2 + t)dt = \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right)\Bigg|_0^6 = \frac{2}{3}\cdot 6^3 + \frac{1}{2}\cdot 6^2 = 162\ (см).$$

СОДЕРЖАНИЕ

1. Запись числа в стандартном виде. Действия над степенями десяти

При изучении физики чаще всего приходится сталкиваться с величинами (числами), которые либо много больше, либо много меньше единицы. Поэтому при работе с большими и малыми величинами необходимо уметь:

- записать любую величину в стандартном виде - в виде произведения некоторого числа на число десять в соответствующей степени $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$; $n \in Z$;
- переносить запятую любого числа вправо или влево, доводя его до стандартного вида;
- производить действия над ними.

1. Примеры записи числа в стандартном виде:

   а) $0{,}000025 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$; б) $33000000 = 3{,}3 \cdot 10^7$

2. Примеры переноса запятой любого числа, приводя его к стандартному виду:

а) $0{,}67 \cdot 10^{-4} = 6{,}7 \cdot 10^{-5}$, $67 \cdot 10^{-6} = 6{,}7 \cdot 10^{-5}$ б) $0{,}33 \cdot 10^{6} = 3{,}3 \cdot 10^{5}$, $33 \cdot 10^{4} = 3{,}3 \cdot 10^{5}$

3. Свойства степени десяти

а) $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$

б) $\dfrac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$

в) $(10^a)^b = 10^{ab}$

г) $\dfrac{1}{10^b} = 10^{-b}$

д) $10^0 = 1$

е) $\sqrt[b]{10^a} = 10^{\frac{a}{b}}$

Основные **правила интегрирования**:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Основные **формулы интегрирования:**

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C;$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

2. **Определенный интеграл**

Определенным интегралом на промежутке [*a; b*] от непрерывной функции *f(x)* называется приращение *F(b) - F(a)* любой первообразной *F* этой функции на промежутке [*a*; *b*] и обозначается

При решении задач по физике используются следующие производные:

1. $(c)' = 0$; $c = const$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(\sin x)' = \cos x$
5. $(\cos x)' = -\sin x$
6. $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$
7. $(u\cdot \upsilon)' = u'\cdot \upsilon + \upsilon'\cdot u$
8. $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)^I = \dfrac{u^I\upsilon - \upsilon^I u}{\upsilon^2}$

Пример. Зависимость координаты тела от времени дана формулой $x(t) = 10 + 4t - t^2$. Какова начальная скорость и ускорение тела Г

Решение:

Скорость движения $\upsilon = x'(t) = (10 + 4t - t^2)' - 4 - 2t$.
В начальный момент $t = 0$; $\upsilon_0 = 4$ *м/с*.
Ускорение тела $a = \upsilon'(t) = (4 - 2t)' = -2$; $a = -2$ *м/с*^{2} .

17. Интеграл

1. **Неопределенный интеграл**

Дифференцируемая функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на данном промежутке, если для всех значений *x* из этого промежутка справедливо равенство *F'(x) = f(x)*.

Если на некотором промежутке *F(x)* - первообразная для *f{x)*, то выражение $\int f(x)dx = F(x) + c$ называется неопределенным интегралом функции *f(x)*, где с - произвольная постоянная; *f(x)dx* - подинтегральное выражение.

Примеры выполнения действий над степенями десяти:

а) $2\cdot10^{-3}\cdot3\cdot10^8 = 6\cdot10^5$; б) $\dfrac{3\cdot10^{-8}}{15\cdot10^{-9}} = 0{,}2\cdot10 = 2$

в) $\left(10^8\right)^2 = 1\cdot10^{16}$; г) $\dfrac{1}{5\cdot10^{-6}} = 0{,}2\cdot10^6 = 2\cdot10^5$;

д) $\sqrt[3]{10^{15}} = 1\cdot10^5$

2. Приближенные вычисления в задачах по физике

1. Значащие цифры числа

Значащими цифрами числа называются все его цифры, кроме нулей, стоящих левее первой, отличной от нуля цифры, и нулей, стоящих в конце числа, если они взяты взамен неизвестных.

Примеры:

а) $\underbrace{0{,}00}_{\text{незначащие}}\ \underbrace{6304}_{\text{значащие}}\ 000$

б) $\underbrace{803}_{\text{значащая}}\ \underbrace{0000}_{\text{незначащие}} = 803\cdot10^4$

2. Правила округления

Если первая отбрасываемая цифра больше четырех, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Например, при округлении до сотых: $46{,}2872 \approx 46{,}29$.

Если первая отбрасываемая цифра меньше 4 или равна 4, то последняя сохраняемая цифра не изменяется.

Например, при округлении до сотых: $13{,}924 \approx 13{,}92$.

Если отбрасываемая часть числа состоит из одной цифры 5, то число округляется так; чтобы последняя сохраняемая цифра была четной.

Например, при округлении до десятых:

$$43{,}25 \approx 43{,}2; \qquad 43{,}35 \approx 43{,}4$$

3. Математические действия с приближенными числами - правила подсчета цифр:

3.1. При сложении и вычитании в результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством десятичных знаков.

Пример. $274{,}1 + 87{,}43 \approx 361{,}5$.

3.2. При умножении и делении в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное число с наименьшим количеством значащих цифр (без нулей).

Примеры: а) $3{,}2 \cdot 12{,}56 = 40{,}192$ и $40{,}2$; б)

3.3. Результат расчета значений функций $x^n, \sqrt[n]{x}, \lg x$ некоторого приближенного числа x должен содержать столько значащих цифр, сколько имеет число x.

Примеры: а) $3{,}14^2 = 9{,}8696 \approx 9{,}87$; б) $\sqrt{31} = 5{,}4772 \approx 5{,}5$.

3.4. Если некоторые приближенные числа имеют больше десятичных знаков (при сложении или вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их

приращении независимого переменного, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ называют **скоростью изменения функции в точке** x_0 Для нее принято название производная. Производная функции f в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$.

Механический смысл производной:

Если задана функция $S = f(t)$, с помощью которой можно определить положение точки для любого момента времени, то движение считается заданным, а уравнение $S = f(t)$ - уравнением движения.

Итак, в момент t точка находится в т. M на расстоянии $OM_1 = S + \Delta S_1 = f(t + \Delta t)$ от т. O.

