Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского

Том 69

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

XVII Международная Казанская школа-конференция ”Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”

Сборник трудов

(*Казань, 23 – 28 августа 2025 г.*)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2025

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета

ул. Кремлевская, 35, Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2025-303). Мероприятие проводится в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

УДК 517
ББК 22.16

Научный редактор: С. Р. Насыров.

Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 69
XVII Международная Казанская школа-конференция
"Теория функций, ее приложения и смежные вопросы",
Сборник трудов. – Казань: КФУ, 2025. – Т. 69. – 249 с.

В том вошли материалы XVII Международной Казанской школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", организованной на базе Института математики и механики им. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Конференция проходила в Казани с 23 по 28 августа 2025 года.
Материалы предназначены для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в различных областях математики и ее приложений.

СОДЕРЖАНИЕ

М.А. Абдуллаева. Матрицы третьего порядка с интегральными операторами Фредгольма 10
Ф.Г. Авхадиев. Интегральные неравенства изопериметрического типа 12
Ю.Р. Агачев, Р.К. Губайдуллина, А.В. Гуськова, М.Ю. Першагин. О парах пространств корректной постановки для одного класса нелинейных дробно-интегральных уравнений 14
Ю.Р. Агачев, А.В. Гуськова. О приближении решения одной задачи Коши для условно корректного интегро-дифференциального уравнения дробного порядка 16
И.А. Андреева. О качественной картине траекторий ряда семейств полиномиальных динамических систем 18
А.Е. Артисевич, А.Х. Сташ. О реализации счетных спектров характеристик колеблемости нулей линейных однородных дифференциальных уравнений . 20
С.Н. Асхабов. Нелинейные уравнения с интегралами Римана-Лиувилля и переменными коэффициентами в пространствах Лебега 22
С.А. Бадонова. О цепочке пространств де Бранжа с воспроизводящим ядром Эйри 24
Б.Б. Беднов. О замыкании экспонент со спектром из пересечения полупространства с решёткой 26
А.М. Бикчентаев. О нормальности гипонормальных измеримых операторов . 27
А.В. Богатов. Задача с нелокальным условием для одномерного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками 29
А.В. Буробин. Об устойчивости решений систем уравнений дробного порядка . 30
В.Б. Васильев, Х.Ф. Гебресласи. Об одном операторе в теории краевых задач. . 32
М.Ю. Ватолкин. О спектре обобщенной задачи Валле—Пуссена 34
Ю.П. Вирченко, Р.Е. Солонченко. Перечисление несамопересекающихся путей на периодическом графе $\mathbb{Z}^2$ 37
С.К. Водопьянов . Квазиконформный анализ на римановых многообразиях и его применения 39
И.И. Габдулхаликов, Р.Г. Насибуллин. Улучшенные нижние оценки константы Брезиса-Маркуса из гипотезы Авхадиева-Вирца 43
Т.П. Гаврилова. Метод численного решения обратной линейной граничной задачи нестационарного теплопереноса 45
Л.И. Гафиятуллина, Р.Г. Салахудинов. Оценки снизу жесткости кручения выпуклой области 47
С.В. Гонченко, О.В. Гордеева. О вложении в поток одномерных отображений с негрубой неподвижной точкой 48
Д.В. Горбачев, А.П. Солодов. Условия сходимости слабо-жадного алгоритма . . 49
Р.Н. Гумеров. Порождающие квантовые каналы и их интегральные представления 51

Р.Н. Гумеров, А.С. Куклин, Е.В. Липачева. Универсальная C^*-алгебра, порожденная свободным произведением полугрупп рациональных чисел 53
Т.М.Ф. Дарвиш. Оператор блочного проектирования на алгебре измеримых операторов 54
Э.Б. Дилмуродов. Существование двустроннего эффекта Ефимова для операторной матрицы второго порядка 56
В.Л. Дильман, А.Е. Кащеева. Квазиинварианты Римана при исследовании критических состояний неоднородных соединений 58
В.Н. Дубинин. Ограниченные голоморфные функции в круговом кольце . . . 60
Г.С.Жабборова. О числе собственных значений семейства моделей Фридрихса с двумерным возмущением 61
Д.Х. Жумаева. Построение определителя Фредгольма для семейства обобщенных моделей Фридрихса с семимерным возмущением 63
Ф.М. Журакулова. Определитель Фредгольма для операторной матрицы третьего порядка со спектральным параметром 65
Э. Заарур. Сравнение точности эмпирических аналогов кривой байесовской регрессии. 67
Н.В. Зайцева. Об одной начальной задаче для двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения 69
А.А. Зверев, С.А. Шабров. Краевая задача с антипериодическими граничными условиями и негладкими решениями 71
П.Н. Иваньшин. Сплайн-интерполяционное решение плоской задачи Стефана 73
И.М. Избяков. О множестве векторов модулей измерений сигнала полными системами 74
Д.Э. Исмоилова. Условия существования собственных значений операторной матрицы второго порядка 76
М.В. Кабанко. Аппроксимация целых функций и обобщенный порядок относительно модельной функции роста 78
А.Д. Казакова, М.Г. Плотников. О M- и U-множествах для кратных рядов Уолша 79
А.В. Казанцев. К теореме С.Р. Насырова 81
М.Б. Карманова. Графики и композиции отображений на двухступенчатых группах Карно 83
A.R. Kacimov, Yu.V. Obnosov, A.B. Umarova, N.B. Sadovnikova, A. Al-Shukeili, A.V. Smagin. Saturated-unsaturated seepage from Kornev's subsurface element: comparison of analytic and numerical solutions 86
В.А. Клячин. Неравенство Йенсена как критерий выпуклости функции 90
И.А. Колесников. Семейство отображений полуплоскости на круговой четырехугольник 92
М.А. Комаров. Оценки производной многочленов с нулями на предписанных множествах и некоторые задачи аппроксимации 93
А.В. Коптев. Точные решения уравнений Навье — Стокса с наперед заданными свойствами гладкости 95
Ya.A. Kopylov. Some Properties of the Orlicz Cohomology of Groups 97
М.В. Коровина. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярных особенностей. Уравнение Шредингера 98

Г.В. Краснощеких, Вит.В. Волчков. Теоремы типа Лиувилля для периодических в среднем функций относительно свертки Бесселя и их применение 101
О.С. Кудрявцева, А.П. Солодов. Структура решения интерполяционной задачи Неванлинны–Пика 102
А.Ю. Кузнецова. Локальные группы и операторные алгебры 104
А.Р. Кушаева, С.Р. Насыров. Оценка гиперболической метрики через метрику треугольного отношения в квадрате 106
Х.М.Латипов. Включение для спектра блочных элементов операторной матрицы четвертого порядка 108
Л.В. Линчук. Альтернативные обобщённые операторы тривиальной структуры 110
V.L. Litvinov, K.V. Litvinova. Integro-differential equations of oscillations of mechanical systems with moving boundaries 112
Н.А. Лобода, А.Х. Сташ. О реализации существенных спектров показателей колеблемости нулей двумерных дифференциальных систем 114
М.М. Логиновская. Разложение на атомы функций из классов типа Харди-Лоренца 116
Л.С. Маергойз. Задачи, связанные с нахождением кусочно-тригонометрических индикаторов целых функций целого порядка и нормального типа 118
Е.А. Мазепа. Одна теорема сравнения для решений неоднородного уравнения Шрёдингера на некомпактном римановом многообразии 120
А.С. Макин. О спектральных задачах для системы Дирака 122
К.Г. Малютин. Субгармонические функции вполне регулярного роста в полукольце 124
Т.С. Мардвилко. Дейстительное пространство Харди-Соболева на прямой для нахождения наилучших рациональных L_p-приближений. 126
А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова. К задачам типа Дарбу для одного гиперболического уравнения третьего порядка 128
Т.И. Михалёва, К.М. Расулов. Об одном методе решения краевой задачи типа Газемана для квазигармонических функций первого рода в произвольных односвязных областях 129
А.А. Наумова. Рост дельта-субгармонических функций в полукольце 131
Ш.Б. Неъматова. О собственном вектор-функции обобщенной модели Фридрихса на нецелочисленной решетке 133
С.Я. Новиков. Теорема Чеботарева и восстановление сигналов 136
В.Ю. Новокшенов. Распределение нулей ортогональных многочленов и кривые Бутру. 137
О.М. Норкулов. О точечном спектре тензорной суммы двух моделей Фридрихса с конечномерным возмущением 138
Б.П. Осиленкер. О полугруппах операторов, порождённых ортогональными полиномами 140
А.А. Панеш, А.Х. Сташ. О непрерывности скоростей блуждания и показателей колеблемости на множестве дифференциальных систем, задающих повороты плоскости 142

Е.В. Патрин. Функториальность конструкций полупрямого произведения групп и скрещенного произведения C*-алгебры с локально-компактной группой . . 144
Н.Б. Плещинский. 100 лет со дня рождения профессора Л.И. Чибриковой . . . 146
Н.Б. Плещинский. О формулах обращения сингулярных интегральных уравнений 148
М.Г. Плотников, А.Д. Казакова. О p-ичных системах функций типа хаосов Радемахера 150
А.А. Попов. Функция Грина оператора Лапласа в пространстве с топологией $R^2 \times S^2$ 152
А.Ю. Попов, Т.Ю. Семенова. Скорость сходимости в принципе локализации Римана для интегрируемых функций 154
С.С. Постнов. Исследование l-проблемы моментов для уравнений дробного переменного порядка 156
П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба. О рациональных суммах Абеля – Пуассона и аппроксимациях одного сингулярного интеграла на отрезке 158
Л.А. Прокудина. Математическое моделирование эволюции возмущений в жидкой пленке при неоднородности поверхностного натяжения 160
Т.Х. Расулов. Аналог теоремы Гершгорина для неограниченных диагонально доминирующих операторных матриц 161
К.М. Расулов, Т.Р. Нагорная. О нетривиальных решениях однородной задачи Дирихле для обобщенных гармонических функций первого порядка в круговых областях 163
А.И. Рахимова. Динамические свойства некоторых операторов в пространстве $\mathscr{F}_\varphi$ 165
К.Б. Сабитов. Начально-граничная задача для уравнения колебания круглой пластины, когда ее контур свободен 166
Г.Р. Сайлиева. Канальный оператор для операторной матрицы третьего порядка с некомпактным возмущеннем 169
М.С. Сгибнев. Уравнение Вольтерра первого рода 171
Т.Ю. Семенова. Приближение непрерывных функций и функций ограниченной p-вариации ступенчатыми функциями 173
С.Н. Сидоров. Начально-граничные задачи для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением. 175
А.С. Ситдиков, А.С. Никитин, Д.В. Буштец. Запутывание мод в рамках локальных алгебр CAR 177
Г.К. Соколова. О характеристическом полиноме лапласиана циркулянтного графа с нефиксированными скачками 179
Ю.С. Солиев. О квадратурных формулах для особых интегралов с весом по отрезку действительной оси 181
А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов. Аппроксимации Эрмита-Паде рядов Лорана 183
А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, М.А. Кухлич. Асимптотика нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышева 185
В.Д. Степанов. Весовые неравенства с одномерными операторами типа Харди, включающими супремумы. 187

В.Д. Степанов, Е.П. Ушакова. Прямоугольный оператор Харди в весовых пространствах Лебега . . . 188
Ф.М. Талбакзода. Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича . . . 193
Ф.М. Талбакзода. Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье с малыми пропусками . . . 195
С.М. Ташпулатов. О спектре трехмагнонных систем в d-мерной решетке . . . 197
М.Р. Тимербаев. Спектральная декомпозиция ядра в задаче мультискважинной деконволюции и некоторые ее следствия . . . 199
Н.А. Тошева. Описание существенного спектра семейства операторных матриц третьего порядка . . . 201
А.Ю. Трынин. О синк-приближении суммируемых функций . . . 203
Д.А. Тукмаков. Численные и аналитические реализации математических моделей динамики дисперсных сред . . . 204
Г.Х. Умиркулова. Расположение ветвей существенного спектра модельного гамильтониана системы трех частиц на одномерной решетке . . . 206
Ю.А. Фарков. О поперечниках по Колмогорову классов аналитических функций 208
Б.Н. Хабибуллин. Распределение корней голоморфных на единичном круге функций с субгармонической мажорантой . . . 211
Г. Хайруллозода. Аналитическое решение уравнения диффузии на основе метода искусственной гиперболизации . . . 215
С.Г. Халиуллин. О дихотомии марковских операторов на вероятностном калибровочном пространстве . . . 217
А.М. Халхужаев, Х.Ш. Махмудов. О спектре оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц на решетке . . . 219
А.М. Халхужаев, Х.Г. Хайитова. О числе собственных значений трехчастичного оператора Шредингера на трехмерной решетке . . . 221
Ю.Х. Хасанов, А.Н. Давлатов. О суммируемости по мере в пространстве измеримых функций . . . 223
Ж.Т. Хусенова. Числовая область значений модели Фридрихса с четырехмерным возмущением . . . 225
И.А. Шакиров. Аппроксимация константы Лебега оператора Фурье . . . 227
М.В. Шамолин. Инварианты динамических систем нечетного порядка с диссипацией . . . 229
М.Ш. Шарипова. Нижняя оценка для спектра операторной матрицы третьего порядка, зависящей от параметра . . . 231
З.И. Шарифзода, Н.И. Нуров. Об одном аналоге теоремы Понтрягина о существовании периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра . . . 233
И.А. Шилин. Некоторые формулы для интегральных преобразований: новые доказательства и обобщения . . . 235
Е.А. Широкова, М. Алхело. Условия на граничные смещения, обеспечивающие конечные значения компонент тензора напряжений в граничной точки возврата . . . 237
К.А. Шишкин. О функторах между компактными C^*-соотношениями . . . 239

В.И. Щербаков. Признаки Дини для систем типа Хаара 241
Д.Д. Япаров. Саморегуляризирующий метод для динамических систем с распределенными параметрами 243
Н.М. Япарова. Численное решение обратных задач теплопередачи в условиях неопределенности 244
Ф.Ю.Яшиева. Исследование собственных значений модели Фридрихса с использованием математических пакетов. 246

УДК 514.822

МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ФРЕДГОЛЬМА

М.А. Абдуллаева[1]

1 *abdullayevamuhayyo9598@gmail.com*; Институт предпринимательства и педагогики имени Денова, Термиз

В данной работе изучается матрица третьего порядка T, элементами которой являются одномерные интегральные операторы Фредгольма. Установлено, что число $\lambda = 0$ является бесконечнократным собственным значением матрицы T. Построен определитель, нули которого являются собственными значениями матрицы T.

Ключевые слова: тор, матрица, оператор Фредгольма, собственное значение.

Теория интегральных операторов является одним из важных разделов функционального анализа и применяется для решения многих практических задач. В частности, интегральные операторы Фредгольма играют важную роль в математической физике, интегральных уравнениях и спектральной теории. В данной работе анализируется спектр матрицы, элементами которой являются интегральные операторы Фредгольма.

Через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ обозначим d-мерный куб $(-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ с соответствующим отождествлением противоположных граней, а через $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ обозначим гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Положим

$$L_2^{(3)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}).$$

Это пространство можно записать в следующем виде:

$$L_2^{(3)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) = \{f = (f_1, f_2, f_3) : f_\alpha \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}),\ \alpha = 1,2,3\}.$$

В этом случае скалярное произведение элементов $f = (f_1, f_2, f_3)$ и $g = (g_1, g_2, g_3)$ $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ определяется с помощью равенства

$$(f, g) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_1(x)\overline{g_1(x)}dx + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_2(x)\overline{g_2(x)}dx + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_3(x)\overline{g_3(x)}dx.$$

В гильбертовом пространстве $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ рассмотрим матричный оператор

$$T := \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12}^* & T_{22} & T_{23} \\ T_{13}^* & T_{23}^* & T_{33} \end{pmatrix}$$

с элементами $T_{ij} : L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \to L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$, $i \le j$:

$$(T_{ij} f_j)(x) = t_{ji}(x) \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} t_{ij}(s) f_j(s) ds, \quad f_j \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}), \quad i, j = 1,2,3.$$

Здесь $t_{ij}(\cdot)$, $i, j = 1,2,3$ — вещественно-значные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а T_{ij}^* сопряженный оператор к T_{ij}. При этом операторная матрица T является ограниченным и самосопряженным оператором в $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$.

По простым вычислениям

$$(T_{ij}^* f_i)(x) = t_{ij}(x)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} t_{ji}(s) f_i(s)ds, \quad f_i \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}), \quad i,j=1,2,3.$$

Положим

$$\Delta(\lambda) := \begin{vmatrix} \Delta_{11}(\lambda) & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{19} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22}(\lambda) & \cdots & \Delta_{29} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{91} & \Delta_{92} & \cdots & \Delta_{99}(\lambda) \end{vmatrix},$$

где матричные элементы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{11}(\lambda) := \|t_{11}\|^2 - \lambda,\ \Delta_{12} := (t_{11}, t_{21}),\ \Delta_{13} := (t_{11}, t_{31}),\ \Delta_{22}(\lambda) := -\lambda;\\
&\Delta_{24} := \|t_{12}\|^2,\ \Delta_{25} := (t_{12}, t_{22}),\ \Delta_{26} := (t_{12}, t_{32}),\ \Delta_{33}(\lambda) := -\lambda;\\
&\Delta_{37} := \|t_{13}\|^2,\ \Delta_{38} := (t_{13}, t_{23}),\ \Delta_{39} := (t_{13}, t_{33}),\ \Delta_{41} := (t_{21}, t_{11});\\
&\Delta_{42} := \|t_{21}\|^2,\ \Delta_{43} := (t_{21}, t_{31}),\ \Delta_{44}(\lambda) := -\lambda,\ \Delta_{54} := (t_{22}, t_{12});\\
&\Delta_{55} := \|t_{22}\|^2 - \lambda,\ \Delta_{56} := (t_{22}, t_{32}),\ \Delta_{66}(\lambda) := -\lambda,\ \Delta_{67} := (t_{23}, t_{13});\\
&\Delta_{68} := \|t_{23}\|^2,\ \Delta_{69} := (t_{23}, t_{33}),\ \Delta_{71} := (t_{31}, t_{11}),\ \Delta_{72} := (t_{31}, t_{21});\\
&\Delta_{73} := \|t_{31}\|^2,\ \Delta_{77}(\lambda) := -\lambda,\ \Delta_{84} := (t_{32}, t_{12}),\ \Delta_{85} := (t_{32}, t_{22});\\
&\Delta_{86} := \|t_{32}\|^2,\ \Delta_{88}(\lambda) := -\lambda,\ \Delta_{97} := (t_{33}, t_{13}),\quad \Delta_{98} := (t_{33}, t_{23});\\
&\Delta_{99}(\lambda) := \|t_{33}\|^2 - \lambda,\ \text{и } \Delta_{ij} = 0, \text{ в остальных случаях.}
\end{aligned}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Число $\lambda = 0$ является бесконечнократным собственным значением оператора T, а нули функции $\Delta(\cdot)$ является конечнократными собственными значениями этого оператора.*

Сформулированная теорема 1 важна при изучении числовой области значений и кубической числовой области значений [1] матрицы T. Ясно, что функция $\Delta(\cdot)$ является полиномом 9-й степени. Таким образом, матрица T имеет не более 9 собственных значений с учетом кратности. Поскольку T — самосопряженный оператор, эти собственные значения являются действительными. Это очень удобно для определении числовой области значения матрицы T.

Литература

1. Rasulov T.H., Tretter C. *Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices* // Rocky Mountain Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 1. – P. 279–324.

THE THIRD ORDER MATRICES WITH FREDHOLM INTEGRAL OPERATORS

M.A. Abdullaeva

In this work, we study a third-order matrix T whose elements are one-dimensional Fredholm integral operators. It is established that the number $\lambda = 0$ is an infinitely multiple eigenvalue of the matrix T. A determinant, whose zeros are the eigenvalues of the matrix T is constructed.

Keywords: torus, matrix, Fredholm operator, eigenvalue.

УДК 517.5

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

Ф.Г. Авхадиев[1]

1 *avkhadiev47@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Пользуясь гиперболическим радиусом и расстоянием от точки до границы области, мы доказываем новые изопериметрические неравенства и их обобщения для функций.

Ключевые слова: гиперболический радиус, изопериметрическое неравенство.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, имеющая хотя бы одну конечную граничную точку. Для конечносвязных областей $G \subset \Omega$ с кусочно-гладкими границами $\partial G \subset \Omega$ мы изучаем изопериметрическое неравенство вида $A(G) \leq q(\Omega) L(\partial G)$, предполагая, что площади $A(G)$ и периметры $L(\partial G)$ определены формулами

$$A(G) = \iint_G \frac{dx\,dy}{\mathrm{dist}^2(z, \partial\Omega)}, \quad L(\partial G) = \int_{\partial G} \frac{|dz|}{\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)},$$

где $z = x + iy$, а константа $q(\Omega) := \sup_G A(G)/L(\partial G)$. Свойство $q(\Omega) < \infty$ присуще не всем областям Ω. Нами получен следующий критерий конечности $q(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, такая, что $\Omega \neq \mathbb{C}$. Изопериметрическая константа $q(\Omega)$ будет конечной величиной тогда и только тогда, когда граница $\partial\Omega$ области Ω является равномерно совершенным множеством, причем $q(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $q(\Omega) \leqslant 2\left(\pi M_0(\Omega) + \frac{(\Gamma(1/4))^4}{4\pi^2}\right)^2$, где $M_0(\Omega)$ — евклидов максимальный модуль области Ω, Γ — гамма функция Эйлера.*

Пусть теперь $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, имеющая не менее трех граничных точек. Тогда в ней корректно определена метрика Пуанкаре $\lambda_\Omega(z)|dz|$ с гауссовой кривизной $\kappa = -4$. По определению, гиперболический радиус $R(z, \Omega) := 1/\lambda_\Omega(z)$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, имеющая не менее трех граничных точек. Тогда для любой конечносвязной подобласти $G \subset \Omega$ с кусочно-гладкой границей $\partial G \subset \Omega$ имеет место неравенство*

$$\iint_G \frac{dx\,dy}{R^2(z, \Omega)} \leqslant \frac{1}{4} \int_{\partial G} \frac{|\nabla R(z, \Omega)|}{R(z, \Omega)} |dz|.$$

Далее мы строим новые интегральные неравенства, содержащие произвольные функции $f \in C^1(\overline{G})$. Эти новые неравенства являются универсальными в том смысле, что не содержат неопределенных констант.

Теорема 3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область гиперболического типа, и пусть $p \in [1, \infty)$. Предположим, что $G \subset \Omega$ — конечносвязная подобласть с кусочно-гладкой границей $\partial G \subset \Omega$. Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C^1(\overline{G})$ имеет место неравенство*

$$\iint_G \frac{|f(z)|^p\, dx\,dy}{R^2(z, \Omega)} \leqslant \frac{p^p}{4^p} \iint_G \frac{|(\nabla f(z), \nabla R(z, \Omega))|^p\, dx\,dy}{R^{2-p}(z, \Omega)} + \frac{p}{4} \int_{\partial G} \frac{|f(z)|^p\, |\nabla R(z, \Omega)|}{R(z, \Omega)} |dz|,$$

где $z = x + iy \in \overline{G}$, $\big(\nabla f(z), \nabla R(z, \Omega)\big)$ — скалярное произведение градиентов функций.

При $n \geqslant 3$ метрика Пуанкаре и гиперболический радиус заданы явными формулами для n-мерного шара и полупространства. В общем случае (см. [1] и [2]) гиперболический радиус определен для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ гиперболического типа, в которых существует функция $R(\cdot,\Omega) : \Omega \to (0,\infty)$, удовлетворяющая нелинейному уравнению Лиувилля $R(x,\Omega)\Delta R(x,\Omega) = (n/2)|\nabla R(x,\Omega)|^2 - 2n$ и граничному условию $R(x,\Omega)|_{(\partial\Omega)\setminus\{\infty\}} = 0$.

Теорема 4. *Пусть $n \geqslant 3$, $p \in [1,\infty)$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область гиперболического типа. Предположим, что $G \subset \Omega$ — подобласть с границей $\partial G \subset \Omega$, состоящей из конечного числа кусочно-гладких поверхностей размерности $n-1$. Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C^1(\overline{G})$ имеет место неравенство*

$$\int_G \frac{|f(x)|^2}{R^n(x,\Omega)}\,dx \leqslant \frac{1}{n(n-2)}\int_G \frac{|\nabla f(x)|^2}{R^{n-2}(x,\Omega)}\,dx + \frac{1}{2n}\int_{\partial G} |f(x)|^2\frac{|\nabla R(x,\Omega)|}{R^{n-1}(x,\Omega)}\,dS,$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$, $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$, dS — дифференциальный элемент $(n-1)$-мерной площади.

Теорема 5. *Пусть $n \geqslant 2$, $p \in [1,\infty)$ и $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$, где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Предположим, что $G \subset H_1$ — подобласть с границей $\partial G \subset H_1$, состоящей из конечного числа кусочно-гладких поверхностей размерности $n-1$. Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C^1(\overline{G})$ имеет место неравенство*

$$\int_G \frac{|f(x)|^p}{x_1^n}\,dx \leqslant \frac{p^p}{(n-1)^p}\int_G \frac{|\nabla f(x)|^p}{x_1^{n-p}}\,dx + \frac{p}{n-1}\int_{\partial G} \frac{|f(x)|^p}{x_1^{n-1}}dS.$$

Теоремы 1—5 приведены в наших кратких сообщениях [3] и [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00066) и Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение 075-02-2024-1438).

Литература

1. Loewner C. and Nirenberg L. *Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations* // Contribution to Analysis. – 1974. – P. 245–272.

2. Bandle C. and Flucher M. *Harmonic radius and concentration of energy: hyperbolic radius and Liouville's equations $\Delta U = e^U$ and $\Delta U = U^{\frac{n+2}{n-2}}$* // SIAM Review. – 1996. –V. 38. – № 2. – P. 191–238.

3. Авхадиев Ф. Г. *Аналог метрики Пуанкаре и изопериметрические константы* // Известия вузов. Математика. – 2024. – № 9. – С. 92–99.

4. Авхадиев Ф. Г. *Интегральные неравенства в областях евклидова пространства для функций с ненулевым следом* // Известия вузов. Математика. – 2025. – № 5. – С. 77–83.

ISOPERIMETRIC TYPE INTEGRAL INEQUALITIES

F.G. Avkhadiev

Using the hyperbolic radius and the distance from a point to the boundary of a domain we prove new isoperimetric inequalities and obtain their generalizations for functions.

Keywords: hyperbolic radius, isoperimetric inequality.

УДК 517.96

О ПАРАХ ПРОСТРАНСТВ КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДРОБНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Р. Агачев[1], Р.К. Губайдуллина[2], А.В. Гуськова[3], М.Ю. Першагин[4]

1 *juriy.agachev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *rkgubajdullina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
3 *avsavina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
4 *michael.pershagin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается вопрос выбора пары пространств корректной постановки нелинейного интегрального уравнения с дробным интегралом в смысле Римана-–Лиувилля. Исследование ведется в случае, когда дробные интегралы разных порядков содержатся как вне, так и внутри интеграла. Указаны две пары пространств, соответствующие двум случаям зависимостей порядков дробных интегралов.

Ключевые слова: пространство Гёльдера, нелинейное уравнение, интегральное уравнение, дробный интеграл, корректная постановка.

Пусть фиксированы вещественные числа $0 < \alpha, \beta < 1$. Рассмотрим нелинейное дробно-интегральное уравнение вида

$$A(x) \equiv F(t, (I_+^\alpha x)(t), \int_0^{\sigma(t)} \Phi(t, s, (I_+^\beta x)(s))\, ds) = y(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{1}$$

где F, Φ – известные непрерывные функции, $\sigma(t) \equiv 1$ или $\sigma(t) = t, 0 \le t \le 1$. Здесь I_{a+}^γ – левосторонний дробно-интегральный оператор Римана–Лиувилля порядка $\gamma > 0$ (см., например, в [1, с. 42]:

$$(I_{a+}^\gamma x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{1-\gamma}},$$

$\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Будем предполагать, что уравнение (1) имеет единственное решение $x^*(t)$ в некотором шаре из пространства $C[0,1]$ непрерывных функций, функция Φ имеет производную по третьему аргументу в точке $x^*(\cdot)$, а F – производную по второму и третьему аргументам в указанной точке. При этих условиях для изучения вопросов корректной постановки и построении приближений к решению можно воспользоваться методом гладких операторов.

Очевидно, что вопрос выбора пары пространств корректной постановки зависит от зависимости между параметрами α, β. Возможны два случая: 1) $\alpha \ge \beta$; 2) $\alpha < \beta$.

В первом случае выберем $\delta > 0$, удовлетворяющее условию $\alpha + \delta < 1$. Тогда уравнение (1), с учетом известного свойства дробно-интегрального оператора, можно рассматривать в паре пространств Гельдера $X = H_{\delta,0}$ и $Y = H_{\alpha+\delta,0}$ функций, обращающихся в нуль на левом конце. Такой выбор возможен при выполнении условий $F(0,u,v) = 0$, $F(t,u,v), \Phi(t,s,u)$ по t удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha + \delta$. Этот случай был нами рассмотрен в [2] при $\sigma(t) \equiv 1$.

Во втором случае $\alpha < \beta$ предыдущая пара уже не позволяет установить корректную постановку. Здесь за пару пространств можно принять $X = H_{\beta-\alpha,0}$, $Y = H_{\beta,0}$, что требует выполнения условия: функции $F(t,u,v), \Phi(t,s,u)$ по t принадлежат классу Гёльдера с показателем β.

Доказывается, что выбранные пары пространств искомых элементов и правых частей представляют пары корректной постановки уравнения (1). При этом точное решение может быть найдено применением к этому уравнению известных проекционных методов для линеаризованного интегрального уравнения вида

$$Kx \equiv g(t)(I_+^\alpha x)(t) + \int_0^{\sigma(t)} h(t,s)(I_+^\beta x)(s)\,ds = f(t),\ 0 \le t \le 1.$$

Результаты распространяются на случай, когда хотя бы один из параметров α, β больше единицы. Тогда аналогичные указанным выше пространства гладких функций, задаваемых дробным интегралом Римана–Лиувилля, позволяют установить корректность задачи Коши для уравнения (1). Если один из параметров α, β является натуральным числом, то ситуация становится более простой с учетом известных результатов по линейным условно корректным интегро-дифференциальным уравнениям целого порядка.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Агачев Ю.Р., Губайдуллина Р.К., Гуськова А.В.. Сходимость общего "полиномиального"проекционного метода решения одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка// Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы Всероссийской школы-конференции ”Лобачевские чтения-2024” — Казань: Изд-во КФУ, 2024. — Т.68. – С. 9–12.

ON PAIRS OF SPACES OF CORRECT FORMULATION FOR ONE CLASS OF NONLINEAR FRACTIONAL INTEGRAL EQUATIONS

J.R. Agachev, R.K. Gubajdullina, A.V. Guskova, M.Ju. Pershagin

The question of choosing a pair of spaces for a correct statement of a nonlinear integral equation with a fractional integral in the Riemann-Liouville sense is considered. The study is conducted in the case where fractional integrals of different orders are contained both outside and inside the integral. Two pairs of spaces are indicated, corresponding to two cases of dependences of the orders of fractional integrals.

Keywords: Hölder space, nonlinear equation, integral equation, fractional integral, correct staging.

УДК 517.968, 519.6

О ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УСЛОВНО КОРРЕКТНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Ю.Р. Агачев[1], А.В. Гуськова[2]

1 *juriy.agachev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *avsavina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача Коши для интегро-дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля, а именно случай, когда старшая производная находится под знаком интеграла. Исследование проводится в паре пространств Соболева корректной постановки по Адамару. Доказывается для исследуемой задачи сходимость классических полиномиальных методов Галеркина, коллокации, подобластей и механических квадратур.

Ключевые слова: пространство Соболева, дробная производная, интегро-дифференциальное уравнение, приближенное решение, проекционный метод, сходимость метода.

Пусть α, β – вещественные числа, подчиненные условию $0 < \beta < \alpha < 1$, $h(t,s), y(t)$ – известные функции на $[0,1]^2$ и $[0,1]$ соответственно.

Рассматривается задача Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения:

$$x(0) = 0, \tag{1}$$

$$x^{(\beta)}(t) + \int_0^1 h(t,s)x^{(\alpha)}(s)\,ds = y(t),\ 0 < t \le 1, \tag{2}$$

где $x^{(\gamma)}(t)$ есть дробная производная Римана–Лиувилля порядка γ (см., напр. [1])

$$x^{(\gamma)}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{x(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\gamma},\ 0 < \gamma < 1,\ \Gamma(\cdot) - \text{гамма-функция}.$$

Задача (1), (2) относится к некорректно поставленным по Адамару. В случае $\beta > \alpha$ вопрос о корректности постановки этой задачи нами был уже рассмотрен [2]. Исследование в случае $\beta < \alpha$ осложняется тем, что производная старшего порядка находится под знаком интеграла.

Введем в рассмотрение пространство Соболева $W^\gamma L_p[0,1], 1 \le p \le \infty$, функций, абсолютно непрерывных на $[0,1]$ и имеющих там дробную производную порядка $\gamma, 0 < \gamma < 1$, принадлежащую пространству Лебега $L_p(0,1)$. Норму в $W^\gamma L_p[0,1]$ введем обычным образом:

$$\|z\|_{\gamma;p} = \|z\|_p + \|z^{(p)}\|_p,\ 1 \le p \le \infty.$$

Через введенное таким образом пространство $W^\gamma L_p[0,1]$ определим пару пространств (X,Y), где $Y = W^{\alpha-\beta}L_p[0,1]$, а $X = \overset{\circ}{W}{}^{\alpha} L_p[0,1]$ – подпространство

$W^{\alpha}L_p[0,1]$ функций, удовлетворяющих начальному условию (1), с нормой

$$\|x\|_X = \|x^{(\beta)}\|_p + \|x^{(\alpha)}\|_p.$$

Задачу (1), (2) будем рассматривать в паре (X, Y). Для этого потребуем от функций $h(t,s)$ и $y(t)$ дробной дифференцируемости порядка $\alpha - \beta$ по переменной t на $[0,1]$. Тогда наша задача может быть записана в операторной форме

$$Kx \equiv Dx + Hx = y \quad (x \in X, y \in Y), \tag{3}$$

где операторы D и H задаются формулами

$$(Dx)(t) \equiv x^{(\beta)}(t),\ (Hx)(t) \equiv \int_0^1 h(t,s)x^{(\alpha)}(s)\,ds,\ x \in X.$$

Показывается, что $D : X \to Y$ непрерывно обратимый оператор, а при $h \in W^{\alpha-\beta}L_p \times L_q$, где $1/q + 1/p = 1$, оператор $H : X \to Y$ – вполне непрерывный. Таким образом, уравнение (3) относится к операторным уравнениям, приводящимся к уравнению второго рода с вполне непрерывным операторам. Последнее означает, что к задаче (1), (2) можно применять прямые методы решения корректно поставленных задач, в частности, известные полиномиальные и сплайновые методы Галеркина, коллокации, подобластей, механических квадратур и др.

Для указанных полиномиальных методов решения задачи (1), (2) доказаны теоремы об их сходимости.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Агачев Ю. Р., Гуськова А. В. *О полиномиальных приближениях решения задачи Коши для одного дробного интегро-дифференциального уравнениям* // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 66. XVI Международная Казанская школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы Сборник трудов. – Казань: КФУ, 2023. – Т. 66. – С. 15–17.

ON THE APPROXIMATION OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A CONDITIONALLY CORRECT INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF FRACTIONAL ORDER

J.R. Agachev, A.V. Guskova

The Cauchy problem for an integro-differential equation with a fractional Riemann–Liouville derivative is considered, namely the case when the highest derivative is under the integral sign. The study is carried out in a pair of Sobolev spaces of correct Hadamard formulation. The convergence of the classical polynomial Galerkin method, the methods of collocations, subdomains and mechanical quadratures is proved for the problem under the methods of study.

Keywords: Sobolev space, fractional derivative, integro-differential equation, approximate solution, projection method, convergence of the method.

УДК 517.925

О КАЧЕСТВЕННОЙ КАРТИНЕ ТРАЕКТОРИЙ РЯДА СЕМЕЙСТВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И.А. Андреева[1]

1 *irandr@inbox.ru*; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Ключевая роль в математическом моделировании физических, экономических, социальных процессов принадлежит динамическим системам, выступающим в роли математического инструмента для анализа по преимуществу тех явлений, в ходе исследования которых могут быть проигнорированы флуктуации. При рассмотрении определяемых уравнениями системы кривых ее фазовое пространство расщепляется на траектории и изучается их предельное поведение. Особый интерес представляют полиномиальные динамические системы. Данная работа развивает и продолжает оригинальное исследование обширного класса динамических систем со взаимно простыми полиномиальными правыми частями и описывает результаты построения фазовых портретов в круге Пуанкаре для дополнительного его подсемейства, основанного на методах локальной качественной теории дифференциальных уравнений и динамических систем.

Ключевые слова: динамическая система, взаимно простые полиномы, траектория, сепаратриса, фазовое пространство, фазовый портрет, особая точка, круг Пуанкаре.

Обширный класс дифференциальных динамических систем, правые части уравнений которых представляют собою взаимно простые полиномиальные формы третьей и второй степеней, рассматривается на расширенной вещественной плоскости их фазовых переменных:

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x,y).$$

Не умаляя общности, полагаем, что $X(0,1)\,Y(0,1) \neq 0$. В процессе исследования, полностью основанного на методах качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений — как классических, так и созданных целевым образом в ходе этой работы — производится естественное расщепление глобального рассматриваемого класса динамических систем на семейства и подсемейства ряда последовательных уровней, или слоев, иерархии, для которых получена полная качественная картина фазовых траекторий систем каждого подсемейства в замкнутом круге Пуанкаре [1, 2, 5]. Для различных ветвей расщепления число последовательных уровней иерархии меняется от трех до четырех. Для запуска процесса иерархического расщепления глобального класса систем вводятся характеристические взаимно простые полиномы. В зависимости от расположения их (различных) корней на вещественной оси возникает 10 первоначальных семейств высшего иерархического слоя. Для последующих слоев расщепление основывается на поведении сепаратрис особых точек и прочих характеристиках фазовых траекторий. Данный этап работы посвящен одному из 10 семейств высшего иерархического слоя, а именно семейству (3.1), характеризуемому 3 различными корнями полинома кубического и отличным от них кратным корнем квадратичного полинома. В круге Пуанкаре строятся все возможные виды топологически различных фазовых портретов изучаемого глобального семейства. Показано отсутствие у них предельных циклов [3, 5].

При проведении работы продуктивно использованы специфические методики КТДУ, перспективные в сферах как теоретической, так и прикладной работы с динамическими системами в математическом моделировании [3, 4, 5].

Литература

1. Андреев А.Ф. *Особые точки дифференциальных уравнений.* – Минск: Вышэйшая школа, 1979. – 139 с.

2. Андреев А.Ф., Андреева И.А. *Фазовые портреты одного семейства кубических динамических систем в круге Пуанкаре. III* // Вестник РАЕН. – 2019. – № 2(19) – С. 20–24.

3. Andreeva I.A., Efimova T.O. *On the Qualitative Study of Some Family of Cubic Dynamic Systems* // Mathematical Methods in Technology and Technics. St. Petersburg. – 2021. – Vol. 6. – P. 12–15.

4. Andreeva I.A., Efimova T.O. *On the Qualitative Study of Phase Portraits for Some Categories of Polynomial Dynamic Systems* // Studies of Systems, Decision and Control. – 2022. – Vol. 418. – Cyber-Physical Systems: Modeling and Industrial Application. Springer. – P. 39–50.

5. Andreeva I. *Qualitative Investigation of Some Hierarchical Family of Cubic Dynamic Systems* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45 (1). – P. 364–375.

ON THE QUALITATIVE PICTURE OF THE TRAJECTORIES OF SOME OF FAMILIES OF POLYNOMIAL DYNAMICAL SYSTEMS

I.A. Andreeva

Dynamic systems play a key role in the mathematical modeling of physical, economic, and social processes, acting as a mathematical tool for analyzing those phenomena which can be studied while ignoring fluctuations. When considering the curves defined by the equations of a system, its phase space is split into trajectories and their limiting behavior is studied. Of particular interest are polynomial dynamical systems. This work develops and continues the original study of an extensive class of dynamical systems with reciprocal polynomial right-hand sides and describes the results of constructing phase portraits in the Poincare circle for its additional subfamily based on the methods of the local qualitative theory of differential equations and dynamical systems.

Keywords: dynamical systems, mutually simple polynomials, trajectory, separatrix, phase space, phase portrait, singular point, Poincare circle.

УДК 517.926.4

О РЕАЛИЗАЦИИ СЧЕТНЫХ СПЕКТРОВ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛЕБЛЕМОСТИ НУЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Е. Артисевич[1], А.Х. Сташ[2]

1 *artisevichangela@gmail.com*; Адыгейский государственный университет
2 *aidamir.stash@gmail.com*; Адыгейский государственный университет

Для любого не более чем счетного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, установлено существование линейного однородного дифференциального уравнения с наперед заданным порядком $n > 2$, у которого спектры характеристик колеблемости нулей совпадают с этим множеством.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, колеблемость, число нулей, показатель Ляпунова, характеристические частоты, показатели колеблемости.

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\widetilde{\mathscr{E}}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых наборами *непрерывных* функций $a \equiv (a_1, \dots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Пространство решений уравнения $\widetilde{\mathscr{E}}^n$ обозначим через $\mathscr{S}(a)$ и положим

$$\mathscr{S}_*(a) \equiv \mathscr{S}(a) \setminus \{0\}, \qquad \mathscr{S}^n_{\mathscr{E}} = \bigcup_{a \in \widetilde{\mathscr{E}}^n} \mathscr{S}_*(a).$$

Для момента $t > 0$ и функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ через $\nu^0(y,t)$ обозначим число ее *нулей* на промежутке $(0, t]$. Для вектора $m \in \mathbb{R}^n$ и вектор-функции $\psi^n y = \big(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}\big)$ введем обозначение $\nu^\alpha(y, m, t) \equiv \nu^\alpha(\langle \psi y, m\rangle, t)$, где $\alpha \in \{-, 0, +\}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Определение [1,2]. *Для каждого решения $y \in \mathscr{S}^n_{\mathscr{E}}$ определим следующие характеристики колеблемости: верхняя и нижняя характеристические частоты нулей*

$$\hat{\omega}^0(y) \equiv \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t}\nu^0(y,t), \quad \check{\omega}^0(y) \equiv \varliminf_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t}\nu^0(y,t);$$

верхний сильный и нижний сильный показатели колеблемости нулей

$$\hat{\nu}^0_\bullet(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t}\nu^0(y,m,t), \quad \check{\nu}^0_\bullet(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \varliminf_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t}\nu^0(y,m,t).$$

Известно [2], что спектры характеристик колеблемости любого уравнения из множества $\widetilde{\mathscr{E}}^2$ состоят ровно из одного числа, но зато спектры характеристических частот нулей дифференциальных уравнений порядка выше двух принадлежат классу суслинских множеств [3,4]. В предположении, что спектры *верхней* характеристической частоты нулей и *верхнего сильного* показателя колеблемости нулей содержат точку нуль, справедливо обращение этого утверждения [4,5,6].

Вопросы реализации наперед заданных спектров нижних характеристик колеблемости до сих пор не были изучены. Возможность реализации не более чем счетных спектров характеристических частот нулей и сильных показателей колеблемости нулей гарантирует

Теорема. *Для любых* $n \geq 3$ *и не более чем счетного множества* S *положительных чисел существует такое уравнение* $a \in \tilde{\mathscr{E}}^n$, *что справедливы равенства*

$$\check{\omega}^0(\mathscr{S}_*(a)) = \hat{\omega}^0(\mathscr{S}_*(a)) = \check{\nu}^0_\bullet(\mathscr{S}_*(a)) = \hat{\nu}^0_\bullet(\mathscr{S}_*(a)) = S \sqcup \{0\},$$

$$\check{\omega}^0(y) = \hat{\omega}^0(y) = \check{\nu}^0_\bullet(y) = \hat{\nu}^0_\bullet(y), \quad y \in \mathscr{S}_*(a).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-03-2024-074/5).

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2006. – Вып. 25. – С. 249–294.

2. Сергеев И. Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы* // Известия РАН. Сер. матем. – 2012. – Т. 76. – № 1. – С. 149–172.

3. Быков В. В. *О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений*// Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52. –№ 4. – С. 419–425.

4. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. *К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II*// Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52. –№ 12. – С. 1595–1609.

5. Сташ А. Х. *Об управлении спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка*// Дифференц. уравнения. – 2023. – Т. 59. – № 5. – С. 588–595.

6. Сташ А. Х. *О некоторых свойствах сильных показателей колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений* // Владикав. матем. журнал. – 2024. – Т. 26. Вып. 2. – С. 122–132.

ON THE REALIZATION OF COUNTABLE SPECTRA OF ZERO OSCILLATION CHARACTERISTICS OF LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.E. Artisevich, A.Kh. Stash

For an at most countable set of non-negative numbers containing zero, the existence of a linear homogeneous differential equation with a predetermined order $n > 2$, *for which the spectra of the characteristics of the oscillation of zeros coincide with this set, has been established.*

Keywords: differential equation, oscillation, number of zeros, Lyapunov exponent, characteristic frequencies, oscillation exponents.

УДК 517.968

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛАМИ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ И ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С.Н. Асхабов[1]

1 *askhabov@yandex.ru*; Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова, Чеченский государственный педагогический университет

Найдены условия при которых операторы дробного интегрирования с переменными коэффициентами действуют непрерывно из вещественных пространства Лебега $L_p(a,b)$ в сопряженные с ними пространства и являются строго положительными. Используя эти условия, при достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейности методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решения для трех различных классов неоднородных нелинейных интегральных уравнений.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, операторы дробного интегрирования, метод монотонных операторов.

В данной работе в вещественных пространствах Лебега $L_p(a,b)$, $1 < p < \infty$, рассматриваются нелинейные уравнения, содержащие операторы левостороннего G^{α}_{a+} и правостороннего G^{α}_{b-} дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегрирования порядка $\alpha > 0$ с переменным коэффициентом $g(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$\big(G^{\alpha}_{a+}u\big)(x) = \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{g(t)\,u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \big(G^{\alpha}_{b-}u\big)(x) = \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b \frac{g(t)\,u(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad x \in (a,b),$$

где $\Gamma(\alpha)$ есть гамма-функцию Эйлера. Найдены условия на функцию (коэффициент) $g(x)$, параметры α и p, при которых операторы G^{α}_{a+} и G^{α}_{b-} действуют непрерывно из пространства $L_p(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$, $p' = p/(p-1)$, и являются строго положительными.

При этих условиях методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решения для трех различных классов неоднородных нелинейных интегральных уравнений, в которые операторы G^{α}_{a+} и G^{α}_{b-} входят линейно или нелинейно, либо эти операторы содержат нелинейность под знаком интеграла (случай уравнения типа Гаммерштейна). В последнем случае существование и единственность решения удается доказать без условия коэрцитивности на нелинейность. Из полученных оценок, в частности, непосредственно вытекает, что при условиях доказанных теорем соответствующие однородные нелинейные интегральные уравнения имеют лишь тривиальное (нулевое) решение. Сформулируем некоторые результаты.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $2/(1+\alpha) \le p < \infty$, *функция* $g(x) \ne 0$ *почти всюду на* $[a,b]$ *и такова, что*

$$\begin{cases} g \in L_\infty(a,b) & \text{при } p = 2/(1+\alpha), \\ g \in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}(a,b) & \text{при } 2/(1+\alpha) < p \le 2, \\ g \in L_{2p/(p-2)}(a,b) & \text{при } 2 < p < \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда операторы G^α_{a+} *и* G^α_{b-} *действуют непрерывно из* $L_p(a,b)$ *в сопряженное с ним пространство* $L_{p'}(a,b)$ *и строго положительны. При этом для любого* $u \in L_p(a,b)$ *выполняются неравенства*

$$\|G^\alpha_{a+}u\|_{p'} \le C_1 \cdot \|u\|_p, \quad \|G^\alpha_{b-}u\|_{p'} \le C_1 \cdot \|u\|_p,$$

где

$$C_1 = \begin{cases} n(\alpha)\cdot\|g\|^2_\infty & \text{при } p = 2/(1+\alpha), \\ n(\alpha)\cdot\|g\|^2_{2p/[p(1+\alpha)-2]} & \text{при } 2/(1+\alpha) < p \le 2, \\ \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot\|g\|^2_{2p/(p-2)} & \text{при } 2 < p < \infty, \end{cases} \tag{2}$$

и число $n(\alpha) = \|I^\alpha_{a+}\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} = \|I^\alpha_{b-}\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)}$ *есть норма операторов*

$$\left(I^\alpha_{a+}u\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \left(I^\alpha_{b-}u\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b \frac{u(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad x \in (a,b),$$

действующих ограниченно из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ *в сопряженное с ним пространство* $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$.

Следует отметить, что в случае пространства $L_2(a,b)$ вопрос о положительности различных классов операторов дробного интегродифференцирования детально изучен в монографии А.М. Нахушева [1], в которой, в частности, обобщаются некоторые результаты Ф. Трикоми, С. Геллерстедта и других авторов.

Пусть функция $F(x,t)$ определена при $x \in [a,b]$, $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x почти при каждом фиксированном t и почти при всех x непрерывна по t. Обозначим через $L^+_p(a,b)$ – множество всех неотрицательных функций из $L_p(a,b)$. Следуя работе [2] доказывается

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $2/(1+\alpha) \le p < \infty$, *функция* $g(x) \ne 0$ *почти всюду на* $[a,b]$ *и удовлетворяет условию (1). Если нелинейность* $F(x,t)$ *удовлетворяет условиям:*

1) $|F(x,t)| \le m(x) + d_3\cdot|t|^{1/(p-1)}$, *где* $m \in L^+_p(a,b)$, $d_3 > 0$;

2) $F(x,t)$ *строго возрастает по* t *почти при каждом фиксированном* x;

3) $F(x,t)\cdot t \ge d_4\cdot|t|^{p/(p-1)} - D(x)$, *где* $D \in L^+_1(a,b)$, $d_4 > 0$;

то уравнение

$$u(x) + F\left(x,\ \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{g(t)\,u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right) = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$ *при любом* $f(x) \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если в условиях 1) и 3)* $m(x) = 0$ *и* $D(x) = 0$, *то:*

$$\|u^* - f\|_p \le \left[d_3^p\cdot d_4^{-1}\cdot C_1\cdot\|f\|_p\right]^{1/(p-1)},$$

где число $C_1 > 0$ *определено в (2).*

Следуя работе [3], комбинированием метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений, можно доказать, что решения рассматриваемых уравнений можно найти в пространстве $L_2(a, b)$ методом последовательных приближений пикаровского типа и получить оценки скорости их сходимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект FEGS-2023-0003).

Литература

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

2. Асхабов С. Н. *Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега* // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97. – № 5. – С. 643–654.

3. Асхабов С. Н. *Приближенное решение нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала* // Уфимский матем. журн. – 2011. – Т. 3. – № 4. – С. 8–13.

NONLINEAR EQUATIONS WITH RIEMANN-LIOUVILLE INTEGRALS AND VARIABLE COEFFICIENTS IN LEBESGUE SPACES

S.N. Askhabov

We have found conditions under which fractional integration operators with variable coefficients act continuously from the real Lebesgue spaces $L_p(a, b)$ to their dual spaces and are strictly positive. Using these conditions, under sufficiently easily observable restrictions on the nonlinearity, global theorems on existence, uniqueness and estimates of the solution for three different classes of inhomogeneous nonlinear integral equations are proved by the method of monotone (in the sense of Browder-Minty) operators.

Keywords: nonlinear integral equations, fractional integration operators, method of monotone operators.

УДК 517.98

О ЦЕПОЧКЕ ПРОСТРАНСТВ ДЕ БРАНЖА С ВОСПРОИЗВОДЯЩИМ ЯДРОМ ЭЙРИ

С.А. Бадонова[1]

1 *badonova0116@mail.ru*; Санкт-Петербургский государственный университет

Классическим примером цепочки пространств де Бранжа, для которой спектральной мерой является мера Лебега, служат пространства Пэли–Винера. Они определяются по воспроизводящему синус-ядру. Доклад посвящен другой цепочке пространств де Бранжа со спектральной мерой Лебега, для которой воспроизводящим ядром является ядро Эйри.

Ключевые слова: цепочка пространств де Бранжа, спектральная мера, функция Эйри.

Пространством де Бранжа $\mathscr{H}$ называется гильбертово пространство целых функций, удовлетворяющее аксиомам:

1. Вычисление значения функции из пространства в произвольной точке комплексной плоскости представляет собой непрерывный функционал.

2. Пространство инвариантно относительно замены нулей функции из пространства их комплексно сопряженными: $F \in \mathscr{H}$, $F(\omega) = 0 \Longrightarrow F(\cdot)\frac{\cdot - \overline{\omega}}{\cdot - \omega} \in \mathscr{H}$, $\left\| F(\cdot)\frac{\cdot - \overline{\omega}}{\cdot - \omega} \right\| = \|F\|$.

3. Отображение $F \mapsto \overline{F(\bar{\cdot})}$ является изометрической инволюцией на пространстве.

Фундаментальный результат Л. де Бранжа состоит в том, что подпространства де Бранжа данного пространства де Бранжа упорядочены по вложению, то есть образуют цепочку подпространств. Если пространство де Бранжа изометрически вложено в L^2-пространство по некоторой борелевской мере на вещественной прямой, то можно рассматривать продолжение цепочки — класс, состоящий из пространств де Бранжа, содержащих данное пространство и изометрически вложенных в L^2-пространство по той же мере. Такая мера является спектральной мерой некоторого дифференциального оператора, связанного с цепочкой пространств де Бранжа.

Классическим примером цепочки пространств де Бранжа, для которой спектральной мерой является безвесовая мера Лебега на вещественной прямой, служат пространства Пэли–Винера. Они определяются по воспроизводящему синус-ядру. В докладе будет рассказано о другой цепочке пространств де Бранжа со спектральной мерой Лебега, полученной для пространства $\mathscr{H}_0$ с воспроизводящим ядром Эйри

$$\frac{\mathrm{Ai}(z)\mathrm{Ai}'(\omega) - \mathrm{Ai}'(z)\mathrm{Ai}(\omega)}{z-\omega}, \quad \text{где Ai — функция Эйри.}$$

Такое пространство, описанное в статье [1], можно понимать как пространство де Бранжа. Оно изометрически вложено в L^2-пространство по мере Лебега и не является пространством Пэли–Винера. Следовательно, цепочка пространств де Бранжа, состоящая из пространств Пэли-Винера, и цепочка, соответствующая пространству $\mathscr{H}_0$, представляют собой разные цепочки со спектральной мерой Лебега. Цель работы состоит в описании второй цепочки.

Теорема. *Пусть* $\mathscr{H}_t = \{F : F(\cdot + t) \in \mathscr{H}_0\}, \quad t \in \mathbb{R}.$
1. Если $\tau < T$, *то* $\mathscr{H}_\tau \subset \mathscr{H}_T$.
2. $\cap_{t\in\mathbb{R}} \mathscr{H}_t = \{0\}$.
3. $\operatorname{clos}(\cup_{t\in\mathbb{R}} \mathscr{H}_t) = L^2(\mathbb{R})$.

Пространства $\mathscr{H}_t$ получены сдвигами пространства $\mathscr{H}_0$ и потому являются пространствами де Бранжа, изометрически вложенными в L^2-пространство по мере Лебега. В теореме утверждается, что пространства $\mathscr{H}_t$ упорядочены по вложению. Они образуют цепочку пространств де Бранжа, эта цепочка оказывается максимальной. Теорема доказывается с помощью теории канонических систем.

Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–15–2022–287 от 06.04.2022).

Литература

1. Levin E., Lubinsky D. S. *On The Airy Reproducing Kernel, Sampling Series, and Quadrature Formula* // Integral Equations and Operator Theory, 63 (2009), 427–438.

ON A CHAIN OF DE BRANGES SPACES WITH REPRODUCING AIRY KERNEL

S.A. Badonova

The classical example of a chain of de Branges spaces, for which the spectral measure is the Lebesgue measure, is given by the Paley–Wiener spaces. They are determined by the sine reproducing kernel. The talk is devoted to a different chain of de Branges spaces with the spectral Lebesgue measure, for which the reproducing kernel is the Airy kernel.

Keywords: chain of de Branges spaces, spectral measure, Airy function.

УДК 517.982.256, 515.124.4

О ЗАМЫКАНИИ ЭКСПОНЕНТ СО СПЕКТРОМ ИЗ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С РЕШЁТКОЙ

Б.Б. Беднов[1]

1 *bednov_b_b@staff.sechenov.ru*; Сеченовский университет

Мы исследуем, когда замыкание в пространстве $L_1[0,1]^n$ линейной оболочки комплексных экспонент со спектром из пересечения полупространства с решёткой задаёт подпространство существования, а в ряде случаев — чебышёвское подпространство. Исследование чебышёвских подпространств заданного вида начал Кахан в 1974 году.

Ключевые слова: чебышевское подпространство, теорема Кахана.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Подпространство $Y \subset X$ называется подпространством существования, если для каждого $x \in X$ найдется такой элемент $y \in Y$, что $\|x-y\| = \inf_{z\in Y}\|x-z\|$. Любой такой элемент y называется элементом наилучшего приближения в Y для x. Подпространство $Y \subset X$ называется подпространством единственности, если для каждого $x \in X$ ближайший в Y единствен или не существует. Подпространство $Y \subset X$ называется *чебышевским*, если Y есть и подпространство существования, и подпространство единственности в X, то есть для каждого $x \in X$ существует и единствен элемент наилучшего приближения в Y.

Обозначим $Y_M = \overline{\operatorname{span}\{e^{2\pi i \mathbf{l}\mathbf{t}}\}}_{\mathbf{l}\in M}$ — замыкание линейной оболочки комплексных экспонент $e^{2\pi i \mathbf{l}\mathbf{t}}$ со спектром показателей $\mathbf{l}$ из некоторого множества $M \subset \mathbb{Z}^n$ в пространстве $L_1[0,1]^n$ комплекснозначных функций n действительных переменных, суммируемых на $[0,1]^n$, $\mathbf{t} \in [0,1]^n$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$..

Напомним, что пространство Харди H_1 изометрически изоморфно подпространству $\overline{\operatorname{span}\{e^{2\pi i n t}\}}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_1[0,1]$.

В 1940 году Дуб [1] доказал, что пространство Харди H_1 является чебышевским подпространством в пространстве комплекснозначных суммируемых на $[0,1]$ функций $L_1[0,1]$.

В 1974 году Кахан [2] описал все чебышевские подпространства Y_M в $L_1[0,1]$.

Теорема A ([2]). *Пусть $M \subset \mathbb{Z}$. Подпространство Y_M чебышевское в $L_1[0,1]$ тогда и только тогда, когда M — бесконечная (хотя бы в одну сторону) арифметическая прогрессия с нечетной разностью.*

Пусть гиперплоскость П задаётся уравнением $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = C$, а множество R есть множество всех $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$, для которых $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n \geq C$.

Для целочисленных векторов $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{Z}^n$ множество

$$T = T(\omega_1, \dots, \omega_n) = \{k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}$$

называется решёткой в $\mathbb{Z}^n$. Определителем решётки называется объём параллелепипеда, натянутого на вектора $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Теорема 1. *Пересечение полупространства $R \subset \mathbb{Z}^n$ и решетки T задаёт подпространство существования в $L_1[0,1]^n$.*

Теорема 2. *Пересечение полупространства $R \subset \mathbb{Z}^n$ и решетки с нечётным определителем T задаёт чебышёвское подпространство в $L_1[0,1]^n$.*

Литература

1. Doob J.L. *A minimum problem in the theory of analytic functions* // Duke Math. J. – 1941. – Vol. 8. – № 3. – P. 413–424.

2. Kahane J.-P. *Best approximation in $L^1(T)$* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 80. – № 5. – P. 788–804.

ON THE CLOSURE OF EXPONENTS WITH THE SPECTRUM IN THE INTERSECTION OF A HALF-SPACE WITH A LATTICE

B.B. Bednov

We study the problem when the closure (in the space $L_1[0,1]^n$) of the linear span of complex exponents with spectrum from the intersection of a half-space with a lattice defines a proximinal subspace, some of which are Chebyshev subspaces. The study of Chebyshev subspaces of a given form was started by Kahane in 1974.

Keywords: Chebyshev subspace, Kahane's theorem.

УДК 517.98

О НОРМАЛЬНОСТИ ГИПОНОРМАЛЬНЫХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.М. Бикчентаев[1]

1 *airat.bikchentaev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Исследованы случаи, когда гипонормальный (или когипонормальный) τ-измеримый оператор является нормальным.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, гипонормальный оператор.

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ – решетка проекторов в $\mathcal{M}$, I – единица $\mathcal{M}$, $P^{\perp} = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M}, \tau)$ – *-алгебра τ-измеримых операторов. Обозначим через $\leq$ частичный порядок на эрмитовой части $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ алгебры $S(\mathcal{M},\tau)$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M},\tau)^+$. Если $X \in S(\mathcal{M},\tau)$ и $X = U|X|$ – полярное разложение оператора X, то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M},\tau)^+$; $\mathrm{Re}\, X = (X + X^*)/2$ и $\mathrm{Im}\, X = (X - X^*)/(2i)$ лежат в $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$. Для каждого оператора $Y \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ существует единственное разложение Жордана $Y = Y_+ - Y_-$ с $Y_+, Y_- \in S(\mathcal{M},\tau)^+$ и $Y_+Y_- = 0$. Пусть $L_1(\mathcal{M},\tau)$ – банахово пространство всех τ-интегрируемых операторов.

Оператор $A \in S(\mathcal{M},\tau)$ называется *гипонормальным*, если $A^*A \geq AA^*$; *когипонормальным*, если $A^*A \leq AA^*$; *нормальным*, если $A^*A = AA^*$. Такие операторы были исследованы автором в [1]–[4]. Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, т. е. *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, и $\tau = \mathrm{tr}$ – канонический след, то $S(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, τ-компактность есть обычная компактность (=вполне непрерывность) ограниченного линейного оператора, пространство $L_1(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с *-идеалом операторов со следом $S_1(\mathcal{H})$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Оператор $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *изометрией*, если $U^*U = I$; каждая изометрия является гипонормальным оператором.

Теорема 1. *Пусть $U \in \mathcal{M}$ является изометрией.*
(i) *Если $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ с $UPU^* \leq P$ и $\tau(P) < +\infty$, то $UP = PU$.*
(ii) *Если $I - U \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то для $Q := UU^* \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ имеем $\tau((I-U)Q^{\perp}) = 0$.*

Теорема 2. *Если $A \in S(\mathcal{M},\tau)$ гипонормален и $U \in \mathcal{M}$ является такой изометрией, что $A^* = UAU^*$, то оператор A нормален.*

Следствие 1. *Если $A \in S(\mathcal{M},\tau)$ когипонормален и $U \in \mathcal{M}$ является такой изометрией, что $A = UA^*U^*$, то оператор A нормален.*

Теорема 3. *Пусть оператор $X \in S(\mathcal{M},\tau)$ является либо гипонормальным либо имеет вид $X = \lambda I + A$ с некоторым $\lambda \in \mathbb{C}$ и τ-компактным оператором $A \in S(\mathcal{M},\tau)$. Если* $(\mathrm{Re}\, X)_+ = |X|$ (*или* $(\mathrm{Im}\, X)_+ = |X|$), *то $X = |X| \geq 0$.*

Теорема 4. *Пусть $U \in \mathcal{M}$ является изометрией, оператор $B \in S(\mathcal{M},\tau)$ τ-компактен, и пусть $A = U + B$. Если $AA^* \geq I$ и оператор A является гипонормальным, то A нормален.*

Следствие 2. *Пусть $U \in \mathcal{M}$ является коизометрией, оператор $B \in S(\mathcal{M},\tau)$ τ-компактен, и пусть $A = U + B$. Если $A^*A \geq I$ и оператор A является когипонормальным, то A нормален.*

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

Литература

1. Bikchentaev A. M. *On normal τ-measurable operators affiliated with semifinite von Neumann algebras* // Math. Notes. – 2014. – V. 96, no 3-4. – P. 332–341.

2. Bikchentaev A. M. *Essentially invertible measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra and commutators* // Siberian Math. J. – 2022. – V. 63, no 2. – P. 224–232.

3. Bikchentaev A. *Hyponormal measurable operators, affiliated to a semifinite von Neumann algebra* // Adv. Oper. Theory. – 2024. – V. 9, no 4. Paper No. 83, 17 pp.

4. Bikchentaev A. M. *On hyponormal measurable operators affiliated with semifinite von Neumann algebras* // Siberian Math. J. – 2025. – V. 65, no. 3. – P. 522–533.

ON NORMALITY OF HYPONORMAL MEASURABLE OPERATORS

A.M. Bikchentaev

Let τ be a faithful normal semifinite trace on the von Neumann algebra $\mathcal{M}$. We study cases where a hyponormal (or cohyponormal) τ-measurable operator is normal.

Keywords: Hilbert space, von Neumann algebra, normal trace, measurable operator, hyponormal operator.

УДК 517.95

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А.В. Богатов[1]

1 *andrebogato@mail.ru*; ПАО "Банк ПСБ"

В докладе рассматривается задача с нелокальным интегральным условием первого рода для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи. Доказательство базируется на априорных оценках и принципе сжатых отображений.

Ключевые слова: нелокальная задача, интегральные условия, уравнение четвертого порядка, разрешимость задачи.

Задачи с нелокальными условиями для уравнений с частными производными в настоящее время активно изучаются, что связано не только с интересом к ним как объектам теоретического исследования, но и в связи с их приложениями [1]. Большинство работ по этой тематике направлено на изучение задач для уравнений второго порядка. В докладе рассматривается задача с нелокальным интегральным условием для уравнения четвертого порядка, которое можно интерпретировать как обобщение уравнения Буссинеска-Лява. Для этого уравнения можно поставить как начально-краевые задачи, так и задачи типа задачи Гурса. Это обстоятельство, а также вид нелокального условия, позволили разработать новый подход к доказательству разрешимости поставленной нелокальной задачи и реализовать его.

В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - (au_x)_x - bu_{xxtt} + cu = f(x,t), \tag{1}$$

где $a(x,t) > 0$ всюду в $\bar{Q}_T$, $b(t) > 0$ в $[0,T]$, и поставим для него задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

краевому условию

$$u_x(0,t) = 0 \tag{3}$$

и нелокальному условию

$$\int_0^l K(x,t)u(x,t)dx = h(t). \tag{4}$$

Заметим, что задачу (1)—(4) можно трактовать как интегральный аналог задачи Гурса, так как условие $b(t) \neq 0$ позволяет интерпретировать уравнение (1) как уравнение с доминирующей смешанной производной [2]. Это наблюдение дает возможность выбрать для обоснования разрешимости задачи удобный метод [3].

Теорема. *Если* $a \in C^1(\bar{Q}_T), c \in C(\bar{Q}_T), b \in C[0,T], b(t) > 0, K \in C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$, $\varphi, \psi \in C^1[0,l], h \in C^2[0,T], f \in C^1(Q_T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\int_0^l K(x,0)\varphi(x)dx = h(0), \ \int_0^l K(x,0)\psi(x)dx + \int_0^l K_t(x,0)\varphi(x)dx = h'(0),$$

то существует единственное решение задачи.

Литература

1. Самарский А. А. *О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 11. – С. 1925–1935.

2. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной* – Казанский ун-т, 2014. – 385 с.

3. Богатов А. В., Гилев А. В., Пулькина Л. С. *Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками* // Вестник российских университетов. Математика. – 2022. – Т. 27. – № 139. – С. 214–230.

PROBLEM WITH A NONLOCAL CONDITION FOR A ONE-DIMENSIONAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

A.V. Bogatov

In this article, we study a problem with a nonlocal integral condition of the first kind for a fourth-order equation with multiple characteristics. The solvability of the problem is proved. The proof is based on a priori estimates and contraction mapping principle.

Keywords: nonlocal problem, integral conditions, fourth-order equation, solvability of the problem.

УДК 517.925.51

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А.В. Буробин[1]

1 *burobin_av@mail.ru*;

Проводится исследование устойчивости решений систем уравнений дробного порядка с производной Римана-Лиувилля. Устанавливаются условия устойчивости для линейных систем с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: уравнения дробного порядка, производная Римана-Лиувилля, задача Коши, устойчивость решений по Ляпунову, линейные системы с постоянными коэффициентами.

В работе [1] для уравнения дробного порядка с производной Римана-Лиувилля [2] была поставлена задача Коши в рамках задачи типа Коши с однородным условием. Такая постановка в работе [3] была распространена на системы уравнений. В частности, для однородной линейной системы

$$D_{0+}^{\gamma_i} f_i = a_{i1}(x) f_1 + \cdots + a_{in}(x) f_n \pmod{C_I^{(-\gamma_i)}([0,l])} \tag{1}$$

при $\gamma_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$, может быть рассмотрена задача Коши с начальными условиями

$$f_i(0) = f_{i0}, i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Здесь $C_I^{(-\gamma_i)}([0,l])$ — обеспечивающие выполнение начальных условий одномерные подпространства пространств $C^{(-\gamma_i)}([0,l])$.

При непрерывных на $[0,l]$ коэффициентах системы задача Коши (1), (2) имеет единственное решение с компонентами $f_i \in C^{(0)}([0,l])$, $i = \overline{1,n}$. При $f_{i0} = 0$, $i = \overline{1,n}$, очевидно, задача имеет решение

$$f_i(x) \equiv 0, i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Положив $\gamma_i = \gamma \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$, будем рассматривать γ-нормальную систему (1) с постоянными коэффициентами. Считаем, что это свойство сохраняется при произвольном выборе положительного l, и будем исследовать решение (3) на устойчивость по Ляпунову [4] при $x \to \infty$. Выбираем при этом $\gamma^{-1} = p+1$ с натуральным p.

Ранее для системы (1) было показано, что в случае действительных собственных значений матрицы системы условия устойчивости решения (3) совпадают с такими условиями для 1-нормальной системы с производными первого порядка. При наличии комплексных собственных значений условия меняются. Рассмотрим общий случай.

Будем обозначать U_γ множество комплексных чисел z с положительной действительной частью и $|\arg z| < \gamma\pi/2$, а S_γ — дополнение его замыкания $[U_\gamma]$.

Теорема 1. *Пусть все собственные значения матрицы системы (1) принадлежат множеству S_γ. Тогда решение (3) этой системы асимптотически устойчиво.*

Характерно, что асимптотическая устойчивость решения возможна даже при наличии собственных значений матрицы системы с положительной действительной частью, что свидетельствует о расширении области устойчивости в сравнении с 1-нормальной системой. Область неустойчивости при этом сужается.

