МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В КАЗАНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Научные исследования в области теории функций и математического анализа в Казанском университете начались с его основания в 1804 г., однако серьезная математическая школа сформировалась с образованием в 1934 г. кафедры математического анализа и связана, прежде всего, с личностью первого заведующего этой кафедрой профессора Бориса Михайловича Гагаева (1897-1975), возглавлявшего ее в течение сорока лет. Всемирную известность принесло ему решение важной проблемы, поставленной Н. Н. Лузиным: Б. М. Гагаев доказал, что тригонометрическая система функций на отрезке – единственная система ортогональных функций, дифференцирование и интегрирование которой приводит опять (с точностью до постоянных множителей) к той же системе функций.

Гагаев дал путёвку в большую науку огромному количеству своих учеников, многие из них возглавили авторитетные научные школы в России и ближнем зарубежье. Среди учеников, активно работавших в Казани, можно отметить Ф. Д. Гахова, впоследствии действительного члена академика АН Белорусской ССР, профессоров Б. Г. Габдулхаев (Казань), А. Д. Ляшко (Казань), среди иногородних – академика РАН В. Н. Монахова (Новосибирск), профессоров Я. В. Быкова (Фрунзе), Ю. Г. Борисовича (Воронеж), К. С. Сибирского (Кишинёв).

Исследования по математическому анализу в Казанском университете проводились также на воссозданной в 1948 г. кафедре дифференциальных уравнений (в становление которой важную роль сыграл Ф. Д. Гахов), отделившейся от кафедры математического анализа кафедре теории функций и приближений, основанной членом-корреспондентом АН Республики Татарстан Б. Г. Габдулхаевым, и в НИИ математики и механики им. Н.Г.Чеботарева (зав. отделом математического анализа – Ф.Г.Авхадиев). Основные направления – краевые задачи для аналитических функций и их обобщений, геометрическая теория функций комплексного переменного, интегральные и интегродифференциальные уравнения, интегральные и изопериметрические неравенства, функциональный анализ.

Опишем кратко основные научные достижения в этих областях. Федор Дмитриевич Гахов известен тем, что он впервые дал полное решение классической задачи Римана для аналитических функций. Им и его многочисленными учениками исследована разрешимость различных краевых задач, в том числе, на разомкнутых контурах, в многосвязных областях, матричных краевых задач, а также сингулярных интегральных уравнений с различными ядрами. После отъезда из Казани Ф. Д. Гахова кафедру дифференциальных уравнений возглавил С. Н. Андрианов, а затем – одна из лучших учеников Федора Дмитриевича – Л. И. Чибрикова. Ее основные достижения связаны с исследованием краевых задач для автоморфных функций, на римановых поверхностях, на счетном множестве кривых, а также сингулярных интегральных уравнений с автоморфными и квазиавтоморфными ядрами, с гипергеометрическими ядрами, с ядрами, имеющими одну или две подвижных особенности логарифмического или степенного типа и пр. Среди ее учеников – десятки кандидатов наук, многие из которых защитили докторские диссертации. Эти ученики составляют основу кафедры дифференциальных уравнений и в настоящее время. В. И. Жегалов исследовал различные краевые задачи для уравнений смешанного типа. И. А. Бикчантаев изучал разрешимость краевых задач на произвольных некомпактных римановых поверхностях. Ю. В. Обносов решил ряд практически важных краевых задач теории гетерогенных сред. Также сотрудниками кафедры изучается краевая задача Римана для счётного числа контуров и её приложения к задачам теории упругости (И. Г. Салехова); задача факторизации матриц-функций в связи с решением матричной краевой задачи Римана (С. Н. Киясов).