Рассмотрим момент $t + \Delta t$, когда точка находится в т. M_1 на расстоянии $OM_1 = S + \Delta S_1 = f(t + \Delta t)$ от т. O. За время Δt точка прошла расстояние ΔS со средней скоростью:

$$\vartheta_{ср.} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Предел средней скорости за промежуток времени Δt, когда Δt стремится к нулю, называется **скоростью точки в данный момент времени.**

Итак, $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\vartheta_{ср.} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = S^{I}(t)$

Скорость движущейся точки в данный момент времени - есть производная от пути по времени, а производная скорости по времени - ускорение.

4) $\log_a \frac{1}{c} = -\log_a c$

5) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

6) $\log_a b^q = q \log_a b$

7) $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b, \qquad n \in Z, \qquad n \neq 1$

2. В практических вопросах употребляют логарифмы с основанием, равным 10, которые называются **десятичными логарифмами.**

$$\boxed{\log_{10} N = \lg N}$$

3. В теории приняты **натуральные логарифмы**. Основанием натуральных логарифмов является число e = 2, 71828... Логарифмы обозначаются знаком *ln*

Переход от натуральных логарифмов к десятичным совершается по формулам.

$$\boxed{\lg N = 0.43429 \ln N; \quad \ln N = 2.30 \lg N}$$

16. Производная

Средней скоростью изменения функции на промежутке [x_0; x] - [x_0; $x+\Delta x$] называют отношение приращений функции и независимого переменного, т.е.

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Предел средней скорости при стремящемся к нулю

предварительно следует округлить, сохраняя только одну лишнюю цифру.

Примеры: а) 103,7 - 21,3385 ≈ 103,7 - 21,34 ≈ 82,4;

б) 1,2 - 37,82 - 27,425 ≈ $1{,}2 \cdot 37{,}8 \cdot 27{,}4 \approx 1{,}2 \cdot 10^8$.

3. Приставки и их множители для образования десятичных кратных и дольных единиц

При изучении физики приходится сталкиваться со слишком большими и малыми физическими величинами. Поэтому принято единицы измерения физических величин записывать с помощью приставок.

Таблица приставок и их множителей

Таблица 1.

Кратные			Дольные		
Приставка	Обозн.	Множитель	Приставка	Обозн.	Множитель
экса	Э	10^{18}	атто	а	10^{-18}
пета	П	10^{15}	фемто	ф	10^{-15}
тера	Т	10^{12}	пико	п	10^{-12}
гига	Г	10^{9}	нано	н	10^{09}
мега	М	10^{6}	микро	мк	10^{-6}
кило	к	10^{3}	милли	м	10^{-3}
гекто	г	10^{2}	санти	с	10^{-2}
дека	да	10^{1}	деци	д	10^{-1}

4. Решение уравнений первой степени с одним неизвестным

Для решения уравнений необходимо уметь:

а) освобождаться от знаменателя - записать уравнение в одну строчку;

б) из уравнения, записанного в строчку, определить нужный параметр.

1. Решение уравнения вида: $x = \frac{a}{b}$ или $\frac{a}{b} = x$

$$x = \frac{a}{b} \Rightarrow bx = a$$

Перенесем знаменатель в ту часть уравнения, где его нет

2. Решение уравнения вида: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow ax = bc$$

Перемножим обе части уравнения крест на крест

3. Решение уравнения вида: $ax = bc$

$$ax = bc \Rightarrow x = \frac{bc}{a}$$

Поделим на то, что находится рядом с неизвестным

число процентов p и разделить на 100, т.е. $\frac{A \cdot p}{100}$.

2) Нахождение числа по данным его процентам

Чтобы найти число по данной величине a его процента p, следует разделить число a на число процентов p и умножить на 100, т.е. $\frac{a}{p} \cdot 100$.

3) Процентное отношение двух чисел

При нахождении процентного отношения числа a к числу b необходимо вычислить отношение $\frac{a}{b}$ и умножить на 100.

15. Логарифмы

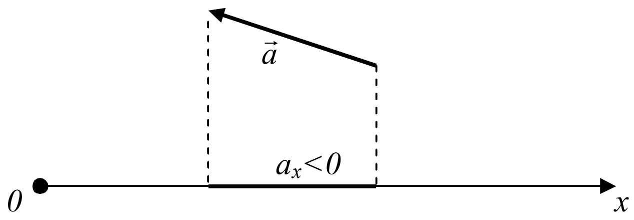
Логарифмом числа $N > 0$ по основанию $a > 0$ называется показатель степени x, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число N, т.е.

$$x = \log_a N, \text{ то } a^x = N \text{ или } a^{\log_a N} = N$$

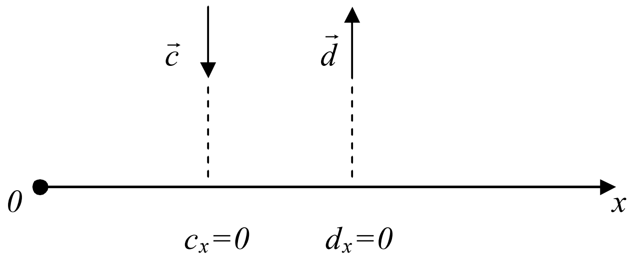
Пример: $\log_2 0{,}25 = -2$, т.к. $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} =$- O,25.

Основные свойства логарифмов (при $a > 0$; $a \neq 0$; $b>0$; $c>0$):

1) $\log_a a = 1$
2) $\log_a 1 = 0$
3) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$



Если проекция вектора на ось совпадает положительным направлением оси, то она положительна, в противном случае – отрицательна



Если вектор перпендикулярен оси, то его проекция равна 0.

Проекция вектора на ось - скаляр, поэтому математические действия с проекциями производятся алгебраически.

14. Проценты

Процентом числа называется сотая часть этого числа.

1) Нахождение процента данного числа

Чтобы найти процент от числа A, нужно умножить его на

5. Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x - переменная, a, b, c - любое число, причем $a \neq 0$, называется *квадратным.*

Выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом и обозначается D.

$$D = b^2 - 4ac\,.$$

Корни квадратного уравнения находят по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ или } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

1. $D > 0$; $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$,

   где x_1 и x_2 действительные различные числа.

2. $D = 0$, тогда $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

3. $D < 0$ уравнение не имеет решений.

Неполные квадратные уравнения

Дано уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

1. Если при $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, тогда $x(ax + b)= 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

2. Если при $b = 0$, $ax^2 + c = 0$ $ax^2 = c \Rightarrow x^2 = -\dfrac{c}{a} \Rightarrow$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, решение возможно, если $\dfrac{c}{a} \leq 0$.

Система уравнений

При решении задач по физике необходимо уметь решать системы двух или большего числа совместных уравнений.