Теорема 2. *Пусть хотя бы одно собственное значение матрицы системы (1) принадлежит множеству U_γ. Тогда решение (3) этой системы неустойчиво.*

В том случае, когда собственные значения матрицы системы (1) попадают на границу областей S_γ и U_γ, требуется дополнительное исследование.

Теорема 3. *Пусть все собственные значения матрицы системы (1) принадлежат множеству $[S_\gamma]$. Если кратность каждого собственного значения, не принадлежащего множеству S_γ, совпадает с его геометрической кратностью, то решение (3) системы устойчиво. Если же хотя бы для одного такого собственного значения кратность превышает его геометрическую кратность, то решение (3) системы не является устойчивым.*

Таким образом, γ-нормальная система, как и 1-нормальная, в случае постоянных коэффициентов поддается полному анализу. Однако, несмотря на общее сходство, в свойствах решений такие системы существенно различаются. Эти различия проявляются и в том, что при переходе в фазовое пространство можно обнаружить фазовые портреты вне привычной классификации даже при $n = 2$, так что требуется расширенная классификация положений равновесия.

Литература

1. Буробин А. В. *Задача Коши для уравнений дробного порядка//* Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2023. – Т. 66. – С. 58–59.

2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

3. Буробин А. В. *Задача Коши для систем уравнений дробного порядка //* Материалы XXX Международной конференции «Математика. Экономика. Образование». – Ростов н/Д, 2023. – С. 12–13.

4. Ляпунов А. М. *Избранные труды: работы по теории устойчивости.* – М.: Наука, 2007. – 574 с.

ON THE STABILITY OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF FRACTIONAL EQUATIONS

A.V. Burobin

The stability of solutions of systems of fractional equations with Riemann-Liouville derivative is studied. Stability conditions are established for linear systems with constant coefficients.

Keywords: fractional equations, Riemann-Liouville derivative, Cauchy problem, Lyapunov stability, linear systems with constant coefficients.

УДК 517.954

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В.Б. Васильев[1], Х.Ф. Гебресласи[2]

1 *vbv57@inbox.ru*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет
2 *rhadishfe@gmail.com*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Изучается разрешимость псевдодифференциального уравнения в плоском угле в пространстве Соболева–Слободецкого. С помощью специальной факторизации эллиптического символа и одного оператора преобразования выписано общее решение уравнения. Дополнительное интегральное условие позволяет доказать единственность решения.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, общее решение, оператор преобразования, асимптотическое поведение решения.

При исследовании разрешимости уравнения

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus C_+^{ab}, \tag{1}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, с использованием специальной факторизации эллиптического символа [1, 2]

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

в пространстве $H^s(C)$, где $C \subset \mathbb{R}^m$ – выпуклый острый конус, возникает специальный оператор преобразования, с помощью которого описывается конструкция решения [3]. Здесь мы рассмотрим плоский случай, когда конус не обладает симметрией относительно оси координат, точнее, имеет вид

$$C_+^{ab} = \begin{cases} x_2 > -ax_1, & x_1 < 0, \\ x_2 > bx_1, & x_1 > 0, \end{cases}$$

$C_+^{ab} \subset \mathbb{R}^2$, $a, b > 0$.

С использованием одномерного сингулярного интегрального оператора

$$(Su)(\xi) = v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\eta_1,\xi_2)}{\xi_1-\eta_1}d\eta_1$$

определяются два проектора

$$P = \frac{1}{2}(I+S), \quad Q = \frac{1}{2}(I-S),$$

I – тождественный оператор.

В некоторых случаях при наличии волновой факторизации символа $A(\xi)$ можно выписать общее решение уравнения (1)

Теорема. *Пусть символ* $A(\xi)$ *допускает волновую факторизацию относительно* C_+^{ab} *с индексом* $\jmath$ *таким, что* $\jmath - s = 1 + \varepsilon, |\varepsilon| < 1/2$, $v(x) \equiv 0$. *Тогда общее решение уравнения* (1) *имеет вид*

$$\tilde{u}(\xi) = A_{=}^{-1}(\xi)\left((P\tilde{c})(\xi_1 - b\xi_2) + (Q\tilde{c})(\xi_1 + a\xi_2)\right),$$

где c – произвольная функция из пространства $H^{s-\jmath+1/2}(\mathbb{R})$.

Если правая часть уравнения ненулевая, то в формуле общего решения появляется слагаемое, связанное с действием оператора

$$(G_2\tilde{v})(\xi_1,\xi_2) =$$

$$= \frac{a+b}{4\pi^2}\lim_{\tau\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\tilde{u}(x_1,x_2)dx_1dx_2}{(\xi_1 - x_1 + b(\xi_2 - x_2 + i\tau))(\xi_1 - x_1 - a(\xi_2 - x_2 + i\tau))}$$

на правую часть уравнения (1).

Произвольная функция c легко может быть определена с помощью задания интегрального условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1,x_2)dx_2 = f(x_1), \tag{2}$$

где f – заданная функция из пространства $H^{s+1/2}(\mathbb{R})$.

Исследуется также поведение решения краевой задачи (1),(2), когда параметры a, b стремятся у своим предельным значениям 0 и ∞.

Литература

1. Vasil'ev V .B. *Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications. Introduction to the theory of boundary value problems in non-smooth domains.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 190 p.

2. Васильев В. Б. *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи.* – М.: УРСС, 2010. – 135 с.

3. Gebreslasie H. F., Vasilyev V. B. *On elliptic pseudo-differential equations with an integral condition in a special multidimensional cone* // Lobachevskii J. Math. – 2024. – V. 45. – № 11. – P. 5487–5496.

ON A CERTAIN OPERATOR IN THE THEORY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS

V.B. Vasilyev, H.F. Gebreslasie

A solvability of a pseudo-differential equation in a plane sector is studied in Sobolev–Slobodetskii space. Using a special factorization for an elliptic symbol and a certain transmutation operator a general solution to the equation is written. Additional integral condition admits to prove the uniqueness of the solution.

Keywords: pseudo-differential equation, general solution, transmutation operator, asymptotic behavior of a solution.

УДК 517.927.2

О СПЕКТРЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ—ПУССЕНА

М.Ю. Ватолкин[1]

1 *vmyu6886@gmail.com*; Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова

Изучается обобщенная задача Валле—Пуссена на собственные значения для уравнения второго порядка.

Ключевые слова: обобщенная задача Валле—Пуссена, собственные значения, собственные функции, неосцилляция.

Будем изучать краевую задачу для уравнения (1) с условиями вида (7) и (8) (см. ниже), т. е. обобщённую задачу Валле—Пуссена (ОЗВП). В терминах квазидифференциальных уравнений изучались многоточечные линейные краевые задачи и их сопряженные в работах [1] и [2] (там же см. определения используемых здесь квазипроизводных, если P — единичная матрица третьего порядка, то квазидифференциальное уравнение (1) становится обыкновенным дифференциальным уравнением). Вначале рассмотрим задачу

$$\prod_{i=1}^{\nu}\sigma(t-a_i)^{\mu_i}\sigma(t-a_i)^{\rho_i}\,{}_P^2x(t) = -\lambda p_{22}(t)\,{}_P^0x(t)\ \ (t\in J\doteq[a,b];\ a,b\in\mathbb{R}), \tag{1}$$

$${}_P^0x(a_0) = {}_P^0x(a_2) = \ldots = {}_P^0x(a_{2\xi}) = {}_P^0x(a_{2\xi+1}) = \ldots = {}_P^0x(a_{\nu-1}) = {}_P^0x(a_{\nu+1}) = 0 \tag{2}$$

$$(a = a_0 < a_1 < \cdots < a_\nu < a_{\nu+1} = b,\ \nu \geqslant 0,\ \nu - \text{четное},\ 0 \leqslant \xi \leqslant \nu/2),$$

$$\rho_i \leqslant 1,\ i = 1, 3, \ldots, 2\xi-1, 2\xi+2, \ldots, \nu, \quad \rho_i = 0,\ i = 2, 4, \ldots, 2\xi, 2\xi+1, \ldots, \nu-1, \tag{3}$$

где ${}_P^kx(\cdot)$ $(k = 0, 1, 2)$ означает квазипроизводную порядка k, построенную по нижней треугольной матрице $P = (p_{ik})_{i,k=0}^2$, ρ_i — дефект решения в точке a_i, $\rho_i = \delta$ $(0 \leqslant$

$\delta \leqslant 2$), если ${}^{2-\delta}_{\;P}x(\cdot)$ имеет разрыв в точке a_i, а все квазипроизводные меньшего порядка непрерывны в этой точке, функция $\sigma(\cdot)$ совпадает с $\mathrm{sign}(\cdot)$ в открытых интервалах $(a_k,\, a_{k+1})$ и односторонне непрерывна в точках a_k. Функция $x(\cdot)$ имеет в точке $a_i \in J$ P-нуль кратности μ_i $(1 \leqslant \mu_i \leqslant 2)$, если ${}^{\mu_i}_{P}x(a_i) \neq 0$, а все квазипроизводные меньшего порядка обращаются в нуль в этой точке. Пусть $\varphi_P(x,\, a_i)$ есть кратность P-нуля функции $x(\cdot)$ в точке a_i. Уравнение

$$ {}^{2}_{P}x(t) = 0, \quad t \in J, \tag{4}$$

называется неосцилляционным на J, если общее число P-нулей любого нетривиального решения (4) на J с учетом их кратностей не превосходит единицы (см. [1]). Рассмотрим задачи

$$ {}^{2}_{P}x(t) = -\lambda p_{22}(t)\, {}^{0}_{P}x(t)\ \ (t \in [a,\, a_1]),\ \ {}^{0}_{P}x(a) = {}^{0}_{P}x(a_1) = 0, \tag{5}$$

$$ {}^{2}_{P}x(t) = -\lambda p_{22}(t)\, {}^{0}_{P}x(t)\ \ (t \in [a_\nu,\, b]),\ \ {}^{0}_{P}x(a_\nu) = {}^{0}_{P}x(b) = 0. \tag{6}$$

В случае $\xi = 0$ задача (5) совпадает с задачей (1)–(3) при значениях $t \in [a_{2\xi}, a_{2\xi+1}] = [a, a_1]$. В случае $\xi = \nu/2$ задача (6) совпадает с (1)–(3) при значениях $t \in [a_{2\xi}, a_{2\xi+1}] = [a_\nu, b]$.

Теорема 1. *Пусть уравнение (4) неосцилляционно на J, известны собственные значения λ двухточечной классической задачи Валле Пуссена (КЗВП) для уравнения (1), рассматриваемой на отрезке $[a_{2\xi}, a_{2\xi+1}]$ (или, что то же самое, в силу того, что рассматривается уравнение второго порядка, а не более высокого, задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями первого рода на концах этого отрезка), и отвечающие им собственные функции $u_{2\xi,2\xi+1}(t,\lambda)$. Тогда λ являются собственными значениями задачи (1)–(3). Пусть известны нетривиальные решения $u_{k,k+1}(t,\lambda)$ уравнения (1) на отрезках $[a_k, a_{k+1}]$, обращающиеся в нуль на том конце отрезка, который участвует в условиях (2), тогда*

$$ {}^{0}_{P}u(t,\lambda) = \begin{cases} {}^{0}_{P}u_{01}(t,\lambda) & (a_0 \leqslant t \leqslant a_1), \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{m-1} \frac{{}^{1-\rho_i}_{\;\;P}u_{i-1,i}(a_i,\lambda)}{{}^{1-\rho_i}_{\;\;P}u_{i,i+1}(a_i,\lambda)}\, {}^{0}_{P}u_{m-1,m}(t,\lambda) & (a_{m-1} \leqslant t \leqslant a_m, m = 2, 3, \dots, \nu+1) \end{cases}$$

есть с точностью до постоянного множителя нулевая квазипроизводная собственной функции $u(t,\lambda)$ задачи (1)–(3), отвечающей собственному значению λ. Пусть известны собственные значения $\hat{\lambda}$ задачи (5) и отвечающие им собственные функции $u_l(t,\hat{\lambda})$. Тогда $\hat{\lambda}$ является собственным значением задачи (1)–(3), и при этом ${}^{0}_{P}u(t,\hat{\lambda}) = {}^{0}_{P}u_l(t,\hat{\lambda})$ $(a \leqslant\leqslant t \leqslant a_1)$, ${}^{0}_{P}u(t,\hat{\lambda}) = 0$ $(a_1 \leqslant t \leqslant b)$. Пусть известны собственные значения $\tilde{\lambda}$ задачи (6) и отвечающие им собственные функции $u_r(t,\tilde{\lambda})$. Тогда $\tilde{\lambda}$ является собственным значением задачи (1)–(3), и при этом ${}^{0}_{P}u(t,\tilde{\lambda}) = 0$ $(a \leqslant t \leqslant a_\nu)$, ${}^{0}_{P}u(t,\tilde{\lambda}) = {}^{0}_{P}u_r(t,\tilde{\lambda})$ $(a_\nu \leqslant t \leqslant b)$. Спектр (1)–(3) совпадает с объединением спектров КЗВП на $[a_{2\xi}, a_{2\xi+1}]$ и задач (5),(6).

Вместо краевых условий (2),(3) зададим для уравнения (1) краевые условия (7),(8) и введем левые (l_k) и правые (r_k) индексы точек a_k $(k = 1, 2, \dots, \nu)$ (см. [1]):

$$ \varphi_P(x,\, a_i) \geqslant \mu_i,\ \ \text{где}\, \mu_i \in \{0, 1\}\ \ (i = 1, 2, \dots, \nu),\ \ \mu_0 = \mu_{\nu+1} = 1, \tag{7}$$

$$ \rho_i \leqslant 1\, (i = 1, 2, \dots, \nu), \qquad \sum_{i=0}^{\nu+1} \mu_i = 2 + \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i. \tag{8}$$

$$l_k = 2 + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i - \sum_{i=0}^{k} \mu_i, \quad r_k = 2 + \sum_{i=k+1}^{\nu} \rho_i - \sum_{i=k}^{\nu+1} \mu_i \quad (k = 1, 2, \dots, \nu) \tag{9}$$

(если верхний индекс меньше нижнего, то полагаем сумму равной нулю). Следуя [1], назовем условиями ОР (однозначной разрешимости) неравенства: $l_k \geqslant 0$, $r_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \dots, \nu)$. В случае краевых условий вида (2),(3) для уравнения (1) левые и правые индексы точек a_k $(k = 1, 2, \dots, \nu)$ неотрицательны и условия ОР всегда выполнены, а также выполняется второе из краевых условий (8). Краевые условия (2), (3) — частный случай условий (7), (8). Краевые условия (7),(8) позволяют одновременно задавать во внутренних точках отрезка J и нуль кратности единица, и дефект, равный единице. Пусть $a_{k_1} < a_{k_2} < \dots < a_{k_p}$ — все такие точки. Пусть любому собственному значению задачи (1)–(3) отвечает единственная собственная функция.

Теорема 2. *Пусть уравнение (4) неосцилляционно на J и выполнены условия ОР. Тогда:*
a) спектр ОЗВП (1),(7),(8) представляет собой объединение спектров (p+1)-ой ОЗВП вида (1)–(3), рассматриваемых на отрезках $[a_0, a_{k_1}]$, $[a_{k_1}, a_{k_2}]$, …, $[a_{k_p}, a_{\nu+1}]$;
b) если собственное значение λ задачи (1),(7),(8) входит в спектр только одной ОЗВП вида (1)–(3), то ему отвечает единственная собственная функция, если же λ одновременно входит в спектры N $(1 < N \leqslant p + 1)$ ОЗВП вида (1)–(3), то ему отвечает $2^N - 1$ линейно-независимых собственных функций; любая собственная функция ОЗВП (1), (7), (8), соответствующая λ, равна нулю на тех отрезках из J, на которых заданы ОЗВП вида (1)–(3) и в спектры которых λ не входит, а на остальных отрезках из J, в спектры которых λ входит, совпадает с соответствующими собственными функциями ОЗВП вида (1)–(3) или равна нулю, но не равна нулю на всех таких отрезках сразу.

Литература

1. Дерр В. Я. *К обобщенной задаче Валле Пуссена* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 11. – С. 1861–1872.

2. Дерр В. Я.*Об адекватном описании сопряженного оператора* // Вестник УдГУ. Матем. Мех. Комп. науки.– 2011. – № 3. – С. 43–63.

ON THE SPECTRUM OF THE GENERALIZED VALLEE POUSSIN PROBLEM

M.Yu. Vatolkin

The eigenvalues of the generalized Vallee Poussin problem for a second-order equation are studied.

Keywords: generalized Vallee Poussin problem, eigenvalues, eigenfunctions, disconjugacy.

УДК 519.11

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ НЕСАМОПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПУТЕЙ НА ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГРАФЕ $\mathbb{Z}^2$

Ю.П. Вирченко[1], Р.Е. Солонченко[2]

1 *virch@bsuedu.ru*; Белгородский государственный технологический университет им. В.Г.Шухова
2 *solonchenko@bsuedu.ru*; Белгородский государственный технологический университет им. В.Г.Шухова

Рассматриваются несамопересекающиеся пути на квадратной решетке — периодическом графе $\mathbb{Z}^2$. Решается комбинаторная задача о вычислении функции $N(n)$ — числа всех таких путей длины $n \in \mathbb{N}$ с общей начальной вершиной. Получены верхние и нижние оценки функции $N(n)$.

Ключевые слова: периодический граф, несамопересекающийся путь, асимптотическая формула, матрица перехода.

Рассмотрим бесконечный периодический граф $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ размерности 2, который допускает такое вложение в $\mathbb{R}^2$, при котором множество вершин V отображается в $\mathbb{Z}^2$, а отношение смежности φ, определяется множеством пар $\{\{x,y\} \subset \mathbb{Z}^2 : y = x \pm \mathbf{e}_j; j \in \{1,2\}\}$, $\mathbf{e}_1 = \langle 0,1 \rangle$, $\mathbf{e}_2 = \langle 1,0 \rangle$.

Путь $\gamma(x,y)$ длины n с начальной вершиной x и конечной вершиной y представляется последовательностью вершин $\gamma(x,y) = \langle x, x_1, ..., x_n = y \rangle$ графа. Путь называется несамопересекающимся, если $x_j \neq x_k$ при $j \neq k$. Будем, далее, рассматривать класс $\mathfrak{C}_n$ несамопересекающихся путей с общей начальной вершиной $\mathbf{0} = \langle 0,0 \rangle$. Обозначим число всех таких путей длины n посредством $N(n) \equiv |\mathfrak{C}_n|$. В монографии [1] поставлена задача вычисления функции $N(n)$ для произвольных периодических графов. Эта задача имеет непосредственное отношение к статистической физике длинных полимерных молекул [2]. Более сильный вариант такой задачи, в котором налагалось дополнительное ограничение на т.н. неспрямляемость пути на периодическом графе, что связано с приложением для получения оценок т.н. порога перколяции в дискретной теории перколяции, изучался в сообщении [3] (см. также [4]).

Очевидно, что функция $N(n)$ подчинена неравенствам

$$4 \cdot 2^{n-1} < N(n) < 4 \cdot 3^{n-1}.$$

Точное определение этой функции затруднительно. Однако, с точки зрения приложений, важно установить приближенное выражение для этой функции с гарантированной точностью. Ввиду указанных неравенств, очевидно, имеет место асимптотическая формула $\ln N(n) = nO(1) + \text{const}$ при $n \to \infty$, в которой $\ln 2 < O(1) < ln 3$. Таким образом, интерес представляет получение возможно более точных ограничений на функцию $O(1)$.

Для получения более точной верхней оценки оценивался более широкий класс путей таких, каждый из которых удовлетворяет условию несамопересечения на каждом его отрезке, состоящем из его последовательных 4-х шагов. В результате, число $N_+(n)$ всех таких путей длины n представлялось в виде $N_+(n) = \sum_{j=1}^{4} N_+(n,j)$, где $N_+(n,j)$ — число всех путей указанного типа, у которых последний сдвиг происходил в направлении $\mathbf{e}_j$, где $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_4 = -\mathbf{e}_2$. Вычисление в этом случае сводилось к решению разностного уравнения большого порядка. В результате, была получена верхняя оценка

Теорема 1. *Функция $N(n)$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{1}{n}\ln N(n) < \frac{1}{2}\ln(4+\sqrt{19})\,.$$

Точно таким же методом получена нижняя оценка, для вычисления которой определялось число $N_-(n)$ путей длины n, которые, заведомо, не являются самопересекающимися, и составляют более узкий класс по сравнению с классом $\mathfrak{C}_n$. Построение этого класса осуществлялось следующим образом. Выбиралось одно из 4-х направлений, которое рассматривалось преимущественным для выбора каждого очередного сдвига при построении пути. Тогда все сдвиги строящегося пути были либо в этом преимущественном направлении, либо в поперечных ек нему направлениях. При этом не допускалось два подряд поперечных сдвига. Эти условия обеспечивали несамопересекаемость пути. В результате, вычисление числа $N_-(n)$ также сводилось к решению разностного уравнения большого порядка. На этом пути получено неравенство

Теорема 2. *Функция $N(n)$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{1}{n}\ln N(n) > \ln(1+\sqrt{2})\,.$$

Литература

1. Barry D. Hughes *Random walks and random environments* – Oxford: Clarendon Press, 1995. – 632 p.

2. Жен П.-Ж. де *Идеи скейлинга в физике полимеров*. — М.: Мир, 1982. – 368 с.

3. Антонова Е. С., Вирченко Ю. П. Неспрямляемые пути на периодических графах // Дифференциальные уравнения и их приложения. — Белгород: Политерра, 2013. — С. 16—17.

4. Солонченко Р. Е. *Несамопересекающиеся и неспрямляемые пути на периодических графах//* Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXVI. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2025. – С. 301–302.

ENUMERATION OF NON-SELF-INTERSECTING PATHS
ON THE PERIODIC GRAPH $\mathbb{Z}^2$

Yu.P. Virchenko, R.E. Solonchenko

Non-self-intersecting paths on the square lattice which the periodic graph $\mathbb{Z}^2$ are under consideration. It is solved the combinatoric problem connected with calculation of the function $N(n)$ which is the number of such paths with the length $n \in \mathbb{N}$ and with the common initial vertex. Some upper and lower estimates of the function $N(n)$ are obtained.

Keywords: periodic graph, non-self-intersecting path, asymptotic formula, transfer matrix.

УДК 517.518, 517.54

КВАЗИКОНФОРМНЫЙ АНАЛИЗ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

С.К. Водопьянов [1]

1 *vodopis@mail.ru*; Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Получено описание гомеоморфизмов $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ (здесь Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, а $\mathbb{Y}$ — метрическое пространство), эквивалентное ограниченности оператора композиции $\varphi^* : \mathrm{Lip}(\mathbb{Y}) \to L^1_q(\Omega)$, $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $1 \le q \le \infty$, для любой липшицевой функции $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$, и другие свойства таких гомеоморфизмов. Новый подход позволяет эффективно доказать теорему о гомеоморфизмах $\varphi : \Omega \to \Omega'$ областей в произвольном римановом пространстве $\mathbb{M}$, индуцирующих ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_p(\Omega') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p < \infty.$$

В случае $q = p = \dim \mathbb{M}$ получаем эквивалентные описания квазиконформных отображений на римановых многообразиях.

Полученные результаты можно применить для решения вариационных задач нелинейной теории упругости на римановых многообразиях.

Ключевые слова: риманово пространство, класс отображений Соболева со значениями в метрическом пространстве, искажение отображения, обобщенное квазиконформное отображение, оператор композиции, нелинейная теория упругости.

Пусть $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, а $\Omega \subset \mathbb{M}$ — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $\dim M \ge 2$. Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ *измеримое*, если прообраз $\varphi^{-1}(T)$ всякого борелевского множества $T \subset \mathbb{Y}$ измерим по Лебегу.

Класс $L_p(\Omega; \mathbb{Y})$ ($L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{Y})$) $1 \le p \le \infty$, состоит из измеримых отображений $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$, для которых

$$\|\rho(\varphi(\cdot), z) \mid L_p(\Omega)\| < \infty$$

(таких, что $\varphi \in L_p(U; \mathbb{Y})$ для каждой компактной подобласти $U \Subset \Omega$) для любой точки $z \in \mathbb{Y}$. Пространство $\mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$ состоит из липшицевых функций $u : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ с конечной полунормой

$$\mathrm{Lip}(u) = \sup_{y_1 \ne y_2} \frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{\rho(y_1, y_2)}.$$

Ю. Г. Решетняк предложил подход к определению соболевских классов функций со значениями в метрических пространствах. Пусть $(\mathbb{Y}, \rho)$ — полное метрическое пространство, ρ — метрика на $\mathbb{Y}$, а Ω — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Определение 1. Будем говорить, что отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ принадлежит *классу Решетняка* $L^1_p(\Omega; \mathbb{Y})$ ($L^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{Y})$), $1 \le p \le \infty$, если выполнены следующие условия:

1) функция $\mathbb{M} \ni x \to [\varphi]_z(x) = \rho(\varphi(x), z)$ принадлежит $L^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$ для любой точки $z \in \mathbb{M}'$;

2) существует функция $g \in L_p(\Omega)$ ($g \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$) такая, что
$$|\nabla(u \circ \varphi)| \leq g \operatorname{Lip}(u) \tag{1}$$
п. вс. в Ω для каждой функции $u \in \operatorname{Lip}(\mathbb{Y})$.

Класс $W^1_p(\Omega;\mathbb{Y})$ состоит из отображений, принадлежащих $L_p(\Omega;\mathbb{Y}) \cap L^1_p(\Omega;\mathbb{Y})$. Отображение φ принадлежит $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{Y})$, если $\varphi \in W^1_p(U;\mathbb{Y})$ для любой компактной подобласти $U \Subset \Omega$.

Если отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ принадлежит $L^1_q(\Omega;\mathbb{Y})$, $1 \leq q \leq \infty$, то оно индуцирует ограниченный оператор композиции
$$\varphi^* : \operatorname{Lip}(\mathbb{Y}) \to L^1_q(\Omega), \quad \varphi^* u = u \circ \varphi. \tag{2}$$
Действительно, поскольку $|\nabla(u \circ \varphi)| \leq |\nabla_0\varphi| \operatorname{Lip}(u)$ п. вс. в Ω, то $\| u \circ \varphi \mid L^1_q(\Omega)\| \leq \| \nabla_0\varphi \mid L_q(\Omega)\| \cdot \operatorname{Lip}(u)$. Отсюда $\|\varphi^*\| \leq \| \nabla_0\varphi \mid L_q(\Omega)\| \in L_q(\Omega)$ (здесь $\nabla_0\varphi$ — верхний градиент (т. е. наименьшая из функций g, удовлетворяющих соотношению (1)).

Предположим, что выполнено обратное: пусть какое-либо отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ индуцирует ограниченный оператор композиции (2), $1 \leq q < \infty$. Верно ли, что φ является отображением класса $L^1_q(\Omega;\mathbb{Y})$? Ниже мы формулируем положительный ответ на этот вопрос в случае, когда φ — гомеоморфизм.

Открытому множеству $V \subset \mathbb{Y}$ сопоставим неотрицательное число
$$\Psi(V) = \sup\Big\{ \int\limits_\Omega |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q \, dx \,\Big|\, u \in \operatorname{Lip}(\mathbb{Y}),\ \operatorname{Lip}(u) \leq 1, \operatorname{dist}(\operatorname{spt} u, \mathbb{Y} \setminus V) > 0 \Big\}$$
(здесь $\operatorname{spt} u = \overline{\{y \in \mathbb{Y} \mid u(y) \neq 0\}}$ — носитель функции $u : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$). Функция открытого множества $V \mapsto \Psi(V)$ монотонна и конечно аддитивна.

Теорема 1 [1]. *Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y},\rho)$ — метрическое пространство, а гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^* : \operatorname{Lip}(\mathbb{Y}) \to L^1_q(\Omega)$, $\varphi^* u = u \circ \varphi$, $1 \leq q < \infty$. Тогда $\varphi \in L^1_q(\Omega;\mathbb{Y})$. Более того,*
$$\int\limits_U |\nabla_0\varphi|(x)^q \, dx = \Psi(\varphi(U))$$
для каждого открытого множества $U \subset \Omega$. В частности, производная $(\Psi \circ \varphi)'$ функции $U \mapsto \Psi(\varphi(U))$ равна
$$|\nabla_0\varphi|^q \quad \textit{п. вс. в } U \textit{ и} \quad \| \nabla_0\varphi \mid L_q(\Omega)\| = \|\varphi^*\|.$$

В доказательстве теоремы 1 существенно применяются результаты работы [2].

Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$. Отображение $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega;\mathbb{M}')$ называется отображением *с конечным искажением*, если $D\varphi = 0$ п. вс. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \in \Omega \mid \det D\varphi(x) = 0\}$. *Внешняя функция искажения* $K_p(\cdot,\varphi)$, $p \in [1;\infty)$, определяется по правилу
$$K_p(x,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 2 [1]. *Пусть даны римановы пространства $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ одинаковой размерности, области $\Omega\subset\mathbb{M}$, $\Omega'\subset\mathbb{M}'$, и гомеоморфизм $\varphi:\Omega\to\Omega'$. Оператор композиции*

$$\varphi^*: L^1_p(\Omega')\cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega')\to L^1_q(\Omega)$$

ограничен при фиксированных $1\le q\le p<\infty$ тогда и только тогда, когда

1) $\varphi\in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{M}')$;

2) *φ имеет конечное искажение*;

3) *внешняя функция искажения* (3) *принадлежит $L_\sigma(\Omega)$, где $\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$* ($\sigma=\infty$ *при* $q=p$): $K_p(\cdot,\varphi)\in L_\sigma(\Omega)$;

4) $\|\varphi^*\|=\|K_p(\cdot,\varphi)\mid L_\sigma(\Omega)\|$.

Теорема 2 устанавливает эквивалентную связь отображений с конечным искажением и интегрируемой функцией искажения с ограниченными операторами композиции однородных пространств Соболева.

Определение 2. Пусть U — открытое множество в римановом пространстве $\mathbb{M}$, и пусть $\varphi:U\to\mathbb{M}'$ — непостоянное отображение класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{M}')$. Отображение φ принадлежит классу $I(L,U)$, $L\ge1$, если $J(x,\varphi)$ сохраняет знак на U и $L^{-1}|\xi|\le|D\varphi(x)\xi|\le L|\xi|$ для всех $\xi\in T_x\mathbb{M}$ и п. вс. $x\in U$.

Очевидно отображение класса $I(L,U)$, $L\ge1$, принадлежит пространству Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}$ для всех $p\ge1$.

Напомним, что отображение $\varphi:U\to\mathbb{M}'$ локально L-липшицево, если каждая точка $x\in U$ имеет окрестность V, $V\subset U$, такую, что неравенство $d(\varphi(y),\varphi(z))\le Ld(y,z)$ справедливо для всех $y,z\in V$; также φ локально L-билипшицево, если $L^{-1}d(y,z)\le d(\varphi(y),\varphi(z))\le Ld(y,z)$ для всех $y,z\in V$.

Лемма 1. *Если φ принадлежит $I(L,U)$, то φ локально L-липшицево. Если, кроме того, φ является локальным гомеоморфизмом, то φ локально L-билипшицево. Обратно, каждое локально L-билипшицевое отображение открытого множества U принадлежит $I(L,U)$.*

Из теоремы 2 выводим следующий результат:

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ — римановы пространства одинаковой размерности, $\Omega\subset\mathbb{M}$ и $\Omega'\subset\mathbb{M}'$ — связные области, а $\varphi:\Omega\to\Omega'$ — гомеоморфизм.*

1) *Если операторы композиции*

$$\varphi^*: L^1_p(\Omega')\cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega')\to L^1_p(\Omega)\quad и\quad \varphi^{-1*}: L^1_p(\Omega)\cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\to L^1_p(\Omega') \tag{3}$$

ограничены при некотором $p\in[1,\infty)\setminus\dim\mathbb{M}$, то гомеоморфизм φ L-билипшицев при L, зависящем только от норм $\|\varphi^*\|$ и $\|\varphi^{-1*}\|$ операторов композиции в (3).

2) *Если оператор композиции*

$$\varphi^*: L^1_n(\Omega')\cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega')\to L^1_n(\Omega),\qquad n=\dim\mathbb{M},$$

ограничен, то гомеоморфизм φ квазиконформен: $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *и*

$$|D\varphi(x)|^n \le K|\det D\varphi(x)| \quad \text{для п. вс.} \quad x\in\Omega \quad \text{при} \quad K = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega\setminus Z}\frac{|D\varphi(x)|^n}{|\det D\varphi(x)|} = \|\varphi^*\|^n,$$

где $\|\varphi^*\|$ *— норма оператора композиции в* (3) *при* $p = n$.

В связи с теоремой 3 возникает вопрос о дополнительных свойствах квазиконформных гомеоморфизмов на римановых многообразиях. Некоторые из них мы обсудим во время доклада. Здесь мы отметим лишь следующее свойство: *гомеоморфизм* $\varphi^{-1}:\Omega'\to\Omega$, *обратный к квазиконформному* $\varphi:\Omega\to\Omega'$, *также квазиконформен и* $\|\varphi^{-1*}\| \le \|\varphi\|^{n-1}$.

При $n-1<q<p=n$ гомеоморфизмы, определенные выше, можно интепретировать как классы допустимых деформаций в задачах нелинейной теории упругости на римановых пространствах (см. [3] ([4]), где описан подход к задаче в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (на группе Карно $\mathbb{G}$)).

Работа выполнена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект № FWNF-2022-0006)

Литература

1. Водопьянов С. К. *Новые свойства операторов композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях* // Сиб. матем. журн. – 2025. – Т. 66. – № 4. – С. 596–612.

2. Pavlov S. V., Vodopyanov S. K. *Reshetnyak-class mappings and composition operators* // Analysis and Mathematical Physics. – 2025. – V. 15 (arXiv: 2507.10254v1. 2025).

3. Molchanova A., Vodopyanov S. *Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity* // Calculus of Variations and Partial Differ. Equ. – 2019. – V. 59, № 17. – P. 2–25.

4. Водопьянов С. К., Павлов С. В. *Задачи нелинейной теории упругости на группах Карно и квазиконформный анализ* // Сиб. матем. журн. – 2025. – Т. 66. – № 3. – С. 416–437.

QUASICONFORMAL ANALYSIS ON RIEMANNIAN MANIFOLDS AND ITS APPLICATIONS

S.K. Vodopyanov

We obtain equivalent description of homeomorphisms $\varphi:\Omega\to\mathbb{Y}$ *(here* Ω *is a domain in a Riemannian space* $\mathbb{M}$, *and* $\mathbb{Y}$ *is a separable metric space), which guarantees the boundedness of the composition operator* $\varphi^*:\mathrm{Lip}(\mathbb{Y})\to L^1_q(\Omega)$, $\varphi^*(f)=f\circ\varphi$, $1\le q\le\infty$, *for any Lipschitz function* $f\in\mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$, *and other properties of such homeomorphisms. The new approach allows us to effectively prove a theorem on homeomorphisms* $\varphi:\Omega\to\Omega'$ *of domains in an arbitrary Riemannian space* $\mathbb{M}$ *that induce a bounded composition operator*

$$\varphi^*: L^1_p(\Omega')\cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega')\to L^1_q(\Omega), \quad 1\le q\le p<\infty.$$

In the case $q=p=\dim\mathbb{M}$ *we obtain equivalent descriptions of quasiconformal mappings on Riemannian manifolds.*

We apply the obtained results to solving variational problems of nonlinear elasticity theory on Riemannian manifolds.

Keywords: Riemannian space, class of Sobolev mappings with values in a metric space, mapping distortion, generalized quasiconformal mapping, composition operator, nonlinear elasticity theory.

УДК 517.51

УЛУЧШЕННЫЕ НИЖНИЕ ОЦЕНКИ КОНСТАНТЫ БРЕЗИСА-МАРКУСА ИЗ ГИПОТЕЗЫ АВХАДИЕВА-ВИРЦА

И.И. Габдулхаликов[1], Р.Г. Насибуллин[2]

1 *ilyasmechmat@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *nasibullinramil@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье получены улучшенные нижние оценки константы Брезиса-Маркуса из гипотезы Авхадиева-Вирца. Получены одномерные неравенства с дополнительными слагаемыми для специальных весовых функций. Используя эти одномерные неравенства, мы устанавливаем неравенства в многомерных шарах.

Ключевые слова: неравенство Харди, внутренний радиус, функция расстояния, дополнительное слагаемое, точная константа.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является открытым связным множеством евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $\partial\Omega$ — его граница. Через $C_0^1(\Omega)$ обозначим семейство непрерывно дифференцируемых функций $g : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в Ω. Тогда естественным образом можно определить функцию расстояния до границы области $\delta(x) = \inf_{y\in\partial\Omega} \operatorname{dist}(x, y), \quad x \in \Omega$.

Рассмотрим константу-функционал

$$\lambda(\Omega) = \inf_{g\in C_0^1(\Omega)} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx - \frac{1}{4}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^2}{\delta(x)^2} dx}{\int\limits_\Omega |g(x)|^2 dx}$$

для выпуклых n-мерных областей. Величина $\lambda(\Omega)$ является наилучшей из возможных констант в неравенстве, стоящих перед дополнительным слагаемым в соответствующем неравенстве типа Харди.

В статье [1] Ф.Г. Авхадиев и К.-Й. Вирц выдвинули гипотезу, которая гласит, что среди всех n-мерных областей с заданным внутренним радиусом δ_0 максимум наилучших констант Брезиса-Маркуса $\lambda(\Omega)$ представляет собой $\lambda(B_n)$, где B_n — n-мерный шар радиуса δ_0.

За счет линейной инвариантности относительно линейных преобразований типа сдвига и расширения области, исследование константы $\lambda(\Omega)$ сводится к оценке (см. подробнее [1]) наилучшей константы $c(n)$ в неравенстве типа Харди с дополнительным слагаемым вида

$$\int\limits_{B_n} |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4}\int\limits_{B_n} \frac{|g(x)|^2}{(\rho - |x-x_0|)^2} dx + \frac{c(n)}{\rho^2}\int\limits_{B_n} |g(x)|^2 dx \quad \forall g \in C_0^1(B_n).$$

Здесь n-мерный шар $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ф.Г. Авхадиев и К.-Й. Вирц в той же работе [1] подтвердили свою гипотезу в двух случаях: $n = 1$ и $n = 3$ (см. также [2]). Они показали, что $c(1) = \lambda_0^2$ и $c(3) = j_0^2$. Здесь через j_ν мы обозначаем первый корень функции Бесселя.

В остальных случаях натурального параметра n гипотеза остается открытой и получены лишь двусторонние оценки (см. [1, 2, 3]. А именно,

$$2.443 \le c(2) \le j_0^2 - \frac{1}{4}, \qquad C_{AW}(n) := j_0^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \le c(n) \le j_{\frac{n}{2}-1}^2 - \frac{1}{4} \quad \text{при} \quad n \ge 4.$$

В данной статье мы улучшаем известные нижние оценки $c(n)$ и их асимптотику. Тем самым становимся ближе к подтверждению этой гипотезы. Нами получены следующие результаты

$$2.952 \le c(2), \quad C_{GN}(4) := 8 \le c(4), \quad C_{GN}(n) := \frac{(n^2-4n-6)\cdot\beta_n + 6}{4\beta_n(1-\beta_n)^2} \le c(n), \quad \text{при} \quad n \ge 5,$$

где

$$\beta_n = \frac{\sqrt{12n^2-48n+9}-9}{2(n^2-4n-6)}.$$

Более того, $C_{GN}(n) - C_{AW}(n) = O(n)$ при $n \to \infty$.

В основе доказательства основных результатов лежат следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f'^2(t)(1-t) \in L_2(0,1)$. Тогда имеет место неравенство*

$$\int_0^1 f'^2(t)(1-t)\,dt \ge \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{f^2(t)}{t^2}(1-t)\,dt + 2.952\int_0^1 f^2(t)(1-t)\,dt.$$

Теорема 2. *Пусть натуральное число $n \ge 4$ и $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f'^2(t)(1-t)^{n-1} \in L_2(0,1)$. Тогда имеет место неравенство*

$$\int_0^1 f'^2(t)(1-t)^{n-1}\,dt \ge \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{f^2(t)}{t^2}(1-t)^{n-1}\,dt + C_{GN}(n)\int_0^1 f^2(t)(1-t)^{n-1}\,dt.$$

Литература

1. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *On the best constants for the Brezis-Marcus inequalities in balls* // Math. Analysis and Applications. – 2012. – V. 396. –№ 2. – P. 473—480.

2. Barbatis G., Filippas S., Tertikas A. *Refined L^p Hardy inequalities* // Comm Cont. Math. – 2003. – V. 5 – № 6. – P. 869–881.

3. Насибуллин Р. Г. *Гипотеза Авхадиева–Вирца о наилучших константах Брезиса–Маркуса* // Матем. сб. – 2025. – Т. 216. – № 4. – С. 90–112.

IMPROVED BREZIS-MARCUS CONSTANT FROM AVKHADIEV-WIRTHS CONJECTURE

I.I. Gabdulkhalikov, R.G. Nasibullin

In this paper we improve lower bounds for the Brezis-Marcus constant from the Avkhadiev-Wirths conjecture. One-dimensional inequalities with additional terms for special weight functions are obtained. Using them, we establish inequalities in multidimensional balls.

Keywords: Hardy inequality, inner radius, distance function, additional term, sharp constant.

УДК 519.6, 517.9

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Т.П. Гаврилова[1]

1 *gavrilovatp@susu.ru*; Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)

В статье рассмотрен метод решения задачи определения внутренних нестационарных температурных полей объекта, содержащего источники тепла, при воздействии на его поверхность внешнего теплового потока. Математически процесс представлен обратной граничной задачей для параболического уравнения с условиями, характеризующими тепловые процессы вблизи поверхности объекта. В работе приведен численный метод решения задачи, основанный на применении неявной конечно-разностной схемы. Точность и устойчивость предложенного метода определения температурных функций исследованы в процессе вычислительного эксперимента, включающегося определение температуры в контрольной точке по результатам измерений на границе и сравнение ее с тестовыми значениями.

Ключевые слова: теплоперенос, нестационарный процесс, обратная задача, численный метод, конечно-разностная схема.

При эксплуатации оборудования и контроле технологических процессов термообработки актуальной остается проблема создания устойчивых методов, позволяющих определять температуру во внутренних точках объекта на основе измеренных температурных функций на поверхности и в некоторых точках наблюдения вблизи нее. Такие задачи относят к классу обратных граничных задач [1]—[3].

Математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид:

$$u_t = au_{xx} + f(t), \quad x \in (0, l), \quad t \geq 0,$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(x_0, t) = g(t), \quad u(x,0) = C,$$

где x_0 — точка, расположенная вблизи границы объекта. В данной задаче требуется найти граничное значение функции $u(l,t) = \psi(t)$.

Для решения поставленной задачи введем в области $[0, L] \times [0, T]$ сетку с равноотстоящими узлами $(x_i, y_j) : x_i = ih_x, i = 1, ..., N,\ N = L/h_x,\ y_j = jh_t, j = 1, ..., M,\ M = T/h_t$.

Конечно-разностная аппроксимация параболического уравнения строится на основе четырехточечной разностной схемы. При фиксированном j на каждом временном слое получаем следующее уравнение:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_t} - a\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h_x^2} = f_j,\ i = 1, ..., N-1.$$

Согласно подходу, предложенному в [4], сеточный аналог температурной функции $u(x,t)$ в точке (x_i, y_j) представим с помощью двух вспомогательных функций в следующем виде: $u_{i,j} = y_{i,j} + \psi_j \cdot z_{i,j},\ i = 0, ..., N$. Учитывая граничные условия, на каждом j-ом временном слое получим две системы линейных алгебраических уравнений для определения $y_{i,j}$ и $z_{i,j}$.

Поскольку значение температурной функции в точке $x_0 = r \cdot h_x$ известно, по найденным значениям $y_{i,j}$ и $z_{i,j}$ определим дискретный аналог температурной функции в контрольной точке по формуле $\psi_j = \frac{g_j - y_{r,j}}{z_{r,j}}$ для всех $j = 1, ..., M$ при условии $z_{r,j} \neq 0$, где $g_j = u_{r,j}$.

С целью проверки надежности предложенного способа определения температурных полей объекта из поверхностных измерений и для экспериментальных оценок погрешностей метода проводился вычислительный эксперимент. В ходе эксперимента выполнен сравнительный анализ решений, полученных с помощью предложенного алгоритма с тестовыми значениями, сформированными на основе имитационного моделирования. В ходе вычислительного эксперимента найдены экспериментальные оценки погрешностей полученных решений. Наблюдается уменьшение температурных отклонений при удалении точки наблюдения от поверхности объекта и уменьшении шума в исходных данных. Результаты вычислительного эксперимента свидетельствуют о достаточной точности предложенного подхода к определению температуры во внутренних точках объекта, недоступных для непосредственного теплового контроля.

Литература

1. Алифанов О.М. *Обратные задачи теплообмена.* – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.

2. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.*Численные методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1990. – 232 с.

3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н.*Численные методы решения обратных задач.* – М.: ЛКИ, 2007. – 480 с.

4. Вабищевич П.Н., Васильев В.И., Васильева М.В. *Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2015. – Т. 55. – № 6. – С. 1020–1027.

METHOD OF NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM OF NON-STATIONARY HEAT TRANSFER

T.P. Gavrilova

The article discusses a method for solving the problem of determining internal non-stationary temperature fields of an object containing heat sources when its surface is exposed to an external heat flow. Mathematically, the process is represented by an inverse boundary value problem for a parabolic equation with conditions characterizing thermal processes near the surface of the object. The paper presents a numerical method for solving the problem based on the use of an implicit finite-difference scheme. The accuracy and stability of the proposed method for determining temperature functions were investigated in the course of a computational experiment, which included determining the temperature at a control point based on the results of measurements at the boundary and comparing it with test values.

Keywords: heat transfer, measurement problem, perturbed data, heat equation, Laplace transform, numerical method.

УДК 514.763

ОЦЕНКИ СНИЗУ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

Л.И. Гафиятуллина[1], Р.Г. Салахудинов[2]

1 *gafiyat@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *rsalakhud@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В работе приводятся оценки снизу для жесткости кручения выпуклой области через геометрические характеристики области.

Ключевые слова: жесткость кручения, момент области относительно границы, изопериметрическое неравенство, выпуклая область, функция расстояния до границы области, экстремальная область.

Пусть G — односвязная область на плоскости с кусочно-гладкой границей ∂G. Будем использовать следующие обозначения:

$A(G)$ — площадь области G;

$L(G)$ — длина границы области G;

$\rho(G)$ — радиус максимального круга, содержащегося в G;

$l(\rho(G)) = \lim\limits_{\mu \to \rho(G)-} l(\mu)$, где $l(\mu)$ — периметр кривой, которая состоит из тех точек из G, для которых минимальное расстояние до границы G равно μ.

Рассмотрим следующую краевую задачу. Требуется найти функцию $u(x,G)$ при условии, что

$$\begin{cases} \triangle u = -2, & x \in G, \\ u = 0, & x \in \partial G. \end{cases}$$

Хорошо известно, что такая функция существует и определяется единственным образом (см. например, [1]). Функцию $u(x,G)$ называют функцией напряжения области G.

Рассмотрим функционал

$$P(G) := 2\int_G u(x,G)\,dA. \tag{1}$$

Здесь dA обозначен дифференциальный элемент площади. Величина (1) называется жесткостью кручения области G [1].

Теорема 1. *Пусть G — выпуклая область конечной площади на плоскости и $l(\rho(G)) \neq 0$, тогда*

$$P(G) > \frac{1}{4}L(G)\rho(G)^3 + \frac{2}{3}l(\rho(G))\rho(G)^3. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть G — выпуклая область конечной площади на плоскости и $l(\rho(G)) \neq 0$, тогда*

$$P(G) > \frac{1}{2}A(G)\rho(G)^2 + \frac{5}{12}l(\rho(G))\rho(G)^3. \tag{3}$$

Литература

1. Г. Полиа и Г. Сегё. Изопериметрические неравенства в математической физике. — М.: Физматгиз, 1962. – С. 336

2. Ф. Г. Авхадиев. Решение обобщенной задачи Сен-Венана // — Матем. сб. – 1998. – Т. 189. – № 12. – С. 3-12.

LOWER BOUNDS FOR THE TORSIONAL RIGIDITY OF A CONVEX DOMAIN

L.I. Gafiyatullina, R.G. Salakhudinov

The paper presents lower bounds for the torsional rigidity of a convex domain through the geometric characteristics.

Keywords: torsional rigidity, Euclidean moments of the domain with respect to its boundary, isoperimetric inequalities, convex domains, the function of the distance to the boundary of the domain.

УДК 517.91

О ВЛОЖЕНИИ В ПОТОК ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕГРУБОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

С.В. Гонченко[1], О.В. Гордеева[2]

1 *sergey.gonchenko@mail.ru*; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского
2 *olga.gordeeva@inbox.ru*; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача о возможности вложения в поток гладких одномерных отображений в окрестности негрубой неподвижной точки произвольного порядка вырождения.

Ключевые слова: одномерное отображение, вложение в поток, седло-узел, сложное седло.

Рассмотрим однопараметрическое семейство C^r-гладких одномерных отображений

$$\tau_\mu : \bar{y} = (1+\mu)y + y^{n+1} + P(y,\mu), \tag{1}$$

где μ – параметр, $P(y,\mu) = O(y^{n+2})$ и $r \geq n+2$. При $\mu = 0$ это отображение имеет негрубую неподвижную точку порядка вырождения n, при n нечетном это точка типа седло-узел, а при n четном – типа сложное седло. Мы изучаем задачу о возможности вложения отображения (1) в C^r-гладкий поток такой, что его отображения сдвига на время $t = 1$ совпадает с (1). Соответственно, отображение сдвига на время $t = k$, получаемое прямым интегрированием соответствующего дифференциального уравнения, даст нам формулу для k-ой итерации отображения τ_μ, которую другими известными методами получить, как правило, не удается. Тем более, что в данной работе мы рассматриваем семейство отображений, непрерывно зависящих от параметра. Основной результат работы – это следующая

Теорема. *Рассмотрим параметрическое семейство C^r-гладких ($r \geq 2$) одномерных отображений вида*

$$\bar{y} = y + g(y, \tilde{\mu}),$$

где $\tilde{\mu}$ – параметры и функция g удовлетворяет условиям $g(0, \tilde{\mu}) \equiv 0$ и $g'_y(y, \tilde{\mu}) > 0$ при $y > 0$. Пусть это отображение совпадает с отображением сдвига на единицу времени по траекториям некоторого C^r-гладкого потока

$$\dot{y} = \hat{g}(y, \tilde{\mu}).$$

Тогда функция $\hat{g}(y, \tilde{\mu})$ определяется на интервале $y \geq 0$ по функции $g(y, \tilde{\mu})$ однозначно.

В работах [1,2] показана как эта теорема используется для построения итераций отображения (1), а также последующего исследования динамики и бифуркаций многомерных отображений с гомоклиническими траекториями к негрубым периодическим движениям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда – грант № 24-11-00339

Литература

1. Gonchenko S. V.,Gordeeva O. V. *On Two-Dimensional Diffeomorphisms with Homoclinic Orbits to Nonhyperbolic Fixed Points* // Rus. J. Nonlin. Dyn. – 2024. – Vol. 20, № 1. – P. 151–165.

2. Gonchenko S. V.,Gordeeva O. V. *On the Structure of Orbits from a Neighborhood of a Transversal Homoclinic Orbit to a Nonhyperbolic Fixed Point* // Regular and Chaotic Dynamics. – 2025. – Vol. 30, № 1. – P. 9–25.

ON EMBEDDING INTO FLOW OF ONE-DIMENSIONAL MAPS WITH NONHYPERBOLIC FIXED POINTS

C.V. Gonchenko, O.V. Gordeeva

We consider the problem of the possibility of embedding into a flow for smooth one-dimensional maps in a neighborhood of a nonhyperbolic fixed point of arbitrary order of degeneracy.

Keywords: one-dimensional map, saddle-node, nonhyperbolic saddle, embedding into flow.

УДК 517.5

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ СЛАБО-ЖАДНОГО АЛГОРИТМА

Д.В. Горбачев[1], А.П. Солодов[2]

1 *dvgmail@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
2 *apsolodov@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Предложены новые необходимые и достаточные условия сходимости слабо-жадного алгоритма. Дан критерий сходимости в случае квазимонотонной ослабляющей последовательности.

Ключевые слова: слабо-жадный алгоритм, m-членное приближение, квазимонотонная последовательность.

Работа посвящена вопросу сходимости слабо-жадного алгоритма (WGA) в действительном гильбертовом пространстве H, который применяется для нахождения m-членного приближения произвольного элемента $f_0 \in H$ по элементам нормированного словаря $D \subset S(H)$, линейная оболочка которого плотна в H (см., например, [1]–[3]).

Пусть задана ненулевая ослабляющая последовательность $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$. Тогда на очередном шаге алгоритма полагаем $f_n = f_{n-1} - (f_{n-1}, g_n)g_n$, $n = 1,2,\ldots$, где $g_n \in D$ — произвольный элемент словаря, для которого $|(f_{n-1}, g_n)| \geqslant t_n \sup_{g\in D} |(f_{n-1}, g)|$. Тогда в качестве m-членного приближения для f_0 берется $G_m(f_0) = \sum_{n=1}^{m} (f_{n-1}, g_n)g_n$.

Представляет интерес выяснить сходимость WGA: $\| f_0 - G_m(f_0)\| \to 0$ при $m \to \infty$ для произвольных f_0 и D в зависимости от поведения элементов последовательности (t_n). Известны следующие результаты.

Теорема A [2]. *WGA сходится тогда и только тогда, когда* $\liminf_{n\to\infty} a_n t_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ *для произвольной последовательности неотрицательных чисел* $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$.

В [3] получены эквивалентные формулировки теоремы A. В общей ситуации эти критерии сложно применять на практике. Их версия, записанная только в терминах (t_n), в настоящее время неизвестна. Поэтому важно получить как можно более близкие достаточные и необходимые условия, которые смыкались бы на достаточно широком классе последовательностей (t_n).

Теорема B [2]. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n/n = \infty$, *то WGA сходится.*

Отсюда напрямую следует сходимость WGA для часто применяемого на практике случая $\liminf_{n\to\infty} t_n > 0$.

Теорема C [1]. *Если* $\sum_{j=0}^{\infty}\Bigl(2^{-j} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} t_n^2\Bigr)^{1/2} = \infty$, *то WGA сходится.*

В [1] дан следующий критерий для монотонных последовательностей (t_n).

Теорема D [1]. *Если* $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots$, *то условие* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n/n = \infty$ *является необходимым и достаточным условием сходимости WGA.*

Теорема D порождает следующий важный для практических приложений вопрос: что будет, если последовательность (t_n) квазимонотонная?

Последовательность (t_n) называется квазимонотонной относительно некоторой неубывающей последовательности $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, если $t_n/\lambda_n \geqslant t_{n+1}/\lambda_{n+1}$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \geqslant Cn\lambda_n$, $n = 1,2,\ldots$. Здесь через C обозначена положительная константа, которая может зависеть только от несущественных параметров.

Хорошо известно следующее необходимое условие.

Теорема E [2]. *Если WGA сходится, то* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 = \infty$.

Однако это условие не смыкается с условием из теоремы B или теоремы C даже для монотонных последовательностей. Поэтому интересно получить необходимое условие, которое смыкается с достаточным для квазимонотонных последовательностей (t_n).

Теорема 1. *Если WGA сходится, то* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2/(1 + \sum_{k=1}^{n} t_k) = \infty$. *Это условие необходимое, но не достаточное.*

Теорема 2. *Если последовательность* (t_n) *квазимонотонная, то условие* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n/n = \infty$ *является необходимым и достаточным условием сходимости WGA.*

Литература

1. Лившиц Е. Д., Темляков В. Н. *О сходимости слабого гриди-алгоритма* // Труды МИАН. – 2001. – Т. 232. – С. 236–247.

2. Temlyakov V. N. *Weak Greedy Algorithms* // Adv. Comput. Math. – 2000. – V. 12. – P. 213–227.

3. Temlyakov V. N. *A criterion for convergence of Weak Greedy Algorithms* // Adv. Comput. Math. – 2002. – V. 17. – P. 269–280.

CONDITIONS FOR THE CONVERGENCE OF A WEAK GREEDY ALGORITHM

D.V. Gorbachev, A.P. Solodov

New necessary and sufficient conditions for the convergence of a weak greedy algorithm are proposed. A convergence criterion is given in the case of a quasi-monotonic weakness sequence.

Keywords: weak greedy algorithm, m-term approximation, quasi-monotonic sequence.

УДК 517.98, 519.72, 530.145

ПОРОЖДАЮЩИЕ КВАНТОВЫЕ КАНАЛЫ И ИХ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Р.Н. Гумеров[1]

1 *renat.gumerov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Для составных квантовых систем мы рассматриваем квантовые каналы, которые однозначно определяют каналы подсистем. Такие каналы составных систем называются порождающими. Тензорные произведения квантовых каналов подсистем и выпуклые комбинации этих тензорных произведений служат примерами порождающих квантовых каналов. В докладе обсуждаются свойства порождающих квантовых каналов.

Ключевые слова: гильбертово тензорное произведение, порождающий квантовый канал, частичный след.

Доклад посвящен вполне положительным сохраняющим след линейным отображениям между пространствами операторов на гильбертовых пространствах. В квантовой теории информации такие отображения называются квантовыми каналами и являются одними из основных объектов исследования [1].

Рассмотрим две квантовые системы, которым соответствуют гильбертовы пространства $\mathscr{H}$ и $\mathscr{E}$. Тогда составной квантовой системе сопоставляется гильбертово тензорное произведение этих пространств $\mathscr{H} \otimes \mathscr{E}$. Обозначим через $\mathscr{N}(\mathscr{H})$ пространство ядерных операторов, действующих в пространстве $\mathscr{H}$, а через $\mathrm{Tr}(\mathrm{T})$ – след оператора $\mathrm{T} \in \mathscr{N}(\mathscr{H})$. Пусть

$$\mathscr{D}(\mathscr{H}) = \{\mathrm{T} \in \mathscr{N}(\mathscr{H}) : \mathrm{T} \geqslant 0, \mathrm{Tr}(\mathrm{T}) = 1\}.$$

Элементы множества $\mathscr{D}(\mathscr{H})$ называются *квантовыми состояниями*.

Напомним, что линейное отображение $\mathrm{Tr}_{\mathscr{E}} : \mathscr{N}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{N}(\mathscr{H})$, такое что

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_{\mathscr{E}}(\mathrm{T})\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{T}(\mathrm{A}\otimes\mathrm{I}))$$

для любого $T \in \mathscr{N}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{E})$ и любого линейного ограниченного оператора A, действующего в $\mathscr{H}$, называется *частичным следом относительно* $\mathscr{E}$. Здесь I – тождественный оператор на $\mathscr{E}$.

Для состояния $\mathrm{S} \in \mathscr{D}(\mathscr{E})$ *квантовый канал* $\mathrm{P_S}$ *независимого приготовления составной системы* определяется формулой

$$\mathrm{P_S} : \mathscr{N}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathscr{N}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{E}) : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{X}\otimes\mathrm{S}, \quad \mathrm{X}\in\mathscr{N}(\mathscr{H}).$$

Теперь рассмотрим квантовый канал

$$\Phi : \mathscr{N}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{N}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{E}),$$

описывающий эволюцию составной квантовой системы. Далее, для произвольного состояния $\mathrm{S}\in\mathscr{D}(\mathscr{E})$ определим *порожденный квантовый канал* $G_{\Phi,\mathrm{S}}$ для подсистемы с пространством $\mathscr{H}$:

$$G_{\Phi,S} := \mathrm{Tr}_{\mathscr{E}}\circ\Phi\circ\mathrm{P_S} : \mathscr{N}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathscr{N}(\mathscr{H}).$$

Если при этом получается один и тот же порожденный квантовый канал независимо от выбора квантового состояния, т. е. для любых $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2 \in \mathscr{D}(\mathscr{E})$ выполнено равенство

$$G_{\Phi,\mathrm{S}_1} = G_{\Phi,\mathrm{S}_2},$$

то квантовый канал Φ называется *порождающим*.

Таким образом, если эволюция составной квантовой системы, состоящей из двух подсистем $\mathscr{H}$ и $\mathscr{E}$, описывается порождающим квантовым каналом, то в каком бы начальном состоянии ни находилась подсистема $\mathscr{E}$, канал, описывающий подсистему $\mathscr{H}$, будет одним и тем же.

Порождающие и порожденные каналы были введены и исследованы в работе [2]. В статье [3] рассматривались квантовые процессы, задаваемые порождающими и порожденными квантовыми каналами.

В докладе рассматриваются свойства порождающих квантовых каналов. В частности, для случая квантовой системы с конечномерным гильбертовым пространством $\mathscr{H}$ обсуждается вопрос о представлении порождающих квантовых каналов в форме операторнозначных интегралов вида

$$\int_{\mathscr{U}(\mathscr{H})} f\,d\mu.$$

Здесь через $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ обозначена компактная группа унитарных операторов, действующих в пространстве $\mathscr{H}$, μ – мера Хаара на группе $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ и f – некоторая операторнозначная функция, определенная на $\mathscr{U}(\mathscr{H})$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного Фонда и Академии наук Республики Татарстан по проекту № 24-21-20112, https://rscf.ru/project/24-21-20112/.

Литература

1. Холево А. С. *Квантовые системы, каналы, информация.* – М.: МЦНМО, 2010. – 328 с.

2. Гумеров Р. Н., Хажин Р. Л. *Порождающие квантовые каналы*, Некоммутативный анализ и квантовая информатика, Сборник статей. К 80-летию академика Александра Семеновича Холево // Труды МИАН. – 2024. – Т. 324. – С. 83–94.

3. Гумеров Р. Н., Хажин Р. Л. *Порождающие квантовые динамические отображения* // ТМФ. – 2024. – Т. 221. – № 3. – С. 668–684.

GENERATING QUANTUM CHANNELS AND THEIR INTEGRAL REPRESENTATIONS

R.N. Gumerov

For composite quantum systems, we deal with quantum channels which uniquely determine the channels of quantum subsystems. Such channels of composite systems are said to be generating. Tensor products of quantum channels of subsystems and convex combinations of these tensor products are examples of generating channels. The talk is devoted to properties of generating quantum channels.
Keywords: Hilbert tensor product, generating quantum channel, partial trace.

УДК 517.986

УНИВЕРСАЛЬНАЯ C^*-АЛГЕБРА, ПОРОЖДЕННАЯ СВОБОДНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ПОЛУГРУПП РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Р.Н. Гумеров[1], А.С. Куклин[2], Е.В. Липачева[3]

1 *renat.gumerov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *soarappell@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
3 *elipacheva@gmail.com*; Казанский государственный энергетический университет

В докладе обсуждается левая приведенная полугрупповая C^*-алгебра, порожденная свободным произведением полугрупп рациональных чисел. Приводится ее описание в виде универсальной C^*-алгебры, порожденной множеством порождающих и соотношений.

Ключевые слова: приведенная полугрупповая C^*-алгебра, свободное произведение полугрупп, универсальная C^*-алгебра.

Рассмотрим конечный набор бесконечных последовательностей произвольных натуральных чисел

$$M_1 = (m_{11}, m_{21}, \ldots), \ldots, M_n = (m_{1n}, m_{2n}, \ldots).$$

Определим полугруппу Q как свободное произведение полугрупп рациональных чисел

$$Q^+_{M_i} = \left\{ \frac{l}{m_{1i} \ldots m_{ti}} \middle| \, l \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N} \right\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В докладе рассматриваются левые приведенные полугрупповые C^*-алгебры $C^*_\lambda(Q)$ для различных наборов последовательностей $(M_1, \ldots, M_n)$.

Такие приведенные полугрупповые C^*-алгебры $C^*_\lambda(Q)$ изучались в работе [1]. Было показано, что $C^*_\lambda(Q)$ является индуктивным пределом последовательности алгебр Теплица-Кунца. Алгебра Теплица-Кунца – это универсальная C^*-алгебра, порожденная конечным набором изометрий с взаимно ортогональными образами.

В докладе будет дано описание полугрупповой C^*-алгебры $C^*_\lambda(Q)$ как универсальной C^*-алгебры $C^*(X,R)$, порожденной множеством образующих X, удовлетворяющих соотношениям R. Мотивацией к такому описанию послужило представление ее в виде индуктивного предела последовательности алгебр Теплица-Кунца.

Доклад основан на результатах статьи [2].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного Фонда и Академии наук Республики Татарстан по проекту № 24-21-20112, https://rscf.ru/project/24-21-20112/.

Литература

1. Gumerov R. N., Lipacheva E. V. *Automorphisms of the limits for the direct sequences of the Toeplitz-Cuntz algebras* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2024. – V. 533. – № 2. – 127991.

2. Gumerov R. N., Lipacheva E. V., Kuklin A. S. *A universal property of semigroup C^*-algebras for the free products of semigroups of rationals* // Уфим. матем. журн. – 2025 (в печати).

UNIVERSAL C^*-ALGEBRA GENERATED BY THE FREE PRODUCT OF SEMIGROUPS OF RATIONAL NUMBERS

R.N. Gumerov, A.S. Kuklin, E.V. Lipacheva

The report is devoted to the study of the left reduced semigroup C^*-algebra generated by the free product of semigroups of rational numbers. It is described as a universal C^*-algebra generated by a set of generators and relations.

Keywords: reduced semigroup C^*-algebra, free product of semigroups, universal C^*-algebra.

УДК 517.98

ОПЕРАТОР БЛОЧНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ НА АЛГЕБРЕ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Т.М.Ф. Дарвиш[1]

1 *m.firas.darwish.d@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$. Исследован оператор блочного проектирования $\widetilde{\mathscr{P}}_n$ $(n \geq 2)$ в *-алгебре $S(\mathscr{M},\tau)$ всех τ-измеримых операторов. Показано, что $f(\widetilde{\mathscr{P}}_n(A)) \geq \widetilde{\mathscr{P}}_n(f(A))$ для операторно монотонной функции. Для операторно выпуклой функции имеем $f(\widetilde{\mathscr{P}}_n(A)) \leq \widetilde{\mathscr{P}}_n(f(A))$. Изучены условия, при которых $\widetilde{\mathscr{P}}_n(A)$ принадлежит классам $S_0(\mathscr{M},\tau)$ τ – компактных операторов, $F(\mathscr{M},\tau)$ элементарных операторов, $L_p(\mathscr{M},\tau)$ τ – интегрируемых с p – степени операторов или самой алгебре $\mathscr{M}$. Если $\widetilde{\mathscr{P}}_n(B)$ является (левым или правым) обратным для A, то $\widetilde{\mathscr{P}}_n(B)$ также является обратным для $\widetilde{\mathscr{P}}_n(A)$.*

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, след, измеримый онератор, оператор блочного проектирования.

Мы используем обозначения и разультаты из [1]-[8].

Пусть $\mathscr{M}$ – алгебра фон Неймана с точным нормальным следом τ, $S(\mathscr{M},\tau)$ — соответствующая $*$-алгебра τ-измеримых операторов. Для проекторов $P_1, P_2, ..., P_n \in \mathscr{M}$ оператор блочного проектирования $\widetilde{\mathscr{P}_n} : S(\mathscr{M},\tau) \to S(\mathscr{M},\tau)$ определяется как

$$\widetilde{\mathscr{P}_n}(X) = \sum_{k=1}^{n} P_k X P_k.$$

Обозначим через $F(\mathbb{R}^+)$ множество всех непрерывных функций $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ с $f(0) = 0$. Получены следующие результаты:

1. Если $f \in F(\mathbb{R}^+)$ операторно монотонна, то $f(\widetilde{\mathscr{P}_n}(A)) \geq \widetilde{\mathscr{P}_n}(f(A))$. Если f операторно выпукла, то $f(\widetilde{\mathscr{P}_n}(A)) \leq \widetilde{\mathscr{P}_n}(f(A))$.

2. Для возрастающей выпуклой f выполняется $\tau(f(\widetilde{\mathscr{P}_n}(A))) \leq \tau(f(A))$. Для вогнутой f имеем обратное неравенство.

3. Если $A^*\widetilde{\mathscr{P}_n}(A) \in L_p(\mathscr{M},\tau)$, то $\widetilde{\mathscr{P}_n}(A) \in L_{2p}(\mathscr{M},\tau)$. Аналогичные результаты верны и для $S_0(\mathscr{M},\tau)$, $\mathscr{F}(\mathscr{M},\tau)$ и $\mathscr{M}$.

Литература

1. Тихонов О. Е. *Непрерывность операторных функций в топологиях, связанных со следом на алгебре Неймана* // Изв. вузов. Матем. – 1987. – № 1. – С. 77–79.

2. Hansen F. *An operator inequality* // Math. Ann. – 1980. – Vol. 246. – P. 249–250.

3. Hansen F., Pedersen G. K. *Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem* // Math. Ann. – 1982. – Vol. 258. – P. 229—241.

4. Бикчентаев А. М. *Оператор блочного проектирования в нормированныах идеалных пространсвах из меримых операторов* // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 2. – С. 86–91.

5. Bikchentaev A. M., Sukochev F. *Inequalilies for the block projection operators* // J. Funct. Anal. – 2021. – Vol. 280. – № 7.

6. Бикчентаев А. М. *Оператор блочного проектирования в алгебре измеримых операторов* Изв. вузов. Матем. – 2023. – № 10. – С. 77–82.

7. Fack T., Kosaki H. *Generalized s-numbers of τ-measurable operators* Pac. J. Math. – 1986. – Vol. 123. – P. 269–300.

8. Ber A., Huang J., Levitina G., Sukochev F. *Derivations with values in the ideal of τ-compact operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra* // Comm. in Math. Phy. – 2022. – № 2. – P. 390.

THE BLOCK PROJECTION OPERATOR ON THE ALGEBRA OF MEASURABLE OPERATORS

T.M.F. Darwish

*Let τ be a faithful normal semifinite trace on a von Neumann algebra $\mathscr{M}$. We investigate the block projection operator $\mathscr{P}_n$ (where $n \geq 2$) in the *-algebra $S(\mathscr{M},\tau)$ of all τ-measurable operators. We prove that $f(\mathscr{P}_n(A)) \geq \mathscr{P}_n(f(A))$ for any operator monotone function, and $f(\mathscr{P}_n(A)) \leq \mathscr{P}_n(f(A))$ for any operator convex function. We also examine the conditions under which $P_n(A)$ belongs to the following classes: $S_0(\mathscr{M},\tau)$, $F(\mathscr{M},\tau)$, $L_P(\mathscr{M},\tau)$ or the algebra $\mathscr{M}$ itself. Furthermore, if $\mathscr{P}_n(B)$ is a (left or right)*

inverse of operator A, then $\mathscr{P}_n(B)$ is also an inverse of $\mathscr{P}_n(A)$.