В 1962 г. в Казанском университете был создан научный семинар по геометрической теории функций комплексного переменного (руководитель – проф. Л. А. Аксентьев). Он стал творческим объединением математиков из различных вузов Казани. Семинар сначала действовал при кафедре дифференциальных уравнений, а с 1978 года по настоящее время работает при кафедре математического анализа. Участниками семинара защищено более тридцати кандидатских диссертаций, большинство – под руководством Л.А.Аксентьева, и восемь докторских диссертаций. Семинар по ГТФКП способствовал созданию научного коллектива, который занимается исследованиями в области однолистных функций, краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и решением экстремальных проблем методами геометрической теории функций комплексного переменного. С начала 90-х годов в Казани регулярно, раз в два года, проводятся летние всероссийские школы-конференции по теории функций, в организации которых принимают активное участие члены кафедры математического анализа. Опишем основные достижения коллектива, начиная с середины 80-х годов.

Казань является ведущим центром в России по исследованиям в области достаточных условий однолистности и p-листности аналитических функций. Их разработке посвящены исследования Ф. Г. Авхадиева, Л. А. Аксентьева, И. Р. Каюмова, И. Р. Нежметдинова, С. Р. Насырова, П. Л. Шабалина, Е. А. Широковой. Однолистность имеет важные применения в краевых задачах с неизвестной (свободной) границей, так называемых обратных краевых задачах. Одной из основных обратных краевых задач для аналитических функций является внешняя задача по параметру *s* в постановке Ф. Д. Гахова, который нашел уравнение для определения полюса искомой функции и доказал его разрешимость. По предложению Л. А. Аксентьева это уравнение стало называться уравнением Гахова. Различным аспектам изучения разрешимости обратных краевых задач и уравнения Гахова для различных классов функций, в односвязных и многосвязных областях, связи его с конформным радиусом плоских областей посвящены работы Ф. Г. Авхадиева, Л. А. Аксентьева, А. Н. Ахметовой, А. М. Елизарова, М. И. Киндера, А. В. Казанцева, А. В. Киселева, С. Р. Насырова, Ю. Е. Хохлова, Е. А. Широковой и др. Смешанные обратные краевые задачи, в которых отыскивается область с частично известной границей, по различным параметрам для аналитических функций и их обобщений на плоскости и на римановых поверхностях рассматривались А. М. Елизаровым, В. Н. Монаховым, С. Р. Насыровым.

На кафедре математического анализа были получены важные результаты по исследованию (прямых) краевых задач для аналитических функций, а также их применению в теории функций и прикладных вопросах. Так, Б. А. Кац впервые построил аппарат решения краевых задач теории аналитических функций для областей с неспрямляемыми и фрактальными границами и описал влияние фрактальных размерностей границы на разрешимость краевой задачи Римана. Им получены условия существования интеграла Коши по неспрямляемым и фрактальным кривым и описаны граничные свойства такого интеграла. Кроме того, Б. А. Кац исследовал преобразования Коши распределений с носителями на неспрямляемых кривых, что позволило получить решения этой краевой задачи в замкнутом виде. С. Р. Миронова построила решения краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши для счетного множества кривых и описала влияние фрактальных размерностей этого множества на разрешимость указанных выше краевых задач и уравнений. Ф. Н. Гарифьянов исследовал приложения теории краевых задач к различным проблемам из смежных областей комплексного анализа, таких как моменты целых функций экспоненциального типа, представляющие системы мероморфных функций, разностные уравнения и пр.

Ф. Г. Авхадиевым и С. Р. Насыровым получены некоторые необходимые и достаточные условия разрешимости задачи о построения римановой поверхности над сферой по проекции края. Эта проблема, носящая топологический характер, ставилась в работах Пикара, Левнера и Хопфа. С. Р. Насыровым введено и изучено пространство римановых поверхностей, разветвленно накрывающих заданную поверхность, на нем введена сходимость к ядру по Каратеодори, топология и метрика. С использованием емкостей Робена он решил обобщенную задачу М. А. Лаврентьева о нахождении дужки максимальной подъемной силы при заданной длине и ограничении на ее кривизну.

Исследования в области функционального анализа в Казанском университете начали проводиться на базе научного семинара «Алгебры операторов и их приложения» (научный руководитель – А. Н. Шерстнев, зав. кафедрой математического анализа с 1973 по 1998 гг.), возникшего в недрах НИИММ им. Н.Г.Чеботарева в конце 60-х гг., а с 1974 г. переместившегося на кафедру математического анализа. Отметим некоторые основные направления исследований участников семинара.