При решении систем уравнений используются два основных способа:

а) способ алгебраического сложения;

б) способ подстановки.

В физике чаще всего используется способ подстановки.

6. Функция

Переменная величина *y* называется **функцией** переменной *x*, если каждому значению *x* соответствует одно значение *y*. Функция обозначается $y = f(x)$.

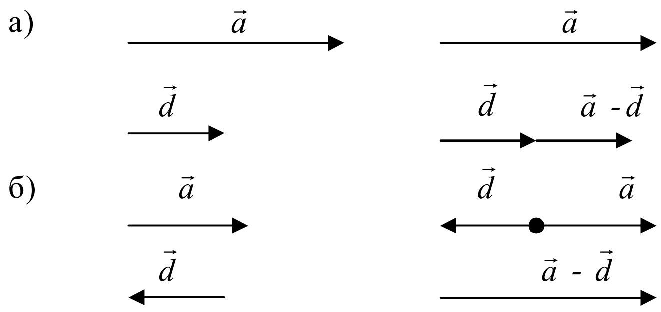
Если при изменении одной величины изменится другая, то мы имеем дело с функциональной зависимостью. В физике функциональная зависимость может быть задана *формулами, графиками, таблицами.*

1. Прямая пропорциональная зависимость величины

Если для любой пары соответствующих значений переменных x и y отношение $\dfrac{y}{x}$ равно одному и тому же числу, отличному от нуля, то переменная y прямо пропорциональна x.

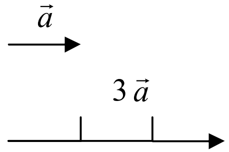
$$\boxed{\frac{y}{x} = k \text{ или } y = kx,}$$

где k – коэффициент пропорциональности;

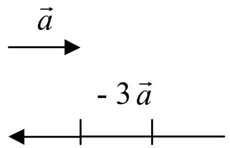


3. Умножение вектора на скаляр

а) $k = 3$



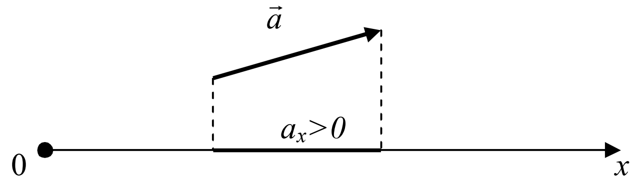
б) $k = -3$



Математические действия с векторами производятся геометрически.

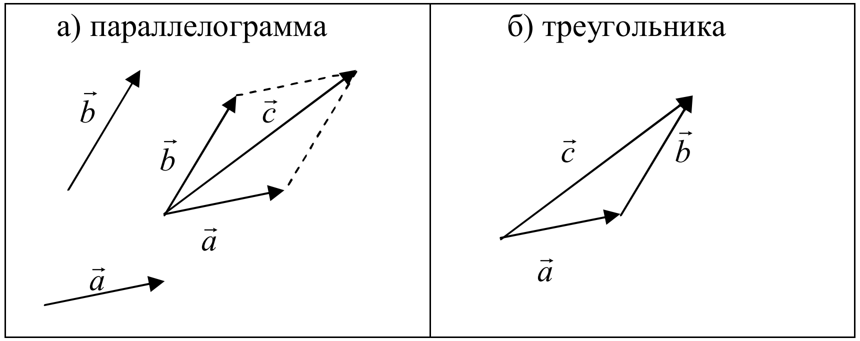
4. Проекция вектора на ось

Проекцией вектора *a* на ось *x* называется отрезок a_x между проекциями на эту ось начала и конца вектора.



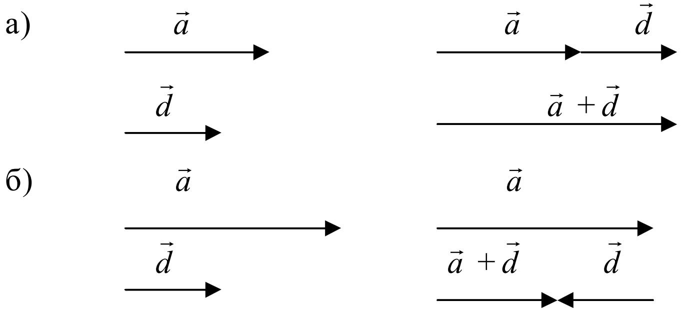
1. Сложение векторов.

Вектора складываются по правилам:

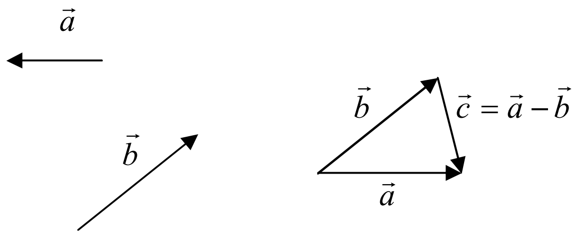


$$\vec c = \vec a + \vec b$$

Если вектора параллельны друг другу, то:



2. Вычитание векторов



x – аргумент; y – функция.

Если $\frac{y_1}{x_1} = k$ и $\frac{y_2}{x_2} = k$, то $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$.

Две величины, зависящие от друга так, что при увеличении одной из них другая увеличивается в том же отношении, называются **пропорциональными.**

2. Обратно пропорциональная зависимость величин

Если для любой пары соответствующих значений переменных x и y произведение xy равно одному и тому же числу, отличному от нуля, то переменная y обратно пропорциональна переменной x.

$$xy = k \quad \text{или} \quad y = \frac{k}{x},$$

где k – коэффициент обратной пропорциональности.

Если $x_1 y_1 = k$ или $x_2 y_2 = k$, то $x_1 y_1 = x_2 y_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

Две величины, зависящие от друга так, что при увеличении одной из них другая в том же отношении уменьшается, называются **обратно пропорциональными.**

7. Функции и их графики

1. Линейная функция.

Линейной функцией называется функция, заданная формулой $y = kx + b$, где x - аргумент; $k; b$ постоянные. Ее график - прямая линия.

Например, дана функция $y = 2x + 1$, рассмотрим частные случаи построения графиков этой функции (рис. 1).