Keywords: Hilbert space, von Neumann algebra, trace, measurable operator, block projection operator.

УДК 517.984

СУЩЕСТВОВАНИЕ ДВУСТРОННЕГО ЭФФЕКТА ЕФИМОВА ДЛЯ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Э.Б. Дилмуродов[1]

1 *e.b.dilmurodov@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

В настоящей работе рассматривается семейство 2×2 - операторных матриц $\mathscr{A}_\mu$ ($\mu > 0$ — параметр взаимодействия), связанное гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$. Найдено критическое значение μ_0 параметра взаимодействия μ, такое что операторная матрица $\mathscr{A}_{\mu_0}$ имеет бесконечное число собственных значений. Они накапливаются к нижней и верхней граням существенного спектра, соответственно.

Ключевые слова: операторная матрица, существенный спектр, дискретный спектр, эффект Ефимова.

Матрицы, элементы которых являются линейными операторами в банаховых или гильбертовых пространствах, называются операторными матрицами [1]. Один из основных классов таких матриц представляют собой гамильтонианы системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц на непрерывном пространстве или на решетке. Отметим, что такие системы обычно возникают в задачах физики твердого тела, квантовой теории поля, статистической физики, магнитогидродинамики и квантовой механики. В спектральном анализе таких операторов важным вопросом является изучение бесконечности числа собственных значений, лежащих ниже левого края и правее верхнего края существенного спектра (такой эффект относительно левого края носит название эффект Ефимова, см. например [2]). Данная работа посвящена исследованию ранее не изученного так называемого двустороннего эффекта Ефимова для операторных матриц.

Через $\mathbb{T}^3$ обозначим куб $(-\pi;\pi]^3$ — с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $L^2(\mathbb{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$, и $L^2_{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^3)^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^2$. Обозначим через $\mathscr{H}$ прямую сумму пространств $\mathscr{H}_1 := L^2(\mathbb{T}^3)$ и $\mathscr{H}_2 := L^2_{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^3)^2)$, т.е. $\mathscr{H} := \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ рассматривается следующее семейство 2×2-операторных матриц

$$\mathscr{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы определяются по формулам

$$(A_{11} f_1)(k) = w_1(k) f_1(k), \quad (A_{12} f_2)(k) = \int_{\mathbb{T}^3} f_2(k,s)\,ds,$$

$$(A_{22} f_2)(k,p) = w_2(k,p) f_2(k,p), \quad f_i \in \mathscr{H}_i, \quad i = 1,2.$$

Здесь $\mu > 0$ — параметр взаимодействия, функции $w_1(\cdot)$ и $w_2(\cdot,\cdot)$ определены по формулам

$$w_1(k) := \varepsilon(k)+\gamma,\ w_2(k,p) := \varepsilon(k)+\varepsilon(\frac{1}{2}(k+p))+\varepsilon(p),\ \varepsilon(k) := \sum_{i=1}^{3}(1-\cos k_i),\ k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{T}^3.$$

$\gamma \in \mathbb{R}$. При этом $A_{12}^* : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ — сопряженный оператор к A_{12}.

В этих предположениях операторная матрица $\mathscr{A}_\mu$ является ограниченным и самосопряженным в $\mathscr{H}$ оператором.

Обозначим через $N_{(a,b)}(\mathscr{A}_\mu)$ число собственных значений оператора $\mathscr{A}_\mu$, с учетом кратности, лежащих в $(a,b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}_\mu)$, и положим

$$\mu_0 := \sqrt{12}\left(\int_{\mathbb{T}^3}\frac{dt}{w_1(\bar{0},t)}\right)^{-1/2}.$$

Пусть $\mathbb{S}^2$ единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ и

$$S_r : L^2((0,r),\sigma_0) \to L^2((0,r),\sigma_0), \quad r>0, \quad \sigma_0 = L^2(\mathbb{S}^2)$$

интегральный оператор с ядром

$$S(t;y) = \frac{25}{8\pi^2\sqrt{6}}\frac{1}{5\,\mathrm{ch}(y)+t}, \quad y = x-x', \quad x,x' \in (0,r), \quad t=(\xi,\eta), \quad \xi,\eta\in\mathbb{S}^2.$$

Для $\lambda > 0$ определим

$$U(\lambda) := \frac{1}{2}\lim_{r\to\infty} r^{-1} n(\lambda, S_r).$$

Теорема. *Имеют место соотношения*

$$N_{(-\infty;0)}(\mathscr{A}_{\mu_0}) = \infty, \quad N_{(18;+\infty)}(\mathscr{A}_{\mu_0}) = \infty$$

$$\lim_{z\nearrow 0}\frac{N_{(-\infty,z)}(\mathscr{A}_{\mu_0})}{|\ln|z||} = \lim_{z\searrow 18}\frac{N_{(z,\infty)}(\mathscr{A}_{\mu_0})}{|\ln|z-18||} = U(1).$$

Этот результат означает, что операторная матрица $\mathscr{A}_{\mu_0}$ имеет бесконечное число собственных значений, которые накапливаются к нижней и верхней граням существенного спектра соответственно, т.е. существует двусторонный эффект Ефимова для $\mathscr{A}_{\mu_0}$.

Литература

1. Tretter C. *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications* – London: Imperial College Press, 2008.

2. Albeverio S., Lakaev S. N., Rasulov T. H. *On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete Spectrum Asymptotics.* // J. Stat. Phys. – 2007. – Vol. 127. – No. 2. – P. 191–220.

THE EXISTENCE OF A TWO-SIDED EFIMOV EFFECT FOR A SECOND-ORDER OPERATOR MATRIX

E.B. Dilmurodov

In the present work, a family of 2×2 *operator matrices* $\mathscr{A}\,\mu$ *is considered (*$\mu > 0$ *is a coupling constant),* *associated with the Hamiltonian of a system with at most three particles on the three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^3$. A critical value μ_0 of the coupling constant μ is found such that the operator matrix $\mathscr{A}\mu_0$ has an infinite number of eigenvalues. These eigenvalues accumulate at the lower and upper bounds of the essential spectrum, respectively.*

Keywords: operator matrix, essential spectrum, discrete spectrum, the Efimov effect.

УДК 517.956.35, 539.424

КВАЗИИНВАРИАНТЫ РИМАНА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

В.Л. Дильман[1], А.Е. Кащеева[2]

1 *dilmanvl@susu.ru*; Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет)
2 *kascheevaae@susu.ru*; Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет)

Исследуются свойства системы квазилинейных гиперболических уравнений уравнений пластического равновесия с переменным параметром пластичности. Записаны уравнения для нахождения квазиинвариантов Римана на характеристиках и получены приближенные (с контролируемой ошибкой) явные выражения для них в частном случае. На этой основе получено обобщение первой теоремы Генки.

Ключевые слова: система квазилинейных гиперболических уравнений, характеристики, инварианты Римана, пластический слой, неоднородное соединение, напряженное состояние, теорема Генки.

Один из подходов при исследовании математических моделей критических состояний неоднородных пластических слоев и прослоек основан на применении инвариантов Римана вдоль характеристик [1, с. 119]. В случае неоднородности материала, хотя инварианты вдоль характеристик отсутствуют, некоторые величины ("квазиинварианты") изменяются вдоль характеристик приближенно известным образом. Доклад посвящен их нахождению, когда параметр пластичности (функция неоднородности) слоя аддитивен, то есть равен сумме двух функций, каждая от одной переменной. Случай зависимости от одной переменной был рассмотрен в [2, с. 119; 3]. Под неоднородным пластическим слоем имеется в виду прямоугольник $[-1;1]\times[-\chi;\chi]$, расположенный в полосе $[-1;1]\times[-\infty;\infty]$. Полоса находится под растягивающей или сжимающей нагрузкой в направлении её продольной оси (оси Oy). Система уравнений для напряжений в полосе имеет вид:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0;\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0;\ \left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{xy}^2=4Z^2\left(x,y\right). \qquad (1)$$

Здесь σ_x, σ_y и τ_{xy} – напряжения, $Z\left(x,y\right)$ – положительная безразмерная функция, характеризующая прочность материала полосы (функция неоднородности слоя) в каждой ее точке, $Z(0,0)=1$. Система (1) является квазилинейной системой уравнений в частных производных гиперболического типа. Пусть $\nu_{1;2}=\sqrt{Z^2-\tau^2}\pm$

$Z \arcsin(\tau/Z)$. Исключив σ_x, после преобразований [2, с. 119–122; 3] получаем систему:

$$\frac{d(\sigma_x + \nu_i)}{dx} = \frac{\partial \nu_i}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial \nu_i}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \; i = 1; 2. \tag{2}$$

Система (2) называется *системой в характеристической форме*. Если $Z = const$, то правая часть (2) равна нулю, и вдоль соответствующей характеристики $\sigma_x + \nu_i = const$. В этом случае выражение $\sigma_x + \nu_i$ называется инвариантом Римана на характеристике. Обозначим: $t = \tau/Z$. Рассмотрим в частном случае $Z(x,y) = X(x) + Y(y)$. Используя разложения $\partial\nu_{1;2}/\partial Z = 1 + \varphi(t)$ и $\partial(\nu_{1;2} - f)/\partial Z = -1 - \varphi(t)$ в степенные ряды по t, получим:

$$\sigma_x + \nu_i + const = -Y(y) + X(x) + \Delta_x + \Delta_y, \tag{3}$$

$$\Delta_x = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)X'(x)dx, \;\; \Delta_y = \int_{y_0}^{y} \psi(t)Y'(y)dy.$$

Предположим, что во всех точках слоя $|\tau| \le \alpha$, и что ω_x и ω_y – вариации функций X и Y. Тогда можно показать, что $\Delta_x \le (\alpha^2\omega_x)/2(1-\alpha^2)$, и аналогично для y. Постоянная α обычно в реальных сварных соединениях в критических состояниях не больше, чем 0,2–0,3. То же можно сказать о ω_x и ω_y, поэтому Δ_x, Δ_y малы по сравнению с единицей, и этими слагаемыми можно пренебречь в (3), то есть

$$\sigma_x + \nu_i - X(x) + Y(y) \approx const. \tag{4}$$

Из равентсва (4) следует обобщение теоремы Генки.

Теорема. *Пусть K, L, M, N –вершины треугольника из характеристик, γ – угол наклона 1-характеристики, $\theta = \gamma - \pi/4$. Тогда при $Z(x,y) = X(x) + Y(y)$*

$$Z(K)\theta(K) + Z(M)\theta(M) \approx Z(L)\theta(L) + Z(N)\theta(N).$$

Литература

1. Дильман В.Л. *Математические модели наапряженного состояния неоднородных неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек.* – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.

2. Дильман В.Л., Ерошкина Т.В. *Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях.* – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2011. – 276 с.

3. Дильман В. Л., Карпета Т. В. Напряженное состояние пластического слоя с переменным по толщине пределом текучести при плоской деформации // Изв. вузов. Математика. – 2013. – № 8. – С. 34–43.

RIEMANN QUASI-INVARIANTS IN THE STUDY OF CRITICAL STATES OF HETEROGENEOUS JOINTS

V.L. Dilman, A.E. Kascheeva

The properties of a system of quasi-linear hyperbolic equations of plastic equilibrium with a variable plasticity parameter are investigated. Equations for finding Riemann quasi-invariants on characteristics are written down and approximate (with controlled error) explicit expressions for them in the *special case are obtained. On this basis, an approximate generalization of Genka's first theorem is obtained.*

Keywords: system of quasi-linear hyperbolic equations, characteristics, Riemann invariants, plastic layer, inhomogeneous joint, stress state, Genki's theorem.

УДК 517.54

ОГРАНИЧЕННЫЕ ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ

В.Н. Дубинин[1]

1 *dubinin@iam.dvo.ru*; Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток

С привлечением емкостей конденсаторов и симметризации устанавливаются новые граничные теоремы искажения для голоморфных и ограниченных в круговом кольце функций, сохраняющих одну из его граничных компонент.

Ключевые слова: голоморфные функции, угловая производная, теоремы искажения, производная Шварца, емкости конденсаторов, симметризация.

Хорошо известна эффективность методов теории потенциала в получении свойств голоморфных функций. Значительное место при этом занимают подходы, связанные с симметризацией вещественнозначных функций и конденсаторов [1]. В развитие этих идей в докладе приводятся доказательства современных версий классических теорем покрытия и искажения для функций, голоморфных в круговом кольце. Выбор данного класса обусловлен его малой изученностью по сравнению с классами голоморфных функций, заданных в круге либо в полуплоскости. Это обстоятельство объясняется, по-видимому, естественной сложностью структурных формул для функций в многосвязных областях. В недавней заметке [2] рассматривалось применение емкостного подхода и симметризации к получению теорем искажения в классе однолистных в кольце функций. К сожалению, значительная часть используемых в [2] идей в случае многолистных функций приводит к неточным результатам. Для получения содержательных оценок естественно потребовать дополнительные ограничения на образ кольца, например, геометрические ограничения [3].

Мы устанавливаем новые граничные теоремы искажения для голоморфных и ограниченных в круговом кольце функций, сохраняющих одну из его граничных компонент. В частности, доказываем неравенства, включающие производную Шварца в граничных точках кольца. В качестве следствий рассматриваются дифференциальные неравенства для однолистных и слабо однолистных в круге функций. Приводятся нерешенные задачи.

Литература

1. Dubinin V. N. *Condenser Capacities and Symmetrization in Geometric Function Theory.* – Springer, Basel, 2014.

2. Дубинин В. Н. *Граничное искажение и производная Шварца однолистной функции в круговом кольце*// Матем. заметки – 2023. – Т. 113. – № 6. – С. 827–835.

3. Дубинин В. Н. *Голоморфные ограниченные функции в круговом кольце*// Алгебра и анализ – 2024. – Т. 36. – № 6. – С. 30–46.

BOUNDED HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN A CIRCULAR ANNULUS

V.N. Dubinin

Using the condenser capacities and symmetrization, new boundary distortion theorems are established for holomorphic and bounded functions in a circular annulus that preserve one of its boundary components.

Keywords: holomorphic function, angular derivative, distortion theorems, Schwarzian derivative, condenser capacity, symmetrization.

УДК 517.984

О ЧИСЛЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЕМЕЙСТВА МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА С ДВУМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Г.С.Жабборова[1]

1 *g.s.jabborova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

В данной работе рассматривается семейство моделей Фридрихса $H_\mu(k)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, $k \in \mathbb{T}^3$ с двумерным возмущением (здесь $\mathbb{T}^3$ — трехмерный тор). Изучены число и местоположение собственных значений модели Фридрихса $H_\mu(k)$.

Ключевые слова: модель Фридрихса, оператор возмущения, собственное значение.

Вопросы, связанные с моделями Фридриха и их собственными значениями, возникают в квантовой механике, статистической физике и квантовой теории поля. Пусть $\mathbb{T}^3$ — трехмерный тор и $L_2(\mathbb{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$. Рассмотрим семейство моделей Фридрихса $H_\mu(k)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, $k \in \mathbb{T}^3$, действующее в $L_2(\mathbb{T}^3)$ как

$$H_\mu(k) := H_0(k) - \mu_1 V_1 - \mu_2 V_2,$$

где операторы $H_0(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ и V_α, $\alpha = 1,2$, определяются по правилам:

$$(H_0(k)f)(p) = (\varepsilon(p) + \varepsilon(k-p))f(p), \quad \varepsilon(p) := \sum_{j=1}^{3}(1 - \cos(3p_j)),\ p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3;$$

$$(V_\alpha f)(p) = \varphi_\alpha(p)\int_{\mathbb{T}^3}\varphi_\alpha(t)f(t)dt, \quad \alpha = 1,2.$$

Здесь функции $\varphi_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2$ — вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^3$.

Следует отметить, что семейство моделей Фридрихса $H_\mu(k)$ является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$.

Положим

$$m(k) := 2\sum_{i=1}^{3}\left(1-\left|\cos\frac{3k_i}{2}\right|\right),\quad M(k) := 2\sum_{i=1}^{3}\left(1+\left|\cos\frac{3k_i}{2}\right|\right).$$

Можно показать, что существенный спектр семейства моделей Фридрихса $H_\mu(k)$ не зависит от параметра μ, и имеет место равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(k)) = [m(k); M(k)].$$

Сформулируем первый основной результат о числе и местоположении собственных значений оператора $H_\mu(k)$.

Теорема 1. *Для любых μ и k оператор $H_\mu(k)$ имеет не более двух собственных значений (с учетом кратности), лежащих левее точки $m(k)$, и не имеет собственных значений, лежащих правее точки $M(k)$.*

Для исследования существования собственных значений модели Фридрихса $H_\mu(k)$ вводятся два вспомогательных семейства моделей Фридрихса $H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)$, $\alpha = 1,2$:

$$H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k) : L_2(\mathbb{T}^3) \to L_2(\mathbb{T}^3),\quad H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k) := H_0(k) - \mu_\alpha V_\alpha,\quad \alpha = 1,2.$$

Очевидно, что для $\alpha = 1,2$ оператор $H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)$ также является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$, имеет одномерное возмущение, причем для существенного спектра этого оператора имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)) = [m(k); M(k)]$ (здесь тоже применяется теорема Вейля). Можно показать [1], что оператор $H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)$ имеет не более одного собственного значения, лежащего левее точки $m(k)$ и не имеет собственных значений, лежащих правее точки $M(k)$. Оператор $H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)$ имеет более простой вид, чем оператор $H_\mu(k)$, и условия существования его собственных значений подробно анализировались во многих статьях.

Теперь приведем второй результат работы.

Теорема 2. *Если при некотором $\alpha \in \{1,2\}$ и $k \in \mathbb{T}^3$ оператор $H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)$ имеет собственное значение $e^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k) < m(k)$, то для любого $\mu_\beta > 0$, $\beta \neq \alpha$, оператор $H_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение, лежащее левее точки $e^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)$.*

Отметим, что подобная связь о существовании собственных значений у операторов $H_\mu(k)$ и $H^{(\alpha)}_{\mu_\alpha}(k)$ в предыдущих работах не отмечалась. Это соотношение важно для оценки нижней границы существенного спектра модельных операторов, соответствующих системе трех квантовых частиц на трехмерной решетке [1].

Литература

1. Rasulov T. H., Rasulova Z. D. *Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials* // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics – 2014. – V. 5. – No. 3. – P. 327–342.

ON THE NUMBER OF EIGENVALUES OF A FAMILY OF FRIEDRICHS MODELS WITH RANK TWO PERTURBATION

G.S. Jabborova

In this work, we consider a family of Friedrichs models $H_\mu(k)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, $k \in \mathbb{T}^3$ with rank *two perturbation (here $\mathbb{T}^3$ is a three-dimensional torus). The number and location of the eigenvalues of Friedrichs model $H_\mu(k)$ is studied.*

Keywords: Friedrichs model, perturbation operator, eigenvalue.

УДК 517.984

ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА С СЕМИМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Д.Х. Жумаева[1]

1 *d.x.jumayeva@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

В работе рассматривается семейство обобщенных моделей Фридрихса с семимерным возмущением, зависящих от двух параметров. Построен определитель Фредгольма, нули которого являются собственными значениями рассматриваемого оператора.

Ключевые слова: обобщенная модель Фридрихса, оператор возмущения, определитель Фредгольма, собственное значение.

Пусть $\mathbb{T}^2 := (-\pi;\pi]^2$ — двумерный тор, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^2$, и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

В гильбертовом постранстве $\mathcal{H}$ рассмотрим семейству обобщенных моделей Фридрихса

$$H_{\mu,\lambda}(k) := \begin{pmatrix} H_{00}(k) & \mu H_{01} \\ \mu H_{01}^* & H_{11}^0(k) - V_\lambda \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$H_{00}(k) f_0 = a(k) f_0,\ H_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^2} v(t) f_1(t) dt,$$

$$(H_{11}^0(k) f_1)(p) = E_k(p) f_1(p),\ (V_\lambda f_1)(p) = \int_{\mathbb{T}^2} v_\lambda(p-t) f_1(t) dt,$$

$$E_k(p) := \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(k-p),\ v_\lambda(p) := \lambda_0 + \lambda_1 \cos p_1 + \lambda_2 \cos p_2,\ p = (p_1, p_2) \in \mathbb{T}^2.$$

Здесь $\mu > 0$, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 > 0$; а функции $a(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $\varepsilon_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2$ – вещественные непрерывные функции на $\mathbb{T}^2$.

Операторную матрицу второго порядка $H_{\mu,\lambda}(k)$ обычно называют семейством обобщенных моделей Фридрихса. При условиях, наложенных на элементы этой матрицы, $H_{\mu,\lambda}(k)$ является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в пространстве $\mathcal{H}$.

Очевидно, что оператор возмущения $H_{0,0}(k)$ является семимерным и

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{0,0}(k)) = [m(k); M(k)], \quad \sigma_{\text{point}}(H_{0,0}(k)) = \{a(k)\};$$

$$m(k) := \min_{p \in \mathbb{T}^2} E_k(p),\ M(k) := \max_{p \in \mathbb{T}^2} E_k(p).$$

Если $a(k) \notin [m(k); M(k)]$, то $\sigma_{\text{disc}}(H_{0,0}(k)) = \{a(k)\}$. Поэтому в силу известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга имеем $\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}(k)) = [m(k); M(k)]$. Определим регулярную в области $\mathbb{C}\setminus[m(k);M(k)]$ функцию

$$\Delta_{\mu,\lambda}(k;z) := \begin{vmatrix} d_\mu^{(0)}(k;z) & \mu\lambda_0 c_1(k;z) & \mu\lambda_1 c_2(k;z) & \mu\lambda_2 c_3(k;z) & \mu\lambda_2 c_4(k;z) & \mu\lambda_2 c_5(k;z) \\ \mu c_1(k;z) & d_{\lambda_0}^{(1)}(k;z) & \lambda_1 c_6(k;z) & \lambda_1 c_7(k;z) & \lambda_2 c_8(k;z) & \lambda_2 c_9(k;z) \\ \mu c_2(k;z) & \lambda_0 c_6(k;z) & d_{\lambda_1}^{(2)}(k;z) & \lambda_1 c_{10}(k;z) & \lambda_2 c_{11}(k;z) & \lambda_2 c_{12}(k;z) \\ \mu c_3(k;z) & \lambda_0 c_7(k;z) & \lambda_1 c_{10}(k;z) & d_{\lambda_1}^{(3)}(k;z) & \lambda_2 c_{13}(k;z) & \lambda_2 c_{14}(k;z) \\ \mu c_4(k;z) & \lambda_0 c_8(k;z) & \lambda_1 c_{11}(k;z) & \lambda_1 c_{13}(k;z) & d_{\lambda_2}^{(4)}(k;z) & \lambda_2 c_{15}(k;z) \\ \mu c_5(k;z) & \lambda_0 c_9(k;z) & \lambda_1 c_{12}(k;z) & \lambda_1 c_{14}(k;z) & \lambda_2 c_{15}(k;z) & d_{\lambda_2}^{(5)}(k;z) \end{vmatrix};$$

$$d_\mu^{(0)}(k;z) := a(k)-z-\mu^2\int_{\mathbb{T}^2}\frac{v^2(t)dt}{E_k(t)-z},\ c_1(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{v(t)dt}{E_k(t)-z},\ c_2(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{v(t)\cos t_1 dt}{E_k(t)-z};$$

$$c_3(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{v(t)\sin t_1 dt}{E_k(t)-z},\ c_4(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{v(t)\cos t_2 dt}{E_k(t)-z},\ c_5(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{v(t)\sin t_2 dt}{E_k(t)-z};$$

$$d_{\lambda_0}^{(1)}(k;z) := 1-\lambda_0\int_{\mathbb{T}^2}\frac{dt}{E_k(t)-z},\ c_6(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\cos t_1 dt}{z-E_k(t)},\ c_7(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\sin t_1 dt}{z-E_k(t)};$$

$$c_8(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\cos t_2 dt}{z-E_k(t)},\ c_9(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\sin t_2 dt}{z-E_k(t)},\ c_{10}(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\cos t_1\sin t_1 dt}{z-E_k(t)};$$

$$d_{\lambda_1}^{(2)}(k;z) := 1-\lambda_1\int_{\mathbb{T}^2}\frac{\cos^2 t_1 dt}{E_k(t)-z},\ c_{11}(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\cos t_1\cos t_2 dt}{z-E_k(t)},\ c_{12}(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\cos t_1\sin t_2 dt}{z-E_k(t)};$$

$$d_{\lambda_1}^{(3)}(k;z) := 1-\lambda_1\int_{\mathbb{T}^2}\frac{\sin^2 t_1 dt}{E_k(t)-z},\ c_{13}(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\cos t_2\sin t_1 dt}{z-E_k(t)},\ c_{14}(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\sin t_1\sin t_2 dt}{z-E_k(t)};$$

$$d_{\lambda_2}^{(4)}(k;z) := 1-\lambda_2\int_{\mathbb{T}^2}\frac{\cos^2 t_2 dt}{E_k(t)-z},\ d_{\lambda_2}^{(5)}(k;z) := 1-\lambda_2\int_{\mathbb{T}^2}\frac{\sin^2 t_2 dt}{E_k(t)-z},\ c_{15}(k;z) := \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\sin t_2\cos t_2 dt}{z-E_k(t)}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Число $z\in\mathbb{C}\setminus[m(k);M(k)]$ является собственным значением обобщенной модели Фридрихса $H_{\mu,\lambda}$ тогда и только тогда, когда $\Delta_{\mu,\lambda}(k;z)=0$, т.е.*

$$\sigma_{\text{disc}}(H_{\mu,\lambda}) = \{z\in\mathbb{C}\setminus[m(k);M(k)]:\ \Delta_{\mu,\lambda}(k;z)=0\}.$$

CONSTRUCTION OF THE FREDHOLM DETERMINANT FOR THE FAMILY OF GENERALIZED FRIEDRICHS MODELS WITH RANK SEVEN PERTURBATION

D.Kh. Jumaeva

In this work we consider the family of generalized Friedrichs models with rank seven perturbation depending on the two parameter. The Fredholm determinant, whose zeros are eigenvalues of the considered operator is constructed.

Keywords: generalized Friedrichs model, perturbation operator, Fredholm determinant, eigenvalue.

УДК 517.984

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Ф.М. Журакулова[1]

1 *juraqulova.farangis@mail.ru, f.m.juraqulova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет

В данной работе рассматривается матрица $\mathscr{A}_\mu$ третьего порядка со спектральным параметром $\mu > 0$, которая соответствует системе частиц, число которых не сохраняется и не превосходит трёх. Построен определитель Фредгольма, ассоциированный с операторной матрицей $\mathscr{A}_\mu$.

Ключевые слова: пространства Фока, операторная матрица, спектральный параметр, обобщенная модель Фридрихса, определитель Фредгольма.

Через $\mathbb{T} := (-\pi;\pi]$ обозначим одномерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство и $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}$.

Рассмотрим семейство обобщенных моделей Фридрихса $h_\mu(k)$, $\mu > 0$, $k \in \mathbb{T}$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ как 2×2 операторная матрица

$$h_\mu(k) := \begin{pmatrix} h_{00} & \frac{\mu}{\sqrt{2}} h_{01} \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} h_{01}^* & h_{11}(k) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где матричные элементы определяются по формулам

$$h_{00} f_0 = f_0, \quad h_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}} f_1(t)\,dt, \quad (h_{11}(k) f_1)(y) = w(k,y) f_1(y). \tag{2}$$

Здесь $f_i \in \mathscr{H}_i$, $i = 0,1$; а функция $w(\cdot,\cdot)$ имеет вид

$$w(k,y) := 3 - \cos k - \cos y - \cos(k+y).$$

Семейство обобщенных моделей Фридрихса $h_\mu(k)$, определенное по формуле (1) с матричными элементами (2), является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$.

Для удобства обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\mathrm{disc}}(\cdot)$, соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Используя теоремы Вейля [1] о сохранении существенного спектра при конечномерных возмущениях, для существенного спектра операторной матрицы $h_\mu(k)$ имеем равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_\mu(k)) = [m(k); M(k)]$, где числа $m(k)$ и $M(k)$ определяются следующим образом:

$$m(k) := 3 - \cos k - \sqrt{2 + 2\cos k}, \quad M(k) := 3 - \cos k + \sqrt{2 + 2\cos k}.$$

Для каждого $\mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}$ определим регулярную функцию

$$\Delta_\mu(k;z) := \begin{cases} 1 - z - I_\mu(k;z), & z < m(k) \\ 1 - z + I_\mu(k;z), & z > M(k) \end{cases}; \; I_\mu(k;z) := \frac{\pi\mu^2}{\sqrt{(3 - \cos k - z)^2 - 4\cos^2\frac{k}{2}}},$$

в области $\mathbb{C}\setminus[m(k);M(k)]$. Функция $\Delta_\mu(k;\cdot)$ обычно называется определителем Фредгольма, ассоциированным с оператором $h_\mu(k)$. Пусть $\mathscr{H}_2 := L_2^s(\mathbb{T}^2)$ – гильбертово пространство (комплекснозначных) квадратично-интегрируемых симметричных функций двух переменных, определенных на $\mathbb{T}^2$ и $\mathscr{H} := \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. В комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим операторную матрицу

$$\mathscr{A}_\mu := \begin{pmatrix} \mathscr{A}_{00} & \mu\mathscr{A}_{01} & 0 \\ \mu\mathscr{A}_{01}^* & \mathscr{A}_{11} & \mu\mathscr{A}_{12} \\ 0 & \mu\mathscr{A}_{12}^* & \mathscr{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0,$$

где матричные элементы $\mathscr{A}_{ij} : \mathscr{H}_j \to \mathscr{H}_i$, $i \le j$, $i,j = 0,1,2$ определяются по формулам

$$\mathscr{A}_{00} f_0 = a f_0, \quad \mathscr{A}_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}} v(t) f_1(t)\,dt, \quad (\mathscr{A}_{11} f_1)(x) = f_1(x),$$

$$(\mathscr{A}_{12} f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}} f_2(x,t)\,dt, \quad (\mathscr{A}_{22} f_2)(x,y) = w(x,y) f_2(x,y) \quad f_i \in \mathscr{H}_i,\ i = 0,1,2.$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$ и $v(\cdot)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{T}$.

Можно легко проверить, что операторная матрица $\mathscr{A}_\mu$ является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

Вводим следующие обозначения:

$$\Sigma_\mu = [0; \frac{9}{2}] \cup \bigcup_{k \in \mathbb{T}} \sigma_{\mathrm{disc}}(h_\mu(k)).$$

Пусть I– единичный оператор в $\mathscr{H}_1$, K_μ– интегральный оператор в $\mathscr{H}_1$, порожденный ядром

$$K_\mu(x,y;z) := \frac{\mu^2}{2\Delta_\mu(x,z)(w(x,y)-z)}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu,$$

$\Delta_\mu(z)$ и $D_\mu(x,y;z)$– соответственно определитель и минор Фредгольма оператора $I - K_\mu$.

При $\mu > 0$ в области $\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu$ определим регулярную функцию вида

$$\Omega_\mu(z) := \left(a - z - \int_{\mathbb{T}} \frac{v^2(t)\,dt}{\Delta_\mu(t;z)}\right)\Delta_\mu(z) + \mu^2 \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \frac{v(x)v(t)D_\mu(x,t;z)}{\Delta_\mu(t;z)}\,dx\,dt.$$

Теорема 1. *Число $z \in \mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}_\mu)$ является собственным значением оператора $\mathscr{A}_\mu$ тогда и только тогда, когда $\Omega_\mu(z) = 0$.*

Литература

1. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов.* – М.: Мир,1982. – 296 с.

THE FREDHOLM DETERMINANT FOR A THIRD-ORDER OPERATOR MATRIX WITH A SPECTRAL PARAMETER

F.M. Jurakulova

In this work, an operator matrix $\mathscr{A}_\mu$ of order three with spectral parameter μ, corresponding to the *system of particles whose number is non-conserved and does not exceed three is considered. The Fredholm determinant associated with the operator matrix $\mathscr{A}_\mu$ is constructed.*

Keywords: Fock space, operator matrix, spectral parameter, generalized Friedrichs model, Fredholm determinant.

УДК 519.863

СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ ЭМПИРИЧЕСКИХ АНАЛОГОВ КРИВОЙ БАЙЕСОВСКОЙ РЕГРЕССИИ

Э. Заарур[1]

1 *zrwrz05@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики

Изучается возможность построения байесовской оценки для регрессионной кривой двумя различными методами: первый — метод ядерного оценивания априорной плотности в задаче деконволюции, второй — метод ядерного оценивания безусловной плотности распределения. Рассмотрена ситуация, когда наблюдаемая случайная величина представляет собой сумму неизвестного параметра и центрированной нормальной ошибки с известной дисперсией. Построены состоятельные эмпирические оценки для кривой регрессии. Сравнение эмпирических аналогов регрессионной функции показало, что первая оценка превосходит вторую: средняя квадратическая ошибка составила 0,008 для первой оценки против 0,01 для второй.

Ключевые слова: эмпирический байесовский подход, проблема деконволюции, кривая байесовской регрессии.

В эксперименте наблюдается случайная величина X, имеющая нормальное (θ, σ^2) распределение с известной дисперсией σ^2 и неизвестным математическим ожиданием θ. Тогда кривая регрессии θ относительно X имеет вид:

$$e(x) = \mathbb{E}[\vartheta \mid X = x] = \sigma^2 \frac{f'(x)}{f(x)} + x, \tag{1}$$

где $f(x)$ — безусловная плотность распределения X равна $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\big((x-\theta)/\sigma\big) g(\theta)\, d\theta/\sigma$, φ — плотность стандартного нормального закона.

Пусть в эксперименте наблюдается выборка $\Xi_n = \{X_1, \dots, X_n\}$ независимых случайных величин. На основе этих наблюдаемых значений требуется построить оценку для $e(x)$.

Подходящая для наших целей ядерная оценка g описана в статье [1]. Из представления (1) видно, что плотность безусловного распределения X выражается как свёртка плотностей, то есть f = g * φ. Оценка g по набору независимых наблюдений Ξ_k, имеющих общую плотность f, строится следующим образом.

Пусть $\psi_g(t)$ характеристическая функция случайной величины ϑ (преобразование Фурье функции плотности g), $\psi_\varphi(t) = \exp(-t^2/2)$— характеристическая функция φ.Оценка $\hat{g_k}$ для функции плотности g имеет следующий вид:

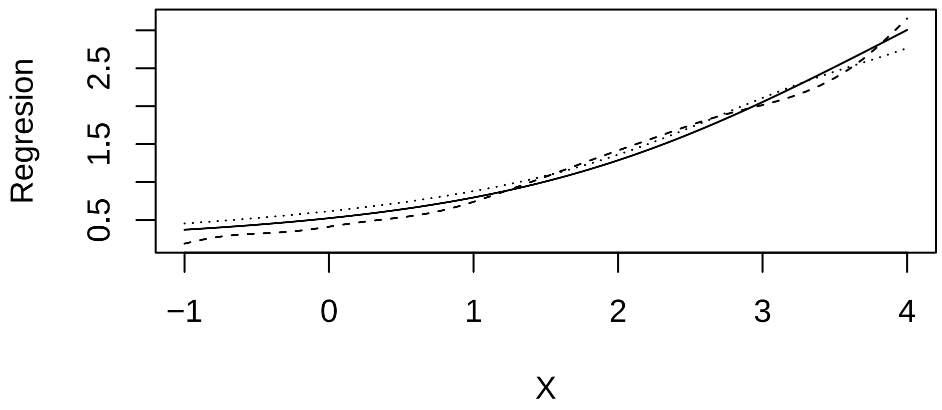


Рис. 1. Оценка кривой регрессии

$$\hat{g_k}(\theta;\Xi_k) = \frac{1}{k\pi}\sum_1^k\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\frac{1}{\psi_\varphi(t)}\cos\{t(x_j-\theta)\}dt.$$

Заметим, что функция $\psi_\varphi(t)$ удовлетворяет условиям, выдвинутым в [1]. Из 1, Заменив g на её оценку $\hat{g_k}(\theta;\Xi_k)$, можем построить первый эмпирический аналог для $e(x)$.

Для второго аналога, заменив f, f' на их оценки $\hat{f}, \hat{f}'$, можно построить эмпирический аналог для $e(x)$ (см. [2]).

$$\hat{e}(x;\Xi_n) = \sigma^2\frac{\hat{f}'(x)}{\hat{f}(x)} + x.$$

Используем классические оценки полтности и её первой производной с гауссовским ядром

$$\hat{f}(x;\Xi_n) = \frac{1}{n\lambda_n}\sum_{i=1}^n\varphi\Big(\frac{x-X_i}{\lambda_n}\Big)$$

Сравнительный анализ проводился в рамках экспоненциальной модели наблюдений с параметром интенсивности 1. На рисунке приведены графики следующих графиков. Сплошная линия — кривая байесовской регрессии, точечная и пунктирная линии — первый и второй эмпирические аналогии соответственно. Для оценки указанных эмпирических аналогов была использована выборка объёмом 700 наблюдений. Мы сравнили точность двух эмпирических аналогов для функции регрессии $e(x)$ на интервале $I = (-1,4)$, где безусловная вероятность $P\{X \in I\} > 0,9$. В обоих случаях она была выбрана равной 0,42.

Литература

1. Liu M. C., Taylor R. L. *A consistent nonparametric density estimator for the deconvolution problem* // Canadian Journal of Statistics. – 1989. – Т. 17. – № 4. – С. 427–438.

2. Nadaraya E. *On non-parametric estimates of density functions and regression curves* // The Annals of Mathematical Statistics. – 1965. – Т. 10. – № 1. – С. 186–190.

COMPARISON OF THE ACCURACY OF EMPIRICAL ANALOGUES OF THE BAYESIAN REGRESSION CURVE

E. Zaarour

The possibility of constructing a Bayesian estimator for the regression curve is investigated using two distinct methods: the first method employs kernel estimation of the prior density in a deconvolution problem while the second method applies kernel estimation of the unconditional distribution density. The situation is considered when the observed random variable is the sum of an unknown parameter. Consistent empirical estimators were constructed for the regression curve. Empirical analogs of the regression function were compared, showing superior performance of the first estimator (MSE = 0.008) relative to the second (MSE = 0.01).

Keywords: empirical Bayes approach, deconvolution problem, Bayesian regression curve.

УДК 517.955, 517.956.32, 517.929

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Н.В. Зайцева[1]

1 *zaitseva@cs.msu.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики

С помощью интегральных преобразований построено в явном виде единственное решение начальной задачи в полуплоскости для гиперболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигом в свободном члене по пространственной переменной, изменяющейся на всей вещественной оси.

Ключевые слова: задача Коши, гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, оператор сдвига, преобразование Фурье.

Обозначим через $D = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ и $\overline{D} = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0\}$ области координатной плоскости Oxt.

Исследован вопрос разрешимости следующей начальной задачи: требуется найти функцию $u(x,t) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) + b\,u(x-h,t) = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

где $a > 0$, b, $h \neq 0$ — заданные действительные числа, и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

начальные функции $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$ финитны.

Потребуем выполнения условия положительности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора в уравнении (1) (условия эллиптичности этого оператора согласно теории [1] дифференциально-разностных уравнений с частными производными), а именно, пусть выполняется неравенство

$$a^2\xi^2 + b\cos(h\xi) > 0 \quad \text{для любого } \xi \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Доказаны следующие утверждения.

Лемма. *Условие (3) выполняется для всех значений $\xi \in \mathbb{R}$, если коэффициенты a, b и сдвиг h уравнения (1) удовлетворяют неравенствам* $0 < b \leqslant 2a^2/h^2$.

Теорема. *При выполнении условия (3) функция*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}(x-\tau,t)\varphi(\tau)\,d\tau + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}(x-\tau,t)\psi(\tau)\,d\tau \tag{4}$$

является единственным решением задачи (1), (2).

В определении функции (4) введены обозначения:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\frac{\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\xi)}{\rho(\xi)}e^{tG_1(\xi)} + \frac{\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\xi)}{\rho(\xi)}e^{-tG_1(\xi)}\right]d\xi,$$

$$G_1(\xi) = \rho(\xi)\sin\varphi(\xi), \quad G_2(\xi) = \rho(\xi)\cos\varphi(\xi),$$

$$\rho(\xi) = \left[\left(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)\right)^2 + b^2\sin^2(h\xi)\right]^{1/4},$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b\sin(h\xi)}{a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)}.$$

С подробными результатами можно ознакомиться в работе [2].

Литература

1. Скубачевский А. Л. *Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения* // Успехи матем. наук. – 2016. – Т. 71. – № 5 (431). – С. 3–122.

2. Зайцева Н. В. *Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом* // Дифференц. уравнения. – 2025. – Т. 61. – № 6. – С. 739–747.

ON AN INITIAL VALUE PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL HYPERBOLIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATION

N.V. Zaitseva

With the use of integral transformations, a unique solution to the initial value problem in a half-plane for a hyperbolic differential-difference equation with a translation in the free term along a spatial variable changing over the entire real axis is constructed in an explicit form.

Keywords: Cauchy problem, hyperbolic equation, differential-difference equation, translation operator, Fourier transform.

УДК 517.927.21

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С АНТИПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

А.А. Зверев[1], С.А. Шабров[2]

1 *inoplanetemin@rambler.ru*; Воронежский государственный университет
2 *shabrov_s_a@math.vsu.ru*; Воронежский государственный университет

В работе изучается краевая задача с негладкими решениями и антипериодическими граничными условиями. Следуя концепции поточечного подхода, предложенного Ю.В. Покорным, получена формула представления решения исследуемой краевой задачи в явном виде, а также доказана единственность решения.

Ключевые слова: краевая задача, антипериодические условия, негладкие решения, интеграл Стилтьеса, абсолютно непрерывная фукция, функция ограниченной вариации.

Применяя концепцию поточечного подхода, предложенного Ю.В. Покорным (см., например, [1]-[4]), проведено исследование краевой задачи с негладкими решениями и антипериодическими краевыми условиями. Изучаемая задача имеет вид

$$\begin{cases} -(pu')(x)+\int\limits_0^x u\,dQ = F(x)-F(0)-(pu')(0) \\ u(0)=-u(l), \\ u'(0)=-u'(l). \end{cases} \tag{1}$$

Предполагается, что функции $p(x)$, $F(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[0,l]$, причем $\inf\limits_{[0,l]} p(x)>0$, $p(0)=p(l)$; функция $Q(x)$ строго возрастает на $[0,l]$; функции $p(x)$, $Q(x)$, $F(x)$ являются непрерывными в точках $x=0$ и $x=l$; интеграл понимается по Стилтьесу. Решение задачи (1) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0,l]$ функций, производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0,l]$.

Теорема. *Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — решения однородного уравнения*

$$-\left(pu'\right)(x)+\left(pu'\right)(0)+\int_0^x u\,dQ=0, \tag{2}$$

удовлетворяющие условиям

$$\varphi_1(0)=1, \varphi_1'(0)=1;$$

$$\varphi_2(0)=1, \varphi_2'(0)=-1.$$

Обозначим

$$A_1=\varphi_1'(l)+\varphi_1(l),\ B_1=\varphi_2'(l)+\varphi_2(l),$$

$$A_2=\varphi_1'(l)-\varphi_1(l),\ B_2=\varphi_2'(l)-\varphi_2(l),$$

$$c=\frac{1}{2p(0)(4+A_1-B_2)}.$$

Тогда решение задачи (1) единственно и имеет вид

$$u(x) = c\varphi_1(x)\int_0^x \left(-B_1\varphi_1(s) + B_2\varphi_2(s) - 2\varphi_2(s)\right) dF(s) +$$
$$+ c\varphi_2(x)\int_0^x \left(A_1\varphi_1(s) - A_2\varphi_2(s) + 2\varphi_1(s)\right) dF(s) +$$
$$+ c\varphi_1(x)\int_x^l \left(2\varphi_2(s) + A_1\varphi_2(s) - B_1\varphi_1(s)\right) dF(s) +$$
$$+ c\varphi_2(x)\int_x^l \left(-2\varphi_1(s) - A_2\varphi_2(s) + B_2\varphi_1(s)\right) dF(s). \quad (3)$$

Литература

1. Покорный Ю. В. *Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях*// Доклады РАН. – 1999. – Т. 364. – № 2. – С. 167–169.

2. Покорный Ю. В. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

3. Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А. *Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах.* М. : Физматлит – 2009. – 192 с.

4. Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. *Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач* // Успехи математических наук. – 2008. – Т. 63. – № 1. – С. 111–154.

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH ANTI-PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS AND NONSMOOTH SOLUTIONS

A.A. Zverev, S.A. Shabrov

A boundary value problem with non-smooth solutions and anti-periodic boundary conditions is studied. Following the pointwise approach concept introduced by Yu.V. Pokorny, an explicit representation formula for the solution of the studied boundary value problem is obtained, and the uniqueness of the solution is proved.

Keywords: boundary value problem, antiperiodic conditions, non-smooth solutions, Stieltjes integral, absolutely continuous function, function of bounded variation.

УДК 514.822

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

П.Н. Иваньшин[1]

1 *pivanshi@yandex.ru*; КНИТУ-КАИ

Построено сплайн-интерполяционное решение двумерной задачи Стефана. Она сводится к решению некоторых краевых задач для аналитических функций и интегральных уравнений. Приведены также оценки погрешности приближенного решения и некоторые примеры.

Ключевые слова: сплайн, аналитическая функция, приближенное решение, задача Коши.

Задача Стефана для температурного поля $T(t, x, y)$ формулируется следующим образом: Рассмотрим среду, занимающую область Ω, состоящую из двух фаз в соответствующих подобластях Ω: фазы 1 в подобласти $D_1(t)$ и фазы 2 в $D_2(t)$. Эти подобласти имеют общую динамическую границу $\Gamma'(t)$. Пусть две фазы имеют температуропроводности α_1 и α_2. Тогда $\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot(\alpha_1 \nabla T)$ в области D_1 и $\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot(\alpha_2 \nabla T)$ в области D_2.

Предположим, что мы знаем границу $\Gamma'(0)$ между зонами $D_1(0)$ и $D_2(0)$. Учитывая начальное значение $T(0, x, y)$ в Ω и граничные данные $T(t, x, y)|_{(x,y)\in\partial\Omega=\Gamma\cup\Gamma''}$, можем восстановить как функцию $T(t, x, y)$, $t > 0$, $(x, y) \in \Omega$, так и границу $\Gamma'(t)$ между двумя подобластями D_1 и D_2 в любой момент времени $t > 0$. Условие Стефана определяет эволюцию кривой $\Gamma'(t)$, задавая уравнение, регулирующее скорость V свободной границы в нормальном направлении ν, а именно $V = \alpha_1 \partial_\nu T_1 - \alpha_2 \partial_\nu T_2$. Под граничными значениями T_1 мы подразумеваем предел градиента при $(x, y) \to \Gamma'(t)$ в области $D_1(t)$, а под граничными значениями T_2 — предел градиента при $(x, y) \to \Gamma'(t)$ в области $D_2(t)$.

Для решения задачи Стефана мы применяем интеграл Коши. Сначала мы модифицируем исходную задачу, чтобы свести ее к решению двух краевых задач. Первая из задач, которая здесь возникает, — это задача Коши для уравнения Лапласа. Таким образом, мы снова видим связь задачи Стефана с некорректными переопределенными задачами [1]. Это важнейшая часть нашей конструкции. Мы показываем разрешимость этой задачи и приводим некоторые примеры решения. Мы решаем эту задачу, применяя методы, аналогичные нашим конструкциям [2, 3]. Вторая задача — это обычная задача Шварца о восстановлении мнимой части функции, аналитической в односвязной области, по действительной части этой функции на границе.

Литература

1. Kinderlehrer D., Stampacchia G. *An introduction to variational inequalities and their applications.* – SIAM, 2000.

2. Shirokova E. A., Ivanshin P. N. *On Cauchy problem solution for a harmonic function in a simply connected domain*// Issues of Analysis – 2023. – Vol. 12 (30). – No. 2. – C. 87–96.

3. Shirokova E. A., Ivanshin P. N. *On Cauchy Problem Solution for a Harmonic Function in a Simply Connected Domain with Multi-Component Boundary* // International Journal of Computational Methods. – 2025. – Vol. 22. – No 01.– С. 1–12.

SPLINE-INTERPOLATION SOLUTION OF A PLANE STEFAN PROBLEM

P.N. Ivanshin

We construct a spline-interpolation solution of the 2D Stefan problem. We reduce it to the set of boundary value problems for analytic functions and integral equations. We also give estimates of the approximate solution error and some examples of the solution.

Keywords: spline, analytic function, approximate solution, Cauchy problem.

УДК 517.98

О МНОЖЕСТВЕ ВЕКТОРОВ МОДУЛЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ СИГНАЛА ПОЛНЫМИ СИСТЕМАМИ

И.М. Избяков[1]

1 *izbyakov.im@ssau.ru*; Самарский национальный исследовательский университет

В статье анализируется множество векторов модулей измерений, по которым возможно восстановление неизвестного вектор-сигнала с использованием заданной полной системой векторов, а также описывается фактор-пространство восстанавливаемых сигналов в комплексном конечномерном пространстве.

Ключевые слова: полная система, фрейм, альтернативная полнота, восстановление сигнала по модулям измерений.

Пусть дано конечномерное пространство с операцией скалярного произведения $\mathbb{H}^D$, где D – размерность пространства и $N \in \mathbb{N}$, причем $N \geq D$. Полная система $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ в $\mathbb{H}^D$ восстанавливает исходный вектор-сигнал $x \in \mathbb{H}^D$ по модулям измерений (ВМИ), если для любого другого сигнала $y \in \mathbb{H}^D$ из $|\langle x, \varphi_k \rangle| = |\langle y, \varphi_k \rangle|$ для всех $k = 1, \dots, N$, следует, что $x = cy$, где $|c| = 1$.

В конечномерных пространствах понятие полной системы векторов совпадает с понятием фрейма [1]. Хорошо известно, что с точностью до изоморфизма $\mathbb{H}^D$ равно $\mathbb{R}^D$ или $\mathbb{C}^D$.

Для произвольного вектора $x \in \mathbb{H}^D$ определим *вектор модулей измерений*:

$$m(\Phi, x) = \left(|\langle x, \varphi_1 \rangle|, |\langle x, \varphi_2 \rangle|, \dots, |\langle x, \varphi_N \rangle|\right) \in \mathbb{R}^N_{\geq 0}.$$

Множество всех возможных векторов $m(\Phi, x)$ образует *множество векторов модулей измерений фрейма* $\mathscr{M}(\Phi) \subset \mathbb{R}^N_{\geq 0}$. При этом оказывается, что не каждый вектор из $\mathbb{R}^N_{\geq 0}$ принадлежит $\mathscr{M}(\Phi)$, а само множество представляет собой конус в пространстве H^D, поскольку если $m \in \mathscr{M}(\Phi)$, то $am \in \mathscr{M}(\Phi)$ $\forall a \geq 0$.

В конечномерном пространстве набор векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ в $\mathbb{H}^D$ обладает свойством альтернативной полноты (АП), если для каждого подмножества $T \subseteq \{1, \dots, N\}$ по крайней мере одно из множеств $\{\varphi_k\}_{k \in T}$ или $\{\varphi_k\}_{k \in T^C}$ полно в $\mathbb{H}^D$. В $\mathbb{R}^D$ свойства АП и ВМИ эквивалентны. В $\mathbb{C}^D$ свойство АП является необходимым, но недостаточным для ВМИ [2].

В статье [2] построен пример фрейма в $\mathbb{C}^2$, состоящего из трех векторов с вещественными координатами, который обладает свойством АП, но не обладает свойством ВМИ. При этом в этой же работе доказано, что в $\mathbb{C}^2$ количество векторов, минимально необходимое для восстановления сигнала, равно 4.

Рассмотрим пример фрейма, состоящего из четырех векторов в $\mathbb{C}^2$, который содержит векторы с комплексными координатами, и два вектора $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^2$.

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix}, \quad \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что этот фрейм обладает свойством альтернативной полноты и $m(\Phi, x_1) = m(\Phi, x_2) = (1; 1; \sqrt{5}; \sqrt{5})$, однако векторы x_1 и x_2 принадлежат разным классам эквивалентности фактор-пространства $\mathbb{C}^D / \mathbb{T}$.

В формулировке следующего предложения комплексные координаты векторов рассматриваются как вектора на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Предложение. *В фактор-пространстве $\mathbb{C}^D / \mathbb{T}$ вектора $x = (x_1, \ldots, x_D)^T \in \mathbb{C}^D$ и $y = (y_1, \ldots, y_D)^T \in \mathbb{C}^D$ отождествляются тогда и только тогда, когда $\|x\| = \|y\|$ и равны между собой соответствующие углы между координатами векторов x и y, то есть $\widehat{x_i, x_j} = \widehat{y_i, y_j}$ для всех пар $i, j \in \{1, \ldots, D\} \times \{1, \ldots, D\}$*

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-1791.

Литература

1. Christensen O. *An Introduction to Frames and Riesz Bases.* – Boston: Birkhaeuser, 2002. – 440 с.

2. Bandeira A., Cahill J., Mixon D, Nelson A. *Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval.* // Applied and Computational Harmonic Analysis. – 2014. – Т. 37. – № 1. – С. 106–125.

ON THE SET OF VECTORS OF SIGNAL MEASUREMENT MODULES
BY COMPLETE SYSTEMS

I.M. Izbiakov

This paper describes the set of vectors of measurement modules, by which it is possible to recover an unknown vector signal using a given complete system of vectors; describes the factor space of signals to be restored in a complex finite-dimensional space, and also emphasizes the differences between finite-dimensional and infinite-dimensional cases.

Keywords: full system, frame, complement property, signal recovery by measurement modules.

УДК 517.984

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Д.Э. Исмоилова[1]

1 *d.e.ismoilova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет

В настоящей работе рассматривается операторная матрица второго порядка, связанная с системой частиц на решётке, число которых не сохраняется и не превышает двух. Найдены условия, при которых эта операторная матрица имеет одно, два или три собственных значений.

Ключевые слова: операторная матрица, существенный спектр, собственное значение, гильбертово пространство.

В спектральной теории линейных операторов часто возникают вопросы, связанные с числом собственных значений операторных матриц и определением их местоположения [1,2]. Данная работа посвящена решению одной из таких проблем.

Сначала введём некоторые обозначения, используемые в данной работе. Через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ обозначим d-мерный куб, в котором противоположные грани отождествляются. Пусть $\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$ — одномерное комплексное пространство, $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Прямую сумму этих пространств, то есть пространство $\mathscr{H} := \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ называют обрезанным двухчастичным подпространством пространства Фока.

Рассмотрим следующую операторную матрицу в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{H}$:

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^{*} & A_{11} \end{pmatrix}.$$

Элементы данной операторной матрицы определяются следующим образом:

$$A_{00} f_0^{(\mathrm{s})} = \mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})}, \quad A_{01} f_1^{(\mathrm{s})} = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1^{(-\mathrm{s})}(t)\, dt,$$
$$(A_{11} f_1^{(\mathrm{s})})(k_1) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1)) f_1^{(\mathrm{s})}(k_1), \quad \{f = (f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}), \mathrm{s} = \pm\} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{H}.$$

Здесь ε — фиксированное вещественное положительное число, $w(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а $\alpha > 0$ — "параметр взаимодействия".

Можно легко проверить, что существенный спектр операторной матрицы $\mathscr{A}$ определяется следующим образом:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}) = [-\varepsilon + m; -\varepsilon + M] \cup [\varepsilon + m; \varepsilon + M].$$

Здесь для чисел m и M выполняются равенства: $m := \min\limits_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(k_1)$, $M := \max\limits_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(k_1)$.

Для определённости рассматривается случай, когда интеграл

$$\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{M - w(t)}$$

сходится.

Введём следующие обозначения:

$$\alpha_1 := \sqrt{2\varepsilon + M}\left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{M - w(t)}\right)^{-1/2}, \text{ если } M > -2\varepsilon,$$
$$\alpha_2 := \sqrt{M}\left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{2\varepsilon + M - w(t)}\right)^{-1/2}, \text{ если } M > 0,$$
$$\alpha_{\min} := \min\{\alpha_1; \alpha_2\}, \quad \alpha_{\max} := \max\{\alpha_1; \alpha_2\}, \text{ если } M > 0.$$

Теорема. *а) Если выполняется неравенство* $-2\varepsilon < M \le 0$ *и* $\alpha < \alpha_{\min}$, *то операторная матрица* $\mathscr{A}$ *не имеет собственных значений правее точки* $\varepsilon + M$.

б) Если выполняется неравенство $-2\varepsilon < M \le 0$ *и* $\alpha < \alpha_1$ *или* $M > 0$ *и выполняется неравенство* $\alpha_{\min} < \alpha < \alpha_{\max}$, *то операторная матрица* $\mathscr{A}$ *имеет единственное собственное значение правее точки* $\varepsilon + M$.

с) Пусть выполнено одно из следующих условий:

с1) $M < -2\varepsilon$ *и* $\alpha > 0$ *любое число;*

с2) $-2\varepsilon < M \le 0$ *и* $\alpha > \alpha_1$;

с3) $M > 0$ *и* $\alpha > \alpha_{\max}$.

Тогда операторная матрица $\mathscr{A}$ *имеет два собственных значения, лежащих правее точки* $\varepsilon + M$.

Сформулированная теорема важна при изучении существенного спектра операторной матрицы третьего порядка.

Литература

1. Muminov M. I. Rasulov T. H. *Infiniteness of the number of eigenvalues embedded in the essential spectrum of a* 2×2 *operator matrix* // Eurasian Math. J. – 2014. – Vol. 5. – No. 2. – P. 60–77.

2. Расулов Т. Х. *О числе собственных значений одного матричного оператора* // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52. – № 2. – С. 400–415.

CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF THE EIGENVALUES OF A SECOND-ORDER OPERATOR MATRIX

D.E. Ismoilova

In the present work, a second-order operator matrix associated with a system of particles on the lattice whose number is not conserved and does not exceed two is considered. The conditions for this matrix to have one, two, or three eigenvalues have been found.

Keywords: operator matrix, essential spectrum, eigenvalue, Hilbert space.

УДК 517.53

АППРОКСИМАЦИЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И ОБОБЩЕННЫЙ ПОРЯДОК ОТНОСИТЕЛЬНО МОДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РОСТА

М.В. Кабанко[1]

1 *kabankom@gmail.com*; Курский государственный университет

В работе обсуждается описание обобщенного нижнего порядка целой функции, построенного на основе модельной функции в терминах коэффициентов ряда Тейлора и в терминах последовательности наилучшей полиномиальной аппроксимации целой функции в некоторых банаховых пространствах.

Ключевые слова: целая функция, коэффициенты Тейлора, модельная функция, наилучшая полиномиальная аппроксимация.

Пусть M — модельная функция роста, V — уточненная функция роста относительно M, $\rho_M(r)$ — уточнённый порядок относительно M, $\varrho = \lim\limits_{r\to+\infty} \rho_M(r)$ (см. [1]). Обозначим через $\mathscr{M}(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ максимум модуля целой функции f на окружности $|z| = r$. В работе [2] были существенно обобщены формулы Адамара связывающие характеристики роста целой функции с коэффициентами Тейлора.

Рассмотрим пространства $B_{p,q,\lambda}$ функций, аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ с нормой, определяемой равенством

$$\|f\|_{p,q,\lambda} = \left\{\int\limits_0^1 (1-r)^{\lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} M_q^\lambda(f,r)\,dr\right\}^{1/\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad 0 < p < q \le \infty,$$

где

$$M_q(f,r) = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q\,d\theta\right)^{1/q}$$

Далее, через $E_n(f,L_n)$ обозначим наилучшее приближение функции f элементами линейного подпространства L_n алгебраических полиномов комплексной переменной степени не выше $n-1$, а через $\mathfrak{L}$ множество таких функций h, которые удовлетворяют условию: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h((1+\varphi(x))x)}{h(x)} = 1$ для любой функции φ такой, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Можно показать, что порядок и нижний порядок целой функции относительно модельной функции могут быть найдены в виде:

$$\rho_M = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln M(\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}})}, \qquad \lambda_M = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln M(\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}})}.$$

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ является целой, а функция $M(t)$ – модельная функция и выполняются следующим условия:*

1. *функция $\ln M(e^t)$ принадлежит классу $\mathfrak{L}$;*

2. *функция $M^{-1}(t)$, обратная по отношению к модельной, является правильно меняющейся;*

3. *последовательность* $\{\frac{E_n(f,B_{p,2,\lambda})}{E_{n+1}(f,B_{p,2,\lambda})}\}_{n=1}^{\infty}$ *– неубывающая.*

Тогда функция $f(z)$ принадлежит пространству $B_{p,2,\lambda}$ в том и только том случае, если нижний обобщенный порядок относительно модельной функции равен

$$\lambda_M = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln M((E_n(f,B_{p,2,\lambda}))^{-\frac{1}{n}})}.$$

Литература

1. Кабанко М.В., Малютин К.Г., Хабибуллин Б.Н. *Об уточненной функции роста относительно модельной.* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2023. – Т. 230. – № 3. – С. 56–74.

2. Шеремета М. Н. *О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения* // Известия вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 100–108.

APPROXIMATION OF ENTIRE FUNCTIONS AND GENERALIZED ORDER RELATIVE TO THE MODEL FUNCTION

M.V. Kabanko

We investigated characterizations of generalized lower order of entire functions relative to the model function in terms of the sequence of best polynomial approximations of function in some Banach spaces.

Keywords: entire function, Taylor coefficients, model function, best polynomial approximation.

УДК 517.518

О *M*- И *U*-МНОЖЕСТВАХ ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ УОЛША

А.Д. Казакова[1], М.Г. Плотников[2]

1 *anna.kazakova@math.msu.ru*; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
2 *mikhail.plotnikov@math.msu.ru;*; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Исследуются кратные нуль-ряды по системе Уолша, а также арифметическая структура M- и U-множеств нулевой меры.

Ключевые слова: кратные ряды Уолша, нуль-ряды, U-множества, M-множества.

Нуль-рядом по некоторой системе функций $\{\phi_n(x)\}$ называется ряд $\sum c_n\phi_n(x)$, который почти всюду сходится к нулю, хотя не все его коэффициенты равны нулю. Знаменитый пример тригонометрического нуль-ряда был построен Д.Е. Меньшовым [1]. Первый пример нуль-ряда по системе Уолша был построен В.А. Скворцовым [2]. Работы [3] и [4] посвящены вопросу о том, насколько быстро могут стремиться к нулю коэффициенты нуль-рядов. В частности, Г.Г. Геворкян [4] показал, что для всякой стремящейся к нулю последовательности не из l_2 найдется нуль-ряд по системе Уолша, коэффициенты которого мажорируются этой последовательностью.

Приведенные выше работы дают ответ на вопрос о существовании нуль-рядов не только для одномерных, но и для кратных рядов при различных видах сходимости [5]. Например, если $\sum\limits_n a_n\phi_n(x_1)$ и $\sum\limits_m b_m\phi_m(x_2)$ — одномерные нуль-ряды, F_1 и F_2 множества нулевой меры, на которых они не сходятся к нулю (такие множества называют *М-множествами*), то двойной ряд $\sum\limits_{n,m} a_n b_m\phi_n(x_1)\phi_m(x_2)$ является нуль-рядом по системе $\{\phi_n(x_1)\phi_m(x_2)\}$ при сходимости по прямоугольникам или кубам, а множество $F = (F_1 \times [0,1]) \cup ([0,1] \times F_2)$ является M-множеством. Н.Н. Холщевникова [5] отмечает, что построенные таким образом M-множества меры нуль всегда будут иметь проекцию хотя бы на одну из координатных осей меры 1. Также в [5] поставлен вопрос о построении M-множества, содержащегося, например, в квадрате $0 \le x_1 \le 1/2, 0 \le x_2 \le 1/2$. Ответ положительный (замечание 1).

Отметим также, что у множества F несчетное количество сечений вдоль каждой из координатных осей, имеющих полную одномерную меру Лебега. Возникает вопрос: можно ли построить M-множества такое, что любое его сечение плоскостью, параллельной координатной, имеет меру нуль, и при этом дополнение этого множества не является декартовым произведением одномерных множеств. Теорема 1 дает положительный ответ.

Конструкция. *Пусть последовательность* $\{m_s\}$ *такая, что* $m_{s+1} \ge 2\cdot(2m_s+1)$, $F = \cap_{s=1}^{\infty} F_s$*, где* F_s *— объединение "графиков", точнее линий уровня* 1*,* d*-мерных функций Уолша* $W_{\mathbf{n}}$*,* $2^{m_s}\cdot\mathbf{1} \le \mathbf{n} \le 2^{m_s+1}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{1}$*, сжатых до определенного куба ранга* m_s*: кубу* $\Delta_{\mathbf{i}}^{(m_s)} = \left[\frac{i_1-1}{2^{m_s}}, \frac{i_1}{2^{m_s}}\right) \times \ldots \times \left[\frac{i_d-1}{2^{m_s}}, \frac{i_d}{2^{m_s}}\right)$ *соответствует функция Уолша с номером* $2^{m_s}\cdot\mathbf{1}+\mathbf{i}$.

Теорема 1. *Множество* F *из конструкции выше —* M*-множество для* d*-мерной системы Уолша при сходимости по прямоугольникам.*

Замечание 1. *Если "сжать" множество* F *до куба* $\mathbf{0} \le \mathbf{x} \le \frac{1}{2}\cdot\mathbf{1}$*, то тоже получится* M*-множество.*

Теорема 2. *Существует нуль-ряд* $\sum\limits_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}} W_{\mathbf{n}}$*, который "реализует"* M*-множество* F *такой, что его коэффициенты сосредоточены около главной диагонали:* $|b_{\mathbf{n}}| = \frac{2^s}{2^{dm_s+1}}$ *при* $2^{2m_s}\cdot\mathbf{1} \le \mathbf{n} \le 2^{2m_s+1}\cdot\mathbf{1}-1$ *и равны нулю иначе.*

Если $a_{\mathbf{n}} = o(b_{\mathbf{n}})$ *и ряд* $\sum\limits_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} W_{\mathbf{n}}$ *сходится по кубам к нулю вне* F*, то все* $a_{\mathbf{n}} = 0$.

Следующая теорема обобщает результаты, полученные в [6].

Теорема 3. *Пусть* F_s*— объединение "графиков" одной и той же* d*-мерной функции Уолша с номером таким, что* $2^{m_s}\cdot\mathbf{1} \le \mathbf{n} \le 2^{m_s+1}\cdot\mathbf{1}-1$*, сжатых до квадратов ранга* m_s*. Тогда множество* $F = \cap_{s=1}^{\infty} F_s$ *является* U*-множеством при сходимости по прямоугольникам, а в некоторых случаях даже по кубам (например, если* $\mathbf{n} = n\cdot\mathbf{1}$*,* $2^{m_s} \le n \le 2^{m_s+1}-1$*).*

Первый автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Литература

1. Меньшов Д. Е. *Избранные труды. Математика.* – М.: Факториал, 1997.

2. Скворцов В. А. *Об одном примере нуль-ряда по системе Уолша* // Матем. заметки. – 1976. – Т. 19. – № 2. – С. 179–186.

3. Скворцов В. А. *О скорости стремления к нулю коэффициентов нуль-рядов по системам Хаара и Уолша* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977. – Т. 41. – № 3. – С. 703–716.

4. Gevorkian G. G. *On coefficients of null-series and on sets of uniqueness of trigonometric and Walsh systems* // Analysis Mathematica. – 1988. – Т. 14. – С. 219–251.

5. Холщевникова Н. Н. *Счетнократные нуль-ряды // Ортогональные ряды, теория приближений и смежные вопросы. Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Б.С.Кашина* Труды МИАН. – М.: МАИК «Наука/Интерпериодика». – 2013. – Т. 280. – С. 288–299.

6. Плотников М. Г. *Квазимеры на группе G^m, множества Дирихле и проблемы единственности для кратных рядов Уолша* // Матем. сб. – 2010. – Т. 201. – № 12. – С. 131–156.

ON M- AND U-SETS FOR MULTIPLE WALSH SERIES

A.D. Kazakova, M.G. Plotnikov

Multiple zero-series in the Walsh system as well as the arithmetic structure of M- and U-sets of zero measure are investigated.

Keywords: multiple Walsh series, null series, U-sets, M-sets.

УДК 517.54

К ТЕОРЕМЕ С.Р. НАСЫРОВА

А.В. Казанцев[1]

1 *avkazantsev63@gmail.com*; Университет науки и технологий МИСИС

Развиваются идеи, связанные с теоремой С.Р. Насырова 1986 г. о единственности корня уравнения Гахова при условии положительности якобиана отображения Гахова.

Ключевые слова: отображение Гахова, конформный радиус, экстремумы, якобиан.

В 1986 г. на одной дискуссии (см. [1]) С.Р. Насыров сформулировал и доказал важное утверждение, которое осталось неопубликованным. Приведем его в рамках постановки, связанной с классами Гахова (см., напр., [2]).

Пусть H – класс функций f, голоморфных в круге $E = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, H_0 – класс функций $f \in H$, локально однолистных в E с нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Для функции $f \in H_0$ корректно определено отображение Гахова $\Phi(\zeta,\bar{\zeta}) = 2(\ln R_f(\zeta))_\zeta$, где $R_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)|f'(\zeta)|$ – конформный радиус. Регулярный класс Гахова $\mathcal{G}_1$ состоит в точности из тех функций $f \in H_0$, для которых отображение Гахова имеет единственный нуль в E, являющийся максимумом $R_f(\zeta)$. Для любого подкласса $X \subset H$ обозначаем $\tilde{X} = X \cap \{f \in H : f''(0) = 0\}$. Отношение $F = f''/f'$ есть предшварциан функции f.

Теорема С.Р. Насырова. *Если для непостоянной функции $f \in H$ выполняется условие $\lim_{\zeta \to \partial E} \Phi(\zeta,\bar{\zeta}) = \infty$ и одна из строгих оценок*

1) $|F'(\zeta) - 2\bar{\zeta}^2/(1 - |\zeta|^2)^2| < 2/(1 - |\zeta|^2)^2, \quad \zeta \in E,$

2) $|F'(\zeta)| < 2/(1-|\zeta|^2)$, $\zeta \in E$,

то отображение Гахова инъективно и имеет единственный нуль в E, причем нормированная функция $[f - f(0)]/f'(0) \in \mathcal{G}_1$.

Нестрогие версии условий единственности 1) и 2) установлены, соответственно, в работах [3] и [1]. Исследования, связанные с 2), развивались в [1], [2]. Некоторые классы функций, связанные с теоремой С. Р. Насырова, исследуются в рамках настоящего доклада. Отметим некоторые моменты.