Некоммутативная теория меры и интеграла. В связи с прогрессом в теории алгебр фон Неймана, расширением сферы ее приложений актуальной стала проблема распространения некоммутативной теории интегрирования И. Сигала на нормальные веса, являющиеся нецентральными аналогами интегралов по неограниченным мерам, заданных на классе ограниченных функций. Решение указанной проблемы было получено проф. А. Н. Шерстневым и его учеником Н. В. Труновым. О. Е. Тихоновым была построены аналоги пространств L_p, ассоциированных с весом, удовлетворяющим определенным условиям. А. М. Бикчентаев предложил общий метод построения некоммутативных F-нормированных идеальных пространств (в частности, пространств Орлича), ассоциированных с полуаддитивной мерой на проекторах алгебры фон Неймана. Н. В. Труновым и А. Н. Шерстневым развита теория условного ожидания в пространстве L_1 интегрируемых билинейных форм и установлена связь этого понятия с традиционным понятием условного ожидания в алгебрах фон Неймана. О. Е. Тихоновым основные результаты теории интегрирования относительно следа и следовых неравенств на алгебрах фон Неймана перенесены на случай пространств в спектральной двойственности Е. Альфсена и Ф. Шульца. Г. Ш. Скворцовой и О. Е. Тихоновым получен некоммутативный аналог теоремы Бухвалова-Лозановского. М. Р. Тимиршиным построены новые представления алгебр фон Неймана, ассоциированные с графиками замкнутых операторов. А. М. Бикчентаев получил представления линейных ограниченных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве в виде конечных сумм попарных произведений ортопроекторов и исследовал измеримые операторы, присоединенные к алгебре фон Неймана. О. Е. Тихонов и А. М. Бикчентаев установили интересные характеризации следа в классе всех положительных функционалов на алгебре фон Неймана.

Другое направление исследований семинара «Алгебры операторов и их приложения» – проблемы строения мер на ортопроекторах алгебры фон Неймана. Проблема продолжения меры на проекторах алгебры фон Неймана до линейного функционала была успешно решена М. С. Матвейчуком. Г. Д. Луговой и А. Н. Шерстневым в алгебре всех ограниченных операторов сепарабельного гильбертова пространства полностью решена задача описания неограниченных мер; этот результат явился обобщением на неограниченные меры классической теоремы Глисона. Ими же построен пример неограниченной полуконечной конечно-аддитивной меры на проекторах алгебры фон Неймана без прямых слагаемых типа I_2, которая не продолжается до веса, введены и изучены неограниченные аналоги векторных ортоаддитивных мер на ортопроекторах алгебры фон Неймана со значениями в гильбертовом пространстве. Изучены порядковые свойства ортогональных векторных полей и их связи с топологическими свойствами. Е. А. Туриловой и А. Н. Шерстневым рассмотрены задачи изучения мер, заданных на замкнутых подпространствах унитарного пространства E, присоединённых к алгебре фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве H – пополнении E. С. В. Дорофеевым и А. Н. Шерстневым изучалась возможность обобщения теоремы Глисона для зарядов на алгебре всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

Ортомодулярные упорядоченные множества. Класс ортопроекторов коммутативной алгебры фон Неймана обладает естественной структурой булевской алгебры. Если алгебра фон Неймана не коммутативна, мы приходим к более общей структуре, которую естественно рассматривать как аналог возможных высказываний о подходящей квантово-механической системе. Абстрактный «булевский» аналог этой структуры носит название ортомодулярного упорядоченного множества. Исследование таких множеств в Казани начато в конце 60-х гг. А. Н. Шерстневым: теория размерности Лумиса для ортомодулярных решеток перенесена на произвольные ОМУМ. Плодотворные исследования ОМУМ систематически велись затем П. Г. Овчинниковым и Ф Ф. Султанбековым. В частности, предложена новая аксиоматика для ОМУМ, описаны автоморфизмы упорядоченного множества косых проекторов в гильбертовом пространстве, доказана известная гипотеза Птака-Пульманновой о свойстве Яуха-Пирона, обобщена на гиперграфы теорема Биркгофа о бистохастических матрицах, построен первый известный пример атомического неортоатомического ОМУМ, найден точный топологический аналог понятия ортоупорядоченного множества, построена общая теория меры и зарядов на конечных логиках множеств. А. М. Бикчентаев предложил универсальный метод построения квантовых логик идемпотентов унитального кольца. Д. Х. Муштари доказал аналог теоремы Глисона для зарядов на квантовой логике всех идемпотентных рациональных матриц порядка выше 3. Аналогичный результат доказан также для матриц, элементы которых принадлежат простым конечным полям или полю из четырех элементов.