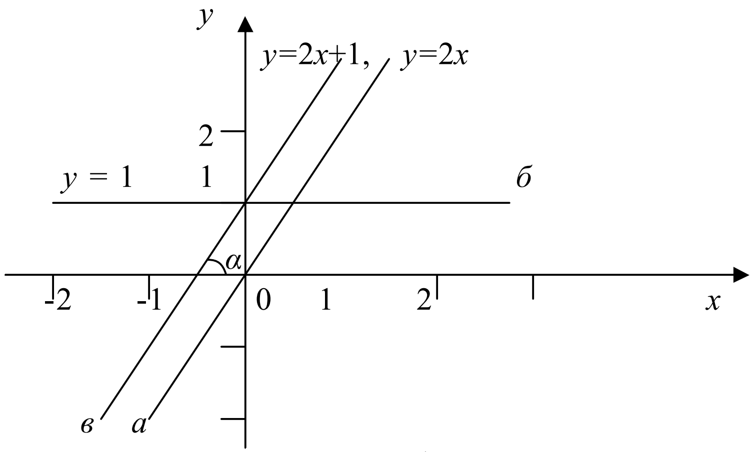


Рис. 1

а) Построить график функции $y = kx$ – прямой пропорциональности, который является частным видом уравнения $y = kx + b$ *при* $b = 0$, т.е. согласно примеру построить график функции $y = 2x$.

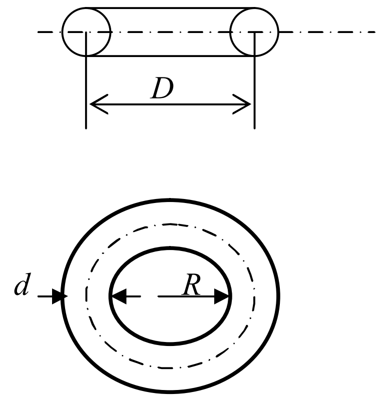
Графиком является прямая линия, образующая с осью абсцисс угол

$$tg\alpha = k = \frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

б) Построить график функции $y = b$, это частный вид уравнения $y = kx + b$ при $k = 0$, т.е. построить график функции $y = 1$. Графиком является прямая линия, параллельная оси абсцисс.

в) Построить график функции $y = kx + b$, т.е. согласно примеру - график функции $y = 2x + 1$. Графиком является прямая линия, образующая с осью абсцисс угол *а*.

9. Тор (баранка)



$$S = 4\pi^2 Rr$$

$$V = \frac{\pi^2 Dd^2}{4} = 2\pi^2 Rr^2$$

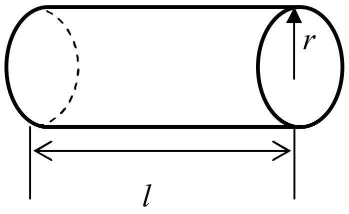
14. Элементы линейной алгебры

Физические величины могут быть скалярными и векторными.

Скалярными величинами (скалярами) называются такие величины, которые характеризуются только числовым значением (время t, масса m).

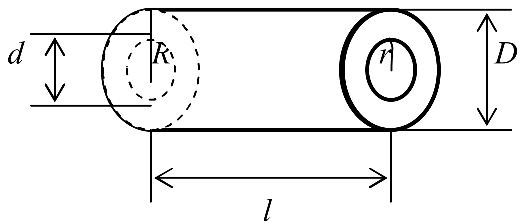
Векторными величинами (векторами) называются такие величины, которые характеризуются числовым значением и направлением (скорость $\vec{\vartheta}$, сила $\vec{F}$).

7. Цилиндр



$$S_{бок.} = 2\pi \cdot r \cdot l$$
$$S_{полн.} = 2\pi \cdot r \cdot (l + r)$$
$$V = \pi \cdot r^2 l$$

8. Полый цилиндр (труба)



$$V = \pi\left(R^2 - r^2\right)l = \frac{\pi \cdot l}{4}\left(D^2 - d^2\right)$$

2. График обратной пропорциональности.

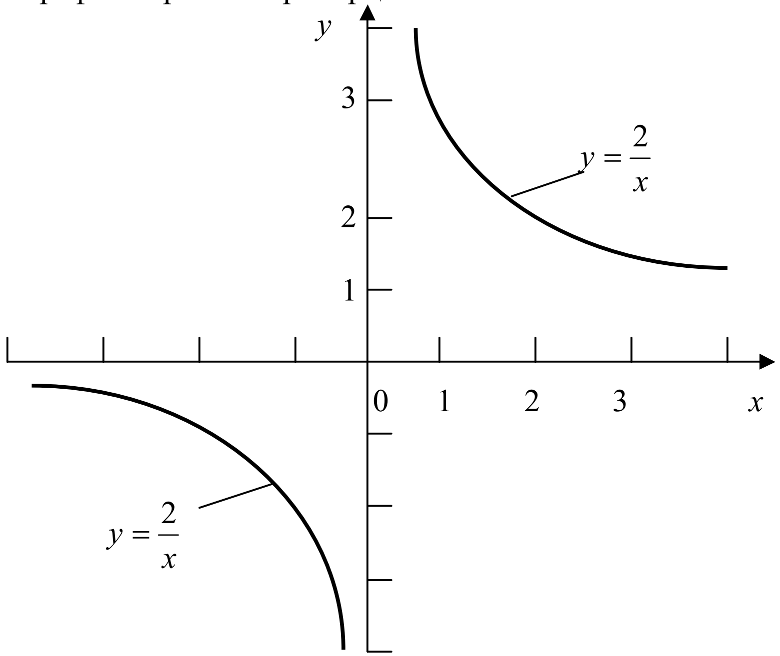


Рис. 2

Обратно пропорциональные величины x и y связаны соотношением $xy = k$ или $y = \frac{k}{x}$, причем $k \neq 0$.

Например, построить график функции $y = \frac{2}{x}$ (рис. 2). Графиком является равносторонняя гипербола

3. Квадратичная функция

Квадратичной функцией называется функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x - аргумент; $a; b; c$ - постоянные, причем $a \neq 0$.

Например, дана функция $y = 0{,}5x^2 - 4x + 6$,

Рассмотрим частные случаи построения графиков этой функции.

а) В случае, если $b = c = 0$, то $y = ax^2$, т.е. имеем функцию $y = 0{,}5x^2$. Графиком является парабола, проходящая через начало координат (рис. 3).