1^0. Рассмотрим три пары условий вида (а) $|F' - a| \le b$, (б) $|F' - b| \le a$ ($\zeta \in E$). При $a = 2|\zeta|^2/(1-|\zeta|^2)$, $b = 2/(1-|\zeta|^2)$ оба условия (а) и (б) обеспечивает принадлежность $f \in \tilde{\mathcal{G}}_1$, но условию (б) удовлетворяет только одна функция. При $a = 2$, $b = 2/(1-|\zeta|^2)$ неравенство (а) не является условием единственности (нулевой) критической точки $R_f(\zeta)$, условие (б) бессодержательно, как и условие (б) для $a = 2$, $b = 2|\zeta|^2/(1-|\zeta|^2)$. А вот оценка (а) в последнем случае есть содержательное условие единственности, включенное в следующую теорему при $\alpha = \gamma = 2$:

Теорема 1. *Функция $f \in H$, удовлетворяющая при* $0 \le \alpha \le 2$, $0 \le \gamma \le 6$ *условию* $|F'(\zeta) - \alpha| \le \gamma|\zeta|^2/(1-|\zeta|^2)$*, $\zeta \in E$, имеет единственную (при $\gamma \le 2$ не обязательно нулевую!) критическую точку конформного радиуса $R_f(\zeta)$ в круге E.*

2^0. Если поставить вопрос о геометризации неравенства из теоремы 1, т.е. построении условий подчиненности, достаточных для его выполнения (см. [4]), то пример такого условия дает следующая

Теорема 2. *Пусть предшварциан* $F(\zeta) = \alpha\zeta + a_3\zeta^3 + \ldots$ *функции $f \in \tilde{H}_0$ удовлетворяет условию $|F'(\zeta) - \alpha| \le 3\beta$, $\zeta \in E$. Максимальная область в $\mathbb{R}^2_+$, принадлежность которой параметра (β, α) обеспечивает включение $f \in \tilde{\mathcal{G}}_1$, представляет собой объединение квадрата* $[0,2] \times [0,2]$ *и криволинейной трапеции над отрезком* $2 \le \beta \le 8$ *с выброшенным графиком определяющей ее функции* $\alpha = 2\sqrt{2\beta} - \beta$.

3^0. В свете отмеченной проблемы распознавания бессодержательных неравенств (см. п. **1^0**) важной характеристикой подкласса $X \subset H_0$ является его наполненность, под которой мы понимаем наличие в X бесконечного семейства различных функций (с указанной проблемой связан и эффект жесткости из [3]). Для каждого рассматриваемого класса мы будем указывать такое семейство или доказывать его отсутствие. При этом нормировки, определяющие H_0, отсеивают тривиальные семейства вида $a + bf(\zeta)$, $a, b \in \mathbb{C}$, каждое из которых фактически представляет одну функцию $f \in X$.

Литература

1. Казанцев А. В. *Множество Гахова в пространстве Хорнича при блоховских ограничениях на предшварцианы* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 65-82.

2. Казанцев А. В. *Единственность корня уравнения Гахова в классах функций с ограниченным предшварцианом* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 4. – С. 526-535.

3. Казанцев А. В. *Бифуркации и новые условия единственности критических точек гиперболических производных* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 180-194.

4. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций* // Успехи мат. наук. – 1975. – Т. 30. – Вып. 4. – С. 3–60.

ON S.R. NASYROV'S THEOREM

A.V. Kazantsev

We develop ideas going back to S.R. Nasyrov's theorem (1986) about the uniqueness of root of the Gakhov equation when the Jacobian of the Gakhov mapping is positive.

Keywords: Gakhov mapping, conformal radius, extrema, Jacobian.

УДК 517.518.1, 517.22, 514.747

ГРАФИКИ И КОМПОЗИЦИИ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ДВУХСТУПЕНЧАТЫХ ГРУППАХ КАРНО

М.Б. Карманова[1]

1 *maryka84@gmail.com*; Новосибирский государственный университет, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Мы исследуем метрические свойства обобщений отображений-графиков на двухступенчатых группах Карно, а также выводим некоторые тонкие свойства липшицевых графиков, построенных на таких группах.

Ключевые слова: отображение-график, липшицево отображение, двухступенчатая группа Карно, формула площади

Доклад посвящен исследованию свойств обобщений отображений-графиков на двухступенчатых группах Карно, а также, некоторым тонким свойствам липшицевых графиков, построенных на таких группах. Связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$ называется *группой Карно*, если ее алгебра Ли V представима в виде $V = V_1 \oplus V_2$, $[V_1, V_1] = V_2$, $[V_1, V_2] = \{0\}$. Если базисное поле X_l принадлежит V_k, то его *степень* $\deg X_l$ равна k, $l = 1, \dots, N$, $k = 1, 2$. Здесь и далее N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$. Субриманово расстояние на $\mathbb{G}$ задается, как

$$d_2(v, w) = \max\Big\{\Big(\sum_{j:\deg X_j=1} w_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \Big(\sum_{j:\deg X_j=2} w_j^2\Big)^{\frac{1}{4}}\Big\},$$

где $w = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\Big)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Очевидно, что оно не является билипшицево эквивалентным расстоянию, определяемому римановым тензором. Следовательно, отображения, являющиеся липшицевыми относительно d_2, в общем случае гёльдеровы относительно римановых метрик.

Мы предполагаем, что $\widetilde{\mathbb{G}}$, $\widehat{\mathbb{G}}$ и $\mathbb{G}$ — двухступенчатые группы Карно, для которых выполняются следующие условия. Группы $\widetilde{\mathbb{G}}$ и $\widehat{\mathbb{G}}$ с базисными полями $\{\widetilde{X}_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$ и $\{\widehat{X}_j\}_{j=1}^{\widehat{N}}$ соответственно являются подмножествами группы $\mathbb{G}$ топологической размерности $N = \widetilde{N} + \widehat{N}$. Кроме того, поля $\{X_i\}_{i=1}^{N}$ на $\mathbb{G}$ таковы, что, во-первых, $\dim V_k = \dim \widetilde{V}_k + \dim \widehat{V}_k$, $k = 1, 2$, и, во-вторых,

$$X_1|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_1, \dots, X_{\dim V_1}|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\dim \widetilde{V}_1}, \; X_{\dim V_1+1}|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\dim \widetilde{V}_1+1}, \dots, X_{\dim V_1+\dim \widetilde{V}_2}|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\widetilde{N}}$$

и

$$X_{\dim \widetilde{V}_1+1}|_{\widehat{\mathbb{G}}} = \widehat{X}_1, \ldots, X_{\dim V_1}|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\dim \widehat{V}_1}, \ X_{\dim V_1+\dim \widetilde{V}_2+1}|_{\widehat{\mathbb{G}}} = \widehat{X}_{\dim \widehat{V}_1+1}, \ldots, X_N|_{\widehat{\mathbb{G}}} = \widehat{X}_{\widehat{N}}.$$

Предположим также, что $\widetilde{\mathbb{G}}$ и $\widehat{\mathbb{G}}$ пересекаются по своим единицам в единице $\mathbf{0}$ группы $\mathbb{G}$ (это всегда можно сделать посредством сдвигов).

Пусть еще $\mathscr{G}$ — некоторая двухступенчатая группа Карно топологический размерности $\mathscr{N}$ с алгеброй Ли $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$. Будем считать, что $\dim \mathcal{V}_1 \le \dim V_1$ и $\dim \mathcal{V}_2 \le \dim V_2$.

Для отображений $\varphi : \mathscr{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ и $\psi : \mathscr{G} \to \widehat{\mathbb{G}}$, липшицевых относительно субримановых (т. е., построенных по аналогии с d_2) расстояний, где

$$\varphi(x) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}} \varphi_i(x)\widetilde{X}_i\Big)(\mathbf{0}) \text{ и } \psi(x) = \exp\Big(\sum_{j=1}^{\widehat{N}} \psi_j(x)\widehat{X}_i\Big)(\mathbf{0}),$$

композиция ψ_φ отображений φ и ψ строится следующим образом:

$$\psi_\varphi(x) = \exp\Big(\sum_{k=\dim \widetilde{V}_1+1}^{\dim V_1} \psi_{k-\dim \widetilde{V}_1}(x)X_k + \sum_{k=\dim V_1+\dim \widetilde{V}_2+1}^{N} \psi_{k-\widetilde{N}}(x)X_k\Big)(\varphi(x)).$$

В частном случае, когда φ — тождественное отображение, мы получаем отображение-график ψ_Γ.

Известно (см. работы P. Pansu и С.К. Водопьянова), что отображения, являющиеся липшицевыми относительно субримановых расстояний, являются субриманово дифференцируемыми почти всюду, то есть, локально аппроксимируются горизонтальным гомоморфизмом с точностью до величины $o(\cdot)$ относительно субримановых расстояний. При некоторых дополнительных ограничениях отображения субриманово дифференцируемы всюду, а субриманов дифференциал непрерывен.

Однако, ни отображения-графики, ни композиции ψ_φ в общем случае не являются липшицевыми ни в классическом, ни в субримановом смысле. Тем не менее, как установлено в работах автора, отображения-графики можно приблизить некоторым полиномом с точностью до величины $o(\cdot)$ относительно субримановых расстояний. Такой полином называется *полиномиальным субримановым дифференциалом*. В ходе доклада мы опишем аналог полиномиального субриманова дифференциала для композиций, а также, установим условия биективности композиций для описанных выше условий задачи. Отметим, что для отображений-графиков вопросы о его биективности решаются относительно легко, тогда как для композиций вида ψ_φ этот вопрос является специфическим.

Основной результат доклада — формула площади, где якобиан найден в явном виде в терминах субримановых дифференциалов φ и ψ:

$$\int_D \prod_{k=1}^{2} \sqrt{\det\big(\widehat{D}_k\varphi^*(x)\widehat{D}_k\varphi(x) + \widehat{D}_k\psi^*(x)\widehat{D}_k\psi(x)\big)}\, d\mathscr{H}^\nu(x) = \mathscr{H}^\nu_{\psi_\varphi}\big(\psi_\varphi(D)\big).$$

Заметим, что такой способ задания отображения обобщает отображения-графики. Он включает «графики», где элементу прообраза сопоставляется не этот элемент в паре с образом при отображении, а некоторое его искажение, включая случай проекции, и образ при отображении.

Дополнительно, в качестве иллюстрации к исследованию композиций и графиков, будут приведены примеры, когда график нелипшицевых отображений является липшицевым, а также, сформулирован критерий липшицевости графика на двухступенчатых группах Карно в терминах задающего этот график отображения. А именно, график $\varphi_\Gamma : \mathbb{G} \to \widehat{\mathbb{G}}$, построенный как

$$\mathbb{G} \ni w \mapsto \exp\Bigl(\sum_{j=\dim V_1+1}^{\dim \widehat{V}_1} \varphi_{j-\dim V_1}(w)\widehat{X}_j + \sum_{j=\dim \widehat{V}_1+\dim V_2+1}^{\widehat{N}} \varphi_{j-N}(w)\widehat{X}_j\Bigr)(w),$$

где $\varphi(w) = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{\widetilde{N}} \varphi_j(w)\widetilde{X}_j\Bigr)(\mathbf{0})$, является липшицевым относительно d_2 и $\widehat{d_2}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.

1. Координатные функции φ_j липшицевы во внутреннем смысле, если $j \le \dim \widetilde{V}_1$.
2. Если $k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$, то верно
$$\sum_{\mu:\, \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u) = 0$$
для всех $\beta = 1, \dots, \dim V_1$ и $u \in \mathbb{G}$.
3. Для $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ и точек $u, w_H \in \mathbb{G}$ таких, что $w_H = \exp\Bigl(\sum\limits_{\beta=1}^{\dim V_1} w_\beta X_\beta\Bigr)(u)$, функция $w_H \mapsto \varphi^{k-N}_u(w_H)$ дифференцируема (в классическом смысле) в u, ее дифференциал равен
$$\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Bigl(\sum_{\mu:\, \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]} 2F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\Bigr)w_\beta, \tag{11}$$
а величина $o(1)$ из определения дифференцируемости не превосходит $Q \cdot \sqrt{\sum\limits_{\beta=1}^{\dim V_1}(w_\beta)^2}$, где константа $0 < Q < \infty$ не зависит от u.

   Если же $w_T = \exp\Bigl(\sum\limits_{\lambda=\dim V_1+1}^{N} w_\lambda X_\lambda\Bigr)(u)$, то
$$|\varphi^{k-N}_u(w_T)| \le C \cdot \sqrt{\sum_{\lambda=\dim V_1+1}^{N}(w_\lambda)^2},\ C < \infty. \tag{12}$$

Приведем пример, когда график нелипшицева во внутреннем смысле (то есть, относительно расстояний, построенных, как d_2 или эквивалентных d_2) отображения является липшицевым. Пусть $\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}} \subset \widehat{\mathbb{G}}$ таковы, что для системы

$$\sum_{\mu=\dim V_1+1}^{\dim \widehat{V}_1} F^k_{\mu,\beta}t_{\mu-\dim V_1} = 0,\ k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2,\ \beta = 1, \dots, \dim V_1,$$

существует ненулевое решение $(t_1,\ldots,t_{\dim\widetilde{V}_1})$. Для $\mu=1,\ldots,\dim\widetilde{V}_1$ положим $\varphi_\mu\equiv t_\mu$. Если же $\mu=\dim\widetilde{V}_1+1,\ldots,\widetilde{N}$, то для $w=\exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{N} w_iX_i\Big)(\mathbf{0})$ определим

$$\varphi_\mu(w)=\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Big(\sum_{\lambda:\,\lambda\in[1,\dim\widetilde{V}_1]}2F^{\mu+N}_{\lambda+\dim V_1,\beta}\varphi_\lambda\Big)w_\beta.$$

Здесь и в описании критерия липшицевости графика $\{F^j_{\mu,\beta}\}$ — структурные константы группы Карно.

GRAPHS AND COMPOSITIONS OF MAPPINGS ON TWO-STEP CARNOT GROUPS

M.B. Karmanova

We study metric properties of generalizations of graph-mappings on two-step Carnot groups, and derive some fine properties of Lipschitz graphs constructed on these groups.

Keywords: graph-mapping, Lipschitz mapping, two-step Carnot group, area formula.

UDC 514.822

SATURATED-UNSATURATED SEEPAGE FROM KORNEV'S SUBSURFACE ELEMENT: COMPARISON OF ANALYTIC AND NUMERICAL SOLUTIONS

A.R. Kacimov[1], Yu.V. Obnosov[2], A.B. Umarova[3], N.B. Sadovnikova[4], A. Al-Shukeili[5], A.V. Smagin[6]

1 *anvar@squ.edu.om*; Sultan Qaboos University
2 *yobnosov@kpfu.ru*; Kazan Federal University
3 *a.b.umarova@gmail.com*; Lomonosov Moscow State University
4 *nsadovnik@rambler.ru*; Lomonosov Moscow State University; Institute of Forest Science, Russian Academy of Sciences
5 *a.alshukaili@squ.edu.om*; Sultan Qaboos University
6 *avsmag1965@gmail.com*; Lomonosov Moscow State University; Lomonosov Moscow State University; Institute of Forest Science, Russian Academy of Sciences

Subsurface emitters (SEs) are modeled as line sources with descending Darcian seepage impeded by either a natural impervious horizont or by designed and constructed barrier, which makes a wedge beneath SE. An analytical model assumes a tension-saturated steady-state 2D flow (Laplace's governing PDE) near an emitter, with a capping phreatic line, along which the stream function linearly depends on the horizontal coordinate that allows to use the Polubarinova-Kochina technique, videlicet a conformal mapping of a circular trigon in the hodograph domain on a reference half-plane. In the finite element model (HYDRUD2D, the Richards-Richardson PDE), a transient initial value problem (giving an asymptotic steady-state limit is solved in a fixed domain (an isosceles curvilinear tetragon or trapeziumIsobars, isohumes, streamlines,isotachs and the Christiansen uniformity coefficient are computed.

Keywords: conformal mapping of circular polygons, Riemann-Hilbert's problem, HYDRUS2D modeling, seepage flow topology, field experiments.

For saturated flows (Strack, 1989), the Darcian velocity, $\overrightarrow{V}(x,y)$ obeys the relation $\overrightarrow{V}(x,y)=-k\nabla h$. The hydraulic (piezometric) head $h(x,y)=p(x,y)+y$ in homogeneous incompressible soils, k is a constant saturated hydraulic conductivity and involves the pressure head, $p(x,y)$, is positive everywhere. For incompressible pore water in Welsh's seepage domain, G_z (see Fig.1a), a free boundary, BMC, caps G_z. In the Vedernikov-Bouwer model for steady-state seepage $h(x,y)$ is a harmonic function. A complex potential $w = \varphi + i\psi$ is introduced, where $\varphi = -kh$ is the velocity potential, and ψ is a stream function.

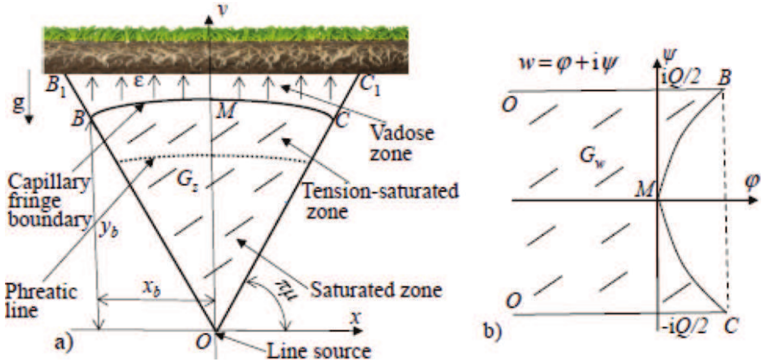


Fig. 1. Vertical cross-section of the physical flow domain (a), complex potential domain (b).

A complex Darcian velocity (an antiholomorphic function) is $V = u + iv$, where $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are the horizontal and vertical components of $\overrightarrow{V}(x,y,t)$. The complex potential domain G_w is shown in Fig.1b (point M is fiducial). The shape of BMC in G_w is not known. The hodograph domain, corresponding to G_z and G_w, is a circular triangle $G_V = \{V : \pi\mu < \arg V <: \pi(1-\mu), |2V + i(k-\varepsilon)| > (k+\varepsilon)\}$. The boundary-value problem (BVP) in G_z is formulated as:

$$OB: \psi = Q/2,\ y = \tan\pi\mu x; OC: \psi = -Q/2,\ y = -\tan\pi\mu x; BMC: \varphi + ky = -p_c, \psi = \varepsilon x. \tag{1}$$

where ε and k are constants such that $0 < \varepsilon < \infty$, $0 < k < \infty$, ε is the intensity of evapotranspiration from BMC, and p_c is a the height of capillary rise in a vertical soil column.

To solve BVP (1) the upper half of a reference (auxiliary) ζ-plane G_ζ is conformally mapped onto the circular triangle $G_\Omega = \{\Omega : \pi\mu < \arg\Omega < \pi(1-\mu),), |2k\varepsilon\Omega + i(k-\varepsilon)| < (k+\varepsilon)\}$ in the plane $\Omega = \partial z/\partial w$. Here G_Ω is a circular triangle onto which the function $1/V$ maps a triangle symmetrical with G_V relative to the real axis. An analytical function mapping the upper half of the reference plane onto the triangle G_Ω is

$$\Omega(\zeta) = e^{i\pi\mu} R\zeta^{1-2\mu} f(\zeta; 1-\mu)/f(\zeta;\mu), \tag{2}$$

where $f(\zeta;\mu), = \mathrm{F}((\mu-\nu)/2 - 1/4, (\mu-\nu)/2 + 1/4; 1/2+\mu; \zeta^2)$ (F is the hypergeometric function), and parameters ν, R are determined as $\pi\nu = \arccos\sqrt{1 - \left(\frac{k-\varepsilon}{k+\varepsilon}\right)^2 (\cos\pi\mu)^2}$,

$$R = \frac{k-\varepsilon}{2^{2-2\mu}k\varepsilon}\left[\sin\pi\mu + \sqrt{\left(\frac{k+\varepsilon}{k-\varepsilon}\right)^2 - (\cos\pi\mu)^2}\right]\frac{\Gamma(3/2-\mu+\nu)\Gamma(1/2+\mu)}{\Gamma(1/2-\mu)\Gamma(1/2+\mu+\nu)}.$$

We introduce the following functions:

$$W(\zeta) = \mathrm{d}w/\mathrm{d}\zeta, \qquad Z(\zeta = \mathrm{d}z/\mathrm{d}\zeta, \tag{3}$$

such that $Z(\zeta) = \Omega(\zeta)W(\zeta)$. Next, we show that the BVP (1) is reduced to the following simpler one:

$$\mathrm{Im}W(\xi) = 0, -1 < \xi < 1; \quad \mathrm{Im}[(k\Omega(\xi) + \mathrm{i})W(\xi)] = 0, \xi < -1, \xi > 1. \tag{4}$$

The Riemann BVP (4) has an unique (up to real multiplier d) solution. This solution $W(\zeta)$ and the corresponding function $Z(\zeta)$ could be written down in the following form:

$$W(\zeta) = d\zeta^{-1}(1-\zeta^2)^{-3/4+\mu/2-\nu/2}f(\zeta,\mu),\ Z(\zeta) = d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mu}R\zeta^{-2\mu}(1-\zeta^2)^{-3/4+\mu/2-\nu/2}f(\zeta,1-\mu). \tag{5}$$

In accordance with (3), (5)

$$w(\zeta) = d\int_{-\infty}^{\zeta}(1-\tau^2)^{-3/4+\mu/2-\nu/2}f(\tau;\mu)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau},$$

$$z(\zeta) = d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mu}R\int_0^{\zeta}\tau^{-2\mu}(1-\tau^2)^{-3/4+\mu/2-\nu/2}f(\tau;1-\mu)\mathrm{d}\tau.$$

A real constant d is found from the condition $\mathrm{Im}w(-1) = Q/2$, which gives $d = Q/\pi$. Eventually, the free boundary and flow net are plotted.

In the unsaturated-saturated flow model for transient seepage, p and the volumetric moisture content θ are interrelated via the Van Genuchten relationship, $k(p)$ is another characteristic function of the soil, such that a nonlinear parabolic Richards-Richardson equation holds in a fixed flow domain. Initial boundary value problems are solved by the finite element method with the help of HYDRUS2D package (Radcliffe and Simunek, 2018). Three seepage problems are modeled. First, for comparisons with the analytical solution, a curvilinear tetragon is considered as a flow tube, with a circular arc serving as a “feeding” positive-pressure isobar and horizontal segment of the soil surface as an evaporating isobar such that a 2-D ascending flow crosses an aposteriori determined phreatic line and makes a vadose zone above it. Second, we model infiltration in a lysimeter of Moscow State University station (Umarova et al., 2021). The flow domain is a trapezium with a tilted bottom and a blanket drain on its part. A “perched” phreatic line emerges above such drain with a vadose zone making a mini-bubble (Fig.2). Third, we model infiltration in a two-component composite, which consists of a bulk sandy soil and a cylindrical lens of peat (Smagin, 2005) or fine-textured loam such that an essentially axisymmetric seepage is transformed from a purely unsaturated to saturated-unsaturated one, involving nontrivial phreatic surfacessimilar to one in Fig.2. For all three cases we reconstruct the vector fields of Darcian velocity, and scalar field of isobars, isotachs and isohumes.

This work was funded by Russian Scientific Foundation, interdisciplinary project no. 23-64-10002 and Sultan Qaboos University, grant IG/AGR/SWAE/24/2.

References

1. Radcliffe D. E. and Simunek J. *Soil Physics with HYDRUS: Modeling and Applications.* – CRC Press, 2018.

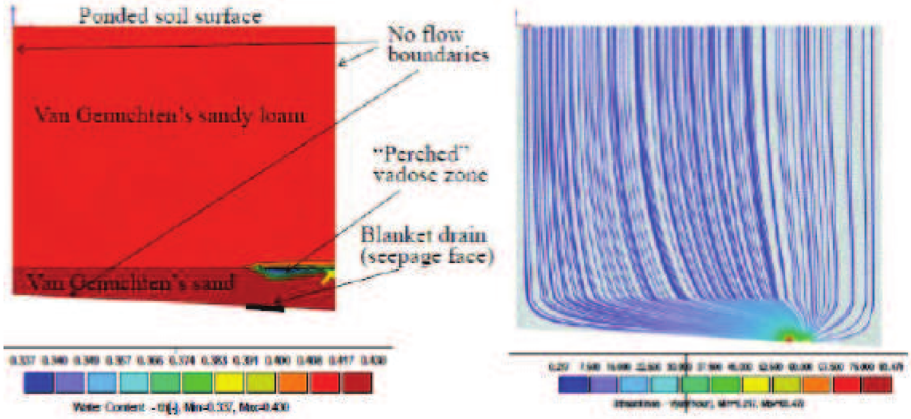


Fig. 2. Results of HYDRUS2D computations (steady-state limit). Volumetric moisture content and streamlines (left and right panels, correspondingly).

2. Smagin A. V. *Arid Grow-Ideal Soil System.* – Moscow State University Press [in Russian], 2005.

3. Strack O. D. L. *Groundwater Mechanics.* – Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.

4. Umarova A. B., Arkhangelskaya T. A., Kokoreva A. A., Ezhelev Z. S., Shnyrev N. A., Kolupaeva V. N., Ivanova T. V. and Shishkin K. V. *Long-term research on physical properties of soils in the MSU large lysimeters: main results for the first 60 years (1961–2021)* // Moscow University Soil Science Bulletin. – 2021. – V. 76. – P. 95-110.

НАСЫЩЕННАЯ И НЕНАСЫЩЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗ ОРОСИТЕЛЯ-ДРЕНЫ КОРНЕВА: СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ

А.Р. Касимов, Ю.В. Обносов, А.Б. Умарова, Н.Б. Садовникова, А. Аль-Шукейли, А.В. Смагин

Подземные оросители моделируются линейными источниками, с фильтрацией, которая блокируется либо естественным непроницаемым горизонтом либо искуственным барьером, который образуют клин под оросителем. Аналитическая модель предполагает насыщенный стационарный двумерный поток (описываемый уравнением Лапласа) в облестаи со свободной границей, вдоль которой функция потока линейно зависит от горизонтальной координаты, что позволяет применить технику Полубариновой-Кочиной, использующую конформное отображение кругового треугольника в области годографа на вспомогательную полуплоскость. Методом конечных элементов (пакет HYDRUD2D, уравнение Ричардса-Ричардсона) нестационарная начальная задача (дающая асимптотический предел стационарного состояния) решается в фиксированной области (равнобедренный криволинейный четырехугольник или трапеция). Вычисляются изобары, изохьюмы, линии тока, изотахи и коэффициент однородности Кристиансена.

Ключевые слова: конформное отображение круговых многоугольников, задача Римана-Гильберта, моделирование на HYDRUS2D, топология фильтрационного течения, полевые эксперименты.

УДК 514.76.3, 517.95

НЕРАВЕНСТВО ЙЕНСЕНА КАК КРИТЕРИЙ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ

В.А. Клячин[1]

1 *klyachin.va@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет

В настоящей статье показано, что если неравенство Йенсена выполняется для непрерывной функции f на любом симплексе, то функция f является выпуклой вниз. В статье вводится понятие дефекта выпуклости непрерывной функции, так, что он является отрицательным для выпуклых функций. Используя линейные свойства дефекта выпуклости, мы доказываем интегральный признак δ-выпуклости непрерывной функции. Он утверждает, что если дефект выпуклости не превосходит квадратичной функции от диаметра симплекса, то функция δ-выпукла. Из этого признака получается интегральное условие дважды почти всюду дифференцируемости непрерывной функции.

Ключевые слова: выпуклые функции, неравенство Йенсена, геометрический центр, весовой центр масс, δ-выпуклые функции.

Пусть в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ определена локально суммируемая функция $w(x) \geq 0$, причем множество $\{x : w(x) = 0\}$ нигде не плотно. Для измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ определим величину

$$|A|_w = \int\limits_A w(x)dx.$$

Функцию w можно рассматривать как плотность распределения массы. Соответственно можно определить *весовой центр масс* множества A

$$x_w^A = \frac{1}{|A|_w}\int\limits_A xw(x)dx.$$

В случае $w(x) \equiv \mathrm{const}$ точка x_w^A представляет собой обычный геометрический центр множества A.

Классическое интегральное неравенство Йенсена утверждает, что для выпуклой вниз функции $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выполнено

$$f(x_w^A) = f\left(\frac{1}{|A|_w}\int\limits_A xw(x)dx\right) \leq \frac{1}{|A|_w}\int\limits_A f(x)w(x)dx. \tag{1}$$

Будем предполагать, что для всякого n-мерного симплекса $S \subset D$ задана непрерывная функция $w_S(x) \geq 0$, $x \in S$, непрерывно зависящая от вершин симплекса S.

Теорема 1. *Непрерывная функция $f(x)$, заданная в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ выпукла вниз тогда и только тогда, когда для любого n-мерного симплекса $S \subset D$ выполнено*

$$f\left(x_{w_S}^S\right) \leq \frac{1}{|S|_{w_S}}\int\limits_S f(t)w_S(t)dt. \tag{2}$$

Величину

$$d_f(S) = f(x_S^{w_S}) - \frac{1}{|S|_{w_S}} \int\limits_S f(x)\, w_S(x)\, dx$$

назовем дефектом выпуклости непрерывной функции f. Из теоремы 1 следует, что непрерывная функция $f(x)$ будет выпуклой тогда и только тогда, когда ее дефект выпуклости $d_f(S) \le 0$ на любом симплексе $S \subset D$. Пусть B – произвольная симметричная, положительно определенная матрица.

Следствие 1.*Пусть непрерывная функция $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ для любого симплекса $S \subset D$ удовлетворяет неравенству*

$$f(x_S^{w_S}) \le \frac{1}{|S|_{w_S}} \int\limits_S f(x)\, w_S(x)\, dx + \frac{1}{|S|_{w_S}} \int\limits_S \langle B(x - x_S^{w_S}), x - x_S^{w_S} \rangle\, w_S(x)\, dx.$$

Тогда функция $f(x) + \langle Bx, x \rangle$ выпукла вниз.

Напомним, что функция называется δ-выпуклой, если она представима разностью двух выпуклых функций.

Теорема 2.*Предположим, что найдется постоянная $\lambda \ge 0$, такая, что для всякого симплекса $S \subset D$ выполнено неравенство*

$$f(x_S^{w_S}) \le \frac{1}{|S|_{w_S}} \int\limits_S f(x)\, w_S(x)\, dx + \lambda \cdot \mathrm{diam}^2(S).$$

Тогда функция f является δ-выпуклой.

Литература

1. Лехтвейс, К. Выпуклые множества. – М.: Наука, 1985. – 336 с.

JENSEN'S INEQUALITY AS A CRITERION FOR THE CONVEXITY OF A CONTINUOUS FUNCTION

V.A. Klyachin

In this paper we show that if Jensen's inequality holds for a continuous function f for any simplex, then f is convex downwards. We introduce the concept of the convexity defect of a continuous function, so that it is negative for convex functions. Using the linear properties of the convexity defect, we prove an integral criterion for δ-convexity of a continuous function. It states that if the convexity defect does not exceed a quadratic function of the diameter of the simplex, then the function is δ-convex. From this criterion we obtain an integral condition for twice almost everywhere differentiability of a continuous function.

Keywords: convex functions, Jensen inequality, geometric center, weight center of mass, δ-convex functions.

УДК 517.54

СЕМЕЙСТВО ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА КРУГОВОЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

И.А. Колесников[1]

1 *ia.kolesnikov@mail.ru*; Томский государственный университет, механико-математический факультет

В работе рассматривается семейство четырехугольников $\Delta(t)$, $t \in [0,T]$, одна сторона которых является дугой окружности, остальные три — отрезками прямых. Сторона четырехугольника $\Delta(t)$, являющаяся дугой окружности, подвижна: вершины, лежащие в основании этой стороны перемещаются по линейному относительно параметра t закону, при этом углы четырехугольника $\Delta(t)$ остаются неизменными. Получены условия на дифференциальное уравнение для семейства отображений $f : \mathbb{H} \times [0,T] \to \Delta(t)$, $f = f(z,t)$, где $\mathbb{H}$ — верхняя полуплоксость, отображение f при фиксированном t переводит конформно $\mathbb{H}$ на четырехгольник $\Delta(t)$.

Ключевые слова: конформное отображение, круговой многоугольник, уравнение Шварца.

Пусть $\Delta(t)$ — семейство круговых четырехугольников с вершинами в точках $A_1 = 0$, $A_2(t) = \dfrac{\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi} - t$, $A_3(t) = \dfrac{\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi} - t\dfrac{\cos\gamma\pi}{\cos\gamma\pi + \sin(\alpha+\beta)\pi} + it\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi + \cos\gamma\pi}e^{i(\alpha+\beta+\gamma)\pi}$, $A_4 = e^{\alpha\pi}$, $t \in [0,T]$. Стороны $A_1A_2(t)$, $A_3(t)A_4$, A_4A_1, лежат на прямых, сторона $A_2(t)A_3(t)$ лежит на окружности с центром в точке $\dfrac{\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi} - t\dfrac{\cos\gamma\pi}{\cos\gamma\pi + \sin(\alpha+\beta)\pi}$ радиуса $t\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi + \cos\gamma\pi}$. Углы при вершинах $A_1, A_2, A_3(t), A_4(t)$ равны $\alpha\pi, \beta\pi, \dfrac{\pi}{2}, \gamma\pi$ соответственно, $\alpha+\beta < 1$.

Теорема. *Пусть семейство отображений $w : \mathbb{H} \times [0,T] \to \Delta(t)$, $w = w(z,t)$, при фиксированном t конформно переводит верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$ на $\Delta(t)$. Тогда семейство f удовлетворяет дифференциальному уравнению, являющемуся уравнением следующих типов:*

- $F_1\left(z, t, \dfrac{w'}{w}, \dfrac{\dot w}{w}, \dfrac{w''}{w}, \dfrac{\dot w'}{w}, \dfrac{\ddot w}{w}, \dfrac{w'''}{w}, \dfrac{\dot w''}{w}, \dfrac{\ddot w'}{w}, \dfrac{\dddot w}{w}, \dots\right) = 0,$
- $F_2\left(z, t, w', \dot w, w'', \dot w', \ddot w, w''', \dot w'', \ddot w', \dddot w, \dots\right) = 0,$
- $F_3\left(z, t, w', \dot w - \dfrac{w}{t}, w'', \dot w', \ddot w, w''', \dot w'', \ddot w', \dddot w, \dots\right) = 0,$

где точка над функцией обозначает производную по t, штрих обозначает производную по z; F_1, F_2, F_3 — дифференцируемые функции своих аргументов.

Семейство отображений полуплоскости на многоугольник с границей, состоящей из отрезков прямых рассмотрено в [1], [2].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1728/2)

Литература

1. Колесников И. А., Шарофов А. Х. *Однопараметрическое семейство конформных отображений из полуплоскости на семейство многоугольников* // Сиб. матем. журн. – 2020. – Т. 61. – № 5. – С. 1027–1040.

2. Колесников И.А. *Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца* // Сиб. матем. журн. – 2021. – Т. 62. – № 4. – С. 784–802.

FAMILY OF MAPPINGS OF THE HALF-PLANE ONTO A CIRCULAR QUADRILATERAL

I.A. Kolesnikov

In this paper, we consider a family of quadrangles $\Delta(t)$, $t \in [0,T]$, one side of which is an arc of a circle, the other three are line segments. The side of the quadrilateral $\Delta(t)$, which is an arc of a circle, is movable: the vertices lying at the base of this side move according to a law linear with respect to the parameter t, while the angles of the quadrilateral $\Delta(t)$ remain unchanged. We obtain conditions on the differential equation for the family of mappings $f : \mathbb{H} \times [0,T] \to \Delta(t)$, $f = f(z,t)$, where $\mathbb{H}$ is the upper half-plane, the mapping f for a fixed t maps conformally $\mathbb{H}$ onto the quadrilateral $\Delta(t)$.

Keywords: conformal mapping, circular polygon, the Schwarz equation.

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНОЙ МНОГОЧЛЕНОВ С НУЛЯМИ НА ПРЕДПИСАННЫХ МНОЖЕСТВАХ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ

М.А. Комаров[1]

1 *kami9@yandex.ru*; Владимирский государственный университет

Для класса полиномов степени n, нули которых лежат на заданном выпуклом компакте K, устанавливается точный порядок обратного фактора Маркова $M_n(K)$ в терминах n, диаметра и ширины K. Обсуждаются варианты задачи С.Р. Насырова о приближениях наипростейшими дробями с полюсами на окружности.

Ключевые слова: неравенство Маркова, неравенство Турана, наипростейшая дробь.

В первой части доклада обсуждается точный порядок так называемого *обратного фактора Маркова* (*Маркова–Бернштейна*)

$$M_n(K) := \inf_{P\in\Pi_n(K)} \frac{\|P'\|_K}{\|P\|_K}, \quad n \ge 1 \quad (\|\cdot\|_K := \|\cdot\|_{C(K)}),$$

для выпуклых компактов $K \subset \mathbb{C}$, где $\Pi_n(K)$ — класс комплексных полиномов точной степени n, все нули которых лежат на K. Тематика берет свое начало в 1939 г., когда П. Туран для круга $D = \{z : |z| \le 1\}$ и отрезка $I = [-1,1]$ установил равенство

$$M_n(D) = n/2 \tag{1}$$

и слабую эквивалентность $M_n(I) \asymp \sqrt{n}$, а конкретнее — двустороннюю оценку

$$\sqrt{n}\big/6 < M_n(I) < \sqrt{n/e} + \varepsilon_n \qquad (\varepsilon_n = o(1)). \tag{2}$$

В том же году Я. Эрёд обобщил (1) на некоторые подклассы выпуклых компактов.

Наибольшие продвижения в этом направлении получены сравнительно недавно. Во-первых, Н. Левенберг и Е.А. Полецкий (2002) построили оценку

$$M_n(K) \geq \frac{\sqrt{n}}{20d}, \quad n \geq 1 \qquad (d = d(K) \text{ — диаметр } K), \tag{3}$$

верную для *любого* выпуклого компакта. Согласно (2), порядок точен и достигается на отрезках — выпуклых компактах нулевой ширины (*минимальной шириной* $w = w(K)$ множества K называют ширину самой узкой полосы, содержащей K).

Второй фундаментальный результат получил С.Д. Ревес (2006), который доказал, что если ширина $w = w(K) > 0$, то оценку (3) можно значительно улучшить по порядку:

$$M_n(K) \geq 3 \cdot 10^{-4}\,\frac{wn}{d^2}, \quad n \geq 1. \tag{4}$$

Ревес также установил обратное неравенство

$$M_n(K) \leq 600\frac{wn}{d^2}, \quad n > 2\Big(\frac{d}{16w}\Big)^2 \log\frac{d}{16w}. \tag{5}$$

Таким образом, оценки (4), (5) доставляют точную зависимость величины $M_n(K)$ как от степени полиномов n, так и от геометрических характеристик w, d выпуклого множества K при всех *достаточно больших* n: $M_n(K) \asymp wn/d^2$. В общем случае, однако, формула может не работать (если фиксировать n и d и устремить w к 0, то $wn/d^2 \to 0$, тогда как K превращается в отрезок длины d и $M_n(K) \to M_n(\Delta) > \sqrt{n}/(3d)$).

Мы устанавливаем точную форму $M_n(K)$ при произвольном соотношении между n, w, d, которая допускает, в частности, корректный переход к пределу при $w \to 0$.

Теорема. *Для любого выпуклого компакта K и $n \geq 1$ имеем*

$$3 \cdot 10^{-4} \max\Big\{\frac{wn}{d^2}; \frac{\sqrt{n}}{d}\Big\} \leq M_n(K) \leq 28 \max\Big\{\frac{wn}{d^2}; \frac{\sqrt{n}}{d}\Big\}. \tag{6}$$

Ясно, что нижняя оценка (6) прямо следует из (3), (4). Верхняя позволяет установить, в частности, что логарифм в (5) не по существу. А именно, при любом $n > d^2/w^2$ получаем оценку $M_n(K) \leq 28\,wn/d^2$, причем с лучшей константой, чем в (5).

Оценки снизу производных алгебраических полиномов, нули которых лежат на заданном множестве, естественным образом связаны с задачами аппроксимации посредством наипростейших рациональных дробей

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z_k \in \mathbb{C}; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

полюсы которых принадлежат заданному подмножеству комплексной плоскости; тематике таких аппроксимаций посвящены работы Я. Кореваара, Ч. Чуи, В.И. Данченко, П.А. Бородина и других авторов. Во второй части доклада обсуждаются варианты известной задачи С.Р. Насырова о плотности в $L_2[-1,1]$ наипростейших дробей g_n, все полюсы $z_1, \ldots, z_n$ которых лежат на окружности $|z| = 1$.

ESTIMATES FOR THE DERIVATIVE OF POLYNOMIALS WITH ZEROS ON PRE-ASSIGNED SETS AND SOME APPROXIMATION PROBLEMS

For the class of polynomials of degree n, whose zeros lie in a given convex compact set K, the precise order of the inverse Markov factor $M_n(K)$ is established in terms of n, the diameter and the width of K. Variants of S.R. Nasyrov's problem concerning approximations by simple partial fractions with poles on a circle are discussed.

Keywords: Markov inequality, Turán inequality, simple partial fraction.

УДК 517.958, 532.5

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА С НАПЕРЕД ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ГЛАДКОСТИ

А.В. Коптев[1]

1 *alex.koptev@mail.ru* ; Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург

В статье предлагается построение точного решения 3D уравнений Навье – Стокса, удовлетворяющего граничным условиям двух видов. Свойства гладкости построенного решения могут существенно изменяться в зависимости от выбора функций возникающих при интегрировании.

Ключевые слова: уравнения Навье – Стокса, точное решение, граничные условия, гладкость.

Уравнения Навье — Стокса представляют известный вид нелинейных уравнений в частных производных. Для случая движения несжимаемой среды при наличии потенциала внешних сил Φ эти уравнения в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial z}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{4}$$

Свойства гладкости решений уравнений (1-4) изучены не до конца [1-2]. В частности, возможна ситуация, когда при заданных граничных и начальных условиях решение может обладать различными свойствами гладкости в зависимости от дополнительных факторов.

Будем рассматривать потенциальное движение несжимаемой среды в большом резервуаре, когда влиянием ограничивающих поверхностей можно пренебречь и потребуем выполнимости условий

$$u(x_0, y_0, z_0, t) = v(x_0, y_0, z_0, t) = w(x_0, y_0, z_0, t) = 0, \tag{5}$$

$$u \to u_0, \ v \to v_0, \ w \to w_0, \tag{6}$$

когда $x = \frac{c_x}{\varepsilon} + o(\frac{1}{\varepsilon}), \ y = \frac{c_y}{\varepsilon} + o(\frac{1}{\varepsilon}), \ z = \frac{c_z}{\varepsilon} + o(\frac{1}{\varepsilon})$ при $\varepsilon \to 0$.

Условия (5) соответствуют тому, что каждая из компонент вектора скорости в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в любой момент времени обращается в нуль. Условия (6) требуют для каждой из компонент вектора скорости асимптотического приближения на бесконечности к наперед заданным значениям u_0, v_0, w_0. Величины c_x, c_y, c_z, u_0, v_0, w_0 заданы.

Решения уравнений (1-4) при условиях (5-6) определяется выражениями [3-4]

$$u = -\frac{A_1(t)\mathrm{sh}(\frac{Re\theta_1}{2}) - B_1(t)\sin(\frac{Re\lambda_1}{2})}{2(\cos^2(\frac{Re\lambda_1}{4}) + \mathrm{sh}^2(\frac{Re\theta_1}{4}))} + \frac{B_3(t)\mathrm{sh}(\frac{Re\theta_3}{2}) + A_3(t)\sin(\frac{Re\lambda_3}{2})}{2(\cos^2(\frac{Re\lambda_3}{4}) + \mathrm{sh}^2(\frac{Re\theta_3}{4}))},$$

$$v = -\frac{A_2(t)\mathrm{sh}(\frac{Re\theta_2}{2}) - B_2(t)\sin(\frac{Re\lambda_2}{2})}{2(\cos^2(\frac{Re\lambda_2}{4}) + \mathrm{sh}^2(\frac{Re\theta_2}{4}))} + \frac{B_1(t)\mathrm{sh}(\frac{Re\theta_1}{2}) + A_1(t)\sin(\frac{Re\lambda_1}{2})}{2(\cos^2(\frac{Re\lambda_1}{4}) + \mathrm{sh}^2(\frac{Re\theta_1}{4}))},$$

$$w = -\frac{A_3(t)\mathrm{sh}(\frac{Re\theta_3}{2}) - B_3(t)\sin(\frac{Re\theta_3}{2})}{2(\cos^2(\frac{Re\lambda_3}{4}) + \mathrm{sh}^2(\frac{Re\theta_3}{4}))} + \frac{B_2(t)\mathrm{sh}(\frac{Re\theta_2}{2}) + A_2(t)\sin(\frac{Re\lambda_2}{2})}{2(\cos^2(\frac{Re\lambda_2}{4}) + \mathrm{sh}^2(\frac{Re\theta_2}{4}))},$$

$$p - p_0 = -\Phi - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, \ \ \varphi_k = \frac{2}{Re}\ln(\cos^2\frac{Re\lambda_k}{4} + \mathrm{sh}^2\frac{Re\theta_k}{4}), \ \ k = 1, 2, 3,$$

$$\theta_1 = A_1(t)(x - x_0) - B_1(t)(y - y_0), \ \lambda_1 = B_1(t)(x - x_0) + A_1(t)(y - y_0).$$

$$\theta_2 = A_2(t)(y - y_0) - B_2(t)(z - z_0), \ \lambda_2 = B_2(t)(y - y_0) + A_2(t)(z - z_0),$$

$$\theta_3 = A_3(t)(z - z_0) - B_3(t)(x - x_0), \ \lambda_3 = B_3(t)(z - z_0) + A_3(t)(x - x_0).$$

Две функции $A_1(t)$ и $B_1(t)$ могут быть выбраны произвольно, тогда как остальные четыре однозначно выражаются через них. Условия (5) удовлетворены. Однако, условия (6) удовлетворены только в случае, когда точка $(A_1(t), B_1(t))$ находится внутри определенной области. Если траектория точки $(A_1(t), B_1(t))$ в некоторый момент времени $t = t_*$ пересекает границы этой области, то производные по времени основных неизвестных претерпевают разрыв. Таким образом, дополнительным фактором, влияющим на гладкость решения уравнений (1-4) при условиях (5-6), является выбор функций времени $A_1(t), B_1(t)$.

Литература

1. Lemarie-Rieusset P. G. *Navier – Stokes Problem in the 21-st century.* – CRC Press, 2016. – P. 740.

2. Ладыженская О. А. *Шестая проблема тысячелетия: Уравнения Навье – Стокса, существование и гладкость.* – УМН. – 2003. – 58:2 (350). – С. 45–78.

3. Koptev A. V. *Constructive method to solving 3D Navier – Stokes equations.* - 8-th European congress of mathematics. Book of abstracts – Portorozhe, 2021. - P. 638–639.

4. Коптев А. В. *Точное решение 3D уравнений Навье – Стокса для случая потенциального движения несжимаемой жидкости.* – Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – ВИНИТИ РАН. – 2023. – Т. 227. – С. 41–50.

EXACT SOLUTION TO THE NAVIER – STOKES EQUATIONS WITH PRE-SPECIFIED SMOOTHNESS PROPERTIES

A.V. Koptev

We propose to construct an exact solution of the 3D Navier-Stokes equations that satisfy two types of boundary conditions. The smoothness properties of the constructed solution vary depending on functions arising during integration.

Keywords: Navier – Stokes equations, exact solution, boundary conditions, smoothness.

UDC 517.986.6, 512.546.3

SOME PROPERTIES OF THE ORLICZ COHOMOLOGY OF GROUPS

Ya.A. Kopylov[1]

1 *yakop@math.nsu.ru*; Sobolev Institute of Mathematics

We consider some problems concerned with the first Orlicz cohomology of locally compact and, in particular, dscrete groups. We obtain some conditions for the triviality of the first ℓ^Φ-cohomology $H^1(G,\ell^\Phi(G))=0$ and the reduced ℓ^Φ-cohomology $\overline{H}^1(G,\ell^\Phi(G))$ of a (not necessarily countable) discrete group G, where Φ is an N-function, and for the coincidence of these spaces.

Keywords: discrete group, locally compact group, Orlicz cohomology.

Theorem 1. *Let G be an infinite group and let Φ be an N-function of class $\Delta_2(0)$. If G is non-amenable then $H^1(G,\ell^\Phi(G))$ is Hausdorff. If G is countable and $H^1(G,\ell^\Phi(G))$ is Hausdorff then G is non-amenable.*

Theorem 2. *Suppose that Φ is an N-function of class $\Delta_2(0)$. Let $N \le H \le G$ be a chain of discrete groups such that N is an infinite normal subgroup in G and H is non-amenable and countable. If $H^1(H,\ell^\Phi(H))=0$ then $H^1(G,\ell^\Phi(G))= 0$.*

Denote by $\aleph_1$ the first uncountable cardinal.

Theorem 3. *Let G be an uncountable group with infinite center or a periodic group with $|G|>\aleph_1$ and let Φ be an N-function. Then $H^1(G,\ell^\Phi(G))=0$.*

Theorem 4. *Let G be a countable locally finite group and let Φ be an N-function. Then the mapping $\kappa : H^1(G,\mathbb{C}[G]) \to H^1(G,\ell^\Phi(G))$ induced by the embedding $\mathbb{C}[G] \hookrightarrow \ell^\Phi(G)$ is not injective.*

Theorem 5. *Let G be an infinite locally finite group and let Φ be an N-function. Then $\overline{H}^1(G,\ell^\Phi(G))=0$.*

We also discuss the existence of nontrivial translation-invariant linear functionals in an Orlicz space on a locally compact group.

The research was carried out in the framework of the State Task to the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF–2022–0006).

References

1. Kopylov Ya.A. *The first Orlicz cohomology of general discrete groups* // J. Math. Sci., New York. – 2024. – V. 281. – No. 5. – P. 692–705.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГРУППОВЫХ КОГОМОЛОГИЙ ОРЛИЧА

Я.А. Копылов

Рассматриваются некоторые вопросы, связанные с одномерными когомологиями Орлича локально компактных и, в частности, дискретных групп. Получены условия тривиальности одномерных ℓ^Φ-когомологий $H^1(G, \ell^\Phi(G)) = 0$ и редуцированных ℓ^Φ-когомологий $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(G))$ (не обязательно счетной) дискретной группы G, где Φ — N-функция и условия совпадения этих пространств.

Ключевые слова: дискретная группа, локально компактная группа, когомологии Орлича.

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

М.В. Коровина[1]

1 *betelgeuser@yandex.ru*; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Работа посвящена проблеме Пуанкаре в аналитической теории дфференциальных уравнений. В ней построен общий вид асимптотик решений для обыкновенных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами в окрестности их особых точек как регулярных, так и иррегулярных.

Ключевые слова: асимптотика, асимптотический ряд, регулярная особая точка, иррегулярная особая точка.

Одной из фундаментальных задач аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами является задача посторения асимптотик их решений в окрестности иррегулярных особых точек. Эта задача была сформулирована Пуанкаре в работах [1], [2].

В работах Пуанкаре было доказано, что полученные расходящиеся ряды являются асимптотическими рядами решений дифференциальных уравнений с голоморфными (мероморфными) коэффициентами в окрестности иррегулярных особенностей. Задача о построении асимптотик решений для дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности, которая была сформулирванна Пуанкаре и которая является часным случаем общей проблемы Пуанкаре, была решена в работах [3], [4]. Однако общая проблема, которая заключается в построении асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестности произвольной иррегулярной особой точки до сих пор в общем случае не решена. Решению этой задачи и посвящена данная работа. А именно, рассмотрим уравнение

$$a_n(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x)+a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x)+\ldots+a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x)+\ldots+a_0(x)\,u(x)=0, \quad (1)$$

где $a_i(x), i=0,\ldots,n$ — мероморфные функции. Задача заключается в построении асимптотик решений уравнения (1) в окрестности особых точек (как регулярных, так и иррегулярных).

Без ограничения общности будем считать, что особой точкой уравнения (1) является $r=0$. В работе [5] показано, что уравнение (1) может быть приведено к виду

$$H\left(r,-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)u=0, \quad (2)$$

где

$$H\left(r,-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)=\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^n+\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{a}_i(r)\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^i.$$

Здесь $k=-1,0,1,2\ldots.$, а через $\tilde{a}_i(r)$ обозначены соответствующие голоморфные функции. В работе [5] найдено минимальное целое неотрицательное значение k, то есть минимальный порядок вырождения и коэффициенты этого уравнения. Если $k\in N$, то особая точка является иррегулярной, в этом случае запишем оператор (2) в виде

$$H\left(r,-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)=k^n\left(\left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^n+\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{a}_i(r)\frac{1}{k^{n-i}}\left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^i\right).$$

Основным символом дифференциального оператора $H\left(r,-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)$ называется функция $H_0(p)=p^n+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\tilde{a}_i(0)}{k^{n-i}}p^i$.

Для построения асимптотик решений дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами в окрестности их иррегулярных особых точек применяются методы ресургентного анализа, основой которых является преобразование Лапласа—Бореля, в том числе метод поворорного квантования. Суть метода состоит в том, что можно представить асимптотику решения в виде суммы асимптотических членов, каждый из которых соответствует одному из корней основного символа. Чтобы найти вид асимптотического члена, соответствующего корню основного символа p_i, необходимо передвинуть этот корень в нуль с помощью так называемой экспоненциальной подстановки $e^{\frac{p_i}{r}}u_i(r)$ и потом построить асимптотику, соответствующую нулевому корню основного символа. Тот же метод применяется для всех асимптотических членов соответствующих всем корням основного смвола.

Возникает вопрос о том, какой вид имеет асимптотический член соответствующий кратному корню. На этот вопрос отвечает

Теорема. *Любая асимптотика решений уравнения (1) со степенью вырождения $k+1$ в пространстве функций k-экспоненциального роста представима в виде суммы линейных комбинаций асимптотических членов вида*

$$u_i(r)=\exp\left(P_i\left(r^{-\frac{1}{l_i}}\right)\right)r^{\sigma_j}\sum_{i=0}^{\infty}a_i^j r^i,$$

где l_i, σ_i — некоторые комплексные числа $P_i(x)$ — полином, степень которого не превышает $(m-1)l_i$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^i x^i$ — асимптотический ряд, и членов, соответствующих конормальным асимптотикам вида

$$e^{\frac{p_i}{r^k}} \sum_{j=1}^{m} r^{\sigma_j} \ln^j r \sum_{i=0}^{\infty} a_i^j r^i.$$

Здесь через p_i обозначен соответствующий корень основного символа.

Полученный результат приложим к исследованию решений любых обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярными или иррегулярными особыми точками. (Заметим, что бесконечность, вообще говоря, является иррегулярной особенностью), а также к широкому классу уравнений в частных производных, примером которых является уравнение Шредингера с мероморфным потенциалом. Также примеры применения теории к различным задачам математической физики приведены в работе [6].

Литература

1. Poincaré H. *Sur les integrales irregulieres des equations lineaires* // Acta Math. – 1886. – Vol. 8. – P. 295–344.

2. Poincaré H. *Analysis of the mathematical and natural works of Henri Poincare. In Selected Works in Three Volumes. Volume 3. Mathematics. Theoretical Physics.* — Nauka Publishing House: Moscow, Russia, 1974.

3. Korovina M. *Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point* // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 12. — P. 2249.

4. Korovina M. V. *Uniform asymptotics of solutions to linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely* // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 7. — P. 2760–2775.

5. Кац Д. С. *Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов* // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1612–1617.

6. Korovina M. V., Matevossian H. A. *Uniform asymptotics of solutions of second-order differential equations with meromorphic coefficients in a neighborhood of singular points and their applications* // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 14. — P. 2465.

ASYMPTOTIC DECOMPOSITIONS OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE NEIGHBORHOOD OF IRREGULAR SINGULARITIES. THE SCHRODINGER EQUATION

M.V. Korovina

The paper is devoted to the Poincare problem in the analytic theory of differential equations. It provides a general view of the asymptotics of solutions for ordinary differential equations with meromorphic coefficients in the neighborhood of their singular points, both regular and irregular.

Keywords: asymptotics, asymptotic series, regular singular point, irregular singular point.

УДК 517.518

ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СРЕДНЕМ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СВЕРТКИ БЕССЕЛЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Г.В. Краснощеких[1], Вит.В. Волчков[2]

1 *wolverimred@mail.ru*; ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
2 *volna936@gmail.com*; ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

В работе изучается поведение на бесконечности решений уравнений свёртки, связанных с оператором обобщенного сдвига Бесселя. Рассматривается случай, когда свертывателем уравнения является индикатор отрезка $[-r, r]$ или четная часть меры Дирака с носителем в точке r. На основе недавних результатов авторов найдены точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевых решений указанных уравнений в терминах поведения их интегральных средних. В качестве следствий установлены аналоги известных теорем об инъективности оператора сферического среднего на $\mathbb{R}^n$, принадлежащих Ф. Йону, Д. Смиту, В.В. Волчкову и С. Тангавелу. Кроме того, в некоторых случаях получено усиление теоремы Б. Сельми и М.М. Несиби о спектральном анализе на гипергруппе Бесселя-Кингмана, а также доказана новая теорема единственности для решений обобщённого уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Ключевые слова: обобщенный сдвиг, преобразование Фурье-Бесселя, сферические средние.

Изучаются асимптотические свойства решений уравнений свёртки, связанных с оператором обобщенного сдвига Бесселя. Рассматривается случай, когда свертывателем уравнения является индикатор отрезка $[-r, r]$ или четная часть меры Дирака с носителем в точке r. С помощью недавних результатов из [1] найдены точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевых решений указанных уравнений в терминах поведения их интегральных средних. В качестве следствий установлены аналоги известных теорем об инъективности оператора сферического среднего на $\mathbb{R}^n$, принадлежащих Ф. Йону, Д. Смиту, В.В. Волчкову и С. Тангавелу (см. [2, часть 2, гл. 1]). Кроме того, в некоторых случаях получено усиление теоремы Б. Сельми и М.М. Несиби [3] о спектральном анализе на гипергруппе Бесселя-Кингмана, а также доказана новая теорема единственности для решений обобщённого уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Сформулируем один из установленных результатов. Пусть $\alpha \in (-1/2, +\infty)$, $p \in [1, +\infty)$, $L^p_{\natural,\alpha}$ и $L^{p,\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}$ — классы чётных комплекснозначных функций на $\mathbb{R}$, соответственно суммируемых с p-й степенью и p-локально суммируемых по мере $|x|^{2\alpha+1}dx$. Для $r > 0$ определим класс $V_{r,\alpha}$ равенством $V_{r,\alpha} = \{f \in L^{1,\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha} : f \overset{\alpha}{\star} \chi_r = 0\}$, где $f \overset{\alpha}{\star} \chi_r$ — свертка Бесселя порядка α функции f и индикатора χ_r отрезка $[-r, r]$ (см. [?]).

Теорема. *Если $p \in [1, +\infty)$, то $V_{r,\alpha} \cap L^p_{\natural,\alpha} = \{0\} \Leftrightarrow 1 \le p \le \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}$.*

Аналогичный результат справедлив и для класса $\mathscr{U}_{r,\alpha} = \{f \in L^{1,\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha} : f \overset{\alpha}{\star} \delta_r = 0\}$, где δ_r — четная часть меры Дирака с носителем в точке r.

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 124012400352-6).

Литература

1. Волчков Вит. В., Краснощеких Г. В. *Уточнение теоремы о двух радиусах на гипергруппе Бесселя-Кингмана* // Мат. замет. – 2024. – Т. 116. – № 2. – С. 212–228.

2. Volchkov V. V. *Integral geometry and convolution equations.* – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.

3. Selmi B., Nessibi M. M. *A local two radii theorem on the Chébli-Trimèche hypergroup* // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – V. 329. – P. 163–190.

LIOUVILLE TYPE THEOREMS FOR MEAN-PERIODIC FUNCTIONS WITH RESPECT TO BESSEL CONVOLUTION AND THEIR APPLICATIONS

G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchkov

This paper studies the infinite behavior of solutions to convolution equations associated with the generalised Bessel shift operator. The case is considered when the convolver of the equation is an indicator of the segment $[-r, r]$ or an even part of the Dirac measure with a support at the point r. Based on the recent results of the authors, the exact characteristics of the permissible rate of decrease of nonzero solutions of these equations in terms of the behavior of their integral means have been found. As a consequence, analogs of the well-known theorems on the injectivity of the spherical mean operator on $\mathbb{R}^n$, belonging to F. John, D. Smith, V.V. Volchkov and S. Tangavel, are established. In addition, in some cases, an enhancement of the theorem of B. Selmi and M.M. Nesibi on spectral analysis on the Bessel-Kingmann hypergroup was obtained, and a new uniqueness theorem for solutions of the generalised Euler-Poisson-Darboux equation was proved.

Keywords: generalised shift, Fourier-Bessel transform, spherical means.

УДК 517.54

СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НЕВАНЛИННЫ–ПИКА

О.С. Кудрявцева[1], А.П. Солодов[2]

1 *kudryavceva_os@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
2 *apsolodov@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Получено описание решений интерполяционной задачи Неванлинны–Пика с конечными наборами различных внутренних и граничных интерполяционных точек.

Ключевые слова: голоморфное отображение, угловая производная, интерполяционная задача Неванлинны–Пика, матрица Пика, произведение Бляшке.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Рассматривается следующая *интерполяционная задача Неванлинны–Пика* (см., например, монографию [1] и приведенную там библиографию): для заданных последовательностей различных точек $\{z_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{D}$, $\{z_k\}_{k=m+1}^n \subset \partial\mathbb{D}$, последовательности комплексных чисел $\{w_k\}_{k=1}^n$ и последовательности положительных чисел $\{\alpha_k\}_{k=m+1}^n$ найти необходимые и достаточные условия, при которых существует голоморфная функция $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ такая, что

1) $f(z_k) = w_k$ при $k = 1, \ldots, m$,
2) $f(z_k) = w_k$, $|f'(z_k)| = \alpha_k$ при $k = m+1, \ldots, n$.

Критерием разрешимости этой задачи в нетривиальном случае является положительная определенность матрицы $\Theta = \|\theta_{k,j}\|_{k,j=1}^{n}$, где

$$\theta_{k,j} = \begin{cases} \dfrac{1 - w_k \overline{w}_j}{1 - z_k \overline{z}_j}, & \text{если } k \neq j,\ z_k \in \overline{\mathbb{D}} \\ \dfrac{1 - |w_k|^2}{1 - |z_k|^2}, & \text{если } k = j,\ z_k \in \mathbb{D} \\ \alpha_k, & \text{если } k = j,\ z_k \in \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

Следующий вопрос состоит в нахождении семейства решений интерполяционной задачи и выделении тех решений, которые обладают определенными экстремальными свойствами. Известно решение этой задачи в виде рекуррентных соотношений. Возникающие технические трудности мотивируют к получению решений в явном виде.

Свойства решений интерполяционной задачи Неванлинны–Пика описывает

Теорема 1. *Пусть матрица Θ положительно определена и f — одно из решений интерполяционной задачи Неванлинны–Пика. Тогда для любого $z \in \mathbb{D}$*

$$\left(\frac{1 - \overline{w}_1 f(z)}{1 - \overline{z}_1 z}, \ldots, \frac{1 - \overline{w}_n f(z)}{1 - \overline{z}_n z}\right) \Theta^{-1} \left(\frac{1 - \overline{w}_1 f(z)}{1 - \overline{z}_1 z}, \ldots, \frac{1 - \overline{w}_n f(z)}{1 - \overline{z}_n z}\right)^* \leqslant \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}. \qquad (1)$$

Отметим, что при $n = 1$ в случае $z_1 \in \mathbb{D}$ оценка (1) соответствует неравенству

$$\left|\frac{1 - \overline{f(z_1)} f(z)}{1 - \overline{z}_1 z}\right|^2 \leqslant \frac{1 - |f(z_1)|^2}{1 - |z_1|^2} \, \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2},$$

которое эквивалентно классической лемме Шварца–Пика. Если же $z_1 \in \partial\mathbb{D}$, то имеем неравенство

$$\left|\frac{1 - \overline{f(z_1)} f(z)}{1 - \overline{z}_1 z}\right|^2 \leqslant \alpha_1 \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2},$$

эквивалентное классической теореме Жюлиа–Каратеодори.

Следующий результат дает описание всех решений интерполяционной задачи Неванлинны–Пика.

Теорема 2. *Пусть матрица Θ положительно определена и f — одно из решений интерполяционной задачи Неванлинны–Пика. Тогда для всех $z \in \mathbb{D}$*

$$\left| \frac{f(z) - (w_1, \ldots, w_n)\, \Theta^{-1} \left(\frac{1 - w_1 \overline{f(z)}}{1 - z_1 \overline{z}}, \ldots, \frac{1 - w_n \overline{f(z)}}{1 - z_n \overline{z}}\right)^*}{\prod\limits_{k=1}^{n} z_k \left(1 - z \left(\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_n}\right) \Theta^{-1} \left(\frac{1 - w_1 \overline{f(z)}}{1 - z_1 \overline{z}}, \ldots, \frac{1 - w_n \overline{f(z)}}{1 - z_n \overline{z}}\right)^*\right)} \right| \leqslant 1. \qquad (2)$$

Следствие. *Пусть матрица Θ положительно определена. Тогда любое решение f*

интерполяционной задачи Неванлинны–Пика имеет вид

$$f(z)=\frac{h(z)\prod\limits_{k=1}^{n} z_k+\left(w_1-zh(z)\prod\limits_{j\neq 1} z_j,\dots,w_n-zh(z)\prod\limits_{j\neq n} z_j\right)\Theta^{-1}\left(\frac{1}{1-z_1\overline{z}},\dots,\frac{1}{1-z_n\overline{z}}\right)^*}{1+\left(w_1-zh(z)\prod\limits_{j\neq 1} z_j,\dots,w_n-zh(z)\prod\limits_{j\neq n} z_j\right)\Theta^{-1}\left(\frac{w_1}{1-z_1\overline{z}},\dots,\frac{w_n}{1-z_n\overline{z}}\right)^*},$$

где h — произвольная голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая неравенству $|h(z)|\leqslant 1$ для любого $z\in\mathbb{D}$.

Равенство в оценках (1) и (2) достигается на произведениях Бляшке

$$f(z)=\frac{e^{i\varphi}\prod\limits_{k=1}^{n} z_k+\left(w_1-ze^{i\varphi}\prod\limits_{j\neq 1} z_j,\dots,w_n-ze^{i\varphi}\prod\limits_{j\neq n} z_j\right)\Theta^{-1}\left(\frac{1}{1-z_1\overline{z}},\dots,\frac{1}{1-z_n\overline{z}}\right)^*}{1+\left(w_1-ze^{i\varphi}\prod\limits_{j\neq 1} z_j,\dots,w_n-ze^{i\varphi}\prod\limits_{j\neq n} z_j\right)\Theta^{-1}\left(\frac{w_1}{1-z_1\overline{z}},\dots,\frac{w_n}{1-z_n\overline{z}}\right)^*}.$$

Литература

1. Agler J., McCarthy J. E. *Pick interpolation and Hilbert function spaces. Graduate Studies in Mathematics, 44.* – Providence: American Mathematical Society, 2002. – 308 p.

STRUCTURE OF THE SOLUTION OF THE NEVANLINNA-PICK INTERPOLATION PROBLEM

O.S. Kudryavtseva, A.P. Solodov

A description of solutions of the Nevanlinna–Pick interpolation problem with finite sets of different interior and boundary interpolation points is obtained.

Keywords: holomorphic map, angular derivative, Nevanlinna–Pick interpolation problem, Pick matrix, Blaschke product.

УДК 517.98

ЛОКАЛЬНЫЕ ГРУППЫ И ОПЕРАТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ

А.Ю. Кузнецова[1]

1 *alla.kunetsova@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Для локальных групп определяются $*$-представление и строгое $*$-представление, показывается связь между $*$-представленим локальной группы и частичным представлением группы.

Ключевые слова: локальная группа, локальная ассциативность, инверсная полугруппа, $*$-представление, частичное представление группы.

Под локальной группой в статье понимается дискретное множество $\mathscr{G}$ с заданными операциями умножения $m:\mathscr{G}^2\longrightarrow\mathscr{G}$, $\mathscr{G}^2\subsetneq\mathscr{G}\times\mathscr{G}$ и взятия обратного $i:\mathscr{G}\longrightarrow\mathscr{G}$, удовлетворяющими аксиомам группы, и если $(a,b),(b,c)\in\mathscr{G}^2$ и $(m(a,b),c)\in\mathscr{G}^2$

(либо $(a,m(b,c)\in\mathscr{G}^2)$, то $(a,m(b,c))\in\mathscr{G}^2$ (либо $(m(a,b),c)\in\mathscr{G}^2$) и $m(a,m(b,c)) = m(m(a,b),c)$. Операция умножения обладает в общем случае только локальной ассоциативностью. Назовем $\mathscr{G}_0\subset\mathscr{G}$ локальной подгруппой локальной группы $\mathscr{G}$, если из условия $a,b\in\mathscr{G}_0$ и $(a,b)\in\mathscr{G}^2$ следует $(a,b)\in\mathscr{G}_0^2$ и $m_0(a,b)=m(a,b)=ab\in\mathscr{G}_0$.

Далее для удобства символы m и i будем опускать, заменяя $m(a,b)$ на ab и $i(a)$ на a^{-1}.

Отображение $\varphi:\mathscr{G}_1\longrightarrow\mathscr{G}_2$ называется *гомоморфизмом локальных групп*, если $\varphi(e_1)=e_2$, $i_2\circ\varphi=\varphi\circ i_1$, $\varphi(\mathscr{L}(a_1,a_2,\dots a_n))=\mathscr{L}(\varphi(a_1),\varphi(a_2),\dots\varphi(a_n))$, где $\mathscr{L}(a_1,a_2,\dots a_n)$ некоторый фиксированный порядок расстановки скобок, и $\varphi(\mathscr{G}_1)$ локальная подгруппа в $\mathscr{G}_2$.

Если последнее условие не выполнятся, то тогда $\varphi:\mathscr{G}_1\longrightarrow\mathscr{G}_2$ называется *квазигомоморфизмом*. Из определения локальной группы следует, что она является сократимой слева и справа, поэтому можно определить ее $*$-представление в унитальную C^*-алгебру. Поскольку на локальной группе не для всех элементов определено умножение, то образом элемента локальной группы естественно определить частичную изометрию.