Одна из наиболее трудных и важных проблем в теории вероятностных распределений в бесконечномерных линейных пространствах – проблема сигма-аддитивности цилиндрической вероятности. При решении этой и близких к ней задач Д. Х. Муштари развил топологические методы исследования свойств слабой компактности и сигма-аддитивности цилиндрических вероятностей в банаховых пространствах. Эти методы позволили получить полное описание класса банаховых пространств, для которых существует топологическое решение указанной проблемы. Ряд важных результатов обобщен им на класс линейных топологических и линейных метрических пространств. Получен также ряд вероятностных характеризаций класса ядерных пространств Фреше, изучены устойчивые вероятности в банаховых пространствах.

Как уже отмечалось, Б. Г. Габдулхаев организовал кафедру теории функций и приближений. Он создал казанскую научную школу по теории аппроксимаций и интегральным уравнениям», подготовил около сорока кандидатов, из них четверо стали докторами физико-математических наук. Из его основных достижений отметим следующие. Он построил общую теорию приближенных методов, основанную на односторонней обратимости аппроксимирующих операторов. На основе ее разработал прямые и проекционные методы решения различных классов сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта, Коши, Адамара и с полярно-логарифмическими ядрами. Разработал основы полиномиальных и сплайновых приближений функций в пространствах Гёльдера, Никольского и Соболева. В настоящее время исследования Б. Г. Габдулхаева продолжают его ученики Ю. Р. Агачев, А. Ф. Галимянов, Е. К. Липачев и А. В. Ожегова. Ими разработаны прямые и проекционные методы решения ряда новых типов интегро-дифференциальных уравнений, включающих, в частности, интегралы дробного порядка. Лидером этой группы является Ю. Р. Агачев, при кафедре работает организованный им семинар, в котором принимают участие молодые математики М. Ю. Першагин, Р. Р. Замалиев, Р. К. Губайдуллина и сотрудники других вузов Казани.

Отметим также некоторые результаты Ф. Г. Авхадиева и его учеников И. Р. Каюмова, Р. Г. Салахудинова, И. К. Шафигуллина и Р. Г. Насибуллина по решению ряда экстремальных задач теории функций и их приложениям. Ф. Г. Авхадиевым получено решение классической изопериметрической проблемы, восходящей к Коши и Сен-Венану, о геометрическом эквиваленте жесткости кручения упругой балки с заданным сечением, совместно с немецким математиком К.-Й. Вирсом построена теория неравенств типа Шварца-Пика для высших производных аналитических функций.

И. Р. Каюмовым получены лучшие нижние оценки для знаменитого спектра интегральных средних, введенных Н. А. Макаровым при исследовании граничного поведения конформных отображений. Из ряда результатов Р. Г. Салахудинова по изопериметрическим неравенствам следует выделить построение функционалов областей, обладающих свойством изопериметрической монотонности.

Ф. Г. Авхадиевым, Р. Г. Насибуллиным и И. К. Шафигуллиным построены и обоснованы несколько новых интегральных неравенств типа Харди и Реллиха для функций, финитных в плоских или пространственных областях. В частности, Р. Г. Насибуллин доказал неравенства типа Харди с точными константами в случае, когда ядра имеют полярно-логарифмические особенности, И. К. Шафигуллин определил точный порядок роста констант Харди в гипотезе Б. Е. Дэвиса, Ф. Г. Авхадиев построил несколько универсальных интегральных неравенств, справедливых для произвольной области евклидова пространства.