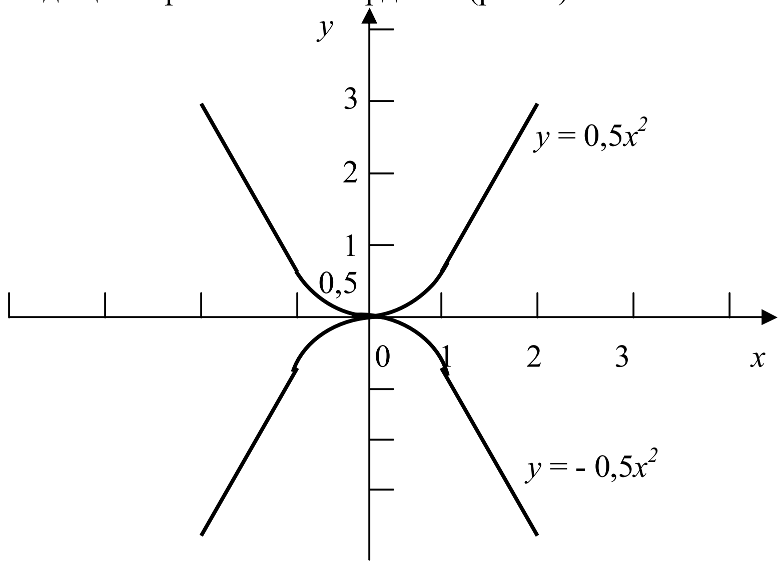


Рис. 3

б) В общем случае $y = ax^2 + bx + с$, т.е. имеем функцию $y = 0{,}5x^2 - 4x + 6$.

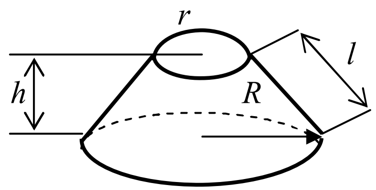
Графиком данной функции является такая же парабола, что и парабола $y = 0{,}5x^2$ (рис. 4), но вершина параболы будет находиться в точке $\left(-\frac{b}{2a}; c-\frac{b^2}{4a}\right)$.

$y = 0{,}5x^2 - 4x + 6$, где $a = 0{,}5$; $b = -4$; $c = 6$.

Вершина лежит в точке $O'(4; -2)$, т.к.

$$-\frac{b}{2a} = \frac{4}{2\cdot 0.5} = 4; c-\frac{b^2}{4a} = 6-\frac{15}{4\cdot 0.5} = -2.$$

5. Усеченный конус

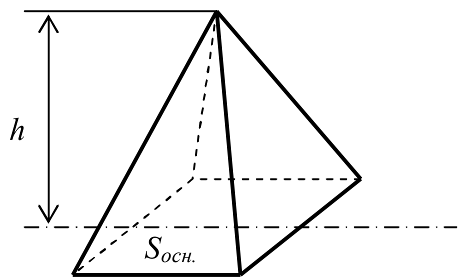


$$S_{бок.} = \pi \cdot l \cdot (R + r)$$

$$S_{полн.} = \pi\left(R^2 + r^2 + l\cdot(R + r)\right)$$

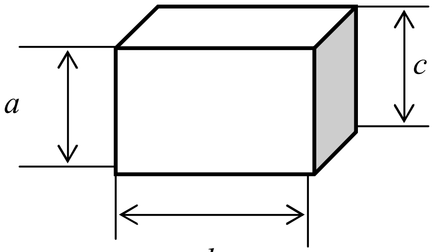
$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

6. Пирамида



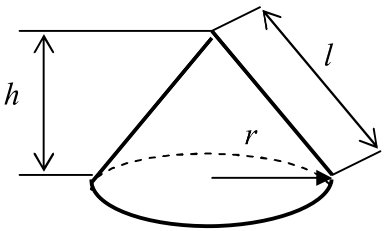
$$V = \frac{S_{осн.}h}{3}$$

3. Параллелепипед



$$S = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$
$$V = abc$$

4. Конус



$$S_{бок.} = \pi \cdot r \cdot l$$
$$S_{полн.} = \pi \cdot r(l + r)$$
$$V = \frac{\pi \cdot r^2 h}{3}$$

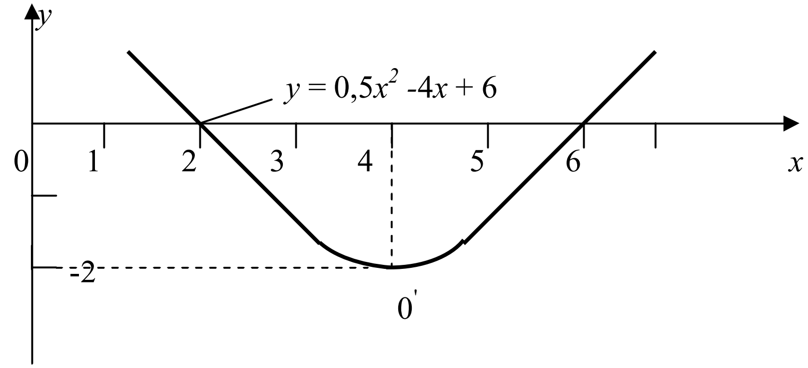


Рис. 4

4. Тригонометрические функции

Тригонометрическими функциями называются функции, заданные формулами: $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tgx$; $y = \text{ctgx}$.