Определение 1. *Отображение $\pi:\mathscr{G}\longrightarrow\mathfrak{A}$ называется $*$-представлением локальной группы, если*

1) $\pi(e)=I$,

2) $\pi(a^{-1})=(\pi(a))^*$,

3) $\pi(a)\pi(b)\pi(b^{-1})=\pi(ab)\pi(b^{-1})$, *если* $(a,b)\in\mathscr{G}^2$,

4) $\pi(a^{-1})\pi(a)\pi(b)=\pi(a^{-1})\pi(ab)$, *если* $(a,b)\in\mathscr{G}^2$,

5) $\{\pi(a)\}_{a\in\mathscr{G}}$ *порождают инверсную полугруппу.*

Если в определении условия 3) и 4) заменить на условия

3') $\pi(a)\pi(b)\pi(b^{-1})=\begin{cases}\pi(ab)\pi(b^{-1}) & \text{если} \quad (a,b)\in\mathscr{G}^2;\\ 0, \quad \text{если} & (a,b)\notin\mathscr{G}^2.\end{cases}$

4') $\pi(a^{-1})\pi(a)\pi(b)=\begin{cases}\pi(a^{-1})\pi(ab) & \text{если} \quad (a,b)\in\mathscr{G}^2;\\ 0, \quad \text{если} & (a,b)\notin\mathscr{G}^2,\end{cases}$

то условие 5) будет следовать автоматически. Такое $*$-представление назовем *строгим*. Через $C^*_\pi(\mathscr{G})$ назовем C^*-алгебру, порожденную частичными изометриями $\{\pi(a)\}_{a\in\mathscr{G}}$.

Определение 2. *Пусть $\pi:\mathscr{G}\longrightarrow\mathfrak{A}$ и $\pi':\mathscr{G}'\longrightarrow\mathfrak{A}$ точные $*$-представления. Пару $(\mathscr{G}',\pi')$ назовем расширением пары $(\mathscr{G},\pi)$, если существует инъективный квазигомоморфизм $\tau:\mathscr{G}\longrightarrow\mathscr{G}'$, такой, что следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{G} & \xrightarrow{\tau} & \mathscr{G}'\\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'}\\ C^*_\pi(\mathscr{G}) & = & C^*_{\pi'}(\mathscr{G}').\end{array}$$

Теорема 1. *Для любой локальной группы $\mathscr{G}$ и $*$-представления π существует расширение* $(\mathscr{G}',\pi')$, где π' *— строгое $*$-представление.*

Теорема 2. Если τ — частичное представление группы G, то $\{a \in G : \tau(a) \neq 0\}$ можно наделить структурой локальной группы.

Если $\mathscr{G}$ — локальная группа и $\pi : \mathscr{G} \longrightarrow \mathfrak{A}$ — строгое $*$-представление, то существует группа G и частичное представление $\tau : G \longrightarrow \mathfrak{A}$, что $C^*_\pi(\mathscr{G}) = C^*_\tau(G)$.

Для локальных групп можно определить стандартные C^*-алгебраические конструкции: регулярное представление, редуцированная и полная C^*-алгебра, расслоение Фэлла, см. подробнее [1]-[3], в [3] также разобраны примеры.

Литература

1. Grigoryan S., Kuznetsova A. *On a grading of the Cuntz algebra*// Lobachevskii J. of Math. –2019. – Vol. 40 – Is. 10 – P. 1479–1482.

2. Grigoryan S. A,. Kuznetsova A. Yu. *Local groups and their representations* // Russian Mathematics. – 2020. – Vol. 64 – Is. 6 – P. 63–68.

3. Григорян С. А., Кузнецова А. Ю. *Об одном классе локальных групп и их представлений* // Известия вузов. Математика. – 2022. – № 2. – С. 76–82.

LOCAL GROUPS AND OPERATOR ALGEBRAS

A.Yu. Kuznetsova

For local groups, a $*$-representation and a strict $*$-representation are defined, and the relationship between the $*$-representation of a local group and the partial representation of the group is shown.

Keywords: local group, local associativity, inverse semigroup, $*$-representation, partial representation of a group.

УДК 517.54

ОЦЕНКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ ЧЕРЕЗ МЕТРИКУ ТРЕУГОЛЬНОГО ОТНОШЕНИЯ В КВАДРАТЕ

А.Р. Кушаева[1], С.Р. Насыров[2]

1 *kushaeva1710@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *semen.nasyrov@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Пусть K — квадрат на плоскости и $\rho_K(x,y)$ — гиперболическое расстояние между точками $x,\ y \in K$. Обозначим через $s_K(x,y)$ метрику треугольного отношения (triangular ratio metric) в K. Напомним, что при $x \neq y$ расстояние $s_K(x,y)$ равно отношению евклидова расстояния $|x-y|$ между точками $x,\ y \in K$ к величине $\sup_{z\in\partial K}(|x-z|+|z-y|)$. Нами получена точная оценка для отношения величины $\operatorname{th}\rho_K(x,y)/2$ к величине $s_K(x,y)$.

Ключевые слова: гиперболическая метрика, метрика треугольного отношения, квадрат.

В геометрической теории функций большую роль играет гиперболическая метрика. Одним из важнейших ее свойств является конформная инвариантность. В то же время, вычисление этой метрики в фиксированной области D является зачастую непростой задачей. В связи с этим важной является задача о нахождении другой метрики в области D, в каком-то смысле эквивалентной гиперболической, которая бы просто вычислялась в евклидовых терминах. Известно достаточно много примеров таких метрик (см., напр., монографии [1, 2]). Одной из таких метрик является метрика s_D треугольного отношения. Она определяется в области D следующим образом: если $x \neq y$, то

$$s_D(x,y) = \frac{|x-y|}{\sup_{z\in\partial D}(|x-z|+|z-y|)},$$

а если $x = y$, то $s_D(x,y) = 0$.

В статье [3] начато изучение задачи о нахождении наилучших констант в неравенстве

$$C_1\, s_D(x,y) \le \operatorname{th}(\rho_D(x,y)/2) \le C_2\, s_D(x,y), \quad x,y \in D, \tag{1}$$

для некоторых выпуклых многоугольных областей на плоскости. Нетрудно показать, что наибольшая константа C_1 в этом неравенстве равна 1. Равенство достигается в пределе, когда, к примеру, одна из точек x, y стремится к границе области. Задача об определении наименьшей константы C_2 является более сложной. В [3] исследовалась более простая задача: оценить величину

$$\lim_{y\to x} \frac{\operatorname{th}(\rho_D(x,y)/2)}{s_D(x,y)} = \frac{2d_D(x)}{r_D(x)}, \tag{2}$$

где $d_D(x)$ — расстояние от точки x до границы ∂D области D, а $r_D(x)$ — конформный радиус области D в точке x.

В [3] были установлены точные оценки сверху величины (2) для многих часто встречающихся на практике выпуклых многоугольных областей D, например, для прямоугольников, равнобедренных треугольников, правильных n-многоугольников. Также были описаны множества, на которых может достигаться максимум величины (2).

В частности, было показано что в случае квадрата $K = [-1,1]\times[-1,1]$ максимальное значение величины (2) достигается в центре квадрата и равно величине $\mathscr{K}(\sqrt{2}/2) = 1.854074677\ldots$, где $\mathscr{K}(\cdot)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

В данной работе мы получаем оценку величины $\operatorname{th}\frac{\rho_K(x,y)}{2}$ через метрику треугольного отношения $s_K(x,y)$ и устанавливаем следующий результат.

Теорема. *Для произвольных точек x и y в квадрата K имеет место точная оценка*

$$s_K(x,y) \le \operatorname{th}\frac{\rho_K(x,y)}{2} \le \mathscr{K}(\sqrt{2}/2)\, s_K(x,y).$$

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

Литература

1. Papadopoulos A. *Metric Spaces, Convexity and Non-positive Curvature, Second edition.* – IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, 6. European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2014. – xii+309 pp.

2. Hariri P., Klén R., Vuorinen M. *Conformally Invariant Metrics and Quasiconformal Mappings.* – Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2020. – xix+502 pp.

3. Dautova D., Kargar R., Nasyrov S., Vuorinen M. *Intrinsic metrics in polygonal domains* // Mathematische Nachrichten. – 2023. – Bd. 296, No.11. – P. 4961–4977.

ESTIMATION OF THE HYPERBOLIC METRIC THROUGH THE TRIANGULAR RATIO METRIC IN A SQUARE

A.R. Kushaeva, S.R. Nasyrov

Let K be a square in the plane and $\rho_K(x,y)$ be the hyperbolic metric between x, $y\in K$. Denote by $s_K(x,y)$ the triangular ratio metric K; for $x\neq y$ the value of $s_K(x,y)$ is equal to the ratio of the Eulidean distance $|x-y|$ between x, $y\in K$ to the value $\sup_{z\in\partial K}(|x-z|+|z-y|)$. We establish a sharp estimate of the ratio of $\operatorname{th}\rho_K(x,y)/2$ to $s_K(x,y)$.

Keywords: hyperbolic metric, triangular ratio metric, square.

УДК 517.984

ВКЛЮЧЕНИЕ ДЛЯ СПЕКТРА БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Х.М.Латипов[1]

1 *h.m.latipov@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

В данной работе рассматривается операторная матрица четвертого порядка. Этот оператор соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся числом частиц на решетке, не превосходящем четырёх. Выделены блочные элементы и установлены включение для спектра этих блочных элементов.

Ключевые слова: операторная матрица, система частиц, блочные элементы, спектр.

Пусть $\mathrm{d}\in\mathbb{N}$ и $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}:=(-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ — d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m)$, $m=1,2,3$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m$ и

$$\mathscr{H}:=\mathbb{C}^2\otimes\{\mathbb{C}\oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3)\}.$$

Обычно пространство $\mathbb{C}\oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3)$ называется четырехчастичным обрезанным попространством фоковского пространства.

В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим операторную матрицу вида

$$\mathscr{A}:=\begin{pmatrix} \mathscr{A}_{00} & \mathscr{A}_{01} & 0 & 0\\ \mathscr{A}_{01}^* & \mathscr{A}_{11} & \mathscr{A}_{12} & 0\\ 0 & \mathscr{A}_{12}^* & \mathscr{A}_{22} & \mathscr{A}_{23}\\ 0 & 0 & \mathscr{A}_{23}^* & \mathscr{A}_{33}\end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\mathscr{A}_{00} f_0^{(\mathrm{s})} = \mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})}, \quad \mathscr{A}_{01} f_1^{(\mathrm{s})} = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1^{(-\mathrm{s})}(t)dt,$$

$$(\mathscr{A}_{11} f_1^{(\mathrm{s})})(k_1) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1)) f_1^{(\mathrm{s})}(k_1), \ (\mathscr{A}_{12} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2^{(-\mathrm{s})}(k_1,t)dt,$$

$$(\mathscr{A}_{22} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2),$$

$$(\mathscr{A}_{23} f_3^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_3^{(-\mathrm{s})}(k_1,k_2,t)dt,$$

$$(\mathscr{A}_{33} f_3^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2,k_3) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) + w(k_3)) f_3^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2,k_3).$$

Здесь $\{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\} \in \mathscr{H}$; $\mathscr{A}_{ij}^*$ сопряженный оператор к $\mathscr{A}_{ij}$, $i < j$, функции $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ являются вещественнозначными и непрерывными на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $\alpha > 0$ – "параметр взаимодействия". В этих предположениях операторная матрица $\mathscr{A}$ является ограниченной и самосопряженной в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

Операторная матрица $\mathscr{A}$ связана с оператором энергии системы частиц на решетке, число которых не сохраняется и не превышает четырех.

Для формулировки основного результата работы введем гильбертово пространству

$$\mathscr{H}^{(n,m)} := \bigoplus_{\alpha=n}^{m} L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^{\alpha}), \quad 1 \le n < m \le 3$$

и следующие блочные элементы матрицы с оператором $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}_1 : \mathbb{C}^2 \otimes L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3) \to \mathbb{C}^2 \otimes L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3), \quad \mathscr{A}_1 := \mathscr{A}_{33};$$

$$\mathscr{A}_2 : \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{H}^{(2,3)} \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{H}^{(2,3)}, \quad \mathscr{A}_2 := \begin{pmatrix} \mathscr{A}_{22} & \mathscr{A}_{23} \\ \mathscr{A}_{23}^* & \mathscr{A}_{33} \end{pmatrix};$$

$$\mathscr{A}_3 : \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{H}^{(1,3)} \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{H}^{(1,3)}, \quad \mathscr{A}_3 := \begin{pmatrix} \mathscr{A}_{11} & \mathscr{A}_{12} & 0 \\ \mathscr{A}_{12}^* & \mathscr{A}_{22} & \mathscr{A}_{23} \\ 0 & \mathscr{A}_{23}^* & \mathscr{A}_{33} \end{pmatrix}.$$

Стоит отметить, что блочные элементы (операторные матрицы) $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$ являются линейными, ограниченными и самосопряженными операторными матрицами в своих областях определения, имеют более простой вид по сравнению с операторной матрицей $\mathscr{A}$ и имеют чистый существенный спектр [1], т.е. $\sigma(\mathscr{A}_\alpha) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}_\alpha)$, $\alpha = 1,2,3$.

Теорема 1. *Для спектра блочных элементов $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ и $\mathscr{A}_3$ имеют места соотношение*

$$\sigma(\mathscr{A}_1) \subset \sigma(\mathscr{A}_2) \subset \sigma(\mathscr{A}_3) \subset \sigma(\mathscr{A}).$$

В работе [1] показано, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A}_3)$. Выделены двухчастичная, трехчастичная и четырехчастичная ветви существенного спектра оператора $\mathscr{A}$. Устаналено, что существенный спектр операторной матрицы $\mathscr{A}$ состоит из объединения отрезков, число которых не больше 14. Построен определитель Фредгольма, такой, что его множество нулей и дискретной спектр операторной матрицы $\mathscr{A}$ совпадают, кроме того даказано, что число простых собственных значений, операторной матрицы $\mathscr{A}$, лежащих вне существенного спектра не превосходит 16. В этом исследовании использовались методы, разработанные в работе [2] для модели спин-бозона с не более двумя фотонами на решетке.

Литература

1. Т.Х.Расулов, Х.М.Лапитов. *Описание спектра одной операторной матрицы четвертого порядка* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2023. – Vol. 27. – № 3. – С. 427–445.

2. M.Muminov, H.Neidhardt, T.Rasulov. *On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case* // Journal of Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 56. – 053507.

INCLUSION FOR THE SPECTRUM OF THE BLOCK ELEMENTS OF FOURTH-ORDER OPERATOR MATRIX

H.M. Latipov

In this work, we consider a fourth-order operator matrix. This operator corresponds to the Hamiltonian of a system with a non-conserved number and no more than four particles on the lattice. Block elements are identified and inclusions for the spectrum of these block elements are established.

Keywords: operator matrix, system of particles, block elements, spectrum.

УДК 517.9

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ОБОБЩЁННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТРИВИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Л.В. Линчук[1]

1 *linchuk_lv@mail.ru*; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена

В статье рассматривается применение альтернативных обобщённых операторов, имеющих тривиальную структуру, для факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: групповой анализ, альтернативный обобщённый оператор, факторизация дифференциальных уравнений.

Альтернативные обобщённые операторы, обобщающие классические симметрии, представляют собой достаточно перспективное направление группового анализа[1-4]. Основной недостаток этого типа операторов – достаточно сложные и громоздкие вычисления. Поэтому необходимо вводить различного рода анзацы на структуру дифференциальных уравнений и допускаемых ими альтернативных обобщённых операторов. Одним из таких допущений может быть рассмотрение операторов тривиальной структуры, т.е. операторов одна или несколько координат которых равны нулю. Исследуем особенность решения этой задачи на примере обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$y''' = F(x, y, y', y''). \tag{1}$$

Альтернативные обобщённые операторы — это класс операторов вида

$$X = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \zeta_1 \partial_{y'} + \zeta_2 \partial_{y''} + \zeta_3 \partial_{y'''}, \tag{2}$$

где $\quad \xi = \xi(x, y, y'), \quad \eta = \eta(x, y, y'), \quad \zeta_1 = \zeta_1(x, y, y') \quad$ и

$$\zeta_k = D_x(\zeta_{k-1}) - y^{(k)} D_x\xi + \frac{(\zeta_{k-1} - y^{(k)}\xi)(\zeta_1 - D_x\eta + y' D_x\xi)}{\eta - y'\xi}, \quad k = 2, 3. \tag{3}$$

Пусть одна из трёх координат оператора (2) равна нулю. Это допущение влечёт упрощение для одной из двух оставшихся координат. Известно, что если оператор (2) допускается уравнением (1), то оператор μX, где $\mu = \mu(x, y, y')$ – произвольный множитель, также допускается этим уравнением [2]. Поэтому одну из ненулевых координат можно считать равной единице. Таким образом, существенной координатой оказывается только одна, которая и будет входить в определяющее уравнение для поиска допускаемого оператора.

Пусть, например, $\zeta_1(x, y, y') = 0$. Тогда положим $\xi(x, y, y') = 1$. Следовательно, формулы (3) принимают вид

$$\zeta_2 = \frac{y'' D_x\eta}{\eta - y'\xi}, \quad \zeta_3 = D_x(\zeta_2) + \frac{(\zeta_2 - y''')D_x\eta}{\eta - y'\xi}.$$

Упрощение решения прямой задачи группового анализа в этом случае можно рассмотреть на некоторых примерах. Если рассмотреть подкласс обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$y''' = F(x, y, y')y'',$$

то определяющим уравнением в этом случае будет

$$-F_x - \eta F_y + \frac{\big(D_x\eta - F(\eta - y'\xi)\big)D_x\eta}{(\eta - y'\xi)^2} + D_x\left(\frac{D_x\eta}{\eta - y'\xi}\right)\Bigg|_{y''' = Fy''} = 0.$$

Решение этой системы распадается на несколько случаев. В одном из них, например, получается уравнение и допускаемый оператор

$$y''' = \frac{3fy' + 2(f' + f^2)y + fg + g'}{y' + 2fy + g}y'', \quad X = \partial_x + \frac{y' - 2fy - g}{2}\partial_y + 0 \cdot \partial_{y'}, \tag{4}$$

где $f = f(x)$, $g = g(x)$ – произвольные функции. Инварианты полученного оператора позволяют факторизовать уравнение (4):

$$t = y', \quad u = \int (y' - g)\mathrm{e}^{\int f\,dx}dx - 2y\mathrm{e}^{\int f\,dx}, \quad u'' = 0,$$

и даже найти его общее решение

$$y = \left(\int \mathrm{e}^{\int f\,dx}dx - C_1\right)^2 \left(\int \frac{\int g\mathrm{e}^{\int f\,dx}dx + C_2}{\left(\int \mathrm{e}^{\int f\,dx}dx - C_1\right)^3}dx + C_3\right).$$

Заметим, что, например, в пакете символьных вычислений Maple для класса (4) решение не находится (результат, причём в достаточно громоздком виде, можно получить лишь только при некоторых конкретных функциях $f(x)$ и $g(x)$).

Были исследованы и другие подклассы уравнений вида (1). Полученные результаты показывают, что даже простые допущения тривиальности координат оператора дают возможность сконструировать достаточно широкие классы факторизуемых уравнений.

Литература

1. Линчук Л.В. Альтернативные обобщенные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. // Материалы научной конференции "Герценовские чтения - 2010". – СПб: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2010. – С. 46-53.

2. Линчук Л.В. Альтернативные обобщённые операторы, допускаемые обобщённым уравнением Рэлея // Электронный журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления". – 2017. – С. 86–92.

3. Линчук Л.В. Обратная задача для обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих альтернативные обобщённые операторы. // Материалы LXIX Международной конференции "Герценовские чтения - 2021". – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2021. – С. 66-70

4. Linchuk L.V. The impact of alternative generalized operators subalgebra upon the factorization of ordinary differential equations. // Lobachevskii Journal of Mathematicsthis. – 2022. – Vol. 43(3). – P. 530–641.

ALTERNATIVE GENERALIZED OPERATORS OF TRIVIAL STRUCTURE

L.V. Linchuk

This paper describes the application of alternative generalized operators of trivial structure for factorization of ordinary differential equations.

Keywords: group analysis, alternative generalized operator, factorization.

UDC 74H45, 74K05

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF OSCILLATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH MOVING BOUNDARIES

V.L. Litvinov[1], K.V. Litvinova[2]

1 *vladlitvinov@rambler.ru*; Moscow State University, Moscow
2 ; Samara State Technical University, Samara

In existing studies, problems of oscillations of systems with moving boundaries were considered mainly in a linear formulation, without taking into account the energy exchange through the moving boundary and the interaction between different types of oscillations. In this paper, a new nonlinear mathematical model of transverse oscillations of an unlimited rope with a moving boundary is developed, taking into account geometric nonlinearity, in the form of an integro-differential equation. The resulting model allows one to describe high-intensity oscillatory processes in these systems.

Keywords: nonlinear dynamics, oscillations of flexible threads, moving boundary conditions, integro-differential equations.

An analysis of the literature data [1-4, 7-12] shows that most studies of oscillations of systems with moving boundaries used linear models that do not take into account either the processes of energy exchange at the boundary or the relationship between the longitudinal and transverse components of the oscillations. Only a few studies [5,6] attempted to take into account the dissipative effects associated with the resistance of the medium. However, real technical systems demonstrate a much more complex behavior; in particular, with an increase in the amplitude of oscillations, nonlinear geometric effects become of decisive importance.

The current level of development of computational methods opens up new prospects for constructing adequate mathematical models of conjugate oscillations of systems with moving boundaries, allowing one to take into account a set of factors determining the oscillation process.

This paper proposes an improved nonlinear model of conjugate longitudinal-transverse oscillations of a rope with a moving boundary, integrating the effects of geometric nonlinearity, viscoelastic properties of the material and the processes of energy transfer through the interface, written in the form of integro-differential equations. New boundary conditions are derived that describe the interaction of system sections on different sides of the moving boundary. The developed model is subjected to a linearization procedure. It is important to note that the correspondence principle is fulfilled: in the limiting case of small oscillations, the system of equations is reduced to classical linear models, which serves as a check for the correctness of the results obtained. The proposed mathematical model significantly expands the possibilities of studying high-amplitude oscillatory modes in systems with moving boundaries.

References

1. Savin G.N., Goroshko O.A. *Dynamics of a variable length thread*. – Nauk. dumka, Kiev, 1962. – 332 p.

2. Samarin Yu.P. *On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space* // Applied Mathematics and Mechanics. – 1964. – V. 26. – No. 3. – P. 77—80.

3. Vesnitsky A.I. *Waves in systems with moving boundaries and loads*. – Fizmatlit, Moscow, 2001. – 320 p.

4. Lezhneva A.A. *Bending vibrations of a beam of variable length* // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mechanics. – 1970. – No. 1. – P. 159–161.

5. Litvinov V.L. *Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations* // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. – 2020. – Vol. 26. – No. 2. – P. 188–199.

6. Anisimov V.N., Litvinov V.L. *Mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries* // Vestn. Himself. tech. un-t. Ser. Phys and mat. science. – 2015. – Vol. 19. – No. 2. – P. 382–397.

7. Anisimov V.N., Litvinov V.L. *Mathematical modeling and study of the resonance properties of mechanical objects with a changing boundary: monograph* / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov. – Samara: Samar. State Tech. Univ, 2020. – 100 p.

8. Litvinov V.L., Anisimov V.N. *Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries* // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. – 2018. – No. 2. – P. 70–77.

9. Litvinov V.L., Anisimov V.N. *Transverse vibrations of a rope moving in a longitudinal direction* // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. – 2017. – Vol. 19. – No. 4. – P.161–165.

10. Litvinov V.L., Anisimov V.N. *Mathematical modeling and research of oscillations of one–dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph* / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov – Samara: Samar. State Tech. Univ. 2017. – 149 p.

11. Litvinov V.L. *Variational statement of the problem of oscillations of a beam with a movable spring support* // Theoretical and Mathematical Physics. – 2023. – Vol. 215. – No. 2. – P. 709–715.

12. Litvinov V.L., Litvinova K.V. *On one inverse method for solving problems of oscillations of mechanical systems with moving boundaries* // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. – 2024. – No. 3. – P. 53–59.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В. Л. Литвинов, К. В. Литвинова

В существующих исследованиях задачи колебаний систем с подвижными границами рассматривались преимущественно в линейной постановке, без учёта обмена энергией через подвижную границу и взаимодействия различных типов колебаний. В данной работе разработана новая нелинейная математическая модель поперечных колебаний неограниченного каната с подвижной границей, учитывающая геометрическую нелинейность, в виде интегро-дифференциального уравнения. Полученная модель позволяет описывать высокоинтенсивные колебательные процессы в таких системах.

Ключевые слова: нелинейная динамика, колебания гибких нитей, подвижные граничные условия, интегро-дифференциальные уравнения.

УДК 517.926.7

О РЕАЛИЗАЦИИ СУЩЕСТВЕННЫХ СПЕКТРОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ НУЛЕЙ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Н.А. Лобода[1], А.Х. Сташ[2]

1 *n-loboda@yandex.ru*; Адыгейский государственный университет
2 *aidamir.stash@gmail.com*; Адыгейский государственный университет

Установлено существование линейных однородных двумерных дифференциальных систем с не более чем счетными существенными спектрами показателей колеблемости нулей.

Ключевые слова: линейная система, колеблемость, показатель Ляпунова, показатели колеблемости.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с *непрерывными ограниченными* оператор-функциями $A: \ \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ и положим

$$\mathcal{S}^n_{\mathcal{M}} = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

Определение 1 [1]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости нулей функции $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ зададим формулами*

$$\hat{\nu}^0_\bullet(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^0(x,m,t) \quad \left(\check{\nu}^0_\bullet(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^0(x,m,t)\right),$$
$$\hat{\nu}^0_\circ(x) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t}\nu^0(x,m,t) \quad \left(\check{\nu}^0_\circ(x) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t}\nu^0(x,m,t)\right),$$

где $\nu^0(x,m,t)$ *— число нулей скалярного произведения* $\langle x(\cdot), m\rangle$ *на промежутке* $(0,t]$.

Определение 2 [2,3]. *Множество всех значений показателя* $\kappa\colon \mathscr{S}_*(A)\to\mathbb{R}_+$ *назовём* спектром *этого показателя системы* $A\in\mathscr{M}^n$*, причем значение* $a\in\kappa(\mathscr{S}_*(A))$ *назовем существенным, если подмножество* $\{x(0)\mid x\in\mathscr{S}_*(A),\kappa(x)=a\}\subset\mathbb{R}^n$ *имеет положительную меру и заполняет некоторое непустое открытое множество, возможно, с точностью до множества первой категории Бэра. Через* $\operatorname{ess}\kappa(\mathscr{S}_*(A))$ *обозначим множество всех существенных значений показателя* κ *для системы* A *и назовем его существенным спектром системы* A.

В работе [4] для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, установлено существование двумерной системы, у которой все значения спектров показателей блуждаемости являются существенными и совпадают с этим множеством. Если все эти числа соизмеримы, то систему можно выбрать периодический. Кроме того, для любого замкнутого ограниченного счетного множества неотрицательных *рациональных чисел* с единственной нулевой предельной точкой, существует двумерная линейная ограниченная система, у которой спектры показателей блуждаемости совпадают с этим множеством, причем все значения существенны [4]. Оказалось, что эти свойства переносятся и на показатели колеблемости нулей.

Теорема 1. *Для любого конечного множества* S *неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует такая система* $A\in\mathscr{M}^2$ *(периодическая, если элементы множества* S *соизмеримы), что справедливы равенства*

$$\hat{\nu}^0_\bullet(x)=\check{\nu}^0_\bullet(x)=\hat{\nu}^0_\circ(x)=\check{\nu}^0_\circ(x),\quad x\in\mathscr{S}_*(A),$$

$$\kappa(\mathscr{S}_*(A))=\operatorname{ess}\kappa(\mathscr{S}_*(A))=S,\quad \kappa=\hat{\nu}^0_\bullet,\check{\nu}^0_\bullet,\hat{\nu}^0_\circ,\check{\nu}^0_\circ.$$

Теорема 2. *Для любой последовательности* $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *положительных рациональных чисел, сходящейся к нулю, существует такая двумерная система* $A\in\mathscr{M}^2$*, что справедливы равенства*

$$\hat{\nu}^0_\bullet(x)=\check{\nu}^0_\bullet(x)=\hat{\nu}^0_\circ(x)=\check{\nu}^0_\circ(x),\quad x\in\mathscr{S}_*(A),$$

$$\kappa(\mathscr{S}_*(A))=\operatorname{ess}\kappa(\mathscr{S}_*(A))=\{q_k\mid k\in\mathbb{N}\}\sqcup\{0\},\quad \kappa=\hat{\nu}^0_\bullet,\check{\nu}^0_\bullet,\hat{\nu}^0_\circ,\check{\nu}^0_\circ.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-03-2024-074/5).

Литература

1. Сергеев И. Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы* // Известия РАН. Сер. матем. – 2012. – Т. 76. – № 1. – С. 149–172.

2. Сергеев И. Н. *Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем*// Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 11. – С. 1661–1662.

3. Сергеев И. Н. *Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем*// Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48. – № 11. – С. 1567–1568.

4. Шишлянников Е. М. *Примеры дифференциальных систем с различными спектрами показателя блуждаемости*// Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52. – № 11. – С. 1586–1587.

ON THE REALIZATION OF ESSENTIAL SPECTRA OF OSCILLATION EXPONENTS OF ZEROS OF TWO-DIMENSIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

N.A. Loboda, A.Kh. Stash

The existence of linear homogeneous two-dimensional differential systems with no more than countable essential spectra of the oscillation exponents of zeros is established.

Keywords: linear system, oscillation, Lyapunov exponent, oscillation exponents.

УДК 517.982

РАЗЛОЖЕНИЕ НА АТОМЫ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ТИПА ХАРДИ-ЛОРЕНЦА

М.М. Логиновская[1]

1 *loginovskayamm@bsu.by*; Белорусский государственный университет

Для функций из некоторых классов, являющихся расширениями пространств Харди, строится атомическое разложение.

Ключевые слова: пространства однородного типа, атомическое разложение, максимальная функция, классы типа Харди-Лоренца.

Пусть тройка (X,d,μ) — пространство однородного типа, где X — непустое множество с квазиметрикой d (неравенство треугольника заменено условием

$$\exists K_d \geq 1 \quad \forall\, x,y,z \in X \quad d(x,z) \leq K_d(d(x,y)+d(y,z))$$

и σ-конечной борелевской мерой μ, удовлетворяющей условию удвоения (существует $K_\mu > 0$, что для любого шара $B := B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ выполняется неравенство

$$\mu(B(x,2r)) \leq K_\mu \mu(B(x,r)), \quad x \in X,\ r > 0).$$

Рассмотрим произведение $\mathbf{X} := X \times I$, где $I = (0,t_0)$, $0 < t_0 \leq +\infty$, с мерой-произведением $\mu \times m$ (m — мера Лебега на I).

Для $x \in X$ определим «некасательную» область $D(x) := \{(y,t) \in \mathbf{X} : d(x,y) < t\}$ и максимальную функцию $\mathcal{N}u(x) := \sup\{|u(y,t)| : (y,t) \in D(x)\}$ для функции $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$.

Обозначим $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ — множество всех измеримых функций $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ (эквивалентные функции не отождествляются), для которых $\mathcal{N}u$ конечна μ-почти всюду.

Пусть $L^{p,q}(X)$ — стандартные пространства Лоренца, $0 < p,q \leq \infty$, и $\|\cdot\|_{p,q}$ — их обычная квазинорма, f^* — убывающая перестановка для измеримой функции $f : X \to \mathbb{R}$ [1, п. 1.4].

Рассмотрим классы типа Харди-Лоренца

$$\mathcal{H}^{p,q}(\mathbf{X}) := \{u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X}) : \mathcal{N}u \in L^{p,q}(X)\},$$

которые являются расширениями тех или иных (при конкретном выборе X и I) классов Харди.

Например, для $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ и $I = (0,\infty)$, класс $\mathcal{H}^{1,1}(\mathbf{X})$ расширяет тент-пространство Койфмана–Мейера–Стейна T^1_∞ из [2]. Подклассы $\mathcal{H}^{p,p}(\mathbf{X})$, состоящие из непрерывных функций изучались в [3], для произвольных метрических пространств X.

Для $0 < p < \infty$ p-атомом назовем любую функцию $a \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ со свойствами: существует шар $B \subset X$, для которого $\operatorname{supp} a \subset \mathcal{T}(B)$ и $|a(y,t)| \le [\mu(B)]^{-1/p}$ для всех $(y,t) \in \mathbf{X}$.

Здесь множество $\mathcal{T}(B)$ определяется равенством

$$\mathcal{T}(B) := \mathbf{X} \setminus \left(\bigcup_{x \notin B} D(x) \right).$$

Теорема. Если $0 < p < \infty, 0 < q \le \infty$, то для любой функции $u \in \mathcal{H}^{p,q}(\mathbf{X})$ существует последовательность $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}^{p,q}(\mathbf{X})$ со свойствами:

1) $u(y,t) = \sum\limits_k u_k(y,t)$;

2) $|u_k(y,t)| \le 2^{k+1}$;

3) $\operatorname{supp} \left(u - \sum\limits_{k=-N}^{N} u_k \right) \subset \{(y,t) : |u(y,t)| \le 2^{-N}\} \cup \mathcal{T}(\{\mathcal{N} u > 2^{N+1}\})$;

4) для каждого $k \in \mathbb{Z}$ функция u_k представима в виде

$$u_k = \sum_j \lambda_k^j a_k^j, \quad \lambda_k^j = 2^{k+1} [\mu(B_k^j)]^{1/p},$$

где a_k^j — p-атом с носителем $\operatorname{supp} a_k^j \subset \mathcal{T}(B_k^j)$ для некоторого шара B_k^j, а λ_k^j удовлетворяют неравенству

- $C_1 \|u\|_{\mathcal{H}^{p,q}(\mathbf{X})} \le \left(\sum_k \left[\sum_j |\lambda_k^j|^p \right]^{q/p} \right)^{1/q} \le C_2 \|u\|_{\mathcal{H}^{p,q}(\mathbf{X})}$ при $q < \infty$;
- $C_{1,\infty} \|u\|_{\mathcal{H}^{p,\infty}(\mathbf{X})} \le \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_j |\lambda_k^j|^p \right)^{1/p} \le C_{2,\infty} \|u\|_{\mathcal{H}^{p,\infty}(\mathbf{X})}$ при $q = \infty$

(постоянные C_i, $C_{i,\infty}$, $i = 1, 2$ не зависят от u).

Литература

1. Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis* // Graduate Texts in Mathematics № 249, New York: Springer; 3rd ed. – 2014. – 655 p.

2. Coifman, R. R., Meyer, Y., Stein, E. M. *Some new function spaces and their applications to harmonic analysis* // Journal of Functional Analysis. – 1985. – Vol. 62, № 2. – P. 304–335.

3. Кротов В. Г. *О граничном поведении функций из пространств типа Харди* // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1990. – Т. 54, № 5. – С. 957–974.

ATOMIC DECOMPOSITION OF FUNCTIONS FROM HARDY-LORENTZ TYPE SPACES

M.M. Loginovskaya

Atomic decomposition is constructed for functions from certain classes, which are extensions of Hardy spaces.

Keywords: spaces of homogeneous type, atomic decomposition, maximal function, Hardy-Lorentz type spaces.

УДК 517.547

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С НАХОЖДЕНИЕМ КУСОЧНО-ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНДИКАТОРОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА И НОРМАЛЬНОГО ТИПА

Л.С. Маергойз[1]

1 *bear.lion@mail.ru*; Институт леса им. В.Н. Сукачева СО РАН, Федеральный исследовательский центр "Красноярский научный центр СО РАН"

Рассматривается класс целых функций одной переменной целого порядка и нормального типа, с каждой из которых ассоциируется ряд Пюизе, являющийся обращением той или иной ветви некоторой рациональной функции $p = r(z)$ в окрестности $p = \infty$. В докладе обсуждаются задачи нахождения кусочно-тригонометрического индикатора целой функции из этого класса по ее коэффициентам Тейлора. Актуальность этой проблемы объясняется недавними исследованиями о приложениях неоднолистного аналога теоремы Пойа к решению алгебраических уравнений.

Ключевые слова: целая функция, ряд Пюизе, индикаторная и сопряженная диаграммы.

Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^k}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

– целая функция целого порядка ρ и нормального типа σ.

Полагаем $L = \{p = (r, \varphi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}\}$– риманова поверхность логарифма. Ассоциируем с целой функцией f вида (1) сходящийся ряд Пюизе

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{(k+1)/\rho}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\exp\{(k+1)(\ln r + i\varphi)/\rho\}}, \quad r > R,\ \varphi \in \mathbb{R};\ c_0 \neq 0, \tag{2}$$

где $p^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\varphi}, \alpha > 0$; $R > 0$ – радиус расходимости ряда. Известно, что $R = \sigma$. Ряд (2) и функция (1) взаимно определяют друг друга. Ряд F определяется значениями параметра φ, например, на интервале $(-\pi\rho, \pi\rho]$, поскольку $F(r, \varphi + 2\pi\rho) = F(r, \varphi)$, $r > R$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

В. Бернштейн [1] ассоциировал индикатором $h = h_f$ функции f поверхность I_h, образованную движением полуплоскости $\Pi_h(\theta) = \{p \in \mathbb{C} : \Re p e^{i\rho\theta} > h(\theta)\}$, где $\theta \in \mathbb{R}$– параметр движения. "Движение" полуплоскости означает ρ оборотов её вращения вокруг бесконечно удаленной точки. Эта поверхность I_h называется *индикаторной диаграммой* целой функции f (1) (после введения на ней топологии, комплексной структуры, превращающей I_h в риманову поверхность $\mathbf{I}_h$) [2 , Определение 2].

Индикатор $h_f(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ целой функции f (1) принадлежит классу $\mathfrak{P}_\rho = \{h\}$ заданных в $\mathbb{R}$ 2π-периодических тригонометрически ρ-выпуклых функций. По аналогии с индикаторной диаграммой для $h \in P_\rho$ можно построить риманову поверхность, называемую в [2] *ρ-листной вогнутой диаграммой*, ассоциированной с h. Пусть $\mathscr{I}(F)$ – множество всех ρ-листных вогнутых диаграмм, куда аналитически продолжается ряд F (2). *Сопряженной диаграммой* целой функции f (1) называется наибольшая ρ-листная вогнутая диаграмма $I_F \in \mathscr{I}(F)$ [2, Определение 2]. Согласно многолистного аналога теоремы Пойа-Бернштейна, индикаторная и сопряженная диаграммы целой функции f вида (1) совпадают [2, теорема 3]. Поэтому для вычисления индикатора целой функции f (1) важно знать особые точки на границе ее сопряженной диаграммы I_F [2, определение 6].

В докладе обсуждается подход к решению этой проблемы для ряда Пюизе F, который является обращением той или иной ветви некоторой рациональной функции $p = r(z)$ в окрестности $p = \infty$. В этом случае индикатор h_f – кусочно-тригонометрическая функция класса $\mathfrak{P}_\rho$, а сопряженная диаграмма I_F – ρ-листный в окрестности б.у. точки вогнутый многоугольник [2, Определение 2]. По теореме Пойа о связи между индикаторной и сопряженной диаграммми функции f вида (1) при $\rho = 1$, когда ветвь обращения $r(z)$ является однолистной, индикатор

$$h_f(\theta) = \sup\{\Re p_j e^{i\theta},\ j = 1, \dots, k\},\ \ \theta \in \mathbb{R},$$

где $\{p_j\}_1^k$ – все вершины многоугольника I_F. В случае $\rho \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ возникают две задачи для определения структуры границы I_F.

1. Зная критические значения $r(z)$, найти точки ветвления римановой поверхности обращения $r(z)$, являющиеся вершинами многоугольника.

2. Исследовать "отношение соседства" вершин, т. е. определить в какой последовательности ребра многоугольника соединяют его вершины.

В докладе иллюстрируется подход к решению этих задач на примерах, в которых критические точки функции $r(z)$ и её критические значения обладают круговой симметрией, а ассоциированная с рядом F целая функция f порядка ρ (см. (1)) допускает представление $f(z) = g(z^s)$, $z \in \mathbb{C}$, где $s \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, а g – целая функция порядка ρ/s. В этом случае индикатор h_f имеет период $2\pi/s$, а на индикаторной диаграмме $\mathbf{I}_h$ и на ее границе $\partial\mathbf{I}_h$ действует группа автоморфизмов с образующей, взаимно однозначно отображающей полуплоскость $\Pi_h(\theta)$ на полуплоскость $\Pi_h(\theta - 2\pi/s)$ с сохранением этого свойства для их граничных прямых.

Работа выполнена в рамках базового проекта ФИЦ КНЦ СО РАН № 125030603236-7.

Литература

1. Bernstein V. *Sulle proprieta caratteristiche delle indicatrici di crescenza delle transcendenti intere d'ordine finito* // Mem. Classe Sci. Fis. Mat. Natur. – 1936. – V. 6. – P. 131–189.

2. Маергойз Л. С.*Способы аналитического продолжения многозначных функций одной переменной. Приложение к решению алгебраических уравнений* // Тр. Инст. матем. и мех. Ур.О РАН. – 2019. – Т. 25. – № 1. – С. 120–135.

TASKS RELATED TO FINDING PIECEWISE TRIGONOMETRIC INDICATORS OF ENTIRE FUNCTIONS OF INTEGER ORDER AND NORMAL TYPE

L.S. Maergoiz

The class of entire functions of one variable of the whole order and normal type is considered, each of which is associated with a series of Puiseux, which is the conversion of a branch of some rational function $p = r(z)$ in a neighborhood of $p = \infty$. The report discusses the problems of finding a piecewise

trigonometric indicator of an entire function from this class, according to its Taylor coefficients. The urgency of this problem is explained by recent research on applications of the multivalent analogue of Polya's theorem to the solution of algebraic equations.
Keywords: entire function, series of Puiseux, indicator and conjugate diagrams.

УДК 517.95

ОДНА ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА НА НЕКОМПАКТНОМ РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Е.А. Мазепа[1]

1 *elena.mazepa@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет

В работе получена теорема сравнения для решений краевых задач в классе непрерывных ограниченных функций для неоднородного уравнения Шрёдингера при вариации его потенциала на некомпактных римановых многообразиях.

Ключевые слова: неоднородное уравнение Шрёедингера, краевые задачи, теорема сравнения.

В работе рассматриваются решения краевых задач для неоднородного уравнения Шрёдингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = h(x) \tag{1}$$

на произвольных гладких связных некомпактных римановых многообразиях M без края.

Всюду в работе будем полагать, что $c(x) \in C^{0,\alpha}_{loc}(M)$ — неотрицательная функция на M, $h(x) \in C^{0,\alpha}_{loc}(M)$, где $0 < \alpha \leqslant 1$.

Пусть $G \subset M$ — некоторое предкомпактное подмножество с достаточно гладкой границей ∂G, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, т.е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные на M функции. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M и использовать обозначение $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|f_1(x) - f_2(x)\|_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $\|f(x)\|_{C^0(G)} = \sup\limits_G |f(x)|$.

Отношение «$\overset{M}{\sim}$» не зависит от выбора исчерпания многообразия и, таким образом, разбивает множество всех непрерывных на M функций на классы эквивалентности (см., например, [2]). Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$.

Будем говорить, что для уравнения (1) на M *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$.

Многообразие M будем называть *L-точным многообразием*, если на M существует решение u однородного уравнения $Lu = 0$ такое, что $u \in [1]$.

Подход к постановке краевых задач на произвольном некомпактном римановом многообразии в терминах классов эквивалентных функций является одним из альтернативных методов постановки краевых задач на произвольных некомпактных многообразиях при отсутствии у них естественной геометрической компактификации. Он был впервые предложен в работе [2], и получил дальнейшее развитие в [1], [3], [4].

Далее наряду с оператором Шрёдингера L рассмотрим на M оператор Шрёдингера с вариацией потенциала

$$L_1 \equiv \Delta - c_1(x),$$

где $c_1(x) \in C^{0,\alpha}_{loc}(M)$, $0 \leqslant c_1(x) \leqslant c(x)$ при $c_1(x) \not\equiv 0$, $c_1(x)$ имеет некомпактный носитель.

Ранее доказанная теорема (см. [4]) устанавливает взаимосвязь разрешимости краевых задач в заданном классе эквивалентности для неоднородного уравнения Шрёдингера (1) при некоторых вариациях его потенциала $c(x)$.

Теорема 1. *Пусть многообразие M является L-точным и f — некоторая ограниченная непрерывная на M функция. Если на M разрешимы краевые задачи для неоднородных уравнений $Lv = h(x)$ и $\Delta w = h(x)$ с граничными условиями из класса $[f]$, то на M разрешима краевая задача и для уравнения $L_1 u_1 = h(x)$ с граничными условиями из класса $[f]$.*

В данной работе получен уточняющий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть u — решение из условия L-точности многообразия. Тогда существует константа $A \geq 0$ такая, что*

$$v - A(1-u) \leq u_1 \leq w + A(1-u).$$

При этом, если $f \geq 0$, то $A = 0$. В противном случае $A > 0$.

Литература

1. Корольков С. А. *О разрешимости краевых задач для стационарного уравнения Шрёдингера в неограниченных областях римановых многообразий* // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51. – № 6. – С. 726–732.

2. Мазепа Е. А. *Краевые задачи для стационарного уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях* // Сиб. мат. журнал. – 2002. – Т. 43. – № 3. – С. 591–599.

3. Мазепа Е. А. *О разрешимости краевых задач для уравнения Пуассона на некомпактных римановых многообразиях* // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. – Т. 20. – № 3. – С. 136–147.

4. Mazepa E., Ryaboshlykova D. *Boundary value problems for the inhomogeneous Schrödinger equation with variations of its potential on non-compact Riemannian manifolds* // Issues of Analysis. – 2021. – V. 10. – Iss. 3. – P. 113–128.

ONE COMPARISON THEOREM FOR SOLUTIONS OF THE INHOMOGENEOUS SCHRÖDINGER EQUATION ON A NON-COMPACT RIEMANNIAN MANIFOLD

E.A. Mazepa

In this paper, a comparison theorem is obtained for solutions of boundary value problems in the class of continuous bounded functions for the inhomogeneous Schrödinger equation with a variation of its potential on non-compact Riemannian manifolds.

Keywords: inhomogeneous Schrödinger equation, boundary value problems, comparison theorem.

УДК 517.927.25, 517.984.52

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА

А.С. Макин[1]

1 *alexmakin@yandex.ru*; Институт прикладной математики и механики

Исследуется спектральная задача для оператора Дирака с произвольным комплекснозначным суммируемым потенциалом и краевыми условиями, не являющимися регулярными. Изучается полнота и базисность системы корневых функций указанного оператора.

Ключевые слова: оператор Дирака, спектральные разложения, нерегулярные и вырожденные краевые условия.

В настоящей работе изучается система Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y} = \mathrm{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

комплекснозначные функции $P, Q \in L_1(0,\pi)$, с двухточечными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{y}) = a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \\ U_2(\mathbf{y}) = a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где коэффициенты a_{jk} – произвольные комплексные числа, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Оператор $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ является линейным оператором в пространстве $\mathbb{H} = L_2(0,\pi) \oplus L_2(0,\pi)$ с областью определения $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] \oplus W_1^1[0,\pi] : \mathbb{L}\mathbf{y} \in \mathbb{H}, U_j(\mathbf{y}) = 0 \ (j = 1,2)\}$.

Обозначим через A_{jk} $(1 \le j < k \le 4)$ определитель, составленный из j-го и k-го столбцов матрицы A. Краевые условия (2) могут быть разделены на 3 основных типа:

1) регулярные; 2) нерегулярные; 3) вырожденные.

Определение 1. *Краевые условия (2) называются регулярными, если*

$$A_{14}A_{23} \neq 0.$$

Определение 2. *Краевые условия (2) называются нерегулярными, если*

$$A_{14}A_{23} = 0, \quad (A_{12} + A_{34})(|A_{23}| + |A_{14}|) \neq 0, \tag{3}$$

и вырожденными, если

$$A_{14}A_{23} = 0, \quad (A_{12} + A_{34})(|A_{23}| + |A_{14}|) = 0. \tag{4}$$

К настоящему времени регулярные краевые задачи для оператора (1) хорошо изучены. Основной целью настоящей работы является исследование базисных свойств систем корневых функций оператора (1) с краевыми условиями, не являющимися регулярными.

Теорема 1. *Пусть все собственные значения задачи (1), (2), (3) лежат внутри полосы* Π

$$|\mathrm{Im}\lambda| \leq M. \tag{5}$$

Тогда система корневых функций задачи (1), (2), (3) образует безусловный базис в замыкании своей линейной оболочки.

Теорема 2. *Если спектр задачи (1), (2), (3) удовлетворяет условию (5), а потенциал* $V \in L_2(0,\pi)$*, то система корневых функций рассматриваемого оператора неполна в пространстве* $\mathbb{H}$*.*

Далее будем считать, что краевые условия (2) вырожденные, т.е. имеет место равенства (4), причем дополнительно выполняется соотношение

$$A_{14} = A_{23} = A_{12} + A_{34} = 0. \tag{6}$$

Теорема 3. *Предположим, существует подпоследовательность собственных значений* λ_{n_l}*, такая что* $\lambda_{n_l} \in \Pi$*. Пусть порядок присоединенных функций, соответствующих* λ_{n_l}*, ограничен одной постоянной. Тогда система корневых функций задачи (1), (2), (4), (6) не образует базис в пространстве* H*.*

Заметим, что при некоторых дополнительных условиях на потенциал V система корневых функций оператора (1) с краевыми условиями (3) или (4) полна в $\mathbb{H}$. Вместе с тем в [1] установлено, что если $V \equiv 0$, а краевые условия не являются регулярными, то указанная система функций неполна в $\mathbb{H}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы регионального Азово-Черноморского математического центра по соглашению № 075-02-2025-1620.

Литература

1. Марченко В. А. *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.* – Киев.: Наукова думка, 1977. – 330 с.

ON SPECTRAL PROBLEMS FOR THE DIRAC SYSTEM

A.S. Makin

The paper deals with the spectral problem for Dirac operator with complex-valued summable potential and non-regular boundary conditions. We study completeness and the basis property of root function systems of the indicated operator.

Keywords: Dirac operator, spectral expansions, irregular and degenerate boundary conditions.

УДК 517.53

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА В ПОЛУКОЛЬЦЕ

К.Г. Малютин[1]

1 *malyutinkg@gmail.com*; Курский государственный университет

В этой статье некоторые результаты по теории распределения значений аналитических и субгармонических функций, определенных в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и полуплоскости $\mathbb{C}_+$, полученные для целых функций Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером, для функций, аналитических в $\mathbb{C}_+$, Н. В. Говоровым, а для субгармонических функций в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}_+$, А. Ф. Гришиным, будут распространены на более общую ситуацию, когда субгармонические функции определены в открытом полукольце. Особый класс этих функций составляют функции вполне регулярного роста, для которых доказан основной результат, дающий выражение плотности ее полной меры в терминах индикаторной функции.

Ключевые слова: субгармоническая функция, полукольцо, полная мера, индикатор, вполне регулярный рост.

Теория функций вполне регулярного роста в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z | \operatorname{Im} z > 0\}$ была развита Н. В. Говоровым [1]. Одновременно, А. Ф. Гришин развил теорию субгармонических функций вполне регулярного роста в $\mathbb{C}_+$ [2]. В недавней работе А. Ф. Ариаса [3] рассматривались некоторые вопросы регулярного роста функций аналитических в проколотой комплексной плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. В данной работе мы рассматриваем вопросы регулярного роста субгармонических функций, определенных в неограниченном полукольце $D_+(R) = \{z \in \mathbb{C}_+ \mid |z| > R\}$. Обозначим через $L_R = \{z = Re^{i\theta} | 0 \le \theta \le \pi\}$ полуокружность. Пусть $\rho(r)$ уточненный порядок в смысле Валирона, $V(r) := r^{\rho(r)}$.

Пусть $SK(R)$ – пространство субгармонических функций $v(z)$ на $D_+(R)$, таких что $v(z)$ имеет положительную гармоническую мажоранту на каждой ограниченной подобласти полукольца $D_+(R')$ для любого $R' > R$. Предположим, что равномерно по $\theta \in (0,\pi)$

$$\sigma_\infty = \limsup_{r\to\infty} V^{-1}(r)\, v(re^{i\theta}) \ne 0,\infty, \quad \sigma_R = \limsup_{r\to R+0} V^{-1}((r-R)^{-1})\, v(re^{i\theta}) \ne 0,\infty.$$

Функция определенная на $(0,\pi)\times\{1,2\}$ равенством

$$h_v(\theta,j)=\begin{cases} h_v(\theta,1)\limsup\limits_{r\to\infty} V^{-1}(r)\,v\left(\left(\dfrac{1}{r}+R\right)e^{i\theta}\right), & \theta\in(0,\pi),\\ h_v(\theta,2)=\limsup\limits_{r\to\infty} V^{-1}(r)\,v(re^{i\theta}), & \theta\in(0,\pi),\end{cases}$$

называется индикатором $v(z)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$.

Сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема. *Пусть v(z) – субгармоническая функция на полукольце $D_+(R)$, уточненного порядка $\rho(r)$ и вполне регулярного роста, μ – ее мера Рисса. Тогда для всех α,β таких, что $0<\alpha<\beta<\pi$, за исключением, возможно, счетного множества значений α,β существует предел*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mu(r,\alpha,\beta)}{V(r)}=\frac{1}{2\pi\rho^2}S_v(\alpha,\beta),$$

где

$$S_v(\alpha,\beta)=h'_{v,1}(\beta)+h'_{v,2}(\beta)-(h'_{v,1}(\alpha)+h'_{v,2}(\alpha))+\rho^2\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\ln|h_{v,1}(\varphi)|+\ln|h_{v,2}(\varphi)|)\,d\varphi,$$

$$\mu(r,\alpha,\beta)=\mu(\{z: R<|z|<r, \alpha<\arg z<\beta\}).$$

Исключительное множество может состоять только из точек, для которых по крайней мере одна из производных $h'_{v,1}(\alpha), h'_{v,2}(\alpha), h'_{v,1}(\beta), h'_{v,2}(\beta)$ не существует.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/.

Литература

1. Говоров Н. В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом.* – М.: Наука, 1986. – 240 с.

2. Гришин А. Ф. *О регулярности роста субгармонических функций* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1968. – Вып. 7. – С. 59–84.

3. Arias A. F. *On the distribution of zeros of analytic functions in angles in* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ // Anal. Math. – 2024. – Vol. 50 – No. 2. – P. 463–479.

SUBHARMONIC FUNCTIONS OF COMPLETELY REGULAR GROWTH IN A SEMIRING

K.G. Malyutin

In this paper, some results on the theory of distribution of values of analytic and subharmonic functions defined in the complex plane $\mathbb{C}$ and the half-plane $\mathbb{C}_+$, obtained for entire functions by B. Ya. Levin and A. Pfluger, for functions analytic in $\mathbb{C}_+$, by N. V. Govorov, and for subharmonic functions in $\mathbb{C}$ and $\mathbb{C}_+$, by A. F. Grishin, will be extended to a more general situation when subharmonic functions are defined in an open semiring. A special class of these functions is made up of functions of completely regular growth, for which the main result is proved, giving an expression for the density of its total measure in terms of the indicator function.

Keywords: subharmonic function, semiring, full measure, indicator, completely regular growth.

УДК 517.51, 517.53

ДЕЙСТИТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ХАРДИ-СОБОЛЕВА НА ПРЯМОЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ L_p-ПРИБЛИЖЕНИЙ

Т.С. Мардвилко[1]

1 *mardvilko@mail.ru*; Белорусский государственный университет, механико-математический факультет

В статье обсуждается применение одного из методов действительного пространства Харди-Соболева для нахождения наилучших рациональных приближений в пространстве L_p на прямой. Рассматриваемый метод основан на представлении функций данного пространства суммой простых функций.

Ключевые слова: пространство Харди, действительное пространство Харди-Соболева, наилучшие рациональные приближения.

Будем рассматривать пространства Харди в верхней полуплоскости $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$. Аналитическая в Π функция f принадлежит пространству Харди H_p, $0 < p \le \infty$, если

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \|f(\cdot + iy)\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty.$$

Введем аналитическую в Π функцию, соответствующую действительной функции
$g \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$,

$$f(z) = (Cg)(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{t-z}\, dt.$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ и $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$. Тогда g принадлежит действительному пространству Харди–Соболева H^s_σ, если f принадлежит комплексному пространству Харди–Соболева H^s_σ, то есть $f^{(s)} \in H_\sigma$. При этом σ-норма функции g вводится следующим образом

$$\|g\|_{H^s_\sigma} = \left\|(Cg)^{(s)}\right\|_{H_\sigma} = \left\|f^{(s)}\right\|_{H_\sigma}.$$

Для пространства H^s_σ введем еще одну эквивалентную σ-норму. Пусть $I \ne \emptyset$ связное подмножество $\mathbb{R}$. Через $W^s_p(I)$ ($s \in \mathbb{N}, 1 \le p \le \infty$) обозначим пространство Соболева функций $f \in C^{s-1}(I)$, таких, что $f^{(s-1)}$ абсолютно непрерывна на I и $f, f^{(s)} \in L_p(I)$.

Действительную функцию $\varphi \in W^s_\infty(\mathbb{R})$ называем s-простой, если она финитна. С s-простой функцией φ будем ассоциировать отрезок $J = J(\varphi)$, называемый опорным, такой, что $\operatorname{supp}\varphi \subset J$. Далее для s-простой функции введем характеристику

$$\mu_{s\sigma}(\varphi) = |J|^{\frac{1}{\sigma}} \|\varphi^{(s)}\|_{L_\infty(J)}, \quad |J| \text{ — длина отрезка } J.$$

Следующая теорема 1 является следствием результата Р.Койфмана об атомическом разложении функций пространства $\Re H_p$, $p \le 1$.

Теорема 1. *Функция* $g \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, *принадлежит* H^s_σ, $s \in \mathbb{N}$, $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$, *в том и только в том случае, если существует последовательность* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *s-простых функций, удовлетворяющих условиям*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{s\sigma}(\varphi)^{\sigma} =: A < \infty, \quad (1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = g(x), \quad (2)$$

где ряд (2) сходится по норме пространства $L_p(\mathbb{R})$. *При этом* $\|g\|^{\#}_{H^s_\sigma} = \inf\left\{A^{\frac{1}{\sigma}} : \text{верно } (1) \text{ и } (2)\right\}$ *является* σ*-нормой в* H^s_σ, *эквивалентной* $\|\cdot\|_{H^s_\sigma}$.

Теорема 1 вытекает из ее аналога для пространства H^s_σ (см. Е.И. Стельмах [1]) и теоремы М. Рисса.

Теорема 2. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ *и* $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$. *Если* $g \in H^s_\sigma$, *то*

$$R_n(g)_p \leq \frac{c_1(s,p)}{n^s} \|g\|_{H^s_\sigma}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В работе [2] показано применение теорем 1 и 2 для нахождения наилучших рациональных приближений в пространстве L_p. В частности, найдена асимптотика наилучших рациональных приближений функции

$$\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{\frac{1}{p}} (\ln x)^{\frac{1}{p}+\alpha}} & \text{при} \quad x \geq e, \\ 0 & \text{при} \quad x < e, \end{cases} \qquad 1 < p < \infty, \quad \alpha > 0.$$

Именно наилучшие рациональные L_p-приближения $R_n(\lambda, L_p(\mathbb{R})) \asymp n^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, где постоянные, спрятанные символом $\asymp$, зависят лишь от α и p.

Оценки наилучших рациональных приближений функций со степенно-логарифмическими особенностями имеются также в работе [3]. Отметим также, что применение действительного пространства Харди-Соболева на прямой к исследованию скорости наилучших равномерных рациональных приближений рассмотрено в работе [4].

Литература

1. Стельмах Е. И. *Прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации для пространств Харди в полуплоскости* // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52. – № 6. – С. 36–41.

2. Мардвилко Т. С. *Применения действительного пространства Харди-Соболева на прямой для нахождения наилучших рациональных приближений в* L_p // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32. – № 2. – С. 31–42.

3. Мардвилко Т. С., Пекарский А. А. *Применение действительного пространства Харди-Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2022. – № 3. – С. 16–36.

4. Мардвилко Т. С. *Равномерная рациональная аппроксимация нечетного и четного преобразований Коши* // Матем. сб. – 2025. – Т. 216. – № 2. – С. 110–127.

THE REAL HARDY-SOBOLEV SPACE ON THE LINE
FOR FINDING THE BEST RATIONAL L_p-APPROXIMATIONS

T.S. Mardvilko

The paper discusses the application of one of the methods of the real Hardy-Sobolev space for finding best rational approximations in the L_p space on the line. The considered method is based on representing the functions of this space as a sum of simple functions.

Keywords: Hardy space, real Hardy-Sobolev space, best rational approximations.

УДК 517.956

К ЗАДАЧАМ ТИПА ДАРБУ ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.Н. Миронов[1], Л.Б. Миронова[2]

1 *miro73@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт
2 *lbmironova@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

Рассмотрены две задачи с условиями на характеристике и нехарактеристической прямой. Получены достаточные условия однозначной разрешимости задач.

Ключевые слова: уравнение с доминирующей частной производной, уравнение Баренблатта — Желтова — Кочиной, задача Гурса, задача Коши, задача Дарбу, функция Римана — Адамара.

Здесь для уравнения третьего порядка с двумя независимыми переменными (обобщения уравнения Баренблатта — Желтова — Кочиной)

$$u_{xxy} + a_{20}(x,y)u_{xx} + a_{11}(x,y)u_{xy} + a_{10}(x,y)u_x + a_{01}(x,y)u_y + a_{00}(x,y)u = f(x,y) \quad (1)$$

доказаны существование и единственность решения двух задач типа Дарбу в треугольных областях. Отметим, что указанное уравнение рассматривалось, в частности, в работах [1]–[5].

Определим класс функций $C^{(k,l)}$ в области D следующим образом: функция $u \in C^{(k,l)}(D)$, если в D существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial^{r+s}u}{\partial x^r \partial y^s}$ ($r = 0,\ldots,k$; $s = 0,\ldots,l$). Решение уравнения (1) класса $C^{(2,1)}(D)$ назовем регулярным в D.

Пусть D — область, ограниченная прямыми $x = 0$, $y = y_0 > 0$, $y = x$, коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ij} \in C^{(i,j)}(\overline{D})$.

Задача 1. *В области D найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\begin{gathered} u|_{x=0} = \varphi(y), \quad u_x|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=y} = \psi(x), \\ \varphi(0) = \psi(0), \quad \varphi'(0) + \varphi_1(0) = \psi'(0), \end{gathered} \quad (2)$$

$$\varphi \in C^1([0,y_0]), \quad \varphi_1 \in C^1([0,y_0]), \quad \psi \in C^2([0,y_0]).$$

Пусть D^* — область, ограниченная прямыми $y = 0$, $x = x_0 > 0$, $y = x$.

Задача 2. *В области D^* найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u|_{x=y} = \lambda(x), \quad u_x|_{x=y} = \lambda_1(x), \quad u|_{y=0} = \mu(x),$$
$$\lambda(0) = \mu(0), \quad \lambda_1(0) = \mu'(0), \tag{3}$$

$$\lambda \in C^1([0, x_0]), \quad \varphi_1 \in C^1([0, x_0]), \quad \psi \in C^2([0, x_0]).$$

Существование и единственность решений задач 1 и 2 доказаны путем редукции указанных задач к задачам Гурса и Коши соответственно.

Литература

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. *Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах* // ПММ. – 1960. – Т. 24. –№ 5. – С. 58–75.

2. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547–552.

3. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. – 226 с.

4. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *О задачах Коши для двух уравнений в частных производных* // Изв. вузов. Матем. – 2002. – № 5. – С. 23–30.

5. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. *Исследование эффективных уравнений с дисперсией, описывающих распространение волн в стратифицированных средах и тонких пластинах* // Докл. РАН. – 2002. – Т. 383. – № 6. – С. 742–746.

6. Сердюкова С. И. *Экзотическая асимптотика для линейного гиперболического уравнения* // Докл. РАН. – 2003. – Т. 389. – № 3. – С. 305–309.

ON DARBOUX TYPE PROBLEMS FOR A HYPERBOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER

A.N. Mironov, L.B. Mironova

Two problems with conditions on a characteristic and an uncharacteristic straight line are considered. Sufficient conditions for unambiguous solvability of the problems have been obtained.

Keywords: dominant partial differential equation, Barenblatt — Zheltov — Kochina equation, Goursat problem, Cauchy problem, Darboux problem, Riemann — Hadamard function.

УДК 517.968.23

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГАЗЕМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО РОДА В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Т.И. Михалёва[1], К.М. Расулов[2]

1 *tat.timopheeva@yandex.ru*; Смоленский государственный университет
2 *kahrimanr@yandex.ru*; Смоленский государственный университет

В статье предлагается конструктивный метод решения краевой задачи типа Газемана для квазигармонических функций первого рода в произвольных односвязных областях.

Ключевые слова: квазигармоническая функция, краевая задача типа Газемана, интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

1. Постановка задачи. Рассмотрим на расширенной плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ конечную область T^+, ограниченную гладким замкнутым контуром L, и пусть $T^- = \overline{\boldsymbol{C}} \setminus (T^+ \cup L)$. Будем считать, что точка $z = 0$ принадлежит T^+.

Задача $\boldsymbol{H}_1$: *требуется найти все ограниченные на бесконечности кусочно квазигармонические функции $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ первого рода с линией скачков L, принадлежащие классу $\boldsymbol{Q}_1(T^\pm) \bigcap H^{(1)}(L)$ и удовлетворяющие на L краевому условию*

$$W^+[\alpha(t)] = G(t)W^-(t) + g(t), \tag{1}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на L функции, удовдетворящие условию Гельдера, причем $G(t) \neq 0$ на L, а $\alpha(t)$ — функция сдвига контура L, сохраняющая его ориентацию.

2. Метод решения задачи $\boldsymbol{H}_1$. Используя тот факт, что всякая ограниченная на бесконечности кусочно квазигармоническая функция $W(z)$ первого рода с линией скачков L_r представляется в виде (см. например, [1;2]):

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\overline{z}}{1+z\overline{z}}\varphi^+(z), & z \in T^+, \\ W^-(z) = \frac{d\varphi^-(z)}{dz} - \frac{2\overline{z}}{1+z\overline{z}}\varphi^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi^+(z), \varphi^-(z)$ — пока неизвестные аналитические соответственно в T^+ и T^- функции, причем $\varphi^-(z)$ ограничена на бесконечности, краевое условие (1) перепишем в виде:

$$\psi^+[\alpha(t)] = G(t)\psi^-(t) + g_1(t), t \in L, \tag{3}$$

где приняты обозначения:

$$\psi^+(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz}, \psi^-(z) = \frac{d\varphi^-(z)}{dz}, g_1(z) = \frac{1 + \alpha(t)\overline{\alpha(t)}}{\overline{\alpha(t)}}\varphi^+[\alpha(t)] - \frac{\overline{t}G(t)}{1 + t\overline{t}}\varphi^-(t) + g(t). \tag{4}$$

Пусть $\chi = \operatorname{Ind} G(t) = (2\pi i)^{-1}[\arg G(t)]_L$ — индекс Коши функции $G(t)$ вдоль кривой L, а $X(z) = \{X^+(z), X^-(z)\}$ — каноническая функция классической однородной задачи Газемана с коэффициентом $G(t)$ в краевом условии (см., например, [3, с. 298]).

Далее ради краткости изложения ограничимся описанием конструктивного метода решения задачи $\boldsymbol{H}_1$ в случае $\chi = \operatorname{Ind} G(t) = (2\pi i)^{-1}[\arg G(t)]_L \geq 0$.

Считая временно $g_1(t)$ известной функцией и решая неоднородную задачу Газемана (3) относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции $\psi(z) = \{\psi^+(z), \psi^-(z)\}$, получаем следующие формулы (см., например, [3, с. 303]):

$$\begin{aligned} \psi^+(z) &= X^+(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g_1[\beta(\tau)]}{\tau - z}d\tau + \int_L R^+(z,\tau)g_1(\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k q_k^+(z)\right\}, z \in T^+, \\ \psi^-(z) &= X^-(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g_1(\tau)}{\tau - z}d\tau + \int_L R^-(z,\tau)g_1(\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k q_k^-(z)\right\}, z \in T^-, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\beta(\tau)$ – функция, обратная к $\alpha(\tau)$, а $R^+(z,\tau), R^-(z,\tau), q_k^+(z), q_k^-(z)$ - вполне определенные функции, и $C_k (k = 0, 1, ..., \chi - 1)$ – произвольные комплексные постоянные.

Наконец, переходя в формулах (5) к пределу при $z \to\in L$, находим граничные значения $\frac{d\varphi^+(t)}{dt}$ и $\frac{d\varphi^-(t)}{dt}$, а затем учитывая, что $\frac{d\varphi^+[\alpha(t)]}{dt} - G(t)\frac{d\varphi^-(t)}{dt} = g_1(t), t \in L$, будем иметь:

$$\varphi^+[\alpha(t)] - G_1(t)\varphi^-(t) + \int_L R_1^+(z,\tau)\varphi^+[\alpha(\tau)]d\tau + \int_L R_1^-(z,\tau)\varphi^-(\tau)d\tau = Q_1(t), t \in L, \quad (6)$$

где $R_1^+(z,\tau), R_1^-(z,\tau), G_1(t), Q_1(t)$ — вполне определенные функции, причем $G_1(t) \neq 0$.

Но равенство (6) есть краевое условие хорошо изученной обобщенной скалярной задачи Газемана для аналитических функций (см., например, [3, с. 288]).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если индекс $\chi \geq 0$, то решение краевой задачи $\boldsymbol{H}_1$ в произвольных односвязных областях с гладкими границами сводится к решению обобщенной скалярной задачи Газемана (6) в классах аналитических функций.*

Литература

1. Михалёва Т. И., Расулов К. М., *Об одном методе решения краевой задачи типа Газемана в классах квазигармонических функций в круговых областях* // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск. – 2022. – Вып. 23. – С.261–269.

2. Расулов К. М., *Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения*. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.

3. Расулов К. М., *Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения*. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.

ON A METHOD FOR SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HASEMAN TYPE FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS OF THE FIRST ORDER IN SIMPLY CONNECTED DOMAINS

T.I. Mikhaloyva, K.M. Rasulov

The article presents a constructive method for solving the boundary value problem of Haseman type for first-order quasiharmonic functions in simply connected domains.

Keywords: quasiharmonic function, boundary value problem of Haseman type, Fredholm integral equation of the second kind.

УДК 517.53

РОСТ ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУКОЛЬЦЕ

А.А. Наумова[1]

1 *aliona.filatowa2013@yandex.ru*; Курский государственный университет

В этой статье некоторые результаты по теории роста субгармонических функций, определенных в комплексной полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$, полученные для мероморфных функций Л. Рубелом и Б. Тейлором, а для функций дельта-субгармонических в $\mathbb{C}_+$ – К. Г. Малютиным, будут распространены на более общую ситуацию, когда субгармонические функции определены в открытом полукольце.