а) график функции $\boldsymbol{y = \sin x}$ - синусоида

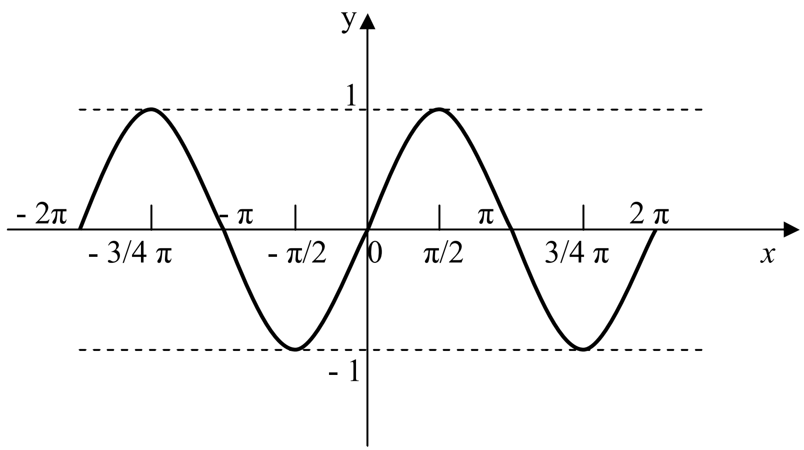


Рис. 5

б) график функции $y = \cos x$ – косинусоида

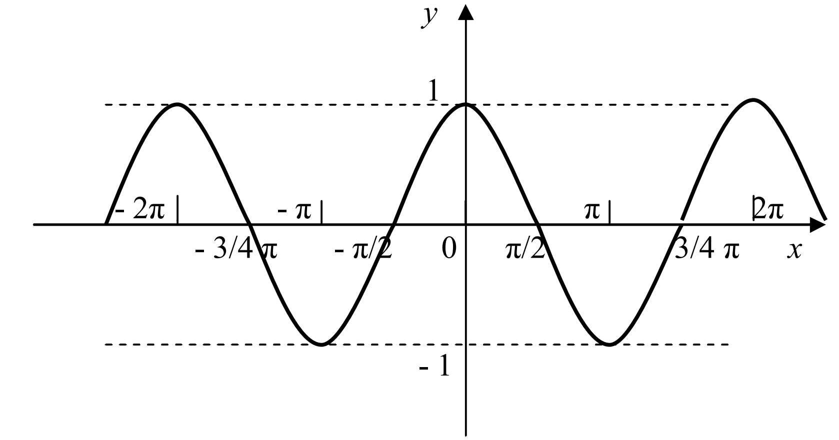


Рис. 5

в) график функции $y = \operatorname{tg} x$

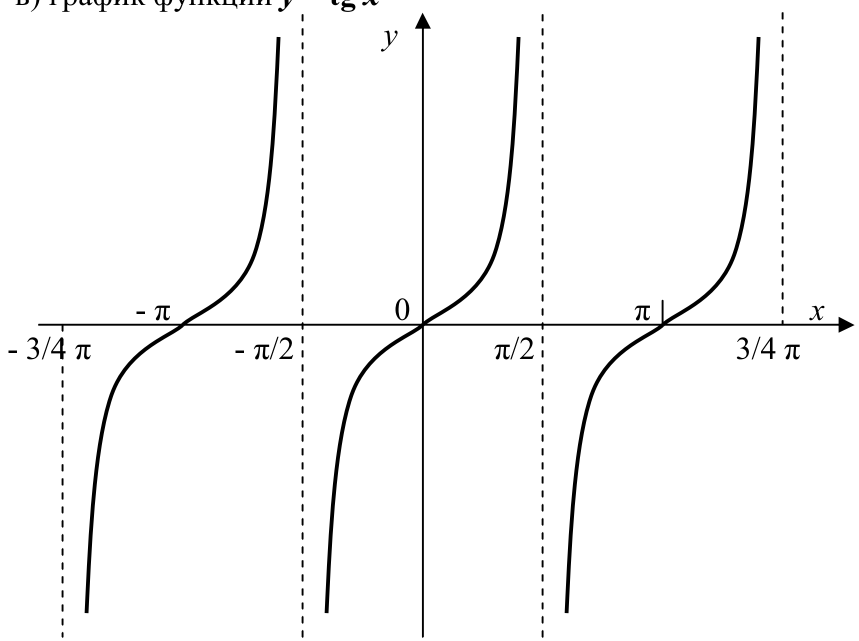
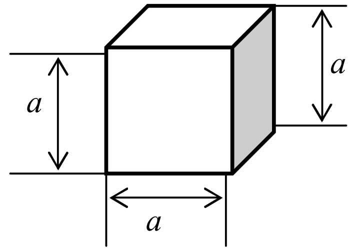


Рис. 6

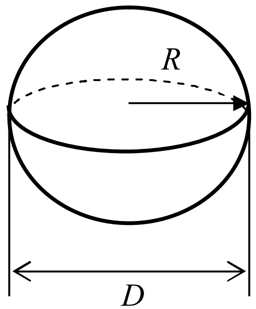
13. Поверхности и объемы геометрических тел

1. Куб



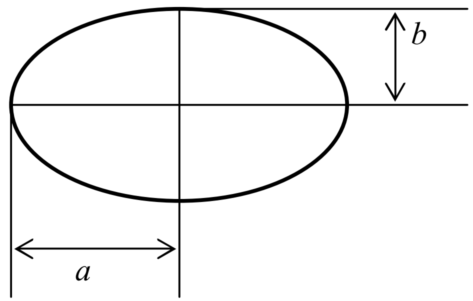
$$S = 6a^2$$
$$V = a^3$$

2. Шар



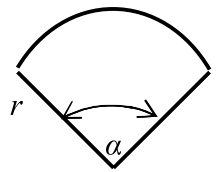
$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

10. Эллипс



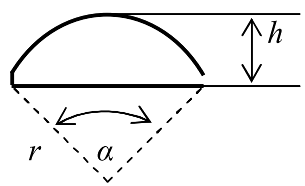
$$S = \pi ab$$

11. Сектор



$$S = \frac{\pi \cdot r^2 \alpha^0}{306^0}$$

12. Сегмент



$$S = \frac{\pi \cdot r^2 \alpha^0}{360^0} - \frac{l \cdot (r-h)}{2}$$

г) график функции ***y* = ctg *x***

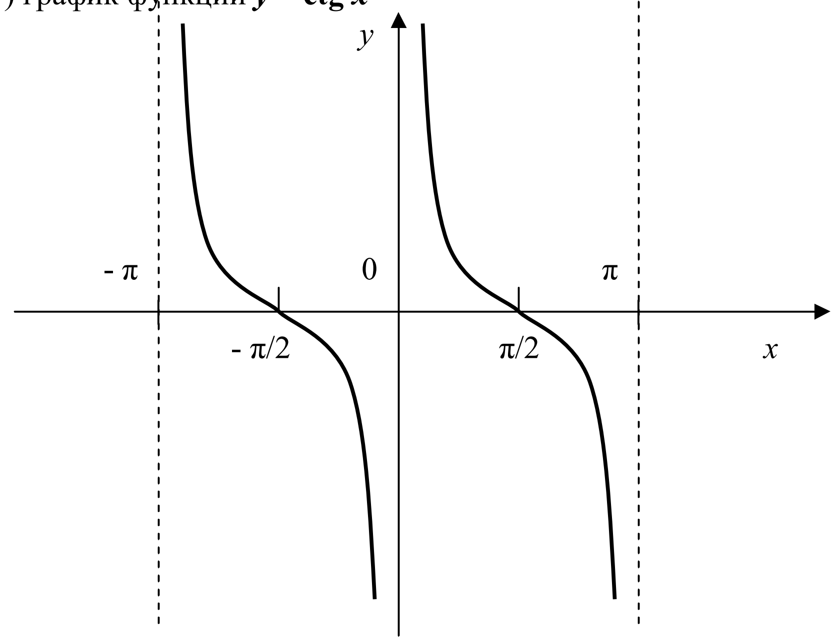
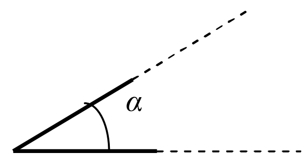


Рис. 7

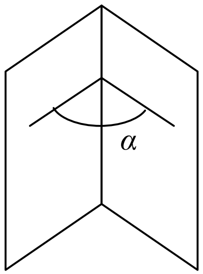
8. Углы и угловые меры

1. Углы.

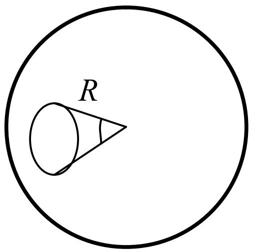
а) **Плоский угол** – часть плоскости, ограниченная двумя полупрямыми, исходящими из одной точки.



б) **Двугранный угол** - часть пространства, ограниченная двумя пересекающимися полуплоскостями; линия их пересечения - ребро.



в) **Пространственный или телесный угол Ω** - часть пространства, ограниченная конической поверхностью.



Единицей измерения телесного угла является 1 *ср* (стерадиан) - телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на ней часть, площадь которой равна квадрату ее радиуса.

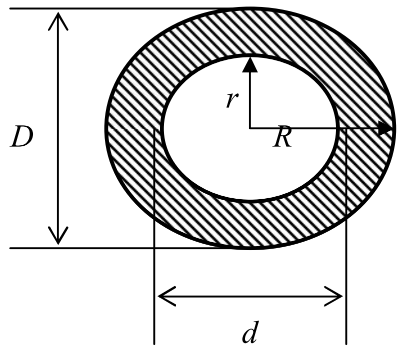
2. Угловые меры.

Углы выражаются в градусных и угловых мерах.

а) Градусные меры.

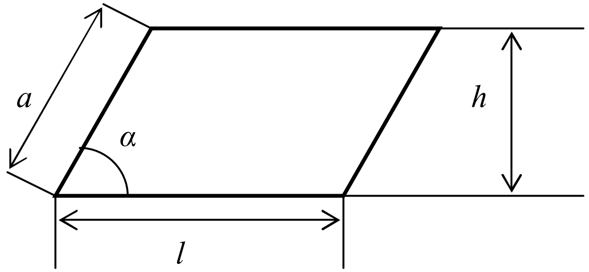
Единицей служит градус (1°), т.е. 1/90 часть прямого угла. В соответствии с этим полная окружность содержит 360°.

7. Кольцо



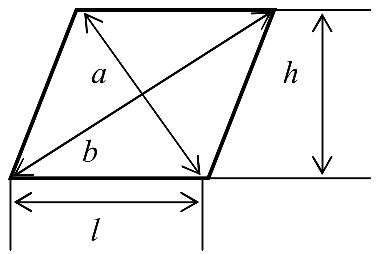
$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi r^2}{4}$$

8. Параллелограмм



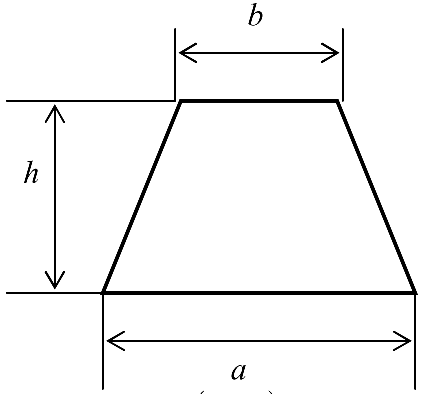
$$S = lh = al\sin\alpha$$

9. Ромб



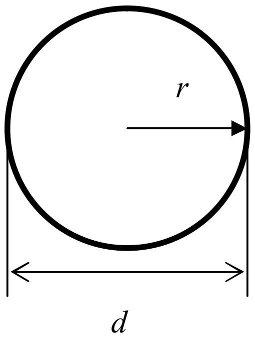
$$S = lh = \frac{ab}{2}$$

5. Трапеция



$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

6. Окружность и круг

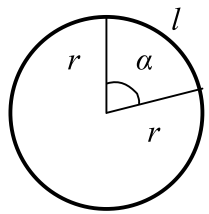


$$S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$l = 2\pi r$ - длина окружности

б) Дуговая мера.

Единицей служит 1 радиан (*рад*) - центральный угол, длина дуги которого равна радиусу, т.е. если $l = r$, то $\varphi = 1$ *рад*.



3. Переход из градусной меры в радианную и наоборот,

а) Угол α в радианах равен числу 0,0175, умноженному на угол в градусах.

$$\boxed{1^0 = \frac{\pi}{180}\,\textit{рад} \approx 0{,}0175\,\textit{рад}}$$

Например, угол α = 20° , выраженный в радианах, равен

$$0{,}0175 \cdot 20° = 0{,}35\ \textit{рад}.$$

б) Угол α в градусах равен числу 57, умноженному на угол в радианах.

$$\boxed{1\,\textit{рад} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 18^{I} 45^{II}}$$

Например, угол α = 1,5 *рад* , выраженный в градусах, равен

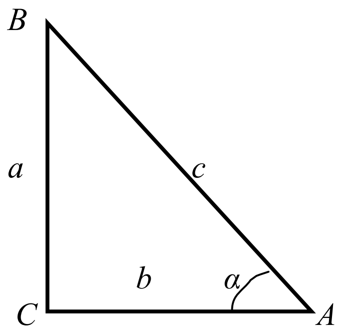
$$57 \cdot 1{,}5\ \textit{рад} = 85{,}5°.$$

9. Тригонометрические функции

Тригонометрические функции острого угла

Основные тригонометрические функции:

- синус *sin*;
- косинус *cos*;
- тангенс *tg*;
- котангенс *ctg*.

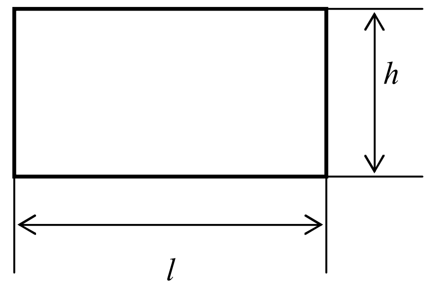


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \cos\alpha = \frac{b}{c}; tg\alpha = \frac{a}{b}; ctg\alpha = \frac{b}{a}.$$

Таблица 2.