Ключевые слова: субгармоническая функция, полукольцо, полная мера, функция роста.

Пусть f – мероморфная в комплексной плоскости функция, $T(r, f)$ – ее неванлинновская характеристика. Функция f называется функцией конечного γ-типа, если существуют положительные постоянные A и B такие, что $T(r, f) \le A\gamma(Br)$ для всех $r > 0$. Класс таких функций обозначим через Г. Л. Рубел и Б. Тейлор получили критерий принадлежности функции f классу Г в терминах коэффициентов Фурье этой функции [1]. К. Г. Малютин распространил результаты Л. Рубела и Б. Тейлора на функции, дельта-субгармонические в $\mathbb{C}_+$ [2]. Мы распространяем эти результаты на дельта-субгармонические функции, определенные в открытом полукольце.

Обозначим через $D_+(R_1,R_2) = \{z : 0 < R_1 < |z| < R_2 < +\infty, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ открытое полукольцо на верхней полуплоскости. Субгармоничность в замкнутом полукольце $\overline{D_+(R_1,R_2)}$ равносильна субгармоничности в $D_+(R_1',R_2',\delta) = \{z : 0 < R_1' < |z| < R_2' < +\infty, \mathrm{Im}\, z > -\delta\}$ при некоторых $R_1' < R_1 < R_2 < R_2'$, $\delta > 0$. Поэтому функции, субгармонические и ограниченные сверху внутри открытого полукольца $D_+(R_1,R_2)$, образуют более широкий класс, чем субгармонические в замыкании $\overline{D_+(R_1,R_2)}$ полукольца. Через $D_+(R) = \{z : |z| > R, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ обозначаем неограниченное открытое полукольцо на верхней полуплоскости. Пусть $SK(R_1,R_2)$ — класс субгармонических функций в $D_+(R_1,R_2)$. Введём теперь класс $\delta S(D_+(R_1,R_2))$ дельта-субгармонических функций в $D_+(R_1,R_2)$ как разность $\delta S(D_+(R_1,R_2)) = SK(R_1,R_2) - SK(R_1,R_2)$.

Коэффициенты Фурье функции $v \in \delta S(D_+(R_1,R_2))$ определяются равенством:

$$c_k(r, v) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin k\theta \, d\theta, \quad R_1 < r < R_2,\ k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $v \in \delta S(D_+(R))$, $v = v_+ - v_-$, λ — полная мера функции v, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — жорданово разложение меры λ (заметим, что λ_- не есть полная мера v_-). Обозначим через

$$m(r, v) := \frac{1}{r}\int_0^{\pi} v_+(re^{i\varphi}) \sin\varphi \, d\varphi, \quad N(r, v) := \int_{r_0}^{r} \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\, dt,$$

$$T(r, v) := m(r, v) + N(r, v) + m(r_0, -v), \quad r > r_0,$$

где r_0 — фиксированное положительное число такое, что $r_0 > R$.

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на $[0,\infty)$, называется *функцией роста*.

Функция $v \in \delta S(D_+(R))$ называется функцией конечного γ-типа, если существуют постоянные A и $B > 0$ такие, что $T(r, v) \le \frac{A}{r}\gamma(Br)$ для всех $r > r_0$.

Класс данных δ-субгармонических функций конечного γ-типа обозначим через $\delta S(R,\gamma)$. Через $SK(R,\gamma)$ обозначим соответствующий класс субгармонических функций конечного γ-типа. Понятно, что $SK(R,\gamma) \subset \delta S(R,\gamma)$.

Положительная мера λ имеет конечную γ-плотность в $D_+(R)$, если при некоторых положительных A и B выполняется неравенство $N(r,\lambda) := \int_{r_0}^{r} \frac{\lambda(t)}{t^3}\, dt \le \frac{A}{r}\gamma(Br)$ для всех $r > r_0 > R$.

Сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема. *Пусть* $\lambda(v) = \lambda_+(v) - \lambda_-(v)$ *— полная мера функции* v, γ *— функция роста,* $v \in \delta S(R)$. *Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) $v \in \delta S(R, \gamma)$;

2) *мера* $\lambda_+(v)$ (*или мера* $\lambda_-(v)$) *имеет конечную* γ*-плотность и выполняется неравенство* $|c_k(r, v)| \le A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}$, *при некоторых положительных* A, B *и всех* $r > R$.

Для субгармонических функций справедливо следующее следствие из этой теоремы.

Теорема. *Пусть* γ *– функция роста,* $v \in J\delta(R)$. *Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) $v \in JS\delta(R, \gamma)$;

2) *при некоторых положительных* A, B *и всех* $r > R$ *выполняется неравенство* $|c_k(r, v)| \le A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/.

Литература

1. Rubel L. A., Taylor B. A. *Fourier series method for meromorphic and entire functions* // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – Vol. 96 – P. 53–96.

2. Малютин К. Г. *Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – No. 6. – С. 51–70.

GROWTH OF DELTA-SUBHARMONIC FUNCTIONS IN A SEMIRING

A.A. Naumova

In this paper, some results on the theory of growth of subharmonic functions defined in the complex half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$, *obtained for meromorphic functions by L. Rubel and B. Taylor, and for delta-subharmonic functions in* $\mathbb{C}_+$ *– by K. G. Malyutin, will be extended to a more general situation when subharmonic functions are defined in an open semiring.*

Keywords: subharmonic function, semiring, full measure, indicator, growth function.

УДК 517.984

О СОБСТВЕННОМ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА НА НЕЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКЕ

Ш.Б. Неъматова[1]

1 *s.b.nematova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет

В настоящей работе рассматривается обобщенная модель Фридрихса на нецелочисленной решетке. Эта модель представляется в виде операторной матрицы второго порядка. Исследованы собственные вектор-функции в случае пороговых явлений.

Ключевые слова: обобщенная модель Фридрихса, операторная матрица, собственное значение, резонанс с нулевой энергией, собственная вектор-функция.

Для каждого фиксированного $h>0$ через $\mathbb{T}_h^3$ обозначим куб $(-\pi/h;\pi/h]^3$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. По строению множества $\mathbb{T}_h^3$ видно, что для любого $A\subset\mathbb{R}^3$ существует $h=h(A)>0$ такое, что $A\subset\mathbb{T}_h^3$, т.е. $\lim\limits_{h\to 0}\mathbb{T}_h^3=\mathbb{R}^3$.

Пусть $L_2(\mathbb{T}_h^3)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}_h^3$. Обозначим через $\mathscr{H}$ прямую сумму пространств $\mathscr{H}_0:=\mathbb{C}$, $\mathscr{H}_1:=L_2(\mathbb{T}_h^3)$, т.е. $\mathscr{H}:=\mathscr{H}_0\oplus\mathscr{H}_1$.

При каждом фиксированном $h>0$ введем семейства обобщенных моделей Фридрихса $\mathscr{A}_h(k)$, $k\in\mathbb{T}_h^3$, действующую в $\mathscr{H}$ по правилу (операторная матрица второго порядка)

$$\mathscr{A}_h(k):=\begin{pmatrix} A_{00}(h;k) & A_{01}(h)\\ A_{01}^*(h) & A_{11}(h;k)\end{pmatrix},$$

где операторы $A_{ii}(h;k):\mathscr{H}_i\to\mathscr{H}_i$, $i=0,1$ и $A_{01}(h):\mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_0$ определяются по правилам

$$A_{00}(h;k)f_0=(l_2\varepsilon_h(k)+1)f_0,\quad A_{01}(h)f_1=\int_{\mathbb{T}_h^3}v_h(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}(h;k)f_1)(p)=E_h(k;p)f_1(p),\quad E_h(k;p):=l_1\varepsilon_h(p)+l_2\varepsilon_h(k-p).$$

Здесь l_1,l_2 — вещественные положительные числа. при каждом фиксированном $h>0$ функция $v_h(\cdot)$ — вещественнозначная ограниченная функция на $\mathbf{T}_h^3$ и

$$\varepsilon_h(k):=\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{3}(1-\cos(hk_i)),\ k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{T}_h^3.$$

Очевидно, что оператор $\mathscr{A}_h(k)$ ограничен и самосопряжён в $\mathscr{H}$.

Простые рассуждения показывают, что

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathscr{A}_h(k))=[m_h(k);M_h(k)],$$

где числа $m_h(k)$ и $M_h(k)$ определяются следующим образом:

$$m_h(k):=\min_{p\in\mathbb{T}_h^3}E_h(k;p),\quad M_h(k):=\max_{p\in\mathbb{T}_h^3}E_h(k;p).$$

Через $C(\mathbb{T}_h^3)$ (соот. $L_1(\mathbb{T}_h^3)$) обозначим банахово пространство непрерывных (соот. интегрируемых) функций, определенных на $\mathbb{T}_h^3$. Пусть $\mathbf{0}:=(0;0;0)\in\mathbb{T}_h^3$.

Определение 1. *Говорят, что оператор $\mathscr{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, если число $\lambda=1$ является собственным значением интегрального оператора*

$$(G_h\psi)(p)=\frac{v_h(p)}{l_1+l_2}\int_{\mathbb{T}_h^3}\frac{v_h(t)\psi(t)dt}{\varepsilon(t)},\quad \psi\in C(\mathbb{T}_h^3)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию $\psi(\mathbf{0})\neq 0$.

Пусть компоненты вектор-функции $F = (f_0, f_1)$ определены как

$$f_0 = \mathrm{const} \neq 0, \quad f_1(p) = -\frac{1}{l_1 + l_2}\frac{v_h(p) f_0}{\varepsilon(p)}. \tag{1}$$

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. а) *Если оператор* $\mathscr{A}_h(\mathbf{0})$ *имеет нулевое собственное значение, то элемент* $F = (f_0, f_1)$, *определенный по формуле* (1), *удовлетворяет уравнению* $\mathscr{A}_h(\mathbf{0})F = \mathbf{0}$ (*т.е.* F *– есть собственная вектор-функция*) *и имеет место соотношение* $f_1 \in L_2(\mathbb{T}_h^3)$;

б) *Если оператор* $\mathscr{A}_h(\mathbf{0})$ *имеет резонанс с нулевой энергией, то элемент* $F = (f_0, f_1)$, *определенный по формуле* (1), *удовлетворяет уравнению* $\mathscr{A}_h(\mathbf{0})F = 0$ *и имеет место соотношение* $f_1 \in L_1(\mathbb{T}_h^3) \setminus L_2(\mathbb{T}_h^3)$.

Следует отметить, что нулевое собственное значение оператора $\mathscr{A}_h(\mathbf{0})$ в утверждении а) теоремы 1 называется его пороговым собственным значением. При этом выполнение соотношения $f_1 \in L_2(\mathbb{T}_h^3)$ или $f_1 \in L_1(\mathbb{T}_h^3) \setminus L_2(\mathbb{T}_h^3)$ зависит от того, принимает ли функция $v_h(\cdot)$ нулевое или ненулевое значение в точке $\mathbf{0}$. Явление, связанное с оператором $\mathscr{A}_h(\mathbf{0})$, имеющим нулевое собственное значение или резонанс с нулевой энергией, называется пороговым явлением.

Изложенная теорема важна при изучении дискретного спектра оператора энергии, соответствующего системе частиц на нецелочисленной решетке, число которых не сохраняется и не превышает трех [1, 2]. В этом случае оператор энергии представляется в виде операторной матрицы третьего порядка.

Литература

1. Muminov M. I., Rasulov T. H. *Infiniteness of the number of eigenvalues embedded in the essential spectrum of a* 2×2 *operator matrix* // Eurasian Math. J. – 2014. – Vol. 5. – No. 2. – P. 60–77.

2. Расулов Т. Х. *О числе собственных значений одного матричного оператора* // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52. – № 2. – С. 400–415.

ON THE EIGENVECTOR FUNCTION OF THE GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL ON A NON-INTEGER LATTICE

Sh.B. Nematova

We consider the generalized Friedrichs model on a non-integer lattice. This model is represented as a second-order operator matrix. Eigenvector functions are investigated in the case of threshold phenomena.

Keywords: generalized Fredrichs model, operator matrix, eigenvalue, zero-point resonance, eigenvector function.

УДК 517.98

ТЕОРЕМА ЧЕБОТАРЕВА И ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ

С.Я. Новиков[1]

1 *nvks@ssau.ru*; Самарский национальный исследовательский университет

В статье обсуждается связь классической теоремы Чеботарёва о корнях из единицы со свойствами альтернативной полноты и переполненности систем элементов конечномерных евклидовых (унитарных) пространств и бесконечномерных гильбертовых пространств.

Ключевые слова: миноры матрицы, фрейм, полный спарк, альтернативная полнота, сигнал, гильбертово пространство.

Пусть заданы два натуральных числа m и n, причем $m \geq n$.

Теорема Чеботарёва [1]. *Для простого числа m все миноры матрицы Вандермонда $\left(\varepsilon^{jk}\right)_0^{m-1}$, $\varepsilon = \exp(2\pi i/m)$, отличны от нуля.*

Матрица $\left(\varepsilon^{jk}\right)_0^{m-1}$ является унитарной матрицей дискретного преобразования Фурье. Удаляя из этой матрицы $m-n$ строк, получаем $(n \times m)$-матрицу, столбцы которой образуют равномерный фрейм Парсеваля. Теорема Чеботарёва показывает, что получившийся таким образом фрейм пространства $\mathbb{C}^n$ имеет полный спарк, то есть любые его n элементов линейно независимы.

Фреймы с полным спарком нашли многочисленные применения. Например, фрейм $\{\varphi_k\}_{k=1}^{2n-1}$ с полным спарком в $\mathbb{R}^n$ с $(2n-1)$-м элементом обеспечивает инъективность нелинейного оператора

$$\mathscr{A} : \mathbb{R}^n/\{\pm 1\} \to \mathbb{R}^{2n-1}; \quad x \mapsto \{|\langle x, \varphi_k\rangle|\}_{k=1}^{2n-1},$$

которая, в свою очередь, обеспечивает возможность восстановления сигнала по модулям измерений.

Система элементов $\{\varphi_k\}_{k\in K}$ с полным спарком в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ определяется как система векторов, у которой каждая бесконечная подсистема полна в $\mathscr{H}$, то есть $\overline{span}\{\varphi_k\}_{k\in K'} = \mathscr{H}$. Если $\|\varphi_k\| \geq \delta > 0$ для всех k, то система $\{\varphi_k\}_{k\in K}$ не может быть фреймом [2].

В ряде работ определено т.н. свойство *альтернативной полноты*. Система векторов $\{\varphi_k\}_{k\in K}$ называется *альтернативно полной*, если при любом разбиении её на две части, $\{\varphi_k\}_{k\in S}$ и $\{\varphi_k\}_{k\in K\setminus S}$, одна из них будет полной в $\mathscr{H}$. Примеры таких систем известны и в конечномерных, и в бесконечномерных гильбертовых пространствах [2, 3]. Вопрос о существовании гильбертова фрейма в бесконечномерном гильбертовом пространстве со свойством альтернативной полноты остается открытым.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-1791.

Литература

1. Чеботарёв Н. Г. *О корнях из единицы, принадлежащих полиному* // Журнал Русского физико-математического общества, серия 2. – 1926. – Т. 14. – С. 201–207.

2. Избяков И. М., Новиков С. Я., Терёхин П. А. *Альтернативно полные системы и фреймы в задаче восстановления по модулям измерений*// Функциональный анализ и его приложения. – 2025. – Т. 59. – № 1. – С. 3—13.

3. Novikov S. Ya. *Equiangular Tight Frames with Simplices and with Full Spark in R^d*// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – V. 42. № 1. – P. 155—166.

CHEBOTAREV'S THEOREM AND SIGNAL RECOVERY

S.Ya. Novikov

The paper considers the relationship of the classical Chebotarev's theorem on the roots from unity with the complement property and the overcompleteness of systems of elements from finite-dimensional Euclidean (unitary) space and infinite-dimensional Hilbert space.

Keywords: the minors of the matrix, Frame, full spark, complement property, signal, Hilbert space.

УДК 517.928, 517.923, 517.929, 517.962, 519.116

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И КРИВЫЕ БУТРУ

В.Ю. Новокшенов[1]

1 *novik53@mail.ru*; Институт математики с ВЦ, Уфимский Федеральный исследовательский центр РАН

Изучено распределение нулей ортогональных многочленов со специальными весовыми функциями и установлен вид кривых, где лежат их нули в комплексной плоскости.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, рекуррентные соотношения высокого порядка, слабые асимптотики, квазиклассический режим, класс Блюменталя-Неваи, звездный носитель меры нулей, аппроксимации Эрмита-Паде.

Для многочленов $Q_n(z) := z^n + \dots$, определяемых трехчленными рекуррентными соотношениями порядка $p+1$: $Q_{n+1} = zQ_n - a_{n-p+1}Q_{n-p}$, $p \geq 1$, с зависящим от параметра N коэффициентом $a_n \equiv a_{n,N}$ (varying recurrence coefficient), доказаны слабые пределы мер, равнораспределенных в нулях $Q_n(z)$, в квазиклассическом режиме при $n \to \infty, \frac{n}{N} \to t$, и $a_{n,N} \to a(t)$. При этих условиях многочлены ортогональны с весом $\exp\{-Nt(|z|^2 + \operatorname{Re} V(z)\}$ с некоторым полиномиальным потенциалом $V(z)$. Доказано, что в квазиклассическом режиме нули многочленов $Q_n(z)$ лежат на кривых Бутру, то есть кривых γ в комплексной плоскости, определяемых условием $\operatorname{Re}\int_\gamma \sqrt{V'(z)}dz = 0$.

Для кубического потенциала $V(z)$ вычислены точки накопления нулей на кривой Бутру, которая в данном случае представляет собой три луча $\arg z = \pm 2\pi/3$, $\arg z = 0$. Показано, что точки накопления нулей отвечают полюсам сепаратрисного решения дискретного уравнения Пенлеве I.

Полученные результаты применены к задаче распределения собственных значений ансамблей нормальных случайных матриц.

Литература

1. Аптекарев А.И., Новокшенов В.Ю. *Асимптотика решений дискретного уравнения Пенлеве I* // Матем. заметки. – 2024. – Т. 116. – № 5. – С. 821–835.

ZEROS DISTRIBUTION OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS AND THE BOUTROUX CURVES

V. Yu. Novokshenov

The distribution of zeros to orthogonal polynomials is studied with respect to the weight functions of special types. The curves containing the zeros are indentified as the Boutroux curves in the complex plane.

Keywords: orthogonal polynomials, high-order recurrence relations, weak asymptotics, quasiclassical regime, Blumethal-Nevau class, zeros measure star-like support, Hermite-Padé approximants.

УДК 517.984

О ТОЧЕЧНОМ СПЕКТРЕ ТЕНЗОРНОЙ СУММЫ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА С КОНЕЧНОМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

О.М. Норкулов[1]

1 *norkulovorom@gmail.com*; Самаркандский институт экономики и сервиса, г. Самарканд

В данной работе рассматривается тензорная сумма двух моделей Фридрихса с конечномерным возмущением. Этот модель, ассоциировано с системой трёх частиц на решётке и является линейным, ограниченным и самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве. Исследовано точечный спектр изучаемого оператора.

Ключевые слова: решетка, модельный оператор, модель Фридрихса, точечный спектр.

Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ – d-мерный тор и $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^\alpha)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^\alpha$, $\alpha = 1,2$.

В гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ рассмотрим модельный оператор вида

$$H_{\mu,\lambda} := H_0 - V_\mu^{(1)} - V_\lambda^{(2)}, \tag{1}$$

где H_0 — оператор умножения на функцию $u(k_1) + u(k_2)$:

$$(H_0 f)(k_1, k_2) = (u(k_1) + u(k_2)) f(k_1, k_2)$$

и $V_\mu^{(1)}$, $V_\lambda^{(2)}$ являются нелокальными операторами взаимодействия:

$$(V_\mu^{(1)} f)(k_1, k_2) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i^{(1)}(k_2) \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_i^{(1)}(t) f(k_1, t) dt,$$

$$(V_\lambda^{(2)} f)(k_1, k_2) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j^{(2)}(k_1) \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_j^{(2)}(t) f(t, k_2) dt.$$

Здесь $f \in L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$; $n, m \in \mathbb{N}$ с условием $n, m \geq 3$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$; а функции $u(\cdot)$, $v_i^{(1)}(\cdot)$, $i = 1, \ldots, n$, и $v_j^{(2)}(\cdot)$, $j = 1, \ldots, m$ — вещественно-значные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. По определению операторы $V_\mu^{(1)}$ и $V_\lambda^{(2)}$ являются частично интегральными операторами с вырожденным ядром ранга n и m соответственно.

Легко проверить, что при этих предположениях оператор $H_{\mu,\lambda}$ ограничен и самосопряжен в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$.

Для изучения спектральных свойств оператора $H_{\mu,\lambda}$, введем ограниченные самосопряженные операторы (модели Фридрихса) $h_{\mu,\lambda}$,, действующие на $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ по правилу

$$h_{\mu,\lambda} := h_0 - v_\mu^{(1)} - v_\lambda^{(2)},$$

где h_0 — оператор умножения на функцию $u(\cdot)$ на $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$:

$$(h_0 g)(k_1) = u(k_1)g(k_1),\ g \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$$

и $v_\mu^{(1)}$ и $v_\lambda^{(2)}$ являются нелокальными операторами взаимодействия на $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$:

$$(v_\mu^{(1)} g)(k_1) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i^{(1)}(k_1) \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_i^{(1)}(t) g(t) dt,\ g \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}});$$

$$(v_\lambda^{(2)} g)(k_1) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j^{(2)}(k_1) \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_j^{(2)}(t) g(t) dt,\ g \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}).$$

Далее существенный спектр, дискретный спектр и точечный спектр ограниченного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ будут обозначаться как $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ и $\sigma_{\mathrm{pp}}(A)$, соответственно.

Следующая теорема описывает существенный спектр оператора $H_{\mu,\lambda}$.

Теорема 1. *Для существенного спектра оператора $H_{\mu,\lambda}$ справедливо равенство*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2u_{\min}; 2u_{\max}] \bigcup \{\sigma_{\mathrm{disc}}(h_\mu^{(1)}) + [u_{\min}; u_{\max}]\} \bigcup \{\sigma_{\mathrm{disc}}(h_\lambda^{(2)}) + [u_{\min}; u_{\max}]\}.$$

Более того, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda})$ состоит не более чем из $n+m+1$ ограниченных отрезков (*замкнутых интервалов*).

Основной результат работы состоит в следующем утверждении.

Теорема 2. *Точечный спектр оператора $H_{\mu,\lambda}$ определяется следующим образом:*

$$\sigma_{\mathrm{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \sigma_{\mathrm{disc}}(h_\mu^{(1)}) + \sigma_{\mathrm{disc}}(h_\lambda^{(2)}).$$

Здесь для числовых множеств Ω_1 и Ω_2 из $\mathbb{R}$ их арифметическая сумма определяется следующим образом $\Omega_1 + \Omega_2 := \{\omega_1 + \omega_2 : \omega_\alpha \in \Omega_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$.

Модели Фридрихса $h_\mu^{(1)}$ и $h_\lambda^{(2)}$ имеют более простой вид по сравнению с модельным оператором $H_{\mu,\lambda}$. Поэтому теоремы 1 и 2 упрощают задачу исследования спектра модельного оператора $H_{\mu,\lambda}$. Случай $n = m = 2$ изучался в работе [1]. Если функцию $u(k_1) + u(k_2)$ заменить на $w(k_1, k_2)$, то этот случай изучен в работе [2]. Используя теорему 2, можно найти условия существования собственных значений, лежащих внутри и вне существенного спектра модельного оператора $H_{\mu,\lambda}$, см. [1].

Литература

1. Бахронов Б.И., Расулов Т.Х., Рехман М. *Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамильтониана* // Известия вузов. Математика. – 2023. – № 7. – С. 3–12.

2. Расулов Т.Х., Расулова З.Д.*Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами* // Сиб. электрон. матем. изв. – 2015. – № 12. – С. 168–184.

ON THE POINT SPECTRUM OF A TENSOR SUM OF TWO FRIEDRICHS MODELS WITH FINITE RANK PERTURBATION

O.M. Norkulov

In this work, we consider the tensor sum of two Friedrichs models with finite-dimensional perturbation. This model is associated with a system of three particles on a lattice and is a linear, bounded and self-adjoint operator in a Hilbert space. The point spectrum of the operator under study is investigated.

Keywords: lattice, model operator, Friedrichs model, point spectrum.

УДК 517.518.336

О ПОЛУГРУППАХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЁННЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ

Б.П. Осиленкер[1]

1 *b_osilenker@mail.ru*; Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН

Изучаются полугруппы операторов $T(\xi)$, порождённых ортогональными полиномами. Получены оценки нормы операторов $T(\xi)$. Доказательства результатов основаны на представлении ядра Фейера, построении мажорант ядер и оценке максимальной функции Харди–Литтлвуда.

Ключевые слова: полугруппа операторов, ортогональные полиномы, ядро Фейера, рекуррентное соотношение, мажоранты ядер, оператор Штурма–Лиувилля, максимальная функция Харди–Литтлвуда.

Пусть μ — положительная борелевская мера на $[-1,1]$. В пространстве $L^2_\mu(-1,1)$ со скалярным произведением $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)d\mu(x)$ введем систему ортонормированных полиномов $p_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$p_n(x) = k_n x^n + r_n x^{n-1} + ..., k_n > 0, \quad < p_n, p_m >= \delta_{nm} \quad (n, m \in \mathbb{Z}_+).$$

Полиномы $p_n(x)$ удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению:

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), p_0(x) = const, p_{-1}(x) = 0, a_0 = 0.$$

Будем говорить, что полиномы $p_n(x)$ принадлежат классу $\mathscr{B}$, если:

$$\mathrm{Supp}(\mu) = [-1,1], \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}, \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(|a_n - a_{n+1}| + |b_n - b_{n+1}|) < \infty.$$

Как известно [1], если полиномы $p_n(x)$ принадлежат классу $\mathscr{B}$, то мера μ абсолютно непрерывна в интервале $(-1,1)$, весовая функция $\mu'(x) = w(x)$ непрерывна и положительна для всех $x \in (-1,1)$.

Пусть $\mathbb{E} \equiv \{T(t); t > 0\}$ — полугруппа линейных операторов в $L^1_w([-1,1])$:

$$T(t)f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\phi(k)t} c_k(f) p_k(x), \quad c_k(f) =< f, p_k >, x \in [-1,1], k \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\phi(t) \in C^2(0,+\infty)$, $\phi(t) \uparrow +\infty$ при $t \to +\infty$.

Положим

$$T^* f(x) = \sup_{t>0} |T(t)f(x)|, \quad x \in (-1,1).$$

Теорема. *Пусть система ортонормированных полиномов $\{p_n(x)\}$ принадлежит классу $\mathscr{B}$ и существует положительная интегрируемая функция $h(x)$ такая, что для собственных функций $\{p_k(x)\}$ выполнена оценка:*

$$|p_n(x)| \le h(x), x \in (-1,1), n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

1. Если функция $\phi(x)$ при каждом $t > 0$ удовлетворяет условию:

$$\exp(-\phi(x)t) \ln x = O(1), x \to +\infty \tag{1}$$

и $\phi''(x) \le 0$ при $x \in (0,+\infty)$, то:

a) для любой функции $f \in L^1_w(-1,1)$ выполняется

$$\mu\{x \in K : |T^* f(x)| > \varsigma > 0\} \le \frac{C}{\varsigma} \int_K |f(t)| w(t) dt, \tag{2}$$

где K — произвольное компактное подмножество из $(-1,1)$, постоянная $C > 0$ не зависит от функции f и $t > 0$.

b)для любой функции $f \in L^p_w(-1,1)$, $(1 < p < \infty)$

$$\|T^* f(x)\|_{L^p_w(K)} \le C_p \|f\|_{L^p_w(K)}, \tag{3}$$

где постоянная $C_p > 0$ не зависит от функции f.

2. Если функция $\phi(x)$ удовлетворяет условию (1),

$$tx\phi'(x) \exp\{\phi(x)t\} \le C_\phi$$

с некоторой постоянной $C_\phi > 0$, и функция $\psi(x) = t[\phi'(x)^2 - \phi''(x)]$, $x > 0$, имеет конечное число перемен знака на $0 < t < +\infty$, то выполняются оценки (2) и (3).

Примеры функций $\boldsymbol{\phi(t)}$:

$$\varphi(t) = t^\alpha \quad (\alpha > 0,\ t > 0);$$

$$\varphi(t) = \ln^\alpha(t+1) \quad (\alpha > 0,\ t > 0);$$

$$\varphi(t) = P_n(t),\ t > 0, \quad P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_n > 0,\ n = 1,2,\ldots).$$

Полугруппы Якоби [2]: условиям теоремы, наложенным на систему ортогональных полиномов $\{p_n(x)\}$, удовлетворяют классические полиномы Якоби.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00143.

Литература

1. Dombrowski J., Nevai P. *Orthogonal polynomials, measures and recurrence relation* // SIAM J. Math. Anal. – 1986. – Vol. 17. – № 5. – P. 752–759.

ON SEMIGROUPS OF OPERATORS GENERATED BY ORTHOGONAL POLYNOMIALS

B.P. Osilenker

In the paper we study the semigroups of operators $T(\xi)$ generated by orthogonal polynomials. The norm estimates for a semigroup of operators $T(\xi)$ are obtained. Proofs of these results based on the representation of the Fejer kernel, on the construction of majorants for kernels and estimates of the Hardy-Littlewood maximal functions.

Keywords: semigroups of operators, orthogonal polynomials, Fejer kernel, recurrence relation, majorants of kernels, Sturm-Liouville operator, Hardy-Littlewood maximal function.

УДК 517.926.7

О НЕПРЕРЫВНОСТИ СКОРОСТЕЙ БЛУЖДАНИЯ И ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ НА МНОЖЕСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ЗАДАЮЩИХ ПОВОРОТЫ ПЛОСКОСТИ

А.А. Панеш[1], А.Х. Сташ[2]

1 *askhadr@mail.ru*; Адыгейский государственный университет
2 *aidamir.stash@gmail.com*; Адыгейский государственный университет

В статье обсуждаются свойства скоростей блуждания и показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем, задающих повороты фазовой плоскости. Установлена непрерывность скоростей блуждания на указанном множестве, а для показателей колеблемости найдены достаточные условия устойчивости относительно равномерно малых и бесконечно малых возмущений.

Ключевые слова: линейная система, колеблемость, показатель Ляпунова, показатели колеблемости, скорости блуждания, повороты плоскости.

В работе [1] для любого ненулевого решения линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами были определены слабые и сильные показатели колеблемости нулей (ранее они назывались соответственно векторными и полными частотами) $\hat{\nu}^0_\circ, \check{\nu}^0_\circ, \hat{\nu}^0_\bullet, \check{\nu}^0_\bullet$ и скорости блуждания $\hat{\mu}, \check{\mu}$.

Рассмотрим линейное пространство $\widetilde{\mathscr{R}}^2$ двумерных линейных систем вида

$$\dot{x} = a(t)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

каждая из которых задает *повороты плоскости* (ориентированной), определяемые *непрерывной* функцией $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (угловой скоростью), с которой будем отождествлять саму систему. Через $\mathscr{S}_*(a)$ обозначим множество всех ненулевых решений системы a. Наделим пространство $\widetilde{\mathscr{R}}^2$ *равномерной* на $\mathbb{R}_+$ топологией и обозначим

$$\mathscr{B}(a) = \{c \in \widetilde{\mathscr{R}}^2 \mid \lim_{t\to+\infty} |c(t) - a(t)| = 0\}, \quad a \in \widetilde{\mathscr{R}}^2.$$

Определение [2]. *Бесконечно малым возмущением* системы $a \in \widetilde{\mathscr{R}}^2$ назовем любое возмущение $b-a$, для которого $b \in \mathscr{B}(a)$, а функционал $\kappa : \widetilde{\mathscr{R}}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ назовем *инвариантным в точке a* относительно бесконечно малых возмущений, если выполнено равенство $\kappa(a) = \kappa(b)$ при всех $b \in \mathscr{B}(a)$.

Исследования непрерывности скоростей блуждания ни на каком множестве решений до сих пор не проводились. Оказалось, что на множестве $\widetilde{\mathscr{R}}^2$ скорости блуждания устойчивы при равномерно малых возмущениях.

Теорема 1. *Для любой системы $a \in \widetilde{\mathscr{R}}^2$ множество значений каждой из функций $\kappa = \hat{\nu}^0_\circ, \check{\nu}^0_\circ, \hat{\nu}^0_\bullet, \check{\nu}^0_\bullet, \hat{\mu}, \check{\mu} : \mathscr{S}_*(a) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ состоит из одного элемента.*

Указанное в теореме 1 единственное для каждой величины κ значение естественно было бы считать функцией от системы a, а не только от его решений, именно так мы и поступим, обозначая $\kappa(a)$ значение величины κ на решениях системы a.

Теорема 2. *Скорости блуждания $\hat{\mu}$ и $\check{\mu}$ непрерывны и инвариантны относительно бесконечно малых возмущений в любой точке $a \in \widetilde{\mathscr{R}}^2$.*

На множестве n-мерных дифференциальных систем крайние значения показателей колеблемости нулей $\hat{\nu}^0_\circ, \check{\nu}^0_\circ, \hat{\nu}^0_\bullet, \check{\nu}^0_\bullet$ не являются непрерывными и инвариантными относительно бесконечно малых возмущений [3] при любом $n \geq 2$, а показатели колеблемости гиперкорней системы из множества $\widetilde{\mathscr{R}}^2$, у которой угловая скорость отделена от нуля, устойчивы при равномерно малых и бесконечно малых возмущениях ее коэффициента [4]. Оказалось, что это свойство переносится и на показатели колеблемости нулей.

Теорема 3. *Если система $a \in \widetilde{\mathscr{R}}^2$ удовлетворяет условию*

$$\inf_{t \in \mathbb{R}_+} a(t) > 0 \quad \text{или} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} a(t) < 0,$$

то в точке $a \in \widetilde{\mathscr{R}}^2$ все показатели колеблемости $\hat{\nu}^0_\circ, \check{\nu}^0_\circ, \hat{\nu}^0_\bullet, \check{\nu}^0_\bullet$ непрерывны и инвариантны относительно бесконечно малых возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-03-2024-074/5).

Литература

1. Сергеев И. Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы* // Известия РАН. Сер. матем. – 2012. – Т. 76. – № 1. – С. 149–172.

2. Сергеев И. Н. *К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1983. – Вып. 9. – С. 111–166.

3. Сташ А. Х. *О разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения и проц. управл. – 2023. – № 1. – С. 78–109.

4. Сергеев И. Н. *О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости* // Вестн. Моск. уни-та. Сер. 1. Матем. Механ. – 2019. – № 1. – С. 21–26.

ON THE CONTINUITY OF WANDERING VELOCITIES AND OSCILLATION EXPONENTS ON A SET OF DIFFERENTIAL SYSTEMS DETERMINING ROTATIONS OF PLANE

A.A. Panesh, A.Kh. Stash

This paper describes the properties of wandering velocities and oscillation exponents of two-dimensional linear homogeneous differential systems that define phase plane rotations. The continuity of wandering velocities on the specified set is established, and sufficient conditions for stability of oscillation exponents with respect to uniformly small and infinitesimal perturbations are found.

Keywords: linear system, oscillation, Lyapunov exponent, oscillation exponents, wandering speeds, rotations of plane.

УДК 514.822

ФУНКТОРИАЛЬНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ПОЛУПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП И СКРЕЩЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ C*-АЛГЕБРЫ С ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНОЙ ГРУППОЙ

Е.В. Патрин[1]

1 *evgeny.patrin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье обсуждается функториальность конструкций полупрямого произведения групп и скрещенного произведения C-алгебры с локально-компактной группой. Эти конструкции широко применяются в теории групп и функциональном анализе, соответственно, и их приложениях.*

Ключевые слова: автоморфизмы группы, автоморфизмы C*-алгебры, категория представлений, функтор.

Пусть G и G' -группы, и $\rho: G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G')$ -представление группы G автоморфизмами группы G'.

Определение. *Полупрямым произведением групп G' и G с помощью представления ρ, называется группа, обозначаемая $G' \rtimes_\rho G$, которая строится следующим образом:*
1) $\square(G' \rtimes_\rho G) = \square(G') \times \square(G)$ – подстилающее множество есть прямое произведение подстилающих множеств сомножителей,
2) $\forall\, (s', s), (t', t) \in \square(G') \times \square(G):\ (s', s)\cdot(t', t) := (s'\rho(s)(t'), st)$ – операция умножения,
3) (e', e) – единица группы $G' \rtimes_\rho G$ и $(s', s)^{-1} := (\rho(s^{-1})(s'^{-1}), s^{-1})$ – обратный элемент.

Пусть Gr – категория групп, а Rep_G – категория представлений группы G, автоморфизмами групп, объектами которой являются представления, а морфизмами гомоморфизмы групп коммутирующие с действиями элементов группы G: т.е. если $\rho_i: G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_i)$,
$i \in \{1, 2\}$, то

$$\mathrm{Hom}_{Rep_G}(\rho_1, \rho_2) := \{g \in \mathrm{Hom}_{Gr}(G_1, G_2):\ \ \forall s \in G,\ \ g \circ \rho_1(s) = \rho_2(s) \circ g\}.$$

Справедлива

Теорема 1. *Имеется функтор* $Rep_G \longrightarrow Gr$:

$$\mathrm{Ob}(Rep_G) \ni \rho(:G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G')) \longmapsto G' \rtimes_\rho G \text{ – действие на объектах.}$$

$$\mathrm{Hom}_{Rep_G}(\rho_1, \rho_2) \ni g \longmapsto g \times \mathrm{id}_G \in \mathrm{Hom}_{Gr}(G_1 \rtimes_{\rho_1} G,\ G_2 \rtimes_{\rho_2} G) \text{ – действие на морфизмах.}$$

Пусть A – C^**-алгебра,* G *– локально-компактная группа,* $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ – *непрерывное представление.*

Определение. *Скрещенным произведением* A *и* G *с помощью* ρ *называется* C^**-алгебра, обозначаемая* $A \rtimes_\rho G$, *которая строится следующим образом:*
На линейном пространстве $C_c(G, A)$ *над* $\mathbb{C}$ *с поточечными сложением и умножением на числа умножение функций определено так:* $\forall \varphi, \psi \in C_c(G, A)$, $\forall s \in G$, $(\varphi \cdot \psi)(s) := \int\limits_G \varphi(t)\rho(t)(\psi(t^{-1}s))\mathrm{d}\mu(t)$, *а инволюция* $\varphi^*(s) := \Delta(s^{-1})\rho(s)(\varphi(s^{-1})^*)$. *Норма определена так:* $\|\varphi\| := \sup\{\|(\pi, u)(\varphi)\| : (\pi, u)$ *ковариантное представление* $(A, G, \rho)\}$. *Тем самым,* $C_c(G, A)$ *становится нормированной* $*$*-алгеброй, а* $A \rtimes_\rho G$ *– это ее пополнение по данной норме. Здесь* μ *– левоинвариантная мера Хаара на* G, *а* Δ *– модулярный характер группы. Пусть* C^*Alg *– категория* C^**-алгебр,* Rep_G *– категория представлений группы* G, *автоморфизмами* C^**-алгебр.*

Теорема 2. *Имеется функтор* $Rep_G \longrightarrow C^*Alg$:

$$\mathrm{Ob}(Rep_G) \ni \rho(:G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)) \longmapsto A \rtimes_\rho G \text{ – действие на объектах,}$$

$$\mathrm{Hom}_{Rep_G}(\rho_1, \rho_2) \ni g \longmapsto g_* \in \mathrm{Hom}_{C^*Alg}(A_1 \rtimes_{\rho_1} G,\ A_2 \rtimes_{\rho_2} G) \text{ – действие на морфизмах.}$$

Здесь $g_*(\varphi) := g \circ \varphi$.

Литература

1. *Williams D.P. Crossed products of C*-algebra. – USA: AMS, 2007. – 528 с.*
2. *Кострикин А. И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977. – 496 с.*

THIS PAPER DESCRIBES A FUNCTORIAL APPROACH TO CONSTRUCTIONS SEMIDIRECT PRODUCT OF GROUPS AND CROSSED CRODUCT C-ALGEBRAS WITH GROUPS*

E.V. Patrin

The article discusses the functoriality of the constructions of the semidirect product of groups and the crossed product of a C-algebra with a locally compact group. These constructions are widely used in group theory and functional analysis, respectively, and their applications.*

Keywords: automorphisms of groups and C-algebras, representations category, functors.*

УДК 517.968.23, 517.587

100 ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ПРОФЕССОРА Л.И. ЧИБРИКОВОЙ

Н.Б. Плещинский[1]

1 *prosper7@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

Статья посвящена жизни и научной деятельности профессора Казанского университета Чибриковой Любови Ивановны.

Ключевые слова: Чибрикова Любовь Ивановна.

Профессор Любовь Ивановна Чибрикова проработала на кафедре дифференциальных уравнений 50 лет, из них 32 года заведовала кафедрой. Она была первой в истории Казанского университета женщиной-математиком, защитившей докторскую диссертацию.

Любовь Ивановна родилась 2 февраля 1925 г. в деревне Ново-Шигалеево Пестречинского района Татарской АССР, в крестьянской семье. Начальное образование получила в Ново-Шигалеевской начальной школе. В 1939 г. она поступила в 8-й класс средней школы № 24 Бауманского района г. Казани и окончила ее в 1942 году. В этом же году была принята на первый курс физико-математического факультета. За работу на лесозаготовках студентка Чибрикова получила заслуженную награду - медаль "За доблестный труд в Великой Отечественной войне".

В 1947 г. Л.И. Чибрикова поступила в аспирантуру, руководителем стал Ф.Д. Гахов. Кандидатскую диссертацию "Особые случаи линейных краевых задач теории аналитических функций, аналогичных задаче Римана" защитила в марте 1951 г. Первая научная публикация была написана по материалам этой работы. Докторскую диссертацию "Краевая задача Римана для автоморфных функций" Л.И. Чибрикова защитила в Белорусском государственном университете в 1962 г. В 1965 г. получила звание профессора.

С марта по сентябрь 1951 г. Любовь Ивановна проработала ассистентом кафедры высшей математики в Новочеркасском политехническом институте. В сентябре вернулась в Казань и была принята на должность ассистента кафедры дифференциальных уравнений КГУ. На этой кафедре она и проработала до конца жизни - ассистентом, доцентом (с 1954 г.), профессором (с 1965 г.). Заведовала кафедрой с 1959 по 1991 гг.

Тридцать ее учеников защитили кандидатские диссертации, из них десять стали докторами наук. Темы диссертаций аспирантов были тесно связаны с направлениями исследований, которые были интересны ей самой. Все они сформировались в Казанской научной школе Ф.Д. Гахова и лежат в области теории функций комплексного переменного и ее приложений. Вот основные из них.

1. Краевые задачи для аналитических функций, удовлетворяющих условиям автоморфности и типа автоморфности, задачи для счетного множества контуров и особые случаи краевых задач.

2. Сингулярные интегральные уравнения, разрешимые в замкнутой форме, с автоморфными и квазиавтоморфными ядрами, с ядрами, имеющими логарифмические или степенные особенности, со специальными функциями в ядрах.

3. Граничные задачи для уравнений с частными производными в областях с алгебраическими границами и эквивалентные им задачи для аналитических функций на римановых поверхностях, полученные методом симметрии.

4. Применение кусочно-голоморфных функций при решении обыкновенных дифференциальных уравнений класса Фукса, развитие теории специальных функций методами ТФКП.

В списке публикаций Л.И. Чибриковой 111 работ. Среди них две монографии: "Основные граничные задачи для аналитических функций" (1977 г.) и "Избранные главы аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений" (1996 г.). В первой подведен итог многолетних исследований краевой задачи Римана для симметричных и автоморфных функций, задачи Римана в случае счетного множества контуров и некоторых сингулярных интегральных уравнений. Во второй изложена локальная теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками и нелокальная теория уравнений класса Фукса.

В разные годы Любовь Ивановна читала лекции по всем общим курсам кафедры: "Дифференциальные уравнения", "Теория функций комплексного переменного", "Уравнения математической физики". Из спецкурсов, например, такие как "Краевые задачи для аналитических функций", "Сингулярные интегральные уравнения", "Метод симметрии", "Аналитическая теория дифференциальных уравнений". Она была членом редколлегии журнала "Известия вузов. Математика", входила в состав нескольких диссертационных советов, принимала активное участие в работе городского семинара по краевым задачам и в подготовке к печати в издательстве КГУ сборников "Труды семинара по краевым задачам".

Характер Л.И. Чибриковой и ее жизненную позицию исключительно точно описал В.И. Жегалов [1]: "Она не терпела расхлябанности и неорганизованности. Не жаловала людей, которые ради своей выгоды были способны на предательство по отношению к коллегам. … Открыто высказывала свою точку зрения на происходящее, не заботясь особенно о том, что это может кому-то не понравиться. При решении кадровых вопросов, связанных с кафедрой, могла противостоять давлению начальства".

В 1982 году Любови Ивановне было присвоено почетное звание "Заслуженный деятель науки ТАССР", в 1997 году - "Заслуженный деятель науки РФ".

Скончалась Л.И. Чибрикова 18 июня 2001 года, после тяжелой продолжительной болезни. Воспоминания о Любови Ивановне ее учеников опубликованы в книге [2].

Литература

1. Жегалов В. И. *Любовь Ивановна Чибрикова //* В кн. Механико-математический факультет Казанского университета: Очерки истории. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2003. – С. 145-151.

2. *Любовь Ивановна Чибрикова, 1925-2001.* – Казань: Изд-во Казанск ун-та, 2003. – 32 с.

100TH ANNIVERSARY OF PROFESSOR L.I. CHIBRIKOVA

N.B. Pleshchinskii

This article is devoted to the life and scientific works of the professor of the Kazan University Chibrikova

Lubov' Ivanovna.

Keywords: Chibrikova Lubov' Ivanovna.

УДК 517.968.23, 517.587

О ФОРМУЛАХ ОБРАЩЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.Б. Плещинский[1]

1 *prosper7@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

Получены формулы обращения некоторых сингулярных интегральных уравнений в классах обобщенных функций. В качестве обобщенных функций рассматриваются линейных функционалы, определенные на замыканиях множеств линейных комбинаций ортогональных полиномов.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, формулы обращения, обобщенные функции.

Явные формулы обращения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и ряда близких к ним уравнений выведены на основе их эквивалентности краевой задаче Римана для кусочно голоморфных функций [1]. Такие же формулы можно получить как условия разрешимости вспомогательных краевых задач для эллиптических уравнений с частными производными [2] или с помощью формулы Пуанкаре-Бертрана [3].

Рассмотрим технику вывода формул обращения некоторых сингулярных интегральных уравнений в специальных классах обобщенных функций [4].

Одно из замечательных свойств полиномов Чебышева 1-го и 2-го рода $T_n(\cdot)$ и $U_n(\cdot)$ – ортогональность с весом на отрезке $[0,1]$. Функции $T'_n(x) = T_n(x)/\sqrt{1-x^2}$ и $U'_n(x) = U_n(x)\sqrt{1-x^2}$ образуют вместе с полиномами Чебышева биортогональные системы функций. Обозначим через $\mathrm{T}, \mathrm{T}', \mathrm{U}, \mathrm{U}'$ замыкания (в смысле бислабой сходимости) множеств линейных комбинаций рассматриваемых функций.

Как следует из известных формул

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_0(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{dt}{t-x}=0, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{dt}{t-x}=U_{n-1}(x), \quad n=1,2,\ldots,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}U_{n-1}(t)\sqrt{1-t^2}\,\frac{dt}{t-x}=-T_n(x), \quad n=1,2,\ldots,$$

оператор сингулярного интегрирования

$$S:\varphi(\cdot)\mapsto S\varphi)(\cdot), \quad (S\varphi)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}$$

действует из T' в U и из U' в T. Оператор $S' = -S$ – двойственный к оператору S.

В качестве обобщенных функций будем рассматривать линейные функционалы на пространствах $\mathrm{T}, \mathrm{T}', \mathrm{U}, \mathrm{U}'$. Каждый такой функционала отождествляется с последовательностью его значений на базисных функциях. Например, функционал

$t'[\cdot]$ – элемент пространства T^* – заменяется на последовательность чисел $\{t'_n\}$, где $t'_n = t'[T_n(\cdot)]$.

Оператор S действует из T^* в U'^*, функционал $t'[\cdot]$ переводится в функционал $u[\cdot]$ по следующему правилу: $u[\cdot] = (St')[\cdot] : U'_n(\cdot) \mapsto t'[(S'U'_n)(\cdot)], \quad n = 0, 1, \ldots$ Так как $(S'U'_n)(\cdot) = T_{n+1}(\cdot)$, то $S : t'[\cdot] = (t'_0, t'_1, \ldots)_{T^*} \mapsto (t'_1, t'_2, \ldots)_{U'^*}$. Поэтому интегральные уравнения с оператором S на языке обобщенных функций становятся бесконечными системами линейных алгебраических уравнений.

Теорема. *Если* $f[\cdot] = (f_0, f_1, \ldots)_{U'^*} \in \mathrm{U}'^*$*, то сингулярное интегральное уравнение* $(\mathrm{S}\varphi)[\cdot] = f[\cdot]$ *имеет решение* $\varphi[\cdot] = (c, f_0, f_1, \ldots)_{T^*}$*, где* c *– произвольная постоянная. Если* $f[\cdot] = (f_0, f_1, \ldots)_{T'^*} \in \mathrm{T}'^*$*, то сингулярное интегральное уравнение* $(\mathrm{S}\varphi)[\cdot] = f[\cdot]$ *имеет решение* $\varphi[\cdot] = (f_1, f_2, \ldots)_{U^*}$ *тогда и только тогда, когда* $f_0 = 0$.

При нулевом значении индекса нужно использовать системы ортогональных полиномов

$$Q_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) - T_n(x)}{x-1}, \quad R_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_n(x)}{x+1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Формулы обращения сингулярного интеграла можно записать в привычном виде, если использовать специальные символические обозначения

$$\varphi(x)[\cdot] = {}^{\circ}\!\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n\, T'_n(x) \qquad \text{и} \qquad \varphi_n = \frac{1}{T_n}\, {}^{\circ}\!\!\int_{-1}^{1} \varphi(t)\, T_n(t)\, dt.$$

Бесконечная сумма с кружочком – это обобщенная функция из пространства T^* со значениями (φ_n) на функциях $T'_n(\cdot)$. Если $\varphi(t)[\cdot]$ – обобщенная функция, то φ_n – ее значение на $T'_n(\cdot)$ (не предполагается, что интеграл существует в классическом смысле).

Получены также формулы обращения в классе обобщенных функций интегрального уравнения Карлемана с логарифмическим ядром и одного гиперсингулярного уравнения.

Литература

1. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

2. Pleshchinskii N. B. *The over-determined boundary value problems and convolution type integral transformations*// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. – No. 5. – P. 1260–1269.

3. Плещинский Н.Б. *Задача Трикоми и интегральные уравнения* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2024. – Т. 166. – Кн. 1. – С. 74–91.

4. Плещинский Н. Б. *Обобщенные решения координатных задач дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах.* – Казань: Казан. фед. ун-т, 2022. – 106 с.

ON THE INVERSION FORMULAS OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS

N.B. Pleshchinskii

The inversion formulas of some singular integral equations in the classes of generalized functions are obtained. The linear functionals on the closures of sets of linear combinations are considered as generalized functions.

Keywords: singular integral equations, inversion formulas, generalized functions.

УДК 517.518

О P-ИЧНЫХ СИСТЕМАХ ФУНКЦИЙ ТИПА ХАОСОВ РАДЕМАХЕРА

М.Г. Плотников[1], А.Д. Казакова[2]

1 *mikhail.plotnikov@math.msu.ru*; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики

2 *anna.kazakova@math.msu.ru*; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Для двух p-ичных аналогов хаоса Радемахера устанавливается неравенство Хинчина и изучается их единственность.

Ключевые слова: q-лакунарность, неравенство Хинчина, системы ε-единственности, хаос Радемахера, системы Виленкина–Крестенсона.

Система функций ($\varphi_k\colon [0,1) \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$) называется *системой ε-единственности*, $\varepsilon > 0$, если сходимость к нулю на множестве E с $\mu(E) > 1-\varepsilon$ ряда по этой системе влечет равенство нулю всех его коэффициентов. Классические системы функций (тригонометрическая, Уолша, Хаара, Франклина) таковыми не являются: сходимость к нулю даже почти всюду ряда по любой из них не гарантирует равенства нулю всех его коэффициентов (для тригонометрической системы примером является нуль-ряд Меньшова). Системами ε-единственности обычно являются лакунарные в некотором смысле системы. Понятие лакунарности в широком смысле означает, что система функций обладает свойствами, присущими системам независимых в вероятностном смысле функций.

Система функций ($\varphi_k\colon [0,1) \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$) называется *системой q-лакунарности*, если имеет место L_2-L_q-неравенство Хинчина

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\|_{L_q} \le \kappa \left\| (c_k)_{k=1}^{n} \right\|_{l_2}, \quad \kappa = \kappa(q) > 0 \text{ не зависит от } c_k \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Любая такая система (ортонормированная или система Рисса) является [1] системой ε-единственности для некоторого $\varepsilon > 0$.

Классический пример q-лакунарной системы — *система функций Радемахера*, являющаяся системой независимых симметричных бернуллиевских случайных величин [2]. Эта система является системой 1/2-единственности, причем константа 1/2 неулучшаема [3]. Система, состоящая из d-членных произведений различных функций Радемахера (*d-хаос Радемахера*) является [4] системой q-лакунарности и, следовательно, согласно [1], и системой ε-единственности при некотором $\varepsilon > 0$. Точная константа ε-единственности для d-хаоса Радемахера $\varepsilon = 2^{-d}$ была найдена в [5].

Мы обобщаем результаты о q-лакунарности и ε-единственности со случая двоичной системы счисления, с которой связана система Радемахера, на случай p-ичной системы с произвольным натуральным основанием $p \ge 2$. При этом возникают как минимум два способа обобщить хаос Радемахера на p-ичный случай. Рассмотрим системы функций

$$\{VC_n,\ n \in V_p^{(d)}\}, \qquad \{VC_n,\ n \in \widetilde{V}_p^{(d)}\}, \qquad d \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Здесь VC_n — *функции Виленкина–Крестенсона* (*функции Уолша при* $p = 2$) [6], а $V_p^{(d)} \subset \widetilde{V}_p^{(d)}$ — множества, состоящие из всех натуральных n, p-ичное разложение которых содержит не более d членов, причем у системы $V_p^{(d)}$ все коэффициенты при степенях p в этом разложении равны единице.

Мы показали, что системы (2) являются системами q-лакунарности и нашли точные константы $\varepsilon > 0$, при которых они являются системами ε-единственности.

При $p \geq 3$ функции (случайные величины) из (2) становятся комплекснозначными, а их действительные части при нечетном p уже не являются симметричными. Также первая из систем (2), как и хаос Радемахера, состоит из всевозможных d-членных прозведений, составленных из элементов последовательности независимых функций, а во второй элементы формируются не только из элементов последовательности независимых функций, но и из их степеней.

Интересно, что используемые "p-ичные" методы можно модифицировать и применить к тригонометрической системе функций: в [7] установлена ε-единственность с оценкой снизу величины ε для системы функций $\exp(2\pi i n x)$, где n берется из множеств $V_p^{(d)}$, $\pm\widetilde{V}_p^{(d)}$ или $\widetilde{V}_p^{(d)}$.

Второй автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Литература

1. Гапошкин В. Ф. *Лакунарные ряды и независимые функции* // УМН. – 1966. – Т. 21. – № 6. – С. 3–82.

2. Асташкин С. В. *Система Радемахера в функциональных пространствах.* – М.: Физматлит, 2017.

3. Стечкин С. Б., Ульянов П. Л. *О множествах единственности* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – № 2. – С. 211–222.

4. Bonami A. *Etudes des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$* // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1970. – V. 20. – Iss. 20. – P. 335–402.

5. Асташкин С. В., Суханов Р. С. *О некоторых свойствах хаоса Радемахера* // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91. – № 5. – С. 654–666.

6. Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* – СПб.: Лань, 2012.

7. Казакова А. Д., Плотников М. Г. *Множества единственности для подсистем тригонометрической системы* // Матем. заметки. – 2025. – Т. 117. – № 1. – С. 79–90.

ON p-ARY SYSTEMS OF FUNCTIONS OF RADEMACHER CHAOS TYPE

M.G. Plotnikov, A.D. Kazakova

or two p-ary analogues of Rademacher chaos, the Khinchin inequality is established, and their uniqueness is studied.

Keywords: q-lacunarity, Khinchin inequality, systems of ε-uniqueness, Rademacher chaos, Vilenkin–Chrestenson systems.

УДК 517.9

ФУНКЦИЯ ГРИНА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ПРОСТРАНСТВЕ С ТОПОЛОГИЕЙ $R^2 \times S^2$

А.А. Попов[1]

1 *apopov@kpfu.ru*; Казанский федеральный университет

Вычислено поле заряда, являющегося источником массивного неминимально связанного с кривизной скалярного поля в пространстве с топологией $R^2 \times S^2$. Показано, что этот заряд воздействует на себя.

Ключевые слова: функция Грина.

Хорошо известным фактом классической электродинамики является утверждение о том, что движение точечного заряда определяется взаимодействием заряда с полем, которое он создает. Этот эффект (называемый самодействием или радиационной реакцией) связан с нелокальной структурой поля, источником которого является заряд. Первые исследования в этой области были сфокусированы на самоускорении электрически заряженных точечных частиц в плоском пространстве-времени [1]. В дальнейшем ДеВитт, Брем и Хоббс [2, 3, 4] получили формальные выражения для силы самодействия на электрический заряд в искривленном пространстве-времени. Мино, Сасаки, Танака [5] и, независимо, Куин и Уолд [6] получили аналогичные выражения для гравитационной силы самодействия на точечную массу. Сила самодействия на скалярный заряд, взаимодействующий с собственным безмассовым минимально связанным с кривизной скалярным полем, была рассмотрена Куином в работе [7]. Хотя формальные аналитические выражения для различных типов силы самодействия хорошо известны, вычисления явных выражений требуют значительных усилий, которые были осуществлены, в основном, на фоне пространств-времен черных дыр.

В отличие от случая плоского пространства-времени, сила самодействия может быть не нулевой даже для статического заряда в искривленном пространстве. Было также показано, что эта сила может быть не нулевой для статического заряда в плоских пространствах-временах топологических дефектов [8, 9, 10, 11]. В искривленных пространствах-временах с нетривиальной топологической структурой исследования эффекта самодействия имеют дополнительные интересные черты [12, 13, 14, 15, 16]. В этих работах эффект самодействия рассматривается для покоящихся зарядов в статических пространствах-временах. Это означает, что задача сводится к отысканию функции Грина трёхмерного искривлённого пространства. Целью этой работы является изучение силы самодействия на статический заряд, являющийся источником массивного неминимально связанного с кривизной скалярного поля, удовлетворяющего уравнению

$$\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\phi(x^{\sigma}) - (\xi R + m^2)\phi(x^{\sigma}) = -4\pi q \int \delta^{(4)}(x - \tilde{x}(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{-g}}, \qquad (1)$$

где ξ – константа связи скалярного поля ϕ массы m с кривизной R пространства, g – детерминант метрики $g_{\mu\nu}$, q – скалярный заряд, τ – его собственное время, мировая линия заряда определяется функциями $\tilde{x}^{\mu}(\tau)$, ∇_{μ} – ковариантная производная в пространстве-времени с первой квадратичной формой

$$ds^2 = -f(\rho)dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{2}$$

в котором уравнение поля для покоящегося заряда приобретает вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{(r^2)'}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - (\xi R + m^2)\right]\phi(\rho,\theta,\varphi;\tilde\rho,\tilde\theta,\tilde\varphi)$$
$$= -\frac{4\pi q\,\delta(\rho,\tilde\rho)\,\delta(\theta,\tilde\theta)\,\delta(\varphi,\tilde\varphi)}{r^2\sin\theta}. \tag{3}$$

Рассматриваемый подход дает возможность вычислить выражение для собственного потенциала заряда, являющегося источником массивного неминимально связанного с кривизной скалярного поля и силы самодействия в рассматриваемом пространстве. В случае медленно меняющихся функций $f(\rho)$ и $r(\rho)$ такое пространство описывает кротовые норы (топологические ручки, соединяющие удаленные части Вселенной или различные Вселенные) с длинной горловиной.

Литература

1. Dirac P.A.M. *A New Basis for Cosmology* // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1938. – Vol. 167. – P. 148.

2. Dewitt B.S., Brehme R.W. *Radiation damping in a gravitational field* // Annals of Physics. – 1960. – Vol. 9. – P. 220–259.

3. Hobbs P.V. Annals of Physics. – 1968. – Vol. 47. – P. 141.

4. Hobbs P.V. Annals of Physics. – 1968. – Vol. 47. – P. 166.

5. Mino Y., Sasaki M., Tanaka T. *Gravitational radiation reaction to a particle motion* Phys. Rev. D. – 1997. – Vol. 55. – P. 3457–3476.

6. Quinn T.C., Wald R.M. *Axiomatic approach to electromagnetic and gravitational radiation reaction of particles in curved spacetime* // Phys. Rev. D. – 1997. – Vol. 56. – P. 3381–3394.

7. Quinn T.C. *Axiomatic approach to radiation reaction and the equivalence principle* // Physical Review D. – 2000. – Vol. 62. – No. 6.

8. Linet B. *Force on a Charge in the Space-Time of a Cosmic String* // Physical Review D. – 1986. – Vol. 33. – P. 1833–1839.

9. Khusnutdinov N.R. *Self-interaction force for a particle in cone space-time* // Classical and Quantum Gravity. – 1994. – Vol. 11. – P. 1807–1813.

10. Khusnutdinov N.R. *Radiation reaction force for a scalar charge in a space-time with a conical singularity* // Theoretical and Mathematical Physics. – 1995. – Vol. 103. – No. 2. – P. 603–612.

11. De Lorenci V.A. Moreira Jr E.S. *Classical self-forces in a space with a topological defect* // Physical Review D. – 2002. – Vol. 65.

12. Khusnutdinov N.R., Bakhmatov I.V. *Self-action of a point charge in a wormhole space-time* // Physical Review D. – 2007. – Vol. 76. – No. 12.

13. Linet B. *Electrostatics in a wormhole geometry* // arXiv:0712.0539. – 2007.

14. Krasnikov S. *Unconventional string-like singularities in flat spacetime* // Classical and Quantum Gravity. – 2008. – Vol. 25. – No. 24.

15. Bezerra V.B., Khusnutdinov N.R. *Self-force on a scalar particle in a class of wormhole spacetimes* // Physical Review D. – 2009. – Vol. 79. – No. 6.

16. Casals M., Dolan S.R., Ottewill A.C., Wardell B. *Self-Force Calculations with Matched Expansions and Quasinormal Mode Sums* // arXiv:0903.0395. – 2009.

THE GREEN'S FUNCTION OF THE LAPLACE OPERATOR IN A SPACE WITH THE TOPOLOGY $R^2 \times S^2$

A.A. Popov

The field of a charge that is a source of a massive non-minimally related to curvature scalar field in a space with the topology $R^2 \times S^2$ is calculated. It is shown that this charge acts on itself.

Keywords: Green's function.

УДК 517.5

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ В ПРИНЦИПЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ РИМАНА ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

А.Ю. Попов[1], Т.Ю. Семенова[2]

1 *station@list.ru*; Московский государственный университет, Московский центр фундаментальной и прикладной математики

2 *station@list.ru*; Московский государственный университет, Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Доказана оценка скорости сходимости в утверждении, известном как принцип локализации Римана для тригонометрических рядов.

Ключевые слова: тригонометрический ряд Фурье, принцип локализации Римана.

Пусть f — интегрируруемая по Лебегу 2π-периодическая функция, $D_n(t) = \frac{\sin((n+0.5)t)}{2\sin(t/2)}$ — ядро Дирихле. Рассмотрим интегральное представление частичной суммы ряда Фурье функции f

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt$$

и интеграл, учитывающий поведение функции f только на интервале $(x-\delta, x+\delta)$

$$S_n(f;\delta,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)D_n(t)\,dt.$$

Принцип локализации Римана заключается в том, что для любого $\delta \in (0,\pi)$ разность

$$R_n(f;\delta,x) = S_n(f;x) - S_n(f;\delta,x)$$

равномерно по $x \in [-\pi,\pi]$ стремится к нулю при $n \to +\infty$.

В работах Э. Хилле, Г. Клейна [1] и С.А. Теляковского [2] была доказана оценка для разности между частичной суммой ряда Фурье функции f и аналогом величины $S_n(f;\delta,x)$:

$$\left|S_n(f;x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt\right| \le \frac{K}{\delta}\left(\omega\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_L + \frac{|a_0(f)|}{n}\right),$$

в которой K — абсолютная постоянная (она не была указана), $a_0(f) = \pi^{-1}\int_0^{2\pi} f(t)dt$, $\omega(f;h)_L = \sup\limits_{0\le|t|\le h} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|dx$ — интегральный модуль непрерывности функции f. О.Л. Виноградов и В.В. Жук [3] оценили $R_n(f;\delta,x)$ через интегральные модули непрерывности второго порядка функции f и ее первообразной, а также через некоторую модификацию интегрального модуля непрерывности функции. Постоянные в оценках были в [3] предъявлены.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$J_{j,x} = \left(x + \frac{2\pi(j-1)}{k}, x + \frac{2\pi j}{k}\right),\ f_{k,x}(t) = \frac{k}{2\pi}\int_{J_{j,x}} f(y)dy \text{ при } t \in J_{j,x},\ j = 1,\dots,k.$$

Введем величины

$$\mathscr{E}_k(f) = \sup_x \|f - f_{k,x}\|_{L[-\pi,\pi]}, \qquad \mathscr{I}_k(f) = \sup_x \left|\int_x^{x+2\pi/k}\left(f(t) - \frac{a_0(f)}{2}\right)dt\right|.$$

Теорема 1. *Какова бы ни была 2π-периодическая функция $f \in L[-\pi,\pi]$, при любых $n \in \mathbb{N}$ и $\delta \in (0,\pi)$ верно неравенство*

$$\left|R_n(f;\delta,x)\right| \le \frac{1}{2\sin(\delta/2)}\left(C_1 \cdot \mathscr{E}_{2n+1}(f) + C_2 \cdot \mathscr{I}_{2n+1}(f) + K \cdot \frac{|a_0(f)|}{n+0.5}\right),$$

где $C_1 = \pi^{-1}$, $C_2 = 2\pi^{-2} + 4\pi^{-3} < 1/3$, $K = 1.5\pi^{-1}$.

Из теоремы 1 и оценок $\mathscr{E}_k(f) \le \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi/k}\omega(f;u)_L du \le 2\omega(f;2\pi/k)_L$ (доказана П.Л. Ульяновым [4]) и $\mathscr{I}_k(f) \le \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)\cdot\omega(f;2\pi/k)_L$ (доказана авторами) следует

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 верно неравенство*

$$\left|R_n(f;\delta,x)\right| \le \frac{1}{2\sin(\delta/2)}\left(C \cdot \omega\left(f;\frac{\pi}{n+0.5}\right)_L + K \cdot \frac{|a_0(f)|}{n+0.5}\right),$$

в котором $C = 2\pi^{-1} + \pi^{-2} + 2\pi^{-3} < 0.803$, $K = 1.5\pi^{-1}$.

Теорема 3. *Для любой 2π-периодической функции f, имеющей ограниченную на периоде вариацию $V(f)$, при любых $n \in \mathbb{N}$ и $\delta \in (0,\pi)$ верно неравенство*

$$\left|R_n(f;\delta,x)\right| \le \frac{1}{2\sin(\delta/2)}\left(C_3 \cdot \frac{V(f)}{n+0.5} + K \cdot \frac{|a_0(f)|}{n+0.5}\right),$$

в котором $C_3 = \pi^{-1} + 2\pi^{-2} + 0.5 < 1.021$, $K = 1.5\pi^{-1}$.

Литература

1. Hille E., Klein G. *Riemann's localization theorem for Fourier series* // Duke Math. J. – 1954. – Vol. 21. – P. 587–591.

2. Теляковский С. А. *Принцип локализации, оценка скорости сходимости* // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т. 25. – С. 178–181.

3. Виноградов О. Л., Жук В.В. *Оценки интегралов от произведения двух функций посредством модулей непрерывности самих функций и их первообразных* // Вопросы современной теории аппроксимации. Сборник статей. Издательство Санкт-Петербургского университета. – 2004. – С. 77–88.

4. Ульянов П.Л. *Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках* // Математический сборник. – 1970. – Т. 81 (123). – Вып. 1. – С. 104–131.

RATE OF CONVERGENCE IN THE RIEMANN LOCALIZATION PRINCIPLE FOR INTEGRABLE FUNCTIONS

A.Yu. Popov, T.Yu. Semenova

An estimate of the rate of convergence is proved in the statement known as the Riemann localization principle for trigonometric series.

Keywords: trigonometric Fourier series, Riemann localization principle.

УДК 517.977, 519.7

ИССЛЕДОВАНИЕ l-ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

С.С. Постнов[1]

1 *postnov.sergey@inbox.ru, postnov@mirea.ru*; МИРЭА — Российский технологический университет, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

В работе обсуждается постановка и решение l-проблемы моментов для дифференциальных уравнений дробного порядка в случае, когда порядок уравнения является функцией того же аргумента, что и искомая функция. В частности, рассматривается случай, когда порядок уравнения является функцией времени, а проблема моментов представляет собой задачу, к которой сводится задача оптимального управления для уравнения дробного порядка. Исследуется возможность постановки такой проблемы моментов и её разрешимость.

Ключевые слова: оптимальное управление, проблема моментов, уравнения дробного порядка, дробная производная переменного порядка.

Одно из направлений в дробном исчислении посвящено исследованию уравнений дробного порядка, который, в свою очередь является функцией того же аргумента, что и функция, входящая в уравнение. В частности, в работе [1] был предложен подход к построению таких операторов в случае, когда этот порядок является локально интегрируемой функцией времени $\alpha : [0,T] \to (0,1)$. Производная и интеграл переменного дробного порядка $\alpha(t)$ от некоторой функции $f(t) \in L_1[0,T]$ определяются при этом следующими выражениями:

$$ {}_0D_t^{\alpha(t)} f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \phi_\alpha(t-\tau) f(\tau)\,d\tau - \phi_\alpha(t) f(0),\ t \in [0,T], $$

$$ {}_0I_t^{\alpha(t)} f(t) = \int_0^t \psi_\alpha(t-\tau) f(\tau)\,d\tau,\ t \in [0,T], $$

где $\phi_\alpha(t) = \mathscr{L}^{-1}[s^{sA(s)-1}](t)$, $\psi_\alpha(t) = \mathscr{L}^{-1}[s^{-sA(s)}](t)$, $A(s) = \mathscr{L}[\alpha(t)](s)$; $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^{-1}$ — операторы прямого и обратного преобразования Лапласа. Для функций $\phi_\alpha(t)$ и

$\psi_\alpha(t)$ выполняется уравнение Сонина:

$$\int_0^t \phi_\alpha(t-\tau)\psi_\alpha(\tau)d\tau = 1.$$

Введённые таким образом операторы дробного интегрирования и дифференцирования взаимно-обратны (т.е., для их композиции справедлива формула Ньютона-Лейбница).

В настоящей работе исследуется линейная система дробного порядка следующего вида:

$${}_0D_t^{\alpha_i(t)}q_i(t) = a_{ij}q_j(t) + b_i u_i(t), t \in [0,T], i = 1,...,N,$$

с начальными условиями $q_i(0) = q_i^0$.

Решение данной системы будет при фиксированном значении t аналогично по форме l-проблеме моментов, к которой сводится ряд задач оптимального управления и оценивания состояния динамических систем, в том числе дробного порядка [2]. В данной работе исследована разрешимость такой проблемы моментов и рассмотрены частные случаи, соответствующие конкретному выбору функции $\alpha(t)$. В частности, доказана следующая

Теорема. *Пусть $a_{ij} = \delta_{i+1,j}$, $b_i = \delta_{iN}$ (цепочка интеграторов) и пусть $u_i(\tau) \in L_p[0,T], p > 1$, $i = 1,...,N$. Тогда l-проблема моментов для данной системы будет корректна и разрешима, если*

$$\forall i : \psi_{\alpha_i+\ldots+\alpha_N}(t) \in L_{p'}[0,T], \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Литература

1. Garrappa R., Giusti A., Mainardi F. *Variable-order fractional calculus: A change of perspective* // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. –2021. – V. 102. – 105904.

2. Постнов С. С. *l-проблема моментов в задачах оптимального управления и оценивания состояния для многомерных линейных систем дробного порядка* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2024. – Т. 231. – С. 107-–114.

INVESTIGATION OF THE l-PROBLEM OF MOMENTS FOR THE FRACTIONAL-ORDER EQUATIONS OF VARIABLE ORDER

S.S. Postnov

The paper discusses the formulation and solution of the l-moment problem for fractional differential equations in the case of the order of the equation is a function of the same argument as the desired function. In particular, we consider the case when the order of the equation is a function of time, and the problem of is reduced moments is a problem to which the optimal control problem for a fractional equation. The possibility of posing such a problem of moments and its solvability are investigated.

Keywords: optimal control, problem of moments, fractional-order equations, fractional derivative of variable order.

УДК 517.5

О РАЦИОНАЛЬНЫХ СУММАХ АБЕЛЯ – ПУАССОНА И АППРОКСИМАЦИЯХ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА НА ОТРЕЗКЕ

П.Г. Поцейко[1], Е.А. Ровба[2]

1 *pahamatby@gmail.com*; Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (Республика Беларусь)
2 *rovba.ea@gmail.com*; Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (Республика Беларусь)

Проводится построение сумм Абеля — Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва, представляющих собой рациональные функции с фиксированным количеством геометрически различных полюсов, и изучаются аппроксимационные свойства введенного метода рациональной аппроксимации на классах функций, задаваемых сингулярными интегралами на отрезке $[-1,1]$ *с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода. В случае, когда плотность сингулярного интеграла имеет степенную особенность, найдены оптимальные значения полюсов аппроксимирующей функции, при которых достигаются наилучшие оценки равномерных приближений. Установлено, что скорости равномерных рациональных приближений в этом случае оказываются выше соответствующих полиномиальных аналогов.*

Ключевые слова: рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, суммы Абеля – Пуассона, сингулярный интеграл на отрезке, функции со степенной особенностью, асимптотические оценки.

Пусть задано произвольное множество чисел $A = (a_1, \ldots, a_n)$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ в 1979 году был введен [1] рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва $s_n(\cdot,\cdot)$, такой, что

$$s_n(f,x) = \frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \quad p_n(x) \in \mathbb{P}_n, \quad s_n(1,x) \equiv 1.$$

Если положить $a_k = 0,\ k = 1,\ldots,n,$ то $s_n(f,x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье – Чебышева.

Пусть $q \in (0,n)$ – произвольное натуральное число. $A_q \subset A$ – есть множество параметров таких, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n,$ ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m,\ n = mq$. То есть, речь идет об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости.

Выражение

$$P_{r,q}(f,\ x) = (1-r)\sum_{k=0}^{+\infty} r^k s_{kq}(f,\ x), \quad x \in [-1,1],\ r \in (0,\ 1), \tag{1}$$

назовем суммами Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов типа Фурье – Чебышева с q геометрически различными полюсами. Отметим, что из представления (1) и свойств рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва следует $P_{r,q}(1,\ x) = 1$.

Рассмотрим сингулярный интеграл с ядром типа Коши следующего вида:

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, \qquad x \in [-1,\ 1], \tag{2}$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши, где плотность $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица любого порядка [2]. Задачи, связанные с приближениями сингулярного интеграла вида (2) методами численного анализа, являлись предметом исследований М. А. Шешко [3], Б. Г. Габдулхаева [4] и других известных математиков. В. Н. Русаком [5] изучены рациональные аппроксимации сингулярного интеграла вида (2) с плотностью, принадлежащей различным классам непрерывных функций на отрезке. В работе [6] решена задача рациональных аппроксимаций сингулярного интеграла вида (2) интегральным оператором Фурье – Чебышёва.

Обозначим наилучшие равномерные рациональные приближения суммами Абеля – Пуассона (1) сингулярных интегралов $\hat{f}_s(x)$ вида (2) с плотностью $|x|^s, s \in (0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$:

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s) = \inf_{A_q}\left\| \hat{f}_s(x) - P_{r,q}(\hat{f}_s,\ x)\right\|_{C[-1,\ 1]}, \quad r \in (0,\ 1). \tag{3}$$

Теорема. *Для величины (3) при* $r \to 1$ *справедливы наименьшие оценки сверху.*

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s) \le \begin{cases} \mu(q,s)(1-r)^{1-\frac{(1-s)^q}{1+s}}, \quad s \in (0,\ 1), \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}(1-r)\sqrt{\underbrace{\ln\left(1+\ln\left(1+\ldots\left(\ln\ln\dfrac{1}{1-r}\right)\right)\right)}_{q\,раз}}, \quad s = 1, \\ O(1-r), \quad s \in (1,+\infty). \end{cases}$$

Величина $\mu(q,s)$ может быть выписана в явном виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», № 20162269 (Республика Беларусь).

Литература

1. Ровба Е. А. *Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации* // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 968–971.

2. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд.* – М.: Наука, 1968. – 513 с.

3. Шешко М. А. *О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла* // Изв. вузов. Матем. – 1976. – № 12. – С. 108–118.

4. Габдулхаев Б. Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. – 1980. – Т. 18. – С. 251–307.

5. Русак В. Н. *Равномерная рациональная аппроксимация сингулярных интегралов* // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1993. – № 2. – С. 22–26.

6. Поцейко П. Г., Ровба Е. А. *О приближениях одного сингулярного интеграла на отрезке рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышева* // Матем. сб. – 2024. – Т. 215, № 7. – С. 96–137.

ON RATIONAL ABEL – POISSON SUMS AND APPROXIMATIONS OF ONE SINGULAR INTEGRAL ON A SEGMENT

P.G. Potseiko, E.A. Rovba

The construction of Abel – Poisson sums of a rational integral Fourier – Chebyshev operators, which are rational functions with a fixed number of geometrically different poles, are studied, and approximation properties of the introduced rational approximation method on classes of functions defined by singular integrals on the segment $[-1,1]$ *with a Cauchy kernel and Chebyshev weight of the second kind are investigated. In the case when the density of the singular integral has a power-law singularity, optimal values of the poles of the approximating function are found, at which the best estimates of uniform approximations are achieved. It is established that the rates of uniform rational approximations, in this case, are higher than the corresponding polynomial analogues.*

Keywords: rational integral Fourier – Chebyshev operator, Abel – Poisson sums, singular integral on a segment, functions with a power singularity, asymptotic estimates.

УДК 532.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ ПРИ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Л.А. Прокудина[1]

1 *prokudina@susu.ru*; Южно-Уральский государственный университет (НИУ)

Представлено нелинейное параболическое уравнение для амплитуды огибающей волнового пакета в условиях неоднородности поверхностного натяжения. Проведены вычислительные эксперименты для умеренных чисел Рейнольдса, рассчитаны волновые характеристики жидкой пленки и исследовано нелинейное взаимодействие возмущений спектрально узкого волнового пакета.

Ключевые слова: жидкая пленка, неустойчивость, неоднородность поверхностного натяжения, волновой пакет, нелинейное параболическое уравнение.

Течение жидких пленок под действием силы тяжести реализуется в различных тепло- и массообменных аппаратах. Тепло- и массообменные процессы в жидких пленках протекают при межфазной неустойчивости поверхности раздела [1, 2]. При этом на свободной поверхности жидкой пленки при неоднородности поверхностного натяжения возникают произвольные возмущения, и их эволюция представляет как научный, так и практический интерес. Моделирование эволюции возмущений проведено в рамках нелинейного параболического уравнения амплитуды огибающей A волнового пакета

$$\frac{\partial A}{\partial t_2}+i\frac{\partial \omega_i}{\partial k_x}\frac{\partial A}{\partial x_1}-\frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2\omega_r}{\partial k_x^2}+i\frac{\partial^2\omega_i}{\partial k_x^2}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}=\bar{\omega}_i A-(\beta_1+i\beta_2)|A|^2A. \qquad (1)$$

Коэффициенты уравнения (1) выражены через волновые характеристики жидкой пленки: частоту ω_r, инкремент ω_i и их производные, а коэффициенты (β_1 и β_2) при нелинейном члене характеризуют нелинейное затухание возмущений и нелинейную зависимость фазы от амплитуды.

Для вертикальных жидких пленок (воды, спирта) в диапазоне чисел Рейнольдса $Re < 20$ проведены вычислительные эксперименты при возбуждении спектрально узкого волнового пакета в окрестности максимального инкремента, а также вблизи кривой нейтральной устойчивости жидкой пленки. В окрестности гармоники максимального инкремента происходит сужение волнового пакета, приводящее к монохроматической волне. При возбуждении волнового пакета в окрестности кривой нейтральной устойчивости в результате нелинейного взаимодействия возмущений идет направленный перенос энергии по спектру в окрестность максимального инкремента.

Литература

1. Прокудина Л. А., Вяткин Г. П., *Неустойчивость неизотермической жидкой пленки* // Доклады РАН. – 1998. – Т. 362. – № 6. – С. 770–772.

2. Прокудина Л. А. *Влияние неоднородности поверхностного натяжения на волновое течение жидкой пленки* // Инж.-физ. журн. – 2014. – Т. 87. – № 1. – С. 158–166.

MATHEMATICAL MODELING OF PERTURBATIONS EVOLUTION IN A LIQUID FILM UNDER SURFACE TENSION INHOMOGENUITY

L.A. Prokudina

We present a nonlinear parabolic equation describing evolution of the wave packet envelop amplitude when surface tension is unhomogeneous. For the moderate Reynolds numbers, computational experiments are performed, the wave characteristics of the liquid film are calculated. In addition, we investigate the nonlinear interaction of disturbances in a spectrally narrow wave packet.

Keywords: liquid film, instability, surface tension inhomogenuity, wave packet, nonlinear parabolic equation.

УДК 517.984

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ГЕРШГОРИНА ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ДИАГОНАЛЬНО ДОМИНИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

Т.Х. Расулов[1]

1 *rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

В данной работе рассматриваются неограниченные линейные операторы $\mathscr{A}$, допускающие представление в виде $n \times n$-блочно-операторных матриц. Установлен аналог теоремы Гершгорна для диагонально доминирующих $n \times n$-блочно-операторных матриц.

Ключевые слова: блочно-операторная матрица, доминирующая матрица, теорема Гершгорина.

Многие научно-прикладные проблемы, исследуемые в современной математической физике, приводятся к исследованиям спектральных свойств блочно-операторных матриц, элементы которых являются линейными операторами, действующими в банаховых или гильбертовых пространствах. В данной работе мы формулируем теорему, которая считается важной при оценке нижних или верхних границ таких матриц.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\left(\mathscr{H}_i, \|\cdot\|_i\right)$, $i = 1, \cdots, n$, — банахово пространство и $\left(\mathscr{H}, \|\cdot\|\right)$ — прямая сумма пространств $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_n$, т. е.,

$$\mathscr{H} := \mathscr{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{H}_n, \ \|f\| := \sqrt{\|f_1\|_1^2 + \cdots + \|f_n\|_n^2}, \ f = (f_1, \ldots, f_n)^t \in \mathscr{H}.$$

В банаховом пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим линейные операторы $\mathscr{A}$, действующие как $n \times n$ - блочно-операторные матрицы

$$\mathscr{A} := \left(A_{ij}\right)_{i,j=1}^{n},$$

где матричные элементы $A_{ij} : \mathscr{H}_j \supset D(A_{ij}) \to \mathscr{H}_i, \quad i, j = 1, \ldots, n,$ – плотно определенные, допускающие замыкание линейные операторы и область определения

$$D(\mathscr{A}) = \bigoplus_{j=1}^{n} \Big(\bigcap_{i=1}^{n} D(A_{ij}) \Big),$$

оператора $\mathscr{A}$ также плотна в $\mathscr{H}$.

Определение. *Для блочно-операторной матрицы $\mathscr{A}$ определим ее диагональную часть $\mathscr{T}$ и внедиагональную часть $\mathscr{S}$ следующим образом*

$$\mathscr{T} := \operatorname{diag}\left(A_{11}, \ldots, A_{nn}\right), \quad \mathscr{S} := \mathscr{A} - \mathscr{T},$$

и назовем $\mathscr{A}$ диагонально доминирующей порядка $\delta_{\mathscr{S}}$, если оператор $\mathscr{S}$ ограничен относительно $\mathscr{T}$ с $\mathscr{T}$-гранью $\delta_{\mathscr{S}}$.

Заметим, что область определения диагонально доминирующих блочно-операторных матриц $\mathscr{A}$ всегда описывается через области определений диагональных элементов согласно равенству $D(\mathscr{A}) = D(A_{11}) \oplus \cdots \oplus D(A_{nn})$. Если $\mathscr{A}$ — диагонально доминирующая матрица порядка $\delta_{\mathscr{S}} < 1$, то оператор $\mathscr{S}$ ограничен относительно $\mathscr{A}$ с $\mathscr{A}$-гранью $\leq \delta_{\mathscr{S}}/(1-\delta_{\mathscr{S}})$.

Теперь сформулируем аналог теоремы Гершгорина относительно суммы элементов строк для неограниченных диагонально доминирующих $n \times n$–операторных матриц $\mathscr{A}$.

Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ – диагонально доминирующая $n \times n$–операторная матрица с замкнутыми диагональными элементами A_{jj} и A_{jj}-грани δ_{ij} оператора A_{ij} удовлетворяют условию $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \delta_{ij} < 1$. Пусть постоянные $a_{ij}, b_{ij} \geq 0$ таковы, что $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} b_{ij} < 1$, и для $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ выполняются неравенства:*

$$\|A_{ij} f_j\|_i \leq a_{ij} \|f_j\|_j + b_{ij} \|A_{jj} f_j\|_j, \quad f_j \in D(A_{jj}) \subset D(A_{ij}).$$

Тогда имеет место соотношение $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathrm{G}_{\mathrm{row}}$, где

$$\mathrm{G}_{\mathrm{row}} := \bigcup_{j=1}^{n} \Big(\sigma(A_{jj}) \cup \{\lambda \in \rho(A_{jj}) : \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \|A_{ij}(A_{jj} - \lambda)^{-1}\| \geq 1\} \Big)$$

$$\subset \bigcup_{j=1}^{n}\Big(\sigma(A_{jj}) \cup \Big\{\lambda \in \rho(A_{jj}):\ \|(A_{jj}-\lambda)^{-1}\|\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(a_{ij}+|\lambda|b_{ij})\Big) \geq 1-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} b_{ij}\Big\}\Big).$$

При доказательстве теоремы 1 реализуется доказательство Хаусхолдера при использовании разных факторизаций для $\mathscr{A}-\lambda$, см. [1,2].

Литература

1. Rasulov T.H., Tretter C. *Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices* // Rocky Mountain J. Math. – 2018. – No. 1. – P. 279–324.

2. Salas H.N. *Gershgorin's theorem for matrices of operators* // Linear Algebra Appl. – 1999. – Vol. 291. – No. 1-3. – P. 15–36.

AN ANALOG OF THE GERSHGORIN THEOREM FOR UNBOUNDED DIAGONALLY DOMINANT OPERATOR MATRICES

T.H. Rasulov

In this note we consider unbounded linear operator $\mathscr{A}$ admitting $n \times n$ block operator matrix representation. The Gershgorin theorem for diagonally dominant $n \times n$ block operator matrix is established.

Keywords: block operator matrix, dominant matrix, Gershgorin theorem.

УДК 517.544.8

О НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

К.М. Расулов[1], Т.Р. Нагорная[2]

1 *kahrimanr@yandex.ru*; Смоленский государственный университет
2 *tani7n@gmail.com*; Смоленский государственный университет

В статье предлагается комплексно-аналитический метод решения однородной задачи Дирихле для обобщенных гармонических функций первого рода в круговых областях.

Ключевые слова: обобщенная гармоническая функция, однородная краевая задача типа задачи Дирихле, нетривиальные решения.

Пусть $T_r^+ = \{z : |z| < r\}, 0 < r < 1$ – круговая область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, а $L_r = \{t : |t| = r\}$ – граница T_r^+.

Рассматривается следующая краевая задача GD_1^0: *требуется найти все обобщенные гармонические функции $W(z)$ первого порядка, принадлежащие классу $G_1(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$ и удовлетворяющие на L условию*

$$W(t) = 0, t \in L_r. \qquad (1)$$

Сформулированную выше задачу будем именовать *однородной краевой задачей типа задачи Дирихле для обобщенных гармонических функций первого порядка.*

Далее излагается конструктивный алгоритм решения задачи GD_1^0, состоящий из следующих двух логических шагов.

Шаг 1. С учетом того, что всякую обобщенную гармоническую функцию $W(z)$ из класса $G_1(T_r^+)\cap H^{(1)}(L_r)$ можно представить в виде (см., например, [1]):

$$W(z)=\frac{d\varphi^+(z)}{dz}+\frac{2\overline{z}}{1-z\overline{z}}\varphi^+(z)+\overline{\frac{df^+(z)}{dz}}+\frac{2z}{1-z\overline{z}}\overline{f^+(z)}, z\in T_r^+, \tag{2}$$

где $\varphi^+(z), f^+(z)$ – аналитические в круге T_r^+ функции, называемые *аналитическими компонентами обобщенной гармонической функции W(z)*, вводя в рассмотрение вспомогательные аналитические в областях T_r^+ или $T_r^-=\overline{C}\setminus(T_r^+\cup L_r)$ функции вида

$$\Phi^+(z)=z\frac{d\varphi^+(z)}{dz}+\frac{2r^2}{1-r^2}\varphi^+(z), z\in T_r^+, \tag{3}$$

$$F^+(z)=z\frac{df^+(z)}{dz}+\frac{2r^2}{1-r^2}f^+(z), z\in T_r^+, \tag{4}$$

$$\Phi^-(z)=\overline{F^+}\left(\frac{r^2}{z}\right), z\in T_r^- \tag{5}$$

краевое условие (1) приведём к виду:

$$\Phi^+(t)=-\frac{t^2}{r^2}\Phi^-(t), t\in L_r. \tag{6}$$

Но равенство (7) представляет собой граничное условие *однородной краевой задачи Римана* (задачи сопряжения) относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции $\Phi(z)=\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}$ (см., например, [2, с. 106]), общее решение которой задается формулами:

$$\Phi^+(z)=-\frac{1}{r^2}(C_0+C_1z+C_2z^2), z\in T_r^+, \Phi^-(z)=\frac{1}{z^2}(C_0+C_1z+C_2z^2), z\in T_r^-, \tag{7}$$

где $C_0=\alpha_0+i\beta_0, C_1=\alpha_1+i\beta_1, C_2=\alpha_2+i\beta_2$ – произвольные комплексные числа.

При этом на основании формул (5) и (7) попутно получаем:

$$F^+(z)=\overline{\Phi^-}\left(\frac{r^2}{z}\right)=\frac{\overline{C_0}}{r^4}z^2+\frac{\overline{C_1}}{r^2}z+\overline{C_2}, z\in T_r^+, \tag{8}$$

Шаг 2. Подставляя в левые части равенств (3) и (4) вместо $\Phi^+(z)$ и $F^+(z)$ их значения, задаваемые формулами (7) и (8), а затем решая два полученных линейных дифференциальных уравнений Эйлера первого порядка, находим:

$$\varphi^+(z)=-\frac{C_0(1-r^2)}{2r^4}-\frac{C_1}{r^2}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)z-\frac{C_2(1-r^2)}{2r^2}z^2, \tag{9}$$

$$f^+(z)=\frac{\overline{C_2}(1-r^2)}{2r^2}+\frac{\overline{C_1}}{r^2}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)z+\frac{\overline{C_0}(1-r^2)}{2r^4}z^2 \tag{10}$$

Подставляя полученные по формулам (9) и (10) аналитические функции $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ в правую часть представления (2), находим все нетривиальные решение искомой однородной задачи GD_1^0 в круге $T_r^+=\{z:|z|<r\}, 0<r<1$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема. *Если $T_r^+=\{z:|z|<r\}, r\in(0,1)$, то все нетривиальные решения задачи GD_1^0 можно задавать формулой (2), где $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ определяются по формулам (9) и (10) соответственно.*

Литература

1. Нагорная Т. Р., Расулов К. М. *Алгоритм явного решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций второго порядка в круговых областях* // Научно-технический вестник Поволжья. – 2022. – № 11. – С. 24–27.

2. Гахов Ф.Д., *Краевые задачи* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

ON NONTRIVIAL SOLUTIONS OF THE HOMOGENEOUS DIRICHLET PROBLEM FOR GENERALIZED HARMONIC FUNCTIONS OF THE FIRST ORDER IN CIRCULAR DOMAINS

K.M. Rasulov, T.R. Nagornaya

The article proposes a complex analytical method for solving the homogeneous Dirichlet problem for generalized harmonic functions of the first kind in circular domains.

Keywords: generalized harmonic function, homogeneous boundary value problem of the Dirichlet type, nontrivial solutions.

УДК 517.55

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathscr{F}_\varphi$

А.И. Рахимова[1]

1 *alsu1405@mail.ru*; Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

В работе обсуждается вопрос о динамических свойствах различных операторов в весовом пространстве целых функций. В частности, рассмотрены операторы, которые являются в нем гиперциклическими, хаотическими и часто-гиперциклическими.

Ключевые слова: весовое пространство, целые функции, гиперциклические операторы, дифференциальный оператор.

Рассмотрим некоторые динамические свойства операторов в весовом пространстве целых функций $\mathscr{F}_\varphi$, где φ — семейство выпуклых в $\mathbb{C}^n$ функций. Оно определено как проективный предел компактной последовательности банаховых пространств $\mathscr{F}_m$ в виде $\mathscr{F}_\varphi = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathscr{F}_m$, поэтому является пространством Фреше-–Шварца [1].

Теорема 1. *В пространстве $\mathscr{F}_\varphi$ оператор частного дифференцирования $T = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $1 \le j \le n$, гиперциклический и его образ принадлежит тому же пространству.*

Теорема 2. *Пусть в пространстве $\mathscr{F}_\varphi$ задан некоторый полином с постоянными коэффициентами*

$$\Phi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n :\, |\alpha| \le m} c_\alpha z^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

не тождественный постоянной, тогда оператор

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n :\, |\alpha| \le m} c_\alpha D_z^\alpha f$$

гиперциклический в $\mathscr{F}_\varphi$.

Теорема 3. *В пространстве* $\mathscr{F}_\varphi$ *оператор частного дифференцирования* $T = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $1 \le j \le n$, *является хаотическим и часто-гиперциклическим.*

Рассмотрим оператор T, определенный в теореме 2. Он также обладает свойствами хаотичности и часто-гиперцикличности в пространстве $\mathscr{F}_\varphi$.

Литература

1. Рахимова А. И. *О гиперциклических операторах в весовых пространствах целых функций* // Таврич. вестн. информ. и матем. – 2023. – Т. 58(1). – С. 88–110.

DYNAMIC PROPERTIES OF SOME OPERATORS IN SPACE $\mathscr{F}_\varphi$

A.I. Rakhimova

The paper discusses the question of the dynamic properties of various operators in weighted space of entire functions. In particular, we consider operators that are hypercyclic, chaotic and frequently hypercyclic in it.

Keywords: weighted space, entire functions, hypercyclic operators, differential operator.

УДК 517.95

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ, КОГДА ЕЕ КОНТУР СВОБОДЕН

К.Б. Сабитов[1]

1 *sabitov_fmf@rambler.ru*; Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, г. Стерлитамак

В работе изучаются колебания круглой однородной пластины, когда ее контур свободен. Этот случай в имеющейся литературе исследован в случае осесимметрических колебаний без соответствующих строгих математических обоснований. Доказано, что частотное уравнение имеет счетное множество решений, указано их расположение и найдена асимптотическая формула для вычисления частот при больших индексах. На их основе построено в явном виде решение поставленной начально-граничной задачи в виде суммы ряда и дано обоснование сходимости ряда в классе регулярных и обобщенных решений. Установлена устойчивость решения в зависимости от начальных данных.

Ключевые слова: уравнение колебания пластины, начальные и граничные условия, частотное уравнение, формы собственных колебаний, ряд, существование, устойчивость.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка

$$u_{tt} + \alpha^2 \Delta^2 u = 0, \tag{1}$$

которое моделирует свободные поперечные колебания тонкой однородной круглой пластины радиуса $r = a$ и толщины h, где $\alpha^2 = \rho h / D$, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – жесткость пластинки при изгибе, ρ – масса на единицу площади пластинки, μ – коэффициент Пуассона, Δu – оператор Лапласа, $u(x,y,t)$ – смещение (изгиб) точки (x,y) в момент времени t.

Отметим, что пластины применяются в различных областях современной техники: строительстве, авиастроении, машиностроении, судостроении, ядерных энергетических установках и т.д. Во многих случаях использование пластин связано с различными граничными условиями по их контуру.

Поскольку пластина – круг, то целесообразно записать дифференциальное уравнение (1) в полярных координатах (r,φ), и оно в этих координатах имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)^2 u+\frac{1}{\alpha^2}u_{tt}=0$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned}\mathscr{L}u\equiv u_{rrrr}+\frac{2}{r^2}u_{rr\varphi\varphi}+\frac{1}{r^4}u_{\varphi\varphi\varphi\varphi}+\frac{2}{r}u_{rrr}-\\ -\frac{2}{r^3}u_{r\varphi\varphi}-\frac{1}{r^2}u_{rr}+\frac{4}{r^4}u_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r^3}u_r+\frac{1}{\alpha^2}u_{tt}=0.\end{aligned} \tag{2}$$

Вид граничных условий по контору $r=a$ круглой пластины $D=\{(r,\varphi)|0\le r<a,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$ зависит от способа закрепления края. В случае, когда контур пластины свободен, граничные условия имеют вид

$$M_r(u)|_{r=a}=Q_r(u)|_{r=a}=0, \tag{3}$$

где $M_r(u)$ – изгибающий момент, который определяется формулой

$$M_r(u)=-D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)\right],$$

$$Q_r=N_r+\frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial\varphi},$$

здесь N_r – поперечная сила и $M_{r\varphi}$ – крутящий момент, они находятся по формулам

$$N_r=-D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta u),$$

$$M_{r\varphi}=-(1-\mu)D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right).$$

Начальные условия такие же, как и в случае колебаний мембраны:

$$u(r,\varphi,t)|_{t=0}=f(r,\varphi),\quad u_t(r,\varphi,t)|_{t=0}=g(r,\varphi),\quad (r,\varphi)\in\overline{D}. \tag{4}$$

Уравнение (2) рассмотрим в цилиндрической области

$$Q=\{(r,\varphi,t)|\,(r,\varphi)\in D,\ 0<t<T\},$$

где T – заданная положительная постоянная, и поставим следующую задачу.

Начально-граничная задача. Найти определенную в области Q функцию $u(r,\varphi,t)$ со свойствами:

$$u(r,\varphi,t) \in C^{4,2}_{r\varphi,t}(\overline{Q}),$$

$$\mathscr{L} u(r,\varphi,t) \equiv 0, \quad (r,\varphi,t) \in Q,$$

и удовлетворяющую граничным и начальным условиям (3) и (4), где f и g – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что работы [1] – [4] и другие посвящены изучению колебаний прямоугольной и круглой пластин.

В данной работе изучается колебания круглой однородной пластины, когда ее контур свободен. Этот случай в указанной выше литературе и других работах исследован в основном в случае осесимметрических колебаний без соответствующих строгих математических обоснований. Доказано, что соответствующее частотное уравнение имеет счетное множество решений, указано их расположение и найдена асимптотическая формула для вычисления частот при больших индексах. На их основе построено в явном виде решение поставленной начально-граничной задачи в виде суммы ряда и дано обоснование сходимости ряда в классе регулярных и обобщенных решений. Установлена устойчивость решения от начальных функций.

Ранее в работах [5] – [8] нами изучены колебания прямоугольной пластины с различными граничными условиями на краях. Доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения начально-граничных задач в классах регулярных и обобщенных решений.

Работа выполнена на средства госбюджета по госзаданию № 123021200015-5(FMRS – 2023 – 0015).

Литература

1. Тимошенко С.П. *Колебания в инженерном деле*. – М.: Физматлит, 1967. – 444 с.

2. Тимошенко С.П. *Пластинки и оболочки*. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

3. *Вибрации в технике. Т.1. Колебания линейных систем*. Справочник / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.

4. Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. – М.: Наука, 1988. – 712 с.

5. Сабитов К.Б. *Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластин* // Известия Вузов. Математика. – 2021. – No 10. – С. 60 – 70.

6. Сабитов К.Б. *Колебания пластины условиями «шарнир – заделка»* // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. – 2022. – Т.26. – No 4. – С. 650–671.

7. Sabitov K.B. *Plate oscillations with mixed boundary conditions* // Russian Mathematics. – 2023. – Vol. 67. – No 3. – P. 53 – 65.

8. Sabitov K.B. *Inverse problems for the Helmholts equations on finding the right-hand side with nonlocal integral observation* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2023. – Vol. 63. – No 7. – P. 1145 – 1155.

9. Сабитов К.Б. *Начально-граничная задача для уравнения колебания круглой пластины, жестко закрепленной по краю* // Дифференц. уравнения. 2025. – Т.61. (принята в печать).

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF OSCILLATION OF A CIRCULAR PLATE, WHEN THE CONTOUR OF PLATE IS FREE

K.B. Sabitov

The work studies the vibrations of a round homogeneous plate, when the contour of plate is free. This case has been studied in the existing literature in the case of axisymmetric vibrations without corresponding strict mathematical justification. It is proved that the frequency equation has a countable set of solutions, their location is indicated, and an asymptotic formula is found for calculating frequencies for large indices. On their basis, a solution to the posed initial boundary value problem in the form of a sum of a series is constructed in explicit form, and a justification for the convergence of the series in the class of regular and generalized solutions is given. The stability of the solution depending on the initial data has been established.

Keywords: plate vibration equation, initial and boundary conditions, frequency equations, natural vibration modes, series, existence, stability.

УДК 517.984

КАНАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕКОМПАКТНЫМ ВОЗМУЩЕНЕМ

Г.Р. Сайлиева[1]

1 *g.r.saylieva@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

В данном работе рассматривается операторная матрица третьего порядка с некомпактным возмущением. Построен соответствующий канальный оператор. Установлено, что канальный оператор имеет чисто существенный спектр и совпадает с существенным спектром изучаемого операторной матрицы, кроме того, существенный спектр как множество состоит из объединения не более четырех отрезков.

Ключевые слова: операторная матрица, некомпактное возмущение, канальный оператор, спектр, существенный спектр.

Пусть $\mathbb{T}$ — одномерный тор, $\mathbb{C}$ — одномерное комплексное пространство, $L_2(\mathbb{T})$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}$ и $L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $\mathbb{T}^2$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ и $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2)$. Обычно пространство $\mathcal{H}$ называется "трехчастичным обрезанным" подпространством бозонного пространства Фока $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L_2(\mathbb{T}))$ над $L_2(\mathbb{T})$, где

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L_2(\mathbb{T})) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}) \oplus L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^3) \oplus \cdots .$$

Рассмотрим операторную матрицу, действующую в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как

$$H_{\mu,\lambda} := \begin{pmatrix} H_{00} & \mu H_{01} & 0 \\ \mu H_{01}^* & H_{11} & \mu H_{12} \\ 0 & \mu H_{12}^* & H_{22}^0 - \lambda V \end{pmatrix},$$

где элементы этой операторной матрицы определяются по формулам

$$H_{00}f_0 = \varepsilon f_0, \quad H_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}} v_0(t) f_1(t)dt;$$

$$(H_{11}f_1)(x) = (\varepsilon + 1 + \cos(2x))f_1(x), \quad (H_{12}f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}} v_1(t) f_2(x,t)dt;$$

$$(H_{22}^0 f_2)(x,y) = (\varepsilon + 2 - \cos(2x) - \cos(2y))f_2(x,y), \quad V := V_1 + V_2;$$

$$(V_1 f_2(x,y) = v_2(y)\int_{\mathbb{T}} v_2(t) f_2(x,t)dt, \quad (V_2 f_2(x,y) = v_2(x)\int_{\mathbb{T}} v_2(t) f_2(t,y)dt.$$

Здесь $\varepsilon > 0$; а $v_i(\cdot)$, $i = 0,1,2$ — вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}$.

Можно легко проверить, что операторная матрица $H_{\mu,\lambda}$ является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

Надо отметить, что операторная матрица $H_{\mu,\lambda}$, связана с гамильтонианом системы с несохраняющимся числом частиц на решетке, не превосходящим трёх.

Для формулировки основного результата работы наряду с оператором $H_{\mu,\lambda}$ рассмотрим ещё оператор $H_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}) \oplus L_2(\mathbb{T}^2)$ по формуле

$$H_{\mu,\lambda}^{\text{ch}} := \begin{pmatrix} H_{11} & \frac{\mu}{\sqrt{2}}H_{12} \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}}H_{21} & H_{22}^0 - \lambda V_1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что оператор $H_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}$ ограничен и самосопряжен в $L_2(\mathbb{T}) \oplus L_2(\mathbb{T}^2)$ и оно определяется единственном образом по некомпактной части оператора $H_{\mu,\lambda}$ в силу свойства разлагаемости в прямой операторный интеграл.

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы, который описывает существенный спектр операторной матрицы $H_{\mu,\lambda}$.

Теорема. *а) Канальный оператор $H_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}$ имеет чисто существенный спектр, т.е.*

$$\sigma(H_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}) = \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}^{\text{ch}});$$

б) Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda})$ операторной матрицы $H_{\mu,\lambda}$ совпадает со спектром канального оператора $H_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}$, т.е.

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = \sigma(H_{\mu,\lambda}^{\text{ch}});$$

с) Множество $\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda})$ состоит из объединения не более четырех отрезков.

Следует отметить, что оператор $H_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}$ со свойствами а) и б) теоремы 1 обычно называют канальным оператором.

Литература

1. Tretter C. *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications.* – Imperial College Press, 2008.

2. Rasulov T. Kh. *Branches of the essential spectrum of the lattice spin-boson model with at most two photons* // Theor. Math. Phys. – 2016. – Voi. 186. – No 2. – P. 251–267.

3. Rasulov T. Kh. *Study of the essential spectrum of a matrix operator* // Theor. Math. Phys. – 2010. – Vol. 164. – No 1. – P. 883–895.

THE CHANNEL OPERATOR FOR AN OPERATOR MATRIX WITH A NONCOMPACT PERTURBATION

G.R. Sayliyeva

In this paper, we consider a third-order operator matrix with a non-compact perturbation. The corresponding channel operator is constructed. It is established that the channel operator has a purely essential spectrum and coincides with the essential spectrum of the studied operator matrix; in addition, it is noted that the essential spectrum as a set consists of a union of no more than four segments.

Keywords: operator matrix, non-compact perturbation, channel operator, spectrum, essential spectrum.

УДК 517.968.22

УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

М.С. Сгибнев[1]

1 *sgibnev@math.nsc.ru*; Институт математики им. С.Л. Соболева

При определенных предположениях уравнение Вольтерра первого рода можно привести к уравнению второго рода. Если ядро уравнения зависит от разности аргументов, то можно применить к приведенному уравнению вероятностную теорию восстановления для плотностей. На ядро уравнения налагаются слабые моментные ограничения.

Ключевые слова: уравнение Вольтерра первого рода, правильно меняющаяся функция.

We consider the Volterra equation of the first kind

$$\int_0^x k(x-y)z(y)\,dy = f(x), \qquad x \ge 0, \tag{1}$$

where $z(x)$ is the function sought, whereas the kernel $k(x)$ and $f(x)$ are given functions having continuous derivatives. We assume that

$$f(0)=0, \quad f(x)\not\equiv 0, \quad k(0)=1, \quad k'(x)\le 0, \quad \int_0^\infty |k'(x)|\,dx = 1.$$

Denote $p(x) := |k'(x)|$, $g(x) := f'(x)$. Differentiating equation (1) we arrive at the equation

$$z(x) = \int_0^x p(x-y)z(y)\,dy + g(x), \qquad x \ge 0, \tag{2}$$

which is known as the renewal equation in probability theory. Let $h(x) := \sum_{n=1}^\infty p^{n*}(x)$ be the renewal density, where $p^{n*}(x)$ is the n-fold convolution of $p(x)$:

$$p^{1*}(x) := p(x), \quad p^{(n+1)*}(x) := \int_0^x p^{n*}(x-y)p(y)\,dy, \quad n \ge 1.$$

The function

$$z(x) := g(x) + \int_0^x g(x-y)h(y)\,dy$$

is the unique solution to both equations, (2) and (1).

Definition. A positive function L defined on $(0,\infty)$ varies slowly at infinity if for each $x > 0$

$$\frac{L(tx)}{L(t)} \to 1$$

as $t \to \infty$. A function τ varies regularly with exponent ϱ if

$$\tau(x) = x^{\varrho} L(x)$$

holds with $-\infty < \varrho < \infty$ and L varying slowly.

The relation $a(x) \sim cb(x)$ as $x \to \infty$ means that $a(x)/b(x) \to c$ as $x \to \infty$.

Let $q \in L_1(0,\infty)$. Set $Tq(x) := \int_x^\infty q(y)\,dy$, $x \ge 0$.

We investigate the asymptotic behavior of the solution $z(x)$ as $x \to \infty$ when

$$\mu := \int_0^\infty x p(x)\,dx = \int_0^\infty k(x)\,dx < \infty,$$

but

$$\int_0^\infty x^2 p(x)\,dx = \infty.$$

Theorem 1. *Let $f' = g \in L_1(0,\infty)$ and let the functions $xg(x)$, $xp(x)$, $xTp(x)$ and $T^2 p(x)$ behave like $O(\tau(x))$ as $x \to \infty$, where $\tau(x) = x^{-\alpha} L(x)$, $0 \le \alpha \le 1$, and $L(x)$ is a slowly varying function at infinity. Then*

$$z(x) = \frac{2f(x)}{\mu} - \frac{1}{\mu^2}\int_0^x f(x-y)k(y)\,dy + r(x),$$

where $r(x) = O(x^{-2\alpha} L^2(x))$ for $0 \le \alpha < 1$ and $r(x) = O(x^{-2} L(x) L_1(x))$ for $\alpha = 1$ as $x \to \infty$; here $L_1(x) = \int_1^x y^{-1} L(y)\,dy$. The statement remains valid if in its statement the symbol O is replaced with o-small throughout.

Corollary 1. *Let the conditions of Theorem 1 be fulfilled. Then, as $x \to \infty$,*

$$z(x) = \frac{f(x)}{\mu} + O(\tau(x)).$$

The statement remains valid if the symbol O is replaced with o-small, throughout.

Corollary 2. *Let the conditions of Theorem 1 be fulfilled. Then*

$$\lim_{x\to\infty} z(x) = \frac{1}{\mu} \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Theorem 2. *Suppose that $f'(x) = g(x) \ge 0$, $x \ge 0$, is a nonincreasing function. If, as $x \to \infty$, either $f(x) \to \infty$ or $z(x) \to \infty$, then, as $x \to \infty$,*

$$z(x) \sim \frac{f(x)}{\mu}.$$

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект № FWNF-2022-0004.

VOLTERRA EQUATION OF THE FIRST KIND

M.S. Sgibnev

Under certain assumptions, Volterra equation of the first kind can be reduced to that of the second kind. If the kernel of equation depends on the difference of arguments, we can apply the probabilistic renewal theory for densities to the reduced equation. Weak moment conditions on the kernel are assumed.

Keywords: Volterra equation of the first kind, regularly varying function.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ *p*-ВАРИАЦИИ СТУПЕНЧАТЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Т.Ю. Семенова[1]

1 *station@list.ru*; Московский государственный университет, Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Результат Н.П. Корнейчука об оценке приближения непрерывных функций ступенчатыми в норме L_p, $p \in [1,3]$, распространяется на случай $p \in [1,\infty)$. Результат П.Л. Ульянова об оценке приближения функции из L_p ступенчатыми через интегральный модуль непрерывности уточняется для функций ограниченной p-вариации.

Ключевые слова: приближение ступенчатыми функциями, функции ограниченной p-вариации.

Пусть $C[a,b]$ — множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ действительнозначных функций с нормой $\|f\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

$$\omega(f,h) = \max\{|f(t_1)-f(t_2)|;\ t_1, t_2 \in [a,b],\ |t_1-t_2| \le h\}$$

— модуль непрерывности функции f.

Пусть $L_p[a,b]$ — множество измеримых действительнозначных определенных на $[a,b]$ функций, модуль которых интегрируем в p-й степени, $p \in [1,\infty)$, $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1/p}$. Если $h \in [0, b-a]$, то

$$\omega(f,h)_p = \sup_{0\le t\le h}\left(\int_a^{b-t} |f(x+t)-f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

— интегральный модуль непрерывности (в L_p) функции f.

Назовём p-вариацией функции f на $[a,b]$, $p \in [1,\infty)$, величину

$$V_p(f) = V_p(f,[a,b]) = \sup_T \left(\sum_{i=1}^m |f(x_i)-f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p},$$

где точная верхняя грань берется по всем разбиениям $T = \{a = x_0 < \ldots < x_m = b\}$ отрезка $[a,b]$. Если $V_p(f,[a,b]) < +\infty$, то функция называется функцией ограниченной p-вариации на $[a,b]$, а класс всех таких функций обозначается $\mathbb{V}_p[a,b]$.

Одним из простых линейных методов приближения функций является приближение кусочно-постоянными функциями со значениями на интервалах постоянства, равными среднеинтегральным значениям исходной функции. Обозначим $x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}$, $j = 0, 1, \dots, n$;

$$\psi_n(f,x) = \frac{n}{b-a}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)dt \text{ при } x \in (x_{j-1}, x_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Н.П. Корнейчук [1] доказал, что для $f \in C[a,b]$, $1 \le p \le 3$, справедлива оценка

$$||f - \psi_n(f)||_p \le \frac{1}{2}(b-a)^{1/p}\,\omega\Big(f, \frac{b-a}{n}\Big), \tag{1}$$

которая является неулучшаемой. Из неравенства П.Л. Ульянова [2]

$$\|f - \psi_n(f)\|_p \le \left(\frac{2n}{b-a}\int_0^{\frac{b-a}{n}} \Big(\omega\big(f,u\big)_p\Big)^p du\right)^{1/p} \le 2^{1/p}\omega\Big(f, \frac{b-a}{n}\Big)_p,$$

верного для $f \in L_p[a,b] \cap \mathbb{V}_p[a,b]$, $p \in [1,\infty)$, следует соотношение

$$\|f - \psi_n(f)\|_p \le V_p(f)\left(\frac{b-a}{n}\right)^{1/p}. \tag{2}$$

Для $p \ge 1$ и $\lambda \in [0,1]$ определим $\varphi_p(\lambda) = \big(\lambda^p(1-\lambda) + (1-\lambda)^p\lambda\big)^{1/p}$, $m_p = \max\limits_{0 \le \lambda \le 1} \varphi_p(\lambda)$.

Теорема 1. *Для $f \in C[a,b]$ при произвольном $p \in [1,\infty)$ справедлива неулучшаемая оценка*

$$||f - \psi_n(f)||_p \le m_p \cdot (b-a)^{1/p}\,\omega\Big(f, \frac{b-a}{n}\Big).$$

Теорема 2. *Если $f \in L_p[a,b] \cap \mathbb{V}_p[a,b]$, $p \in [1,\infty)$, то верна неулучшаемая оценка*

$$\|f - \psi_n(f)\|_p \le m_p \cdot V_p(f)\left(\frac{b-a}{n}\right)^{1/p}.$$

Отметим, что при $1 \le p \le 3$ значение $m_p = 1/2$; при $p > 3$ величина m_p монотонно возрастает, $\lim\limits_{p\to\infty} m_p = 1$ и выполнено неравенство

$$\max\Big\{1/2, (p+p^p)^{1/p}(p+1)^{-1-1/p}\Big\} < m_p < 2^{-3/p} < 1.$$

При $1 \le p \le 3$ результат теоремы 1 соответствует неравенству (1). Результат теоремы 2 при $1 \le p \le 3$ дает оценку в два раза лучше, чем неравенство (2).

Литература

1. Корнейчук Н.П. *Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1981. – Т. 45. – № 2. – С. 266–290.

2. Ульянов П.Л. *Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках* // Математический сборник. – 1970. – Т. 81 (123). – Вып. 1. – С. 104–131.

APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS AND FUNCTIONS OF BOUNDED p-VARIATION BY STEP FUNCTIONS

T.Yu. Semenova

N.P. Korneychuk's result on estimating the approximation of continuous functions by step functions in the L_p norm, $p \in [1,3]$, extends to the case $p \in [1,\infty)$. P.L. Ulyanov's assessment result of the stepwise approximation of a function from L_p through the integral modulus of continuity is refined for functions of bounded p-variation.

Keywords: approximation by step functions, functions of bounded p-variation.

УДК 514.822

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

С.Н. Сидоров[1]

1 *stsid@mail.ru*; Уфимский государственный нефтяной технический университет

В работе поставлены начально-граничные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с характеристическим вырождением. Для каждой задачи установлен критерий единственности решений. Решения задач построено в явной форме в виде сумм рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании сходимости построенных рядов возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость этих рядов. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости рядов установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволили при некоторых условиях относительно данных задачи доказать принадлежность построенного решения классу регулярных решений.

Ключевые слова: уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, характеристическое вырождение, спектральный метод, единственность, существование, ряд, малые знаменатели, равномерная сходимость.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x,t) \,|\, 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\},$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - t^n u_t - bu, & t > 0, \\ u_{xx} - (-t)^m u_{tt} - bu, & t < 0, \end{cases} \quad F(x,t) = \begin{cases} F_1(x,t), & t > 0, \\ F_2(x,t), & t < 0, \end{cases}$$

где $n > 0$, $m > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и b – заданные действительные числа, $F_i(x,t)$, $i = 1,2$, – известные функции и следующие начально-граничные задачи.

Задача 1. *Пусть* $0 < n < 1$, $0 < m < 1$. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0+0} t^n u_t(x,t) = \lim_{t\to 0-0} u_t(x,t); \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{6}$$

где $\varphi(x)$ *– заданная достаточно гладкая функция,* $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. *Пусть* $0 < n < 1$, $1 < m < 2$. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую условиям (2), (4) – (6) и*

$$\lim_{t\to 0+0} t^n u_t(x,t) = \lim_{t\to 0-0} (-t)^{m-1} u_t(x,t), \quad 0 \le x \le l. \tag{7}$$

Задача 3. *Пусть* $0 < n < 1$, $m = 1$. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую условиям (2), (4) – (6) и*

$$\lim_{t\to 0+0} t^n u_t(x,t) = \lim_{t\to 0-0} \frac{u_t(x,t)}{\ln(-t)}, \quad 0 \le x \le l. \tag{8}$$

Для уравнения (1) линия $t = 0$, как и в работе М.В. Келдыша [1], является характеристикой степенного вырождения уравнения, что затрудняет постановку краевых задач.

Начально-граничная задача для уравнения (1), когда $n = 0$ и $m < 0$, $n < 0$ и $m = 0$, $n < 0$ и $m < 0$, изучена в работе [2].

В работе получен критерий единственности решения задач 1 – 3 при различных $0 < n < 1$ и $0 < m < 2$. Их решения построены в явной форме в виде сумм рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Для этих рядов возникает проблема малых знаменателей, которая затрудняет обоснование сходимости. Для доказательства равномерной сходимости построенных рядов найдены оценки, гарантирующие отделённость от нуля малых знаменателей, которые позволили доказать существование регулярного решения задач 1 – 3, т.е. решения, удовлетворяющего условиям (2) и (3), (2) и (7), (2) и (8) соответственно. Когда $n \ge 1$ или $m \ge 2$ поставленные задачи для уравнения (1) становятся некорректными.

Литература

1. Келдыш М. В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа* // Докл. АН ССР. – 1951. – Т. 77. – № 2. – С. 181–183.

2. Sabitov K. B., Sidorov S. N. *Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type* // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 236. – № 6. – Pp. 603–640.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A MIXED TYPE EQUATION WITH CHARACTERISTIC DEGENERATION

S.N. Sidorov

The paper poses initial boundary value problems for a non-homogeneous equation of mixed parabolic-hyperbolic type with characteristic degeneration. For each problem, a criterion for the uniqueness of solutions is established. Solutions to the problems are constructed explicitly as sums of series over a system of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. When substantiating the convergence of the constructed series, small denominators arise that complicate the convergence of these series. In this regard, to prove the uniform convergence of the series, estimates are established for the separation from zero of small denominators with the corresponding asymptotics, which make it possible, under certain conditions with respect to the data of the problem, to prove that the constructed solution belongs to the class of regular solutions.

Keywords: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, characteristic degeneration, spectral method, uniqueness, existence, series, small denominators, uniform convergence.

УДК 539.1.01, 512.583

ЗАПУТЫВАНИЕ МОД В РАМКАХ ЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБР CAR

А.С. Ситдиков[1], А.С. Никитин[2], Д.В. Буштец[3]

1 *airat_vm@rambler.ru*; Казанский государственный энергетический университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет

2 *dr2nikitin@gmail.com*; Казанский государственный энергетический университет

3 *dima_byshtetc@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет, Институт математики и механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе мы даем формулировку простой алгебраической модели для исследования явления запутанности мод для ферми-частиц, используя класс C^*-алгебр, заданных каноническими антикоммутационными соотношениями ($\mathcal{KAC}$).

Ключевые слова: алгебраическая модель, C^*-алгебра канонических антикоммутационных соотношений, квантовая запутанность.

Явление квантовой запутанности лежит в основе всех современных квантовых технологий и, в то же время, является серьезной, еще далекой от своего решения проблемой современной науки. В арсенале исследований этого явления основным инструментом является энтропия — одна из фундаментальных мер запутанности. Однако при верификации различных энтропий (фон Неймана и т.д.) используются состояния, основанные на концепции гильбертова пространства, которое считается заданным априори. При этом возникает много вопросов принципиального характера, о чем свидетельствуют многочисленные споры, которые ведутся в литературе. Поэтому в последенее время предпринимаются серьезные попытки применения для исследования запутанности мощные и универсальные методы теории C^*-алгебр и можно надеяться, что на этом пути удастся получить ответы на некоторые основополагающие вопросы подобно тому, как это случилось с квантовой теорией поля после перехода из феноменологического на аксиоматический уровень описания.

Используем C^*-алгебру Кунца $\mathcal{O}_d$, порожденную изометрическими операторами $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_d$ ($d \geq 2$), удовлетворяющими соотношениям Кунца

$$\psi_i^* \psi_j = \delta_{ij} I, \tag{1}$$

$$\sum_i^d \psi_i \psi_i^* = I. \tag{2}$$

Генераторы a_i и a_i^* C^*-алгебры ($\mathcal{KAC}$) удовлетворяют соотношениям

$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^*, a_j^*\} = 0, \tag{3}$$

$$\{a_i, a_j^*\} = \delta_{i,j} \mathbf{1}, \tag{4}$$

где a_i – оператор уничтожения фермионной частицы в состоянии i, a_j^* — оператор рождения такой же частицы в состоянии j. Здесь $i, j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Согласно [1], операторы рождения и уничтожения фермионов можно выразить с помощью изометрических операторов (1)-(2), используя линейное отображение $\zeta : \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_2$, определяемое как $\zeta(X) = \psi_1 X \psi_1^* - \psi_2 X \psi_2^*$, $X \in \mathcal{O}_2$. Идентифицируя рекурсивным образом семейство операторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$ с помощью $a_i = \zeta(a_{i-1})$ при $\mathbf{a} \equiv a_1 = \psi_1 \psi_2^*$, легко убеждаемся, что соотношения (1)-(2) всегда будут выполнены. Эта схема определяет так называемую стандартную рекурсивную фермионную систему и осуществляет вложение C^*-алгебры $\mathcal{KAC}$ в C^*-алгебру $\mathcal{O}_2$ ($d = 2$).

Рассмотрим модовую запутанность для двух неразличимых частиц в рамках вторичного квантования. Разобьем алгебру $\mathcal{A} \subset \mathcal{KAC}$, генерируемую модами a_i, $i = \overline{1, n}$, где $n \in \mathbb{N}$, на двудольную систему, состоящую из двух подалгебр $\mathcal{A}_A$ и $\mathcal{A}_B$, локализованных в соответствующих непересекающихся подмножествах множества натуральных чисел. Пусть $\mathcal{A}_A$ генерируется двумя модами i, j, а $\mathcal{A}_B$ — остальными. Тогда двухмодовая частичная матрица плотности имеет вид:

$$\rho = \begin{pmatrix} \langle a_i^* a_i a_j^* a_j \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle a_i^* a_i a_j a_j^* \rangle & \langle a_j^* a_i \rangle & 0 \\ 0 & \langle a_i^* a_j \rangle & \langle a_i a_i^* a_j^* a_j \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle a_i a_i^* a_j a_j^* \rangle \end{pmatrix}$$

Дальнейшие вычисления ненулевых матричных элементов показывают, что предложенный подход позволяет исследовать запутанность, избегая стандартные утомительные процедуры (применение теорем Вика и т.п.) и используя непосредственно только взаимно ортогональные базисные векторы пространства представления алгебры Кунца и сами генераторы алгебры Кунца, подчиняющиеся простым соотношениям (1)-(2).

Литература

1. Mitsuo Abe, Katsunori Kawamura, Recursive Fermion System in Cuntz Algebra. I, Commun. Math. Phys. – 2002. – Vol. 228. – P. 85–101.

MODE ENTANGLEMENT IN THE FRAMEWORK OF LOCAL CAR ALGEBRAS

A.S. Sitdikov, A.S. Nikitin, D.V. Bushtets

In this paper, we formulate a simple algebraic model for investigating the phenomenon of mode entanglement for Fermi particles using the class of C^*-algebras defined by canonical anticommutation relations ($\mathscr{CAR}$).

Keywords: algebraic model, C^*-algebra of canonical anticommutation relations, quantum entanglement.

УДК 517.545, 519.173

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ПОЛИНОМЕ ЛАПЛАСИАНА ЦИРКУЛЯНТНОГО ГРАФА С НЕФИКСИРОВАННЫМИ СКАЧКАМИ

Г.К. Соколова[1]

1 *g.sokolova@g.nsu.ru*; Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

В докладе рассматривается семейство циркулянтных графов с нефиксированными скачками. Описывается структура характеристического полинома лапласиана таких графов. Характеристический полином представлен произведением алгебраических функций, задаваемые корнями линейной комбинации полиномов Чебышева первого рода, при этом из него можно выделить полный квадрат некоторого целочисленного полинома. Для графов приведена формула подсчета числа корневых остовных лесов и аналитическая формула индекса Кирхгофа.

Ключевые слова: циркулянтный граф, характеристический полином матрицы Лапласа, корневые остовные леса, индекс Кирхгофа.

Рассматривается *связный конечный граф* G, который допускает кратные ребра и не содержит петель. Для графа G составим *матрицу смежности* A и *матрицу валентности* вершин D. Тогда матрица $\mathscr{L} = D - A$ называется *матрицей Лапласа* или *лапласианом* графа G, а соответствующий ей *характеристический полином* $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ определяется через определитель $\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \det(\mathscr{L} - \mu\mathbb{E})$, где $\mathbb{E}$ — единичная матрица соответствующего порядка.

Определение. *Граф* $C_{\beta n} = C_{\beta n}(s_1, \ldots, s_k, \alpha_1 n, \ldots, \alpha_\ell n)$ *на* βn *вершинах называется циркулянтным графом с нефиксированными скачками* $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k < \left[\frac{\beta n}{2}\right]$, *и* $1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_\ell \le \left[\frac{\beta}{2}\right]$, *если любая* i*-я вершина смежна с вершинами* $i \pm s_1$, $i \pm s_2, \ldots, i \pm s_k$ *и* $i \pm \alpha_1 n$, $i \pm \alpha_2 n, \ldots, i \pm \alpha_\ell n$ *по модулю* βn. *Здесь* β *и* ℓ *— целые положительные числа, а* n *предполагается достаточно большим.*

Для графа важными инвариантами являются число корневых остовных лесов и число остовных деревьев. Эти величины зависят от собственных значений характеристического полинома $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$. Ранее была получена структурные теоремы о числе остовных деревьев [1, 2, 3, 4] для рассматриваемого класса графов, не опирающиеся на структуру $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$.

В данной работе опишем структуру полинома $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы Лапласа циркулянтного графа $C_{\beta n}$ с нефиксированными скачками с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. *Характеристический полином $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы Лапласа $\mathscr{L}$ циркулянтного графа $C_{\beta n}$ задается формулой*

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = (-1)^{n(\beta-1)} \prod_{u=0}^{\beta-1} \prod_{j=1}^{s_k} \left(2\mathscr{T}_n(w_j(u)) - 2\cos\left(\frac{2\pi u}{\beta}\right)\right),$$

где $\mathscr{T}_s(w)$ — полином Чебышева первого рода, и числа $w_j(u)$, для каждого $u = 0, 1, \ldots, \beta-1$, являются корнями уравнения

$$\sum_{i=1}^{k} \mathscr{T}_{s_i}(w) = k - \frac{\mu}{2} + 2\sum_{m=1}^{\ell} \sin^2\left(\frac{\pi u \alpha_m}{\beta}\right).$$

Следующая теорема утверждает, что характеристический полином циркулянтного графа всегда является полным квадратом некоторого целочисленного полинома с точностью до явно заданных линейных множителей.

Теорема 2. *Пусть числа $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$ равны количеству нечетных элементов в последовательностях скачков $s_1, s_2, \ldots, s_k$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ в графе $C_{\beta n}$, соответственно. Тогда существует целочисленная последовательность $d_n(\mu)$ такая, что*

1. $\chi_L(\mu) = \mu(\mu - 4p)(d_n(\mu))^2$, *если n четно;*
2. $\chi_L(\mu) = \mu(\mu - 4(p+q))(d_n(\mu))^2$, *если n нечетно, β четно;*
3. $\chi_L(\mu) = -\mu(d_n(\mu))^2$, *если n нечетно, β нечетно.*

В качестве приложений Теоремы 1 в докладе указывается формула подсчета корневых остовных лесов в циркулянтном графе $C_{\beta n}$. Отметим, что последнее значение можно найти как величину $\chi_{\mathscr{L}}(-1) = \det(\mathscr{L} + \mathbb{E})$. Также приводится явная аналитическая формула для индекса Кирхгофа графа $C_{\beta n}$.

Материалы данного доклада частично были опубликованы в статье [5].

Литература

1. Mednykh A. D., Mednykh I. A. *Asymptotics and arithmetical properties of complexity for circulant graphs* // Dokl. Math. – 2018. – V. 97. – No. 2. – P. 147–151.

2. Li M., Chen Z., Ruan X., Yong X. *The formulas for the number of spanning trees in circulant graphs* // Discrete Math. – 2015. – V. 338. – P. 1883–1906.

3. Louis J. *A formula for the number of spanning trees in circulant graphs with non-fixed generators and discrete tori* // Bull. Aust. Math. Soc. – 2015. – V. 92. – P. 365–373.

4. Zhang Y., Yong X., Golin M. J. *Chebyshev polynomials and spanning tree formulas for circulant and related graphs* // Discrete Math. – 2005. – V. 298. – P. 334–364.

5. Mednykh A. D., Mednykh I. A., Sokolova G. K. *The Structure of the Characteristic Polynomial of the Laplacian Matrix for a Circulant Graph with Non-Fixed Jumps* // Siberian Advances in Mathematics – 2025. – V. 35. – No. 2. – P. 93–102.

ON THE CHARACTERISTIC POLYNOMIAL OF THE LAPLACIAN OF A CIRCULANT GRAPH WITH NON-FIXED JUMPS

G.K. Sokolova

The report deals with the class of circulant graphs with non-fixed jumps. The structure for the characteristic polynomial of the Laplace matrix of the graphs is described. The characteristic polynomial is represented by the product of algebraic functions defined by the roots of a linear combination of Chebyshev polynomials of the first kind. From it one can extract the complete square of some integer polynomial. A formula for calculating the number of root spanning forests and an analytical formula for the Kirchhoff index are given for the graphs.

Keywords: circulant graph, characteristic polynomial for Laplace matrix, rooted spanning forests, Kirchhoff index.

УДК 519.644

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ВЕСОМ ПО ОТРЕЗКУ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Ю.С. Солиев[1]

1 *su1951@mail.ru*; Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет

Для особых интегралов с весовой функцией Лащенова строятся и исследуются интерполяционные квадратурные формулы с кратными узлами.

Ключевые слова: особый интеграл, интерполяция, кратные узлы, квадратурная формула.

Рассмотрим особый интеграл

$$I_m f = I_m(f;x) = \int_{-1}^{1} p(t)\frac{f(t)}{(t-x)^m}dt,\ m = 1,2,..., \tag{1}$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши ($m = 1$) или в смысле конечного значения по Адамару ($m > 1$), где $f(x)$ — заданная плотность интеграла, а $p(x)$ — весовая функция.

В работе [1] для интеграла $I_1 f$ построена и исследована квадратурная формула заменой плотности $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа с узлами — нулями полинома $L_n(x)$ К.В.Лащенова [2]; такие полиномы ортогональны на $[-1;1]$ с весом $p(x) = (1-x^2)^p|x|^q$ $(p > -1, q > -1)$.

Результаты работы [1] переносятся на интеграл $I_m f$, $m > 1$.

Рассмотрим случай кратных узлов интерполирования.

Через $S_n(x) = S_n(f;x)$ обозначим полином степени $2n+1$, удовлетворяющий условиям

$$S_n(f;-1) = f(-1),\ S_n(f;1) = f(1),\ S_n(f;x_k) = f(x_k),\ S'_n(f;x_k) = \beta_{nk},$$

где $\beta_{nk}(k = \overline{1,n})$ — произвольные числа, $x_0 = 1$, $x_{n+1} = -1$, а x_k — нули полинома $L_n(x)$ с весом $p(x) = (1-x^2)^p|x|^q$, $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$, $0 < q < 1$.

Аппроксимируя плотность интеграла полиномом $S_n(x) = S_n(f;x)$, получим квадратурную формулу

$$I_1 f = I_1(S_n f;x) + R_n f = \sum_{k=0}^{n+1} f(x_k)\widetilde{A}_k(x) + \sum_{k=1}^{n} \beta_{nk}\widetilde{B}_k(x) + R_n f, \qquad (2)$$

где $\widetilde{A}_k(x) = I_1(A_k;x)$, $\widetilde{B}_k(x) = I_1(B_k;x)$, а фундаментальные полиномы интерполирования $A_k(x)$ и $B_k(x)$ определены в работе [3].

Для вычисления коэффициентов $\widetilde{C}_k(x)$ квадратурной формулы (2), где $C_k(x) = A_k(x)$ или $C_k(x) = B_k(x)$, используем представление

$$\widetilde{C}_x(x) = I_1(C_k;x) = \int_{-1}^{1} p(t)\frac{C_k(t) - C_k(x)}{t-x}dt + C_k(x)I_1(1;x)$$

и разлагаем подынтегральную функцию по полиномам $L_n(x)$. Тогда задача сводится к вычислению известных значений моментов весовой функции

$$\mu_k = \int_{-1}^{1} t^k p(t)dt = \{0,\ k = 2n+1;\ B\left(\frac{q+k+1}{2},\ p+1\right),\ k = 2n,\ n = 0,1,...\}$$

и интеграла [4]

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^\beta}{t-x}dt = \pi(1-x^2)^\beta \operatorname{ctg}(\beta+1)\pi - 2^{2\beta}B(\beta,\beta+1)F\left(-2\beta,1;1-\beta;\frac{1-x}{2}\right),$$

где $B(m,n)$,$F(m,n;p;z)$ — бэта–функция и соответственно гипергеометрическая функция.

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in H_\alpha^{(r)}(M,[-1;1])$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\beta_{nk} = f'(x_k) = O(n^v)(k = \overline{1,n})$, $0 \leqslant 2v < \delta < 2$, $\delta = \min(2p,q)$. *Если* $r \geqslant 1$, *то для остаточного члена квадратурной формулы (2) справедлива оценка*

$$\|R_n f\|_C = O(n^{-r-\alpha+v}\ln n),\ r+\alpha > v.$$

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1* $r \geqslant m$, $m > 1$, *то*

$$\|I_m(f - S_n f;x)\|_C = O(n^{-r-\alpha+v+m-1}\ln n),\ r+\alpha+1 > v+m.$$

Аналогичные результаты получены для интеграла (1) с весовой функцией $p(x) = (1-x^2)^\gamma$, $\gamma > -1$.

Литература

1. Хазириши Э.О. *Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных уравнений*// Дисс.канд. физ.–мат.н. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2009. — 123 с.

2. Лащенов К.В. *Об одном классе ортогональных многочленов* // Ученые записки Ленинградского пединститута им. А.И. Герцена. – 1953. – Том 89. – С. 167–187.

3. Mathur K.K., Saxena R.B. *On the convergence of quasi-Hermite-Fejer interpolation* // Pacific Journal of Mathematics. – 1967. – Vol. 20. – No. 2. – P. 245–259.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Таблицы интегральных преобразований*. – М.: – Физматлит, 1970, 328 с.

ON QUADRATURE FORMULAS FOR SINGULAR INTEGRALS WITH WEIGHT OVER A SEGMENT OF THE REAL AXIS

Yu.S. Soliev

For singular integrals with the Laschenov weight function, interpolation quadrature formulas with multiple nodes are constructed and investigated.

Keywords: singular integral, interpolation, multiple nodes, quadrature formula.

УДК 517.538.52, 517.538.53, 517.518.84

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА-ПАДЕ РЯДОВ ЛОРАНА

А.П. Старовойтов[1], И.В. Кругликов[2]

1 *svoitov@gsu.by*; Гомельский государственный университет
2 *igor.v.kruglikov@gmail.com*; Гомельский государственный университет

Для системы рядов Лорана определены аппроксимации Эрмита-Лорана, которые являются аналогами аппроксимаций Эрмита-Паде степенных рядов. В условиях классической теоремы Фабри "об отношении" установлено, что рациональные аппроксимации Эрмита-Лорана локализуют особые точки сумм рядов Лорана.

Ключевые слова: многочлены Паде, степенные ряды, ряды Лорана, теорема Фабри, аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита-Паде, проблема Паде-Лорана.

Рассмотрим набор (систему) $\mathbf{f}^{\mathbf{L}} = (f_1, \ldots, f_k)$, состоящую из k рядов Лорана

$$f_j(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^j z^l, \ j = 1, \ldots, k.$$

Множество k–мерных мультииндексов, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядком мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ назовём сумму $m = m_1 + \ldots + m_k$. Обозначим через L_m множество всех рациональных дробей вида

$$Q(z) = \frac{a_{-p}}{z^p} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots + a_p z^p, \ p \leqslant m.$$

Функцию $Q \in L_m$ будем называть *обобщенным многочленом степени не выше m.*

Задача HL (Эрмита-Лорана). Для мультииндекса $(n, \overrightarrow{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ и набора $\mathbf{f}^{\mathbf{L}}$ найти тождественно не равный нулю обобщенный многочлен многочлен $Q_m \in L_m$ и такие обобщенные многочлены $P_{n_j} \in L_{n_j}$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы

$$\left(Q_m f_j - P_{n_j}\right)(z) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} \left(\tilde{c}_k^j z^k + \frac{\tilde{c}_{-k}^j}{z^k}\right), \ j = 1, \ldots, k.$$

Определение. Если пара (Q_m, P^L), где $P^L = (P_{n_1}, \ldots, P_{n_k})$, является решением задачи **HL**, то рациональные дроби $\left[n_j/\overrightarrow{m}\right]_{\mathbf{f^L}}(z) = P_{n_j}(z)/Q_m(z)$, $j = 1, \ldots, k$, будем называть *аппроксимациями Эрмита-Лорана* (см. [1]) для мультииндекса $(n, \overrightarrow{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ и системы рядов $\mathbf{f^L}$.

Комплексному числу z и каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицы-строки

$$E_m(z) = \left(z^{-m}\ z^{-m+1} \ldots z^{-1}\ 1\ z \ldots z^{m-1}\ z^m\right),$$

$$\mathbb{C}_l^j = \left(c_{l+m}^j\ c_{l+m-1}^j \cdots c_{l+1}^j\ c_l^j\ c_{l-1}^j \cdots c_{l-m+1}^j\ c_{l-m}^j\right),\ j = 1, \ldots, k.$$

Для заданного $j \in \{1, \ldots, k\}$, фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m+1)$

$$F_+^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{n_j+m_j}^j \\ \mathbb{C}_{n_j+m_j-1}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{n_j+1}^j \end{bmatrix}, F_-^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{-n_j-1}^j \\ \mathbb{C}_{-n_j-2}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{-n_j-m_j}^j \end{bmatrix}.$$

Введём в рассмотрение определитель $D(n, \overrightarrow{m}; z) := \det\left[\ F_+^k \ldots F_+^1\ E_m(z)\ F_-^1 \ldots F_-^k\ \right]^T$. Обозначим через $H_{n,\overrightarrow{m}}(\mathbf{f^L})$ матрицу, полученную из элементов определителя $D(n, \overrightarrow{m}; z)$ после удаления в нём $(m+1)$-ой строки $E_m(z)$. Если в определителе $D(n, \overrightarrow{m}; z)$ строку $E_m(z)$ заменить на строку $\mathbb{C}_l^j$, получим новый определитель $d_l^j(n, \overrightarrow{m})$.

Теорема. *Задача* **HL** *всегда имеет решение. Для того, чтобы для мультииндекса* $(n, \overrightarrow{m})$, $\overrightarrow{m} \neq (0, \ldots, 0)$ *задача* **HL** *имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы* $rank\, H_{n,\overrightarrow{m}}(\mathbf{f^L}) = 2m$. *Если* $rank\, H_{n,\overrightarrow{m}}(\mathbf{f^L}) = 2m$, *то при определенном выборе нормирующего множителя и* $j = 1, \ldots, k$ *справедливы представления*

$$Q_m(z; \mathbf{f^L}) = D(n, \overrightarrow{m}; z),\ P_{n_j}(z; \mathbf{f^L}) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \overrightarrow{m}) z^p.$$

Рассмотрим систему $\mathbf{f^L} = \{f_j(z)\}_{j=1}^k$, где каждая функция f_j аналитична в кольце $K_j = \{z : r_j < |z| < R_j\}$ и разлагается в этом кольце в ряд Лорана. Предположим, что $c_{\pm n}^j \neq 0$ при $n \geqslant n_0$ и для $j = 1, \ldots, k$ существуют пределы

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n^j}{c_{n+1}^j} = z_j \neq 0,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{c_{-n}^j}{c_{-n-1}^j} = \frac{1}{z_{-j}} \neq \infty,\ |z_{-j}| < |z_j|,$$

где комплексные числа $\{z_{\pm j}\}_{j=1}^k$ попарно различны. По теореме Фабри точки $z_{\pm j}$ являются особыми точками функции f_j и лежат на границе кольца K_j: $|z_{-j}| = r_j$, а $|z_j| = R_j$. Пронормируем дробь $[n_j/\overrightarrow{1}]_{\mathbf{f^L}}$, умножив её числитель и знаменатель на

$1/\lambda_n$, где $\lambda_n = \prod_{j=1}^k c_{n+2m}^j c_{-n-2m}^j$ и $\overrightarrow{1} = (1,\dots,1) \in \mathbb{Z}^k$. Полагая $Q^*_{n,\overrightarrow{1}}(z) = Q_{n,\overrightarrow{1}}(z)/\lambda_n$, из теоремы получаем

$$\lim_{n\to+\infty} Q^*_{n,\overrightarrow{1}}(z) = Az^{-k}\prod_{j=1}^{k}(z-z_j)(z-z_{-j}).$$

Литература

1. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

HERMITE-PADÉ APPROXIMATIONS OF LAURENT SERIES

A.P. Starovoitov, I.V. Kruglikov

For the system of Laurent series, Hermite-Laurent approximations are defined, which are analogs of Hermite-Padé approximations of power series. Under the conditions of the classical Fabry theorem "on the ratio" it is established that rational Hermite-Laurent approximations localize singular points of the sums of Laurent series.

Keywords: Padé polynomials, power series, Laurent series, Fabry theorem, Padé approximants, Hermite-Padé approximants, Padé-Laurent problem.

УДК 517.538.52, 517.538.53, 517.518.84

АСИМПТОТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА-ЧЕБЫШЕВА

А.П. Старовойтов[1], Н.В. Рябченко[2], М.А. Кухлич[3]

1 *svoitov@gsu.by*; Гомельский государственный университет
2 *nmankevich@tut.by*; Гомельский государственный университет
3 *kuhlich@gmail.com*; Гомельский государственный университет

В работе описана асимптотика поведения нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышёва для систем специальных функций, ассоциированных с функциями Миттаг-Леффлера. Найдены точные порядковые оценки равномерных уклонений указанных аппроксимаций от соответствующих специальных функций.

Ключевые слова: многочлены Чебышёва, аппроксимации Паде-Чебышёва, нелинейные аппроксимации Эрмита-Чебышёва.

Рассмотрим систему $\mathbf{Ch}_\gamma = \mathbf{Ch}_\gamma(\overrightarrow{\lambda})=\{Ch_\gamma(x;\lambda_j)\}_{j=1}^k$, состоящую из функций, представленных рядами Фурье по многочленам Чебышёва $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $Ch_\gamma(x;\lambda_j) = \sum_{p=0}^\infty \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} T_p(x)$, $j = 1,\dots,k$.

При $k \geqslant 1$ и $n \geqslant m_j - 1$, $j = 1,\dots,k$, существуют (см. [1], [2]) рациональные дроби

$$\pi_j^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma) = \pi_j^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma(\overrightarrow{\lambda})) = \pi_{n_j,n,m}^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma(\overrightarrow{\lambda})) = \frac{P_j^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma)}{Q_m^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma)},$$

где многочлены $Q_m^{ch}(x;\mathbf{Ch}_\gamma)$, $P_j^{ch}(x;\mathbf{Ch}_\gamma)$, степени которых не превышают соответственно m и n_j, подобраны так, что

$$Ch_\gamma(x;\lambda_j) - \pi_j^{ch}(x;\mathbf{Ch}_\gamma) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} c_l^j T_l(x), \; j = 1,\ldots,k.$$

Как и в [1], [2] координатные функции вектора $\vec{\pi}^{\,ch}_{n,\vec{m}}(\mathbf{Ch}_\gamma)$=$\{\pi_j^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda}))\}_{j=1}^k$ будем называть *нелинейными аппроксимациями Эрмита–Чебышёва* для мультииндекса $(n,\vec{m})$ и системы $\mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda})$. При $k=1$ дроби $\pi_{n,m}^{ch}(x;\mathbf{Ch}_\gamma) := \pi^{ch}_{n,n,\vec{m}}(x;\mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda}))$ называют *нелинейными аппроксимациями Паде–Чебышёва* (см. [3]).

Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – корни уравнения $\lambda^k = 1$, т.е. $\lambda_j = e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}}$, $j = 1,\ldots,k$, где i — мнимая единица. Полагаем $\varphi(x) := x(1-x^k)$. Через x_j обозначим нули $\varphi'(x)$:

$$x_j = \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}}\, e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}}, \; j = 1,\ldots,k.$$

Рассмотрим функцию $S(x) := \ln\varphi(x)$, $x \in (0,1)$. По определению полагаем, что $S(0) = S(1) = -\infty$. Справедливы равенства см.[4]

$$S(x_1) = \ln\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}, \; S'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \; S''(x) = \frac{\varphi''(x)\varphi(x) - [\varphi'(x)]^2}{\varphi^2(x)},$$

из которых следует, что $S'(x_1) = 0$, $S''(x_1) = \frac{\varphi''(x_1)}{\varphi(x_1)} = -\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}}$, и

$$B_k(n) := \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}\, e^{nS(x_1)} = \sqrt{\frac{2\pi}{n\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}}}}\left(\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}\right)^n.$$

Везде в дальнейшем будем рассматривать только такие значения λ_j, что $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ являются корнями уравнения $\lambda^k = 1$

Теорема 1. *Если $k=1$, то для любого x, $n=m$ при $n\to\infty$*

$$Ch_\gamma(x;1) - \pi_{n,n}^{ch}(x;Ch_\gamma) = (-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\frac{1}{2^{2n+\gamma}}\,\frac{1}{(\gamma)_{2n}}\times$$

$$\times Re\left\{e^{i(2n+1)\arccos x}\, e^{x+i\sqrt{1-x^2}}\,(1+O(1/n))\right\}.$$

Теорема 2. *Если $k\geqslant 2$, то для любого x, $n=m_1=\ldots=m_n$ при $n\to\infty$*

$$Ch_\gamma(x;\lambda_j) - \pi_j^{ch}(x;Ch_\gamma) = (-1)^n\, x_1^{\gamma-1}\,\frac{B_k(n)}{\gamma_{kn+n}}\times$$

$$\times Re\left\{e^{i(kn+n+1)\arccos x}\,\lambda_j^{n+1}\, e^{\lambda_j(1-x_1)\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)}(1+O(1/n))\right\}, \; j=1,\ldots,k.$$

Литература

1. Старовойтов А.П., Кечко, Е.П., Оснач Т.М. *О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита-Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышёва* // Журнал Белорусского гос. унив. Матем. Информ. – 2023. – № 2. – С. 6 – 17.

2. Старовойтов А. П., Кругликов И. В., Оснач Т. М. *О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита-Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышёва* // Журнал Белорусского гос. унив. Матем. Информ. – 2024. – № 3. – С. 6–21.

3. Суетин С.П. *О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций* // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86. – № 2. – С. 290 – 303.

4. Старовойтов А.П. *Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг – Леффлера* // Труды Математического института имени В. А. Стеклова РАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.

ON THE ASYMPTOTICS OF NONLINEAR HERMITE-CHEBYSHEV APPROXIMATIONS

A.P. Starovoitov, N.V. Ryabchenko, M.A. Kukhlich

The paper describes the asymptotic behavior of nonlinear Hermite-Chebyshev approximations for systems of special functions associated with Mittag-Leffler functions. Exact ordinal estimates of uniform deviations of the indicated approximations from the corresponding special functions are found.

Keywords: Chebyshev polynomials, Padé-Chebyshev approximations, nonlinear Hermite-Chebyshev approximations.

УДК 517.51

ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОДНОМЕРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПА ХАРДИ, ВКЛЮЧАЮЩИМИ СУПРЕМУМЫ

В.Д. Степанов[1]

1 *stepanov@mi-ras.ru*; Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Мы получаем необходимые и достаточные условия ограниченности в весовых пространствах Лебега одномерных операторов типа Харди, включающих супремумы.

Ключевые слова: неравенство Харди, супремум, весовое пространство Лебега.

В работе решены задачи из [1, страницы 326 и 331]. Сообщение основано на статье [2].

Исследование автора выполнено при финансовой поддержке РНФ (грант № 24-11-00170, https: rscf.ru/project/24-11-00170/).

Литература

1. Frank R. L., Laptev A., Weidl T. *An improved one-dimensional Hardy inequality* // J. Math. Sci. – 2022. – V. 263. – P. 323–342.

2. Stepanov V. D. *Weighted norm inequalities with one-dimensional Hardy-type operators involving suprema* // Anal. Math. Phys. – 2025. – V. 15. – No 2. – No. 45. – 14 pp.

WEIGHTED INEQUALITIES WITH ONE–DIMENSIONAL HARDY OPERATORS INVOLVING SUPREMA

V.D. Stepanov

We obtain necessary and sufficient boundedness conditions in weighted Lebesgue spaces for one–dimensional Hardy operators involving suprema.

Keywords: Hardy inequality, supremum, weighted Lebesgue space.

УДК 517.51

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ХАРДИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

В.Д. Степанов[1], Е.П. Ушакова[2]

1 *stepanov@mi-ras.ru*; Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук

2 *elenau@inbox.ru*; Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук

В работе представлены характеристики свойств ограниченности, компактности и аппроксимируемости оператора Харди прямоугольного интегрирования в весовых пространствах Лебега. Дается обзор известных результатов для одномерного случая. Особое внимание в докладе уделяется двумерному оператору Харди, для которого авторами недавно были получены новые критерии выполнения требуемых свойств.

Ключевые слова: интегральный оператор Харди, весовое пространство Лебега, ограниченность, компактность, поведение аппроксимативных чисел.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для измеримой по Лебегу функции f на $\mathbb{R}^n_+ := (0,\infty)^n$ n–мерный оператор Харди прямоугольного интегрирования имеет вид

$$I_n f(x_1,\dots,x_n) := \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} f(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n \qquad (x_1,\dots,x_n>0). \tag{1}$$

Пусть $0<p,q\le\infty$ и $v,w\ge 0$ – весовые функции (веса) на $\mathbb{R}^n_+$. Весовое пространство Лебега $L^p_v(\mathbb{R}^n_+)$ состоит из всех измеримых на $\mathbb{R}^n_+$ функций f таких, что $\|f\|^p_{p,v} = \int_{\mathbb{R}^n_+}|f|^p v < \infty$.

Основная задача состоит в характеризации интегрального неравенства

$$\left\| I_n f\right\|_{q,w} \le C_n \|f\|_{p,v} \tag{2}$$

для всех $f \in L^p_v(\mathbb{R}^n_+)$ и дальнейшем исследовании свойств (1). Константа $C_n>0$ предполагается наилучшей (наименьшей из возможных) и не зависящей от f. Характеризация (2) эквивалента задаче об ограниченности оператора (1) в весовых пространствах Лебега. Соответствующий критерий должен быть представлен некоторым функционалом $F(v,w,p,q) =: F \approx C_n$. При этом эквивалентность означает выполнение неравенства $F \lesssim C_n \lesssim F$, где $A \lesssim B$, означает, что $A \le cB$ с константой, зависящей от p,q и n. Мы обозначаем $p' := p/(p-1)$, $I^*_n g(y_1,\dots,y_n) := \int_{y_1}^\infty \dots \int_{y_n}^\infty g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$, $\|h\|_{r,1} =: \|h\|_r$.

Характеризация (2) в случаях $1 = p \le q \le \infty$, $1 < p \le q = \infty$ или $1 = q \le p \le \infty$, $1 < q \le p = \infty$ хорошо известна [1, Гл. XI]. Например, если $1 = p < q < \infty$, то

$$\|I_n\|_{L^1_v(\mathbb{R}^n_+)\to L^q_w(\mathbb{R}^n_+)} = \operatorname*{esssup}_{t_i\ge 0, i=1,..,n} [v(t_1,\ldots,t_n)]^{-1}\big[I_n^* w(t_1,\ldots,t_n)\big]^{1/q}.$$

Для $0 < p < 1$ известно [2, теорема 2], что ограниченность $I_n : L^p_v(\mathbb{R}^n_+) \to L^q_w(\mathbb{R}^n_+)$ влечет

$$\|I_n\|_{L^p_v(\mathbb{R}^n_+)\to L^q_w(\mathbb{R}^n_+)} = 0.$$

Случай $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$ неравенства (2) полностью изучен: $1 < p = q < \infty$ — G. Talenti (1969) [3], G. Tomaselli (1969) [4], B. Muckenhoupt (1972) [5]; $1 < p \le q < \infty$ — J. Bradley (1978) [6]; $1 < q < p < \infty$ — V.G. Maz'ya, V.A. Rozin (1978) [7]; $0 < q < 1 \le p < \infty$ — G. Sinnamon, V.D. Stepanov (1996) [8]; $1 < q < p < \infty$ — L.–E. Persson, V.D. Stepanov (2002) [9]. Приведем основные результаты, так как они служат мотивацией к исследованию $n > 1$.

$\mathbf{I}$: *Ограниченность.* ($\boldsymbol{a}_{\mathbf{I}}$) Если $1 < p \le q < \infty$, то $C_1 \approx A_M \approx A_T \approx A_T^*$, где

$$A_M := \sup_{t>0} A_M(t) := \sup_{t>0}\big[I_1^* w(t)\big]^{1/q}\big[I_1\sigma(t)\big]^{1/p'}, \quad A_T := \sup_{t>0}\Big[I_1\big([I_1\sigma]^q w\big)(t)\Big]^{1/q}\big[I_1\sigma(t)\big]^{-1/p},$$

$$A_T^* := \sup_{t>0}\Big[I_1^*\big([I_1^* w]^{p'}\sigma\big)(t)\Big]^{1/p'}\big[W(t)\big]^{-1/q'} \qquad \text{и} \quad \sigma := v^{1-p'}.$$

($\boldsymbol{b}_{\mathbf{I}}$) Если $0 < q < p < \infty$, $p > 1$, $1/s := 1/q - 1/p$, то $C_1 \approx B_{MR} \approx B^*_{MR} \approx \mathscr{B}_{PS} \approx \mathscr{B}^*_{PS}$, где

$$B_{MR} := \Big(\int_0^\infty [I_1^* w]^{s/q}[I_1\sigma]^{s/q'}\sigma\Big)^{1/s}, \quad \mathscr{B}_{PS} := \Big(\int_0^\infty \Big[I_1\big([I_1\sigma]^q w\big)\Big]^{s/p}[I_1\sigma]^{q-s/p}\, w\Big)^{1/s},$$

$$B^*_{MR} := \Big(\int_0^\infty [I_1^* w]^{s/p}[I_1\sigma]^{s/p'} w\Big)^{1/s}, \quad \mathscr{B}^*_{PS} := \Big(\int_0^\infty \Big[I_1^*\big([I_1^* w]^{p'}\sigma\big)\Big]^{s/q'}[I_1^* w]^{p'-s/q'}\sigma\Big)^{1/s}.$$

($\boldsymbol{c}_{\mathbf{I}}$) Если $0 < q < 1$ и $p = 1$, то $C_1 \approx \mathbb{B} := \Big(\int_0^\infty\big[I_1^* w(t)\big]^{\frac{q}{1-q}}\big[\operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,t]}\frac{1}{v(s)}\big]^{\frac{q}{1-q}} w(t)\,dt\Big)^{\frac{1-q}{q}}$.

$\mathbf{II}$: *Компактность.* ($\boldsymbol{a}_{\mathbf{II}}$) Если $1 < p \le q < \infty$, то оператор $I_1 : L^p_v(\mathbb{R}_+) \to L^q_w(\mathbb{R}_+)$ компактен, если и только если $A_M < \infty$ и $\lim_{t\to 0} A_M(t) = \lim_{t\to\infty} A_M(t) = 0$ (см. ($\boldsymbol{a}_{\mathbf{I}}$)). Ограниченность $I_1 : L^p_v(\mathbb{R}_+) \to L^q_w(\mathbb{R}_+)$ при $0 < q < p < \infty$, $p \ge 1$ равносильна компактности в силу интегральной формы функционалов, эквивалентных C_1 (см. ($\boldsymbol{b}_{\mathbf{I}}$) и ($\boldsymbol{c}_{\mathbf{I}}$)).

$\mathbf{III}$: *Аппроксимативное число* (*a–число*) порядка $k \in \mathbb{N}$ линейного оператора $T : X \to Y$ определяется по формуле $a_k(T) := \inf\big\{\|T - L\|_{X\to Y} : \operatorname{rank} L < k\big\}$, что совпадает с линейным поперечником порядка k образа единичного шара TB в Y.

($\boldsymbol{a}_{\mathbf{III}}$) Первые оценки на a–числа оператора $T : L^p(\mathbb{R}_+) \to L^q(\mathbb{R}_+)$, где $L^r(\mathbb{R}_+) := L^r_1(\mathbb{R}_+)$, вида $Tf := wI_1(fv)$ в случае $1 < p \le q < \infty$ были найдены в [10] в следующем виде.

Пусть $0 < \varepsilon < \|T\|$. В предположении, что T компактен, можно подобрать последовательность точек $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_N < \infty$ такую, что норма оператора T, суженного на интервал (c_{k-1}, c_k), $k = 1,\ldots,N(\varepsilon)$, равна ε, и меньше либо равна ε на (c_N,∞). Тогда

$$[N(\varepsilon)]^{1/q-1/p}\varepsilon \lesssim a_N(T) \lesssim \varepsilon.$$

($\boldsymbol{b}_{\mathrm{III}}$) Следующим шагом исследовались асимптотические оценки a–чисел для $T: L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$. В частности, было доказано соотношение типа Х. Вейля [11]:

$$\lim_{k\to\infty} k a_k(T) = \pi^{-1}\|wv\|_1. \tag{3}$$

($\boldsymbol{c}_{\mathrm{III}}$) Результат ($\boldsymbol{b}_{\mathrm{III}}$) дополняет верхняя оценка на второй асимптотический член [12]:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt{k}\left|\pi^{-1}\|wv\|_1 - k a_k(T)\right| \le c\big(\|v'\|_{2/3} + \|w'\|_{2/3})(\|w\|_2 + \|v\|_2\big) + 3\pi^{-1}\|wv\|_1.$$

($\boldsymbol{d}_{\mathrm{III}}$) В [13] формула (3) была распространена на негильбертовы пространства Лебега для дальнейшего изучения поведения $a_k(T)$ и поперечников Колмогорова. Известно, что

$$d_k(T) := \inf_{X_k \subset L^q(\mathbb{R}_+)} \sup_{0<\|f\|_p\le 1} \|f\|_p^{-1} \inf_{g\in X_k} \|Tf - g\|_q,$$

где X_k произвольное линейное подпространство размерности $\le k$. Если $1 < q \le p < \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} k a_k(T) = \lim_{k\to\infty} k d_k(T) = c_{pq}\|wv\|_r, \qquad \text{где} \quad 1/r := 1/p' + 1/q,$$

$2c_{pq}B(1/q, 1/p') = (p')^{1/q} q^{1/p'} (p' + q)^{1/p - 1/q}$ и $w \in L^q(\mathbb{R}_+)$, $v \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$. При этом $c_{22} = 1/\pi$.

($\boldsymbol{e}_{\mathrm{III}}$) Двусторонние асимптотические оценки на a–числа (точные по порядку убывания) весового оператора Харди для всех $p, q \in (1, \infty)$ были получены в [14]. Положим

$$\lambda := \begin{cases} 1/r, & 1 < p \le q \le 2 \text{ или } 2 \le p \le q < \infty, \\ 1, & 1 < q < p < \infty, \\ 1/2 + \min\{1/q, 1/p'\}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty. \end{cases}$$

Так как специальная техника позволяет свести двухвесовой случай к одновесовому, рассмотрим оператор $T_\rho f := \rho I_1(f)$ с одним весом ρ. Пусть $\Delta_k := [2^k, 2^{k+1}]$, где $k \in \mathbb{Z}$, и

$$\delta_k = \delta_k(\rho) := 2^{k/p'}\|\rho\|_{L^q(\Delta_k)}, \quad |\rho|_r := \|(\delta_k)\|_r = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k^r\Big)^{1/r}, \quad \text{где } \|\rho\|_r \le |\rho|_r.$$

Условие $\|\rho\|_r < \infty$ влечет $|\rho|_r < \infty$ при дополнительных условиях регулярности на ρ. Для всех $p, q > 1$ в предположении $|\rho|_r < \infty$ имеет место оценка из [14, 15]:

$$\|\rho\|_r \lesssim \liminf_{k\to\infty} k^\lambda a_k(T_\rho) \le \limsup_{k\to\infty} k^\lambda a_k(T_\rho) \lesssim \|\rho\|_r.$$

($\boldsymbol{f}_{\mathrm{III}}$) Кроме асимптотических оценок были найдены нижние и верхние границы норм Шаттена–Неймана для a–чисел компактного $T: L^p(\mathbb{R}_+) \to L^p(\mathbb{R}_+)$, где $p, s > 1$ [16]:

$$\sum_k a_k^s(T) \approx \int_0^\infty \left[I_1 v^{p'}\right]^{s/p'} \left[I_1^* w^p\right]^{s/q} w^p.$$

Для $\boldsymbol{n} > \mathbf{1}$ задача характеризации неравенства (2) была обозначена Б. Мукенхоуптом в 1979 г. [17]. В частности, отмечалось, что, по сравнению с $n = 1$, необходимое условие

$$\sup_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2_+} \left[I_2^* w(t_1,t_2)\right]^{1/p}\left[I_1\sigma(t_1,t_2)\right]^{1/p'} < \infty, \tag{4}$$

вообще говоря, не является достаточным в случае $n = 2$ и $1 < p = q < \infty$. Эта гипотеза нашла подтверждение в знаменитой работе Э. Сойера [18], посвященной характеризации двумерного неравенства (2) в случае $1 < p \le q < \infty$. Уникальная схема в [18] позволяет извлечь критерии ограниченности I_2, когда он действует из $L^p_v(\mathbb{R}^2_+)$ в $L^q_w(\mathbb{R}^2_+)$, без ограничений на веса v и w, кроме $I_2^* w(t_1,t_2) < \infty$ и $I_1\sigma(t_1,t_2) < \infty$ для всех $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2_+$, что необходимо вытекает из (4). При этом $I_2\colon L^p_v(\mathbb{R}^2_+) \to L^q_w(\mathbb{R}^2_+)$, по сравнению с $n = 1$, в общем случае контролируется суммой трех функционалов — двумерными аналогами A_T и A_T^*, а также функционалом (4), который является обобщением A_M (см. ($\boldsymbol{a}_{\mathbf{I}}$)) на $n = 2$.

Схема Э. Сойера послужила методом получения новых критериев ограниченности I_2 в случае $1 < p \neq q < \infty$ [4, 2]. На этой основе в [4] исследовалась компактность I_2, были найдены оценки меры некомпактности [3], а также установлены неявные оценки типа ($\boldsymbol{a}_{\mathbf{III}}$) на аппроксимативные числа двумерного оператора Харди [1].

Для $n > 1$ неравенство исследовалось в [7] с некоторыми ограничениями на веса v, w, которые позволяют характеризовать (2) только одним функционалом.

Более подробно этапы изучения многомерного оператора (1) будут представлены в докладе.

Работа частично поддержана Российским научным фондом (проект № 22-21-00579).

Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.

2. Прохоров Д. В., Степанов В. Д. *Весовые оценки операторов Римана–Лиувилля и приложения* // Труды МИАН – 2003. – Т. 243. – С. 278–301.

3. Talenti G. *Osservazione sopra una classe di disuguaglianze* // Rend. Sem. Math. Fis. Milano – 1969. – V. 39. – P. 171–185.

4. Tomaselli G. *A class of inequalities* // Boll. Un. Mat. Ital., Ser.4 – 1969. – V. 21. – No 6. – P. 622–631.

5. Muckenhoupt B. *Hardy inequalities with weights* // Studia Math. – 1972. – V. 44. – No 3. – P. 31–38.

6. Bradley J. S. *Hardy inequalities with mixed norms* // Canad. Math. Bull. – 1978. – V. 21. – No 4. – P. 405–408.

7. Мазья В. Г. *Пространства С. Л. Соболева.* –Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. –451 с.

8. Sinnamon G., Stepanov V. D. *The weighted Hardy inequality: new proofs and the case* $p = 1$ // J. London Math. Soc. – 1992. – V. 2. – No 2. – P. 232–242.

9. Persson L.–E., Stepanov V. D. *Weighted integral inequalities with the geometric mean operator* // J. Inequal. Appl. – 2002. – V. 7. – No 5. – P. 727–746.

10. Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. J. *Approximation numbers of certain Volterra integral operators* // J. London Math. Soc. – 1988. – V. 38. – P. 471–489.

11. Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. J. *Two–sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra inteqral operators* // Studia Math. – 1997. – V. 124. – P. 59–80.

12. Edmunds D. E., Kerman R., Lang J. *Remainder estimates for the approximation numbers of weighted Hardy operators acting on L^2* // J. Anal. Math. – 2001. – V. 85. – P. 225–243.

13. Edmunds D. E., Lang J. *Approximation numbers and Kolmogorov widths of Hardy-type operators in a non-homogeneous case* // Math. Nachr. – 2006. – V. 279. – No 7. – P. 727–742.

14. Lifschits M. A., Linde W. *Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to brownian motion* // Mem. Amer. Math. Soc. – 2002. – V. 157(745).

15. Васильева А. А. *Estimates for the widths of weighted Sobolev classes* // Матем. сб. – 2010. – Т. 201. – № 7. – С. 15–52.

16. *Lomakina E. N., Stepanov V. D. On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten-von Neumann norms of the Hardy-type integral operators* // Function spaces and applications (1997, Delhi) – New Delhi: Narosa Publishing House, 2000. – P. 153–187.

17. Muckenhoupt B. *Weighted norm inequalities for classical operators* // Harmonic analysis in Euclidean spaces Part 1 (Proc. Sympos. Pure Math.). – RI: AMS, 1978. – P. 69–83.

18. Sawyer E. *Weighted inequalities for two–dimensional Hardy operator* // Studia Math. – 1985. – V. 82. – N0 1. – P. 1–16.

19. Степанов В. Д., Ушакова Е. П. *Об аппроксимативных числах двумерного прямоугольного оператора Харди* // Мат. заметки. – 2024. – Т. 115. – № 3. – С.422–438.

20. Stepanov V. D., Ushakova E. P. *Weighted Hardy inequality with two-dimensional rectangular operator: the case $q < p$* // Math. Inequal. Appl. –2023. – V. 26. – No 1. – P. 267–288.

21. Stepanov V. D., Ushakova E. P. *Compactness of the two-dimensional rectangular Hardy operator* // Math. Inequal. Appl. – 2022. – V. 25. – N0. 2. – P. 535–549.

22. Stepanov V. D., Ushakova E. P. *On weighted Hardy inequality with two-dimensional rectangular operator — extension of the E. Sawyer theorem* // Math. Inequal. Appl. – 2021. – V. 24. – No 3. – P. 617–634.

23. Persson L.-E., Ushakova E. P. *Some multi–dimensional Hardy type integral inequalities* // J. Math. Inequal. – 2007. – V. 1. – No 3. – P. 301–319.

RECTANGULAR HARDY OPERATOR IN WEIGHTED LEBESGUE SPACES

V.D. Stepanov, E.P. Ushakova

The paper describes boundedness, compactness and approximation properties of the Hardy operator of rectangular integration in weighted Lebesgue spaces. A separate review of known results for the one–dimensional case is given. Particular attention is paid to the two–dimensional Hardy operator, for which the authors have recently obtained new criteria for satisfying the required properties.

Keywords: Hardy integral operator, weighted Lebesgue space, boundedness, compactness, behavior of approximation numbers.

УДК 517.518

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕЗИКОВИЧА

Ф.М. Талбакзода[1]

1 *talbakov_90@mail.ru*; ТГПУ им. С.Айни

В работе исследуются критерии абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодически в смысле Безиковича функций в случае, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности. В качестве структурной характеристики рассматриваемой функции используется модуль непрерывности.

Ключевые слова: почти-периодические функции Безиковича, двойные ряды Фурье, спектр функции, коэффициенты Фурье, модуль непрерывности.

Пусть $B_p(R^2)$ $(1 \le p \le \infty)$ — линейное пространство, состоящее из функций $f(x,y)$, для которых $|f(x,y)|^p$ $(1 \le p < \infty)$ интегрируема по Лебегу на R^2 с нормой

$$||f||_{B_p} = \{\overline{M}\{|f(x,y)|^p\}\}^{1/p} = \{\overline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}|f(x,y)|^p dxdy\}^{1/p} < \infty,$$

а при $p = \infty$

$$||f||_{B_\infty} = \operatorname{vrai}\sup_{x,y\in R}|f(x,y)| < \infty.$$

А. Безикович [1] при $1 \le p < \infty$ ввел следующее понятие B_p-почти-периодической функции.

Функция $f(x,y)$ называется почти-периодической в смысле Безиковича или B_p-почти-периодической, если существует последовательность конечных тригонометрических полиномов $P_{n,n}(x,y)$ вида

$$P_{n,n}(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{k,l}(f)e^{i(\lambda_k x+\mu_l y)}$$

для которых выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}|f(x,y) - P_{n,n}(x,y)|_{B_p} = 0.$$

В настоящей работе рассматриваются некоторые новые достаточные условия абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций из пространства B_2, когда спектры $\Lambda_1 = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\Lambda_2 = \{\mu_l\}_{l=1}^{\infty}$ имеет единственную предельную точку в бесконечности, т.е. (см., например, [2-4]).

$$\lambda_0 = 0, \lambda_{-k} = -\lambda_k, |\lambda_k| > |\lambda_{k-1}|, \lim_{k\to\infty}\lambda_k = \infty,$$
$$\mu_0 = 0, \mu_{-l} = -\mu_l, |\mu_l| > |\mu_{l-1}|, \lim_{l\to\infty}\mu_l = \infty. \qquad (1)$$

Хорошо известно, что для произвольной функции $f(x,y) \in B_2$, имеет место разложение в двойной ряд Фурье следующего вида:

$$f(x,y) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} E_{k,l}(a_{k,l}\cos\lambda_k x\cos\mu_l y + a_{k,l}\sin\lambda_k x\cos\mu_l y +$$

$$+a_{k,l}\cos\lambda_k x\sin\mu_l y + a_{k,l}\sin\lambda_k x\sin\mu_l y),$$

где $E_{k,l}=1,\ E_{k,0}=E_{0,l}=\frac{1}{2},\ k,l\geq 1,\ E_{0,0}=\frac{1}{4}$.

Теорема. *Пусть спектры* $\Lambda_1=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\Lambda_2=\{\mu_l\}_{l=1}^{\infty}$ *функции* $f(x,y)\in B_2$ *удовлетворяют условиям (1),* $\Phi(u)>0$*,* $u>0$*. Пусть для некоторого* $\beta\in(0,2)$ *выполняется условие*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\theta=1}^{\infty}[m(2^{\nu}\pi)-m(2^{\nu-1}\pi)+1]^{1-\beta/2}[m(2^{\theta}\pi)-$$

$$-m(2^{\theta-1}\pi)+1]^{1-\beta/2}\omega^{\beta}(f;2^{-\nu},2^{-\theta})\omega_{\Phi}^{\beta/2}(f;2^{-\nu},2^{-\theta})\Phi^{-\frac{\beta}{2}}[\omega(f;2^{-\nu},2^{-\theta})]<\infty,$$

где

$$\omega(f;h,\eta)=vrai\sup_{x,y\in R}\sup_{x,y\in R}\sup_{|\delta|\leq h}\sup_{|r|\leq\eta}|\Delta_{\delta}^{(1)}\Delta_{r}^{(2)}f(x,y)|,$$

$$\omega_{\Phi}(f;h,\eta)=\sup_{|\delta|\leq h}\sup_{|r|\leq\eta}\overline{M}\{\Phi[|\Delta_{\delta}^{(1)}\Delta_{r}^{(2)}f(x,y)|]\},$$

$$\Delta_{\delta}^{(1)}f(x,y)=f(x+\delta,y)-f(x,y),\quad \Delta_{r}^{(2)}f(x,y)=f(x,y+\eta)-f(x,y),$$

тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(|a_{k,l}(f)|^{\beta}+b_{k,l}(f)|^{\beta}+c_{k,l}(f)|^{\beta}+d_{k,l}(f)|^{\beta}$$

сходится.

Литература

1. Besicovitch A.S. *Almost periodic functions.* – Cambridge, 1932. – 180 с.

2. Хасанов Ю.Х., Талбаков Ф. М. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций* // Изв. вузов. Матем. – 2024. – No. 4. – С. 67–79.

3. Khasanov Yu.Kh., Talbakov F.M. *On Sufficient Condition for Absolute Convergence Fourier Series of Bezikovichs Almost-Periodic Functions* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45. – No. 6. –P. 2743–2752.

4. Талбаков Ф.М. *Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике* // Изв. вузов. Матем. – 2023. – No. 4. – С. 65–75.

ON THE ABSOLUTE CONVERGENCE OF DOUBLE FOURIER SERIES OF ALMOST PERIODIC BESICOVITCH FUNCTIONS

F.M. Talbakzoda

The paper studies criteria for absolute convergence of double Fourier series of almost-periodic functions in the Besicovitch sense, in the case when the Fourier exponents have a single limit point at infinity. The modulus of continuity is used as a structural characteristic of the function under consideration.

Keywords: Besicovitch almost-periodic functions, double Fourier series, spectrum of a function, Fourier coefficients, modulus of continuity.

УДК 517.518

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ С МАЛЫМИ ПРОПУСКАМИ

Ф.М. Талбакзода[1]

1 *talbakov_90@mail.ru*; ТГПУ им. С.Айни

В настоящей работе исследуются достаточные условия абсолютной сходимости двойных рядов Фурье с пропусками вида $(m_{k+1}-m_k)(n_{l+1}-n_l) \geq \frac{16}{\eta\theta}$, *если этот ряд Фурье имеет заданный модуль непрерывности на отрезках* $[-\eta,\eta] \subset [-\pi,\pi], [-\theta,\theta] \subset [-\pi,\pi]$.

Ключевые слова: ряд Фурье, периодические функции, малые пропуски, коэффициенты Фурье, модуль непрерывности.

Будем говорить, что ряд Фурье $S[f]$ функции $f(x,y)$ имеет пропуски, если для коэффициентов этого ряда выполняются следующие условия $a^2_{m,n}+b^2_{m,n}+c^2_{m,n}+d^2_{m,n}>0$ только для $m=m_k$ и $n=n_l$ $(k,l=1,2\ldots)$, где $m_1,m_2,\ldots,$ $n_1,n_2,\ldots$ — натуральные числа, причём $1<m_1<m_2<\ldots,\quad 1<n_1<n_2<\ldots$.

Нобль [2] доказал, что если $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Бернштейна и Зигмунда [1] и, кроме того $\frac{n_{k+1}-n_k}{\log n_k}\to\infty,\quad k\to\infty$, то ряд

$$S[f](x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

абсолютно сходится. Боянич и Томин [3] обобщили результат Нобля для рядов Фурье с малыми пропусками вида $n_{k+1}-n_k\geq 4\pi/\delta$ $(0<\delta<\pi,\ k=0,1,2,\ldots)$.

В настоящей работе исследуются достаточные условия абсолютной сходимости двойных рядов Фурье с малыми пропусками вида (см., например, [3-5])

$$(m_{k+1}-m_k)(n_{l+1}-n_l)\geq\frac{16\pi^2}{\eta\theta}\quad(k=0,1,2,\ldots,\quad m_0=1,n_0=1). \tag{1}$$

Пусть $f\in L_p$, и ряд Фурье этой функции имеет вид

$$S[f](x,y)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_{m_\mu,n_\nu}\cos m_\mu x\cos n_\nu y+b_{m_\mu,n_\nu}\sin m_\mu x\cos n_\nu y+$$

$$+c_{m_\mu,n_\nu}\cos m_\mu x\sin n_\nu y+d_{m_\mu,n_\nu}\sin m_\mu x\sin n_\nu y).$$

Рассмотрим величины

$$\Delta^1_h f(x,y)=f(x+h,y)-f(x,y),\Delta^2_r f(x,y)=f(x,y+r)-f(x,y);$$

$$\omega_1(f;\varepsilon)=\sup_{x,y}\sup_{|h|\leq\varepsilon}|\Delta^1_h f(x,y)|, \tag{2}$$

$$\omega_2(f;\delta)=\sup_{x,y}\sup_{|r|\leq\delta}|\Delta^2_r f(x,y)|, \tag{3}$$

$$\omega_{11}(f;\varepsilon,\delta)=\sup_{x,y}\sup_{|h|\leq\varepsilon}\sup_{|r|\leq\delta}|\Delta^1_h\Delta^2_r f(x,y)|. \tag{4}$$

Величины (2) и (3) называются частными модулями непрерывности, а (4) – модулем непрерывности функции $f(x,y)$. Если $\Omega(x,y)=\sum_{m_k\le x}\sum_{n_l\le y}1$, то имеет место следующая теорема для двойных рядов Фурье с малыми пропусками вида (1).

Теорема. *Пусть* $(m_{k+1}-m_k)(n_{l+1}-n_l)\ge\frac{16\pi^2}{\eta\theta}$ $(k,l=0,1,2\ldots,\quad m_0=n_0=1)$ *и*

$$\int_1^\infty\int_1^\infty\omega_{11}(f;\frac{1}{s},\frac{1}{t})\frac{\sqrt{\Omega(s,t)}}{st}dsdt<\infty, \tag{5}$$

тогда

$$\sum_{\mu=1}^\infty\sum_{\nu=1}^\infty|a_{m_\mu,n_\nu}|+|b_{m_\mu,n_\nu}|+|c_{m_\mu,n_\nu}|+|d_{m_\mu,n_\nu}|<\infty.$$

Поскольку из неравенства $L=\{\min_{k\ge0}\min_{l\ge0}(m_{k+1}-m_k)(n_{l+1}-n_l)\}^{\frac12}\ge 4\pi\eta^{-\frac12}\theta^{-\frac12}$ следует $m_k=L(k+1)$, $k=0,1,2,...$, $n_l=L(l+1)$, $l=0,1,2,...$, то есть $m_k\ge Lk$ $(k=1,2,\ldots)$, $n_l\ge Ll$ $(l=1,2,\ldots)$, то выполняются следующие соотношения

$$\Omega(x,y)=\sum_{m_k\le x}\sum_{n_l\le y}1\le\sum_{Lk\le x}\sum_{Ll\le y}1\le\frac{xy}{L^2}.$$

С другой стороны, если считать, что пропуски малы (1) и $m_k\ge Ak^p,\quad n_l\ge Bl^q\quad(p,q\ge1;k,l=1,2,\ldots)$, то $\Omega(x,y)=\sum_{m_k\le x}\sum_{n_l\le y}1\le\sum_{Ak^p\le x}\sum_{Bl^q\le y}1\le(\frac{x}{A})^{1/p}(\frac{y}{B})^{1/q}$.

В этом случае условие (5) примет вид $\int_1^\infty\int_1^\infty\omega_{11}(f;\frac1s\frac1t)\frac{\sqrt{s^{\frac1p}t^{\frac1q}}}{st}dsdt<\infty$.

Литература

1. Бари Н. К. *Тригонометрические ряды*. – М.: Наука, 1961. – 936 с.

2. Nobel M. E. *Coefficient properties of Fourier series with a gap condition* // Math. Ann. – 1954. – Vol. 128. – P. 55–62.

3. Боянич Р., Томич М. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье с малыми пропусками* // Матем. сб. – 1966. – Т. 70(112). – С. 297–309.

4. Хасанов Ю.Х., Талбаков Ф.М. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций* // Изв. вузов. Матем. – 2024. – No. 4. – С. 67–69.

5. Талбаков Ф.М. *Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике* // Изв. вузов. Матем. – 2023. – No. 4. – С. 65–75.

ON THE ABSOLUTE CONVERGENCE OF DOUBLE FOURIER SERIES WITH SMALL GAPS

F.M. Talbakzoda

In this paper, we study the theorem on the absolute convergence of double Fourier series with gaps of the form $(m_{k+1}-m_k)(n_{l+1}-n_l)\ge\frac{16}{\eta\theta}$*, if this Fourier series has a given modulus of continuity on the intervals* $[-\eta,\eta]\subset[-\pi,\pi],[-\theta,\theta]\subset[-\pi,\pi]$.

Keywords: Fourier series, periodic functions, small gaps, Fourier coefficients, modulus of continuity.

УДК 517.984

О СПЕКТРЕ ТРЕХМАГНОННЫХ СИСТЕМ В D-МЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

С.М. Ташпулатов[1]

1 *sadullatashpulatov@yandex.com*; Институт ядерной физики академии наук республики Узбекистан

Рассматривается оператор энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга и исследуется структура существенного спектра и дискретный спектр системы в $d-$мерной целочисленной решетке Z^d. Получены нижняя и верхняя оценка для числа трехмагнонных связанных состояний системы N.

Ключевые слова: трехмагнонная система, существенный спектр, дискретный спектр.

В работе автора [1] трехмагнонная система была рассмотрена в изотропной негейзенберговской ферромагнитной модели со значениями спина единицы с взаимодействием ближайших соседей. Была изучена структура существенного спектра системы и были получены верхняя и нижняя оценки для количество трехмагнонных связанных состояний системы. Гамильтониан рассматриваемых систем имеет вид:

$$H = J\sum_{m,\tau}(\overrightarrow{S}_m \overrightarrow{S}_{m+\tau}), \tag{1}$$

где $J<0$ — параметр билинейного обменного взаимодействие между атомами ближайших соседей в решетке, $\overrightarrow{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$– оператор атомного спина величины $s=\frac{1}{2}$ узла m d-мерной решетки Z^d, а $\tau = \pm e_j$, $j=1,2,...,d$, где e_j– единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям. Положим $S_m^{\pm} = S_m^x \pm iS_m^y$. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями: $S_m^+\varphi_0 = 0$, $S_m^z\varphi_0 = \frac{1}{2}\varphi_0$, $||\varphi_0|| = 1$. Векторы $S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ описывают состояние системы трех магнонов, находящихся в узлах p, q и r. Замыкание пространства, образованного всевозможными линейными комбинациями этих векторов, обозначим через $\mathscr{H}_3$. Обозначим через H_3 сужение оператора H на подпространстве $\mathscr{H}_3$. Спектральные свойства оператора энергии трехмагнонных систем тесно связаны со спектральными свойствами его двухмагнонных подсистем. Поэтому, сначала исследуем спектр и связанные состояния (СС) двухмагнонных систем.

Теорема 1. *a) Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = \pi$, тогда существенный спектр $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из трех точек $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = \{-12J, -8J, -10J\}$, и для число трехмагнонных СС N имеет место соотношение $1 \le N \le 10$.*

b) Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = 0$, тогда существенный спектр оператора $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из единственного отрезка: $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -24J]$, и для число трехмагнонных СС N имеет место соотношение $0 \le N \le 9$.

c) Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda \ne \pi$, и $\Lambda \ne 0$, тогда существенный спектр оператора $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из объединения трех отрезков: $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [-4J\sum_{i=1}^3(1-\cos\frac{\Lambda_i}{2}), -4J\sum_{i=1}^3(1+\cos\frac{\Lambda_i}{2})] \cup [-8J + 2J(2\cos\frac{\Lambda_1}{2} + \sum_{i=2}^3(\cos^2\frac{\Lambda_i}{2}), -8J - 4J\cos\frac{\Lambda_1}{2} + 2J\sum_{i=2}^3(\cos^2\frac{\Lambda_i}{2})] \cup [-10J + 4J\sum_{i=2}^3(\cos\frac{\Lambda_i}{2}) + 2J\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}, -10J - 4J\sum_{i=2}^3(\cos\frac{\Lambda_i}{2}) + 2J\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}]$ и для число трехмагнонных СС N имеет место соотношение $1 \le N \le 10$.

Теорема 2. *Если* $\nu = 2$ *и полный квазиимпульс системы* $\Lambda = (\pi,\pi)$, *тогда существенный спектр* $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ *состоит из трех точек* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = \{-24J, -20J, -22J\}$, *и для число трехмагнонных СС* N *имеет место соотношение* $1 \le N \le 19$.

Теорема 3. *Если* $\nu = 2$ *и* $\Lambda = (0,0)$, *тогда существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ *состоит из объединения трех отрезков:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -48J] \cup [2z_1, -16J + 2z_1] \cup [z_1, -32J + z_1]$, *и для числа трехмагнонных СС* N *имеет место соотношение* $1 \le N \le 19$.

Теорема 4. *Если* $\nu = 2$ *и полный квазиимпульс системы* $\Lambda = (\pi, 0)$, *или* $\Lambda = (0,\pi)$, *тогда существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ *состоит из объединения трех отрезков:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [-12J, -36J] \cup [4(-5+\sqrt{5})J, 4(-7+\sqrt{5})J] \cup [2(-8+\sqrt{5})J, 2(-16+\sqrt{5})J]$, *и для числа трехмагнонных СС* N *имеет место соотношение* $1 \le N \le 19$.

Теорема 5. *Если* $\nu = 2$ *и* $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_0)$, *тогда существенный спектр* $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ *состоит из объединения пяти отрезков:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [-24J(1-\cos\frac{\Lambda_o}{2}), -24J(1+\cos\frac{\Lambda_o}{2})] \cup [-8J(1-\cos\frac{\Lambda_o}{2}) + 2z_1, -8J(1+\cos\frac{\Lambda_o}{2}) + 2z_1] \cup [-8J(1-\cos\frac{\Lambda_o}{2}) + 2z_2, -8J(1+\cos\frac{\Lambda_o}{2}) + 2z_2] \cup [-16J(1-\cos\frac{\Lambda_o}{2}) + z_1, -16J(1+\cos\frac{\Lambda_o}{2}) + z_1] \cup [-16J(1-\cos\frac{\Lambda_o}{2}) + z_2, -16J(1+\cos\frac{\Lambda_o}{2}) + z_2]$, *и для число трехмагнонных СС* N *имеет место соотношение* $4 \le N \le 22$.

Теорема 6. *Если* $\nu = 3$ *и* $\Lambda = (\pi,\pi,\pi)$, *тогда существенный спектр* $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ *состоит из четырех точек:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = \{-36J, -32J, -24J, -34J\}$ *и для числа трехмагнонных СС* N *имеет место соотношение* $4 \le N \le 30$.

Теорема 7. *Если* $\nu = 3$ *и* $\Lambda = (0,0,0)$, *тогда* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -72J] \cup [2z_1, -24J + 2z_1] \cup [z_1, -48J + z_1]$, *и для числа трехмагнонных СС* N *имеет место соотношение* $1 \le N \le 27$.

Теорема 8. *Если* $\nu = 3$ *и* $\Lambda = (\pi, 0, 0)$, *тогда существенный спектр* $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ *состоит из объединения шести отрезков:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [-12J, -60J] \cup [-4J + 2z^\star, -20J + 2z^\star] \cup [-4J + 2\widetilde{z}, -20J + 2\widetilde{z}] \cup [-4J + z^\star + \widetilde{z}, -20J + z^\star + \widetilde{z}] \cup [-8J + z^\star, -40J + z^\star] \cup [-8J + \widetilde{z}, -40J + \widetilde{z}]$, *и для числа трехмагнонных СС* N *имеет место соотношение* $4 \le N \le 30$.

Теорема 9. *Если* $\nu = 3$ *и* $\Lambda = (\pi,\pi,0)$, *тогда существенный спектр* $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ *состоит из объединения пяти отрезков:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [-24J, -48J] \cup [-8J, -16J] \cup [-4(5+\sqrt{5})J, -4(10+\sqrt{5})J] \cup [-16J, -32J] \cup [-2(14+\sqrt{5})J, -2(24+\sqrt{5})J]$, *и для числа трехмагнонных СС* N *имеет место соотношение* $3 \le N \le 29$.

Теорема 10. *Если* $\nu = 3$ *и* $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_0, \Lambda_0)$, *тогда существенный спектр* $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ *состоит из объединения пяти отрезков:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [-36J(1-\cos\frac{\Lambda_0}{2}), -36J(1+\cos\frac{\Lambda_0}{2})] \cup [-12J(1-\cos\frac{\Lambda_0}{2}) + 2z_1, -12J(1+\cos\frac{\Lambda_0}{2}) + 2z_1] \cup [-12J(1-\cos\frac{\Lambda_0}{2}) + 2z_2, -12J(1+\cos\frac{\Lambda_0}{2}) + 2z_2] \cup [-12J(1-\cos\frac{\Lambda_0}{2}) + 2z_1, -12J(1+\cos\frac{\Lambda_0}{2}) + 2z_1] \cup [-24J(1-\cos\frac{\Lambda_0}{2}) + z_1, -24J(1+\cos\frac{\Lambda_0}{2}) + z_1] \cup [-24J(1-\cos\frac{\Lambda_0}{2}) + z_2, -24J(1+\cos\frac{\Lambda_0}{2}) + z_2]$ *и для числа трехмагнонных СС* N *имеет место соотношение* $4 \le N \le 30$.

Работа финансируется за счет средств гос. бюджета Республики Узбекистан.

Литература

1. Tashpulatov С.М. *Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Three-Magnon Systems in the Isotropic Ferromagnetic Non-Heisenberg Model with Spin One and Nearest-Neighbor Interactions* // Journal of Applied Mathematics and Physics. – 2019. – Vol. 7. – No. 4. – P. 874–899. https://doi.org/10.1007/978-3-030-49763-7.

SPECTRA OF THE THREE-MAGNON SYSTEMS IN THE d–DIMENSIONAL LATTICE

S.M. Tashpulatov

We consider the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model and investigated the structure of essential spectrum and discrete spectra of the system in the d-dimensional integer lattice Z^d. A lower and upper estimates are obtained for the number of three-magnon bound states N of the system.
Keywords: three-magnon systems, essential spectrum, discrete spectra.

УДК 517.983.54

СПЕКТРАЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЯДРА В ЗАДАЧЕ МУЛЬТИСКВАЖИННОЙ ДЕКОНВОЛЮЦИИ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

М.Р. Тимербаев[1]

1 *marat.timerbaev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье рассматривается система интегральных уравнений типа свертки, возникающая при описании связи перепада давлений в интерферирующих скважинах с дебитами на них. Доказывается, что матричное ядро этой системы может быть представлено в виде факторизации специального вида, основанной на спектральном разложении неограниченного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Как следствия этой факторизации устанавливаются такие важные свойства этого ядра, как симметричность, положительная определенность в каждый момент времени, и некоторые другие свойства, обобщающие известные свойства ядра в односкважинном случае.

Ключевые слова: мультискважинная деконволюция, интегральное уравнение типа свертки 1-го рода, обратная задача, начально-краевая задача, задача Коши в гильбертовом пространстве с неограниченным оператором.

Задача мультискважинной деконволюции (см. напр. [1, 2, 3]) заключается в определении матричного ядра интегрального оператора типа свертки по отклику перепада давления в интерферирующих скважинах на дебиты этих скважин. Связь (в линейной модели) между давлениями и дебитами может быть записана в виде системы интегральных уравнений 1-го рода:

$$p^0 - p_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t g_{ij}(t-s) q_j(s)\, ds,$$

где p^0 — начальное пластовое давление, $p_i(t)$ — давление на скважине i в момент времени $t > 0$, $q_j(t)$ — функция дебита на скважине j, ядро интегрального оператора $g(t)$ — $n \times n$-матрица в каждый момент времени $t > 0$, n — число взаимовлияющих друг на друга скважин. Эта задача некорректная, численно неустойчивая, поэтому для ее численного решения используются различные методы регуляризации. Важным элементом построения разного рода регуляризаций, а также валидации построенных решений, являются априорные свойства решения. Одно из таких свойств устанавливается в теореме ниже.

Теорема. *Матричное ядро задачи $g(t)$ может быть факторизовано следующим образом:*

$$g(t) = v^T e^{\lambda t} v,$$

где $e^{\lambda t} = \mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots\}$ *— бесконечная диагональная матрица с числами* $0 \geq \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots$, $\lambda_k \to -\infty$, v *— постояннная (не зависящая от* t*) полубесконечная* n*-столбцовая матрица,* v^T *— транспонированая к ней полубесконечная* n*-строковая матрица.*

Устанавливается корректность этого представления в смысле сходимости бесконечных сумм в этом представлении, а также корректность последующего дифференцирования по t этой факторизации.

Из полученной декомпозиции непосредственно вытекает свойство симметрии и положительной определенности: $g(t) = g(t)^T > 0$. Дифференцируя это представление по t и учитывая отрицательность λ_k, получим $g'(t) = g'(t)^T = v^T(\lambda e^{\lambda t})v < 0$. Дальнейшее дифференцирование будет чередовать знаки определенности получающихся производных матриц. Этот факт обобщает на многоскважинный случай хорошо известное свойство скалярного ядра в односкважинной деконволюции.

Литература

1. Levitan M. *Deconvolution of Multiwell Test Data //* SPE J. – 2007. – 12 (4). P. 420-428.

2. von Schroeter T., Gringarten A. *Superposition Principle and Reciprocity for Pressure Transient Analysis of Data from Interfering Wells //* Presented at the 2007 SPE Annual Tecnical Conference and Exibition, Anaheim, California, 11-14 November, SPE 110465-MS.

3. Cumming J.A., Woof D.A., Wittle T, Gringarten A.C. *Multiwell Deconvolution //* SPE J. – 2013. – 12(4). P. 457-465.

SPECTRAL KERNEL DECOMPOSITION IN MULTI-WELL DECONVOLUTION AND ITS COROLLARIES

M.R. Timerbaev

This paper studies a system of convolution-type integral equations describing the relationship between pressure drawdowns in interfering wells and their flow rates. We prove that the matrix kernel of this system admits a special factorization based on the spectral decomposition of an unbounded self-adjoint operator in a Hilbert space. As corollaries of this factorization, we establish key properties of the kernel, including its symmetry, time-dependent positive definiteness, and other generalizations of known properties from the single-well case.

Keywords: multi-well deconvolution, first-kind convolution integral equations, inverse problems, initial-boundary value problem, Cauchy problem in Hilbert space with unbounded operator.

УДК 517.984

ОПИСАНИЕ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Н.А. Тошева[1]

1 *n.a.tosheva@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет

В данной работе рассматривается семейства операторов $H(K)$, представленных в виде блочных операторных матриц третьего порядка. Выделен канальный оператор и описан его спектр. Установлено, что существенный спектр операторной матрицы $H(K)$ совпадает со спектром канального оператора и состоит из объединения трех отрезков.

Ключевые слова: бозонное пространство Фока, операторная матрица, существенный спектр, операторы уничтожения и рождения.

Через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ обозначим d-мерный тор, в котором противоположные грани отождествляются. Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ — одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $\mathcal{H}_2 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ — гильбертово пространство симметричных (по комплексным переменным) функций, квадратично интегрируемых на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Пространство $\mathcal{H}$ называется обрезанным трехчастичным подпространством бозонного пространства Фока.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим семейства операторных матриц вида

$$H(K) := \begin{pmatrix} H_{00}(K) & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11}(K) & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где матричные элементы определяются по формулам

$$H_{00}(K)f_0 = w_0(K)f_0, \quad H_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_0(t)f_1(t)dt;$$

$$(H_{11}(K)f_1)(p) = w_1(K;p)f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_1(t)f_2(p,t)dt;$$

$$(H_{22}(K)f_2)(p,q) = w_2(K;p,q)f_2(p,q), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0,1,2.$$

Здесь H_{ij}^* $(i<j)$ — сопряжённый оператор к оператору H_{ij}, а функции $w_0(\cdot)$ и $v_i(\cdot)$, $i = 0,1$ — вещественнозначные ограниченные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$,

$$w_1(K;p) := l_1\varepsilon(\frac{K}{2}-p)+l_2\varepsilon(\frac{K}{2}+p)+\lambda, \quad w_2(K;p,q) := l_1\varepsilon(\frac{K}{3}+p)+l_1\varepsilon(\frac{K}{3}+q)+l_2\varepsilon(\frac{K}{3}-p-q),$$

$\lambda, l_1, l_2 > 0$ и

$$\varepsilon(q) := \sum_{i=1}^{d}(1-\cos(nq^{(i)})), \quad q = (q^{(1)}, q^{(2)}, ..., q^{(d)}) \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При изучении спектральных свойств семейства операторных матриц $H(K)$ рассмотрим еще обобщенную модель Фридрихса $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, действующую в $\mathcal{H}_0 \oplus$

$\mathscr{H}_1$ по правилу

$$h(k) := \begin{pmatrix} h_{00}(k) & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11}(k) \end{pmatrix},$$

где

$$h_{00}(k)f_0 = (l_2\varepsilon(k)+1)f_0, \quad h_{01}f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_1(t)f_1(t)dt,$$

$$(h_{11}(k)f_1)(q) = E_k(q)f_1(q), \quad E_k(p) := l_1\varepsilon(\frac{K}{2}-p) + l_2\varepsilon(\frac{K}{2}+p).$$

Из теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при конечномерных возмущениях вытекает, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(h(k)) = [E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$, где числа $E_{\min}(k)$ и $E_{\max}(k)$ определяются следующим образом:

$$E_{\min}(k) := \min_{q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} E_k(q) \quad \text{и} \quad E_{\max}(k) := \max_{q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} E_k(p).$$

Рассмотрим так называемый канальный оператор, соответствующий операторной матрице $H(K)$ и действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ как

$$H_{\mathrm{ch}}(K) := \begin{pmatrix} H_{11}(K) & \frac{1}{\sqrt{2}}H_{12} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}.$$

Введём следующие обозначения:

$$m_K := \min_{p,q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(K;p,q), \quad M_K := \max_{p,q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(K;p,q), \quad \sigma_K := \bigcup_{p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{\sigma_{\mathrm{disc}}(h(K-p)) + l_1\varepsilon(p)\}.$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Канальный оператор $H_{\mathrm{ch}}(K)$ имеет чисто существенный спектр и имеет место равенство $\sigma(H_{\mathrm{ch}}(K)) := [m_K; M_K] \cup \sigma_K$.*

Теорема 2. *Существенный спектр операторной матрицы $H(K)$ совпадает со спектром канального оператора $H_{\mathrm{ch}}(K)$, т.е. имеет место равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K)) = H_{\mathrm{ess}}(K)$. Кроме того, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K))$ состоит из объединения не более чем трех отрезков.*

Литература

1. Muminov M. I. Rasulov T. H. *Infiniteness of the number of eigenvalues embedded in the essential spectrum of a* 2×2 *operator matrix* // Eurasian Math. J. – 2014. – Vol. 5. – No. 2. – P. 60–77

2. Расулов Т. Х. *О числе собственных значений одного матричного оператора* // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52. – № 2. – С. 400–415.

DESCRIPTION OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF A FAMILY OF THIRD-ORDER OPERATOR MATRICES

N.A. Tosheva

In this work, we consider a family of operators $H(K)$, represented as block operator matrices of order three. The channel operator is identified and its spectrum is described. It is established that the *spectrum of the operator matrix $H(K)$ coincides with the spectrum of the channel operator and consists of the union of three segments.*

Keywords: bosonic Fock space, operator matrix, essential spectrum, annihilation and creation operators.

УДК 517.518.8

О СИНК-ПРИБЛИЖЕНИИ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

А.Ю. Трынин[1]

1 *atrynin@gmail.com*; Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Предложен новый оператор, позволяющий аппроксимировать функции пространства $L[0,\pi]$ с помощью линейной комбинации синков.

Ключевые слова: синк-аппроксимации, интерполяция функций, пространство Лебега.

На пространстве $L[0,\pi]$ суммируемых функций f определим линейный оператор, концептуально близкий одному из операторов, предложенных в [1] для приближения непрерывных функций:

$$\widetilde{AT}_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n-2}\left\{\frac{n}{2\pi}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+2)\pi}{n}} f(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\frac{(n-1)\pi}{n}}^{\pi} f(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(t)\,dt\right)(2k+1)\right.$$
$$\left. - \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(t)\,dt\right\}\frac{\sin(nx-k\pi)}{nx-k\pi} + \frac{n}{\pi^2}\left(\int_{\frac{(n-1)\pi}{n}}^{\pi} f(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(t)\,dt\right)x + \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(t)\,dt.$$

Theorem 1. *Пусть функция $f \in L[0,\pi]$. Тогда справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f - \widetilde{AT}_n(f,\cdot)\right\|_{L[0,\pi]} = 0.$$

Литература

1. Трынин А.Ю. *Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке* // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 6. – С. 66–78.

ABOUT THE SINC APPROXIMATION OF SUMMABLE FUNCTIONS

A.Yu. Trynin

A new operator is proposed that makes it possible to approximate the functions of the space $L[0,\pi]$ using a linear combination of sinc functions.

Keywords: sinc approximation, interpolation functions, Lebesgue space.

УДК 514.822

ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ДИСПЕРСНЫХ СРЕД

Д.А. Тукмаков[1]

1 *tukmakovda@imm.knc.ru*; ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, лаборатория механики сплошных сред

В тезисах представлены математические модели динамики неоднородных сред, реализованные с помощью численных и аналитических методов решения дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрены вопросы динамики дисперсных частиц в газе и жидкости.

Ключевые слова: механика жидкости и газа, математическое моделирование, неоднородные среды.

Одним из приложений математики является разработка математических моделей механики жидкости и газа [1–12]. Частным случаем течений газа или жидкости являются течения неоднородных сред [1–8]. Исследование течений неоднородных сред связано с различными прикладными задачами [4–8]. При этом моделирование может осуществляться как на основе аналитических методов [9,10] так и на основе численного моделирования [11]. Для линейных математических моделей [12] более применимыми являются аналитические методы, например, метод Фурье, тогда как для нелинейных процессов необходимы конечно-разностные алгоритмы.

Рассмотрим численный алгоритм на примере скалярного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных от функции f, где $a(f)$, $b(f)$ $c(f)$ — нелинейные функции:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x} + \frac{\partial b(f)}{\partial y} = c(f). \tag{1}$$

Для нелинейного уравнения (1) численное решение явным конечно-разностным методом Мак-Кормака на n-ом временном слое записывается следующим образом [11]:

$$f^*_{jk} = f^{n-1}_{jk} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(a^{n-1}_{j+1k} - a^{n-1}_{jk}) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(b^{n-1}_{jk+1} - b^{n-1}_{jk}) + \Delta t c^{n-1}_{jk},$$

$$f^n_{jk} = 0.5(f^*_{jk} + f^n_{jk}) - 0.5\frac{\Delta t}{\Delta x}(a^*_{jk} - a^*_{j-1k}) - 0.5\frac{\Delta t}{\Delta y}(b^*_{jk} - b^*_{jk-1}) + 0.5\Delta t c^*_{jk}.$$

Здесь Δt, Δx, Δy — шаги по переменной времени и пространственным направлениям. С целью подавления численных осцилляций нами использовалась схема нелинейной коррекции сеточной функции [6].

Работа выполнена за счет гранта Академии наук Республики Татарстан, предоставленного молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан в рамках Государственной программы Республики Татарстан «Научно-технологическое развитие Республики Татарстан» (соглашение № 84/2024-ПД от 16 декабря 2024 г.).

Литература

1. Нигматулин Р. И. *Основы механики гетерогенных сред*. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

2. Кутушев А. Г. *Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах*. – Санкт-Петербург: Недра, 2003. – 284 с.

3. Федоров А. В., Фомин В. М., Хмель Т. А. *Волновые процессы в газовзвесях частиц металлов*. – Новосибирск: Параллель, 2015. – 301 с.

4. Сафин Д. А., Зарипов Ш. Х., Марданов Р. Ф., Костерина Е. А. *Моделирование инерционного осаждения взвешенных частиц в фильтре смешанного типа* // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2024. – Т. 166. – № 2. – С. 262–272.

5. Мухаметзанов И. Т., Гильфанов А. К., Зарипов Ш. Х. *Теоретическое исследование вдыхаемой фракции дисперсных воздушных загрязнений* // Ученые записки Казанского университета. Серия: Естественные науки. – 2013. – Т. 155. – № 1. – С. 50–60.

6. Тукмаков А. Л. *Модель движения и осаждения заряженной газовзвеси в электрическом поле* // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87. – № 1. – С. 35–44.

7. Хмелев В. Н., Шалунов А. В., Доровских Р. С., Нестеров В. А., Голых Р. Н. *Моделирование процесса мокрой очистки газов с наложением ультразвуковых полей* //Южно-Сибирский научный вестник. – 2017. – Т.20. – № 4. – С. 57–63.

8. Макаров В. Н., Угольников А. В., Макаров Н. В., Боярских Г. А. *Повышение эффективности пылеулавливания* // Горный журнал. – 2022. – № 8. – С. 62–70.

9. Полянин А. Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. Ф. *Теоретическая физика. Гидродинамика*. – М.: Наука, 1986. – 736 с.

11. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей*. Т. 2. – М.: Мир, 1991. – 551 с.

12. Тукмаков Д. А. *Программа для расчета процессов конвективной диффузии гравитационно осаждающейся многофракционной взвеси* Патент на программу ЭВМ № 2025613153. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 07 февраля 2025 г.

NUMERICAL AND ANALYTICAL IMPLEMENTATIONS OF MATHEMATICAL MODELS OF THE DYNAMICS OF DISPERSED MEDIA

D.A.Tukmakov

The theses present mathematical models of the dynamics of inhomogeneous media implemented using numerical and analytical methods for solving partial differential equations. The issues of the dynamics of dispersed particles in gas and liquid are considered.

Keywords: fluid and gas mechanics, mathematical modeling, applied mechanics.

УДК 517.984

РАСПОЛОЖЕНИЕ ВЕТВЕЙ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА МОДЕЛЬНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА СИСТЕМЫ ТРЕХ ЧАСТИЦ НА ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

Г.Х. Умиркулова[1]

1 *g.h.umirqulova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет

В данной работе модельный гамильтониан, соответствующий системе трёх частиц на одномерной решётке, изучен как линейный, ограниченный и самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве. Анализируется расположение ветвей существенного спектра изучаемого гамильтониана.

Ключевые слова: решетка, модельный гамильтониан, существенный спектр, двухчастичные и трехчастичные ветви, гильбертово пространство.

Через $\mathbb{T}^1 :\equiv (-\pi;\pi]^1$ обозначим одномерный тор. В гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2)$ симметрических функций, квадрат которых интегрируем (в общем случае, принимающих комплексные значения), определённых на $\mathbb{T}^2$, рассмотрим модельный гамильтониан, заданный равенством

$$H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)} := H_0^{(\gamma)} - \mu(V_1 + V_2) - \lambda V_3. \tag{1}$$

Здесь $H_0^{(\gamma)}$ — оператор умножения на функцию $E_\gamma(\cdot,\cdot)$, то есть невозмущенный оператор:

$$(H_0^{(\gamma)} f)(x,y) = E_\gamma(x,y) f(x,y), \quad E_\gamma(x,y) := \varepsilon(x) + \varepsilon(y) + \gamma\varepsilon(x+y),$$

$$\varepsilon(x) := 1 - \cos(mx), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Операторы V_α, $\alpha = 1,2,3$ являются операторами нелокального потенциала и представляют собой частично интегральные операторы вида:

$$(V_1 f)(x,y) = v(y)\int_{\mathbb{T}^1} v(t) f(x,t)\,dt, \quad (V_2 f)(x,y) = v(x)\int_{\mathbb{T}^1} v(t) f(t,y)\,dt,$$

$$(V_3 f)(x,y) = \int_{\mathbb{T}^1} f(t, x+y-t)\,dt.$$

Здесь $\mu, \lambda > 0$ — параметры взаимодействия и $\gamma > 0$, а функция $v(\cdot)$, входящая в ядро операторов V_α, $\alpha = 1,2$, является действительнозначной непрерывной функцией, определённой на торе $\mathbb{T}^1$.

Модельный гамильтониан $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$, заданный равенством (1), является линейным, ограниченным и самосопряжённым оператором, определённым в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2)$.

Для иллюстрации основного результата работы рассмотрим два (ограниченных и самосопряженных) семейства моделей Фридриха в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^1)$:

$$(h_\mu^{(\gamma,1)}(k) g)(x) = (\varepsilon(x) + \gamma\varepsilon(k+x)) g(x) - \mu v(x)\int_{\mathbb{T}^1} v(t) g(t)\,dt;$$

$$(h_\lambda^{(2)}(k)g)(x) = (\varepsilon(x)+\varepsilon(k-x))g(x) - \lambda \int_{\mathbb{T}^1} g(t)dt.$$

Можно, показать, что для существенного спектра гамильтониана имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}) = \sigma_{\text{three}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}) \cup \sigma_{\text{two}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)})$, где

$$\sigma_{\text{three}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}) = [0, 3+3\gamma/2];$$

$$\sigma_{\text{two}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}) := \bigcup_{k\in\mathbb{T}^1} \Big(\sigma_{\text{disc}}(h_\mu^{(\gamma,1)}(k)) + \varepsilon(k)\Big) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{T}^1} \Big(\sigma_