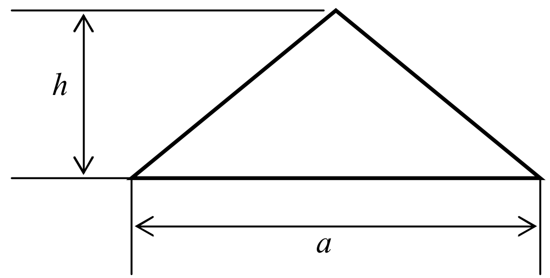
Функции	Углы					
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0
sin α	0	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$	1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$	0,5	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$	1	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$	-	0
ctg α	-1	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$	0	-

2. Прямоугольник



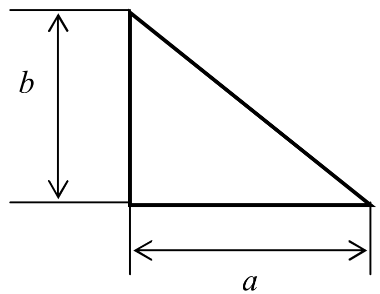
$$S = lh$$

3. Треугольник



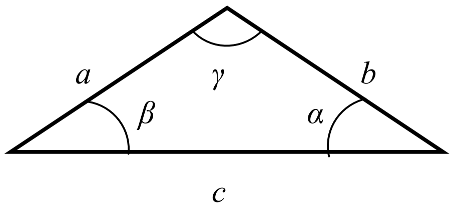
$$S = \frac{ah}{2}$$

4. Прямоугольный треугольник



$$S = \frac{ab}{2}$$

Соотношения в произвольном треугольнике



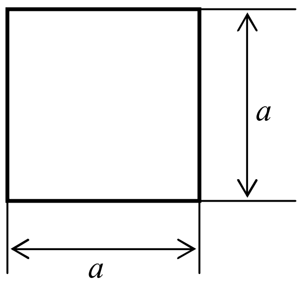
a, b, c – стороны треугольника
α, β, γ – углы треугольника

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}$$ - теорема синуса

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^1 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$ - теорема косинуса

11. Площади геометрических фигур

1. Квадрат



$$S = a^2$$

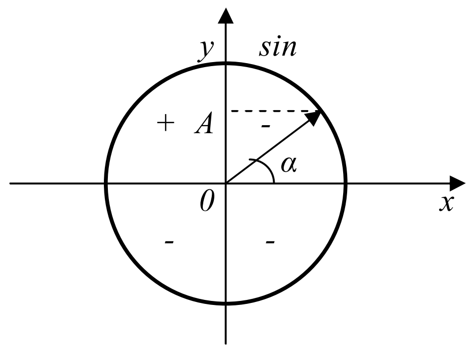
Тригонометрические функции любого угла

Если угол больше 90°, но меньше 360°, то его тригонометрические функции определяются следующим образом: находится разность между данным углом и ближайшим к нему из углов 180° и 360°, а затем вычисляется нужная функция от этой разницы, а перед результатом ставится знак " +" или " —".

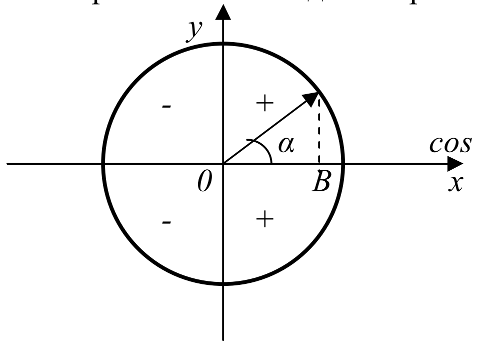
Примеры:
sin 300° = - *sin* 60° (т.к. 360° - 300° = 60°); IV четверть
cos 145° = - *cos* 35° (т.к. 180° - 145° = 35°); II четверть
tg 230° = + *tg*50° (т.к. 230° - 180° = 50°); III четверть

Линии *sin; cos; tg; ctg* для отсчета углов и их знаки в различных четвертях окружности:

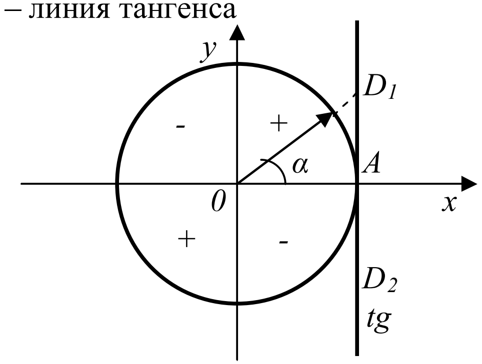
1. Линия *sin*α — есть проекция *OA* подвижного радиуса на вертикальный диаметр (в соответствии со знаком)



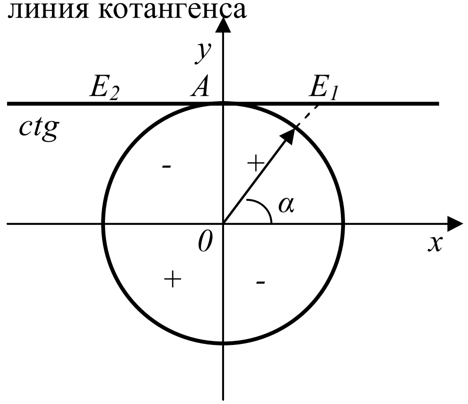
2. Линия *cos*α — есть проекция *OB* подвижного радиуса на горизонтальный диаметр



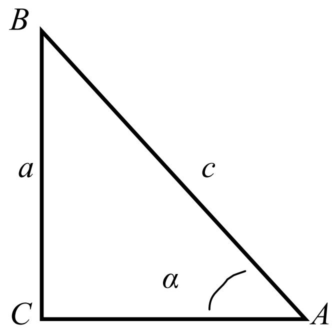
3. D_1AD_2 – линия тангенса



4. E_1AE_2 – линия котангенса



10. Соотношения в прямоугольном треугольнике

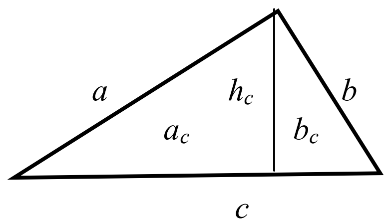


a; b – катеты; *c* – гипотенуза;
α – угол между сторонами *b* и *c*

$$\boxed{\begin{array}{ll} a = c\sin\alpha & a = btg\alpha \\ b = c\cos\alpha & b = actg\alpha \end{array}}$$

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ - теорема Пифагора

Свойства прямоугольного треугольника:



$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \quad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}; \quad \frac{b_c}{h_c} = \frac{h_c}{a_c},$$

где a_c ; b_c – проекции катетов *a* и *b* на гипотенузу *c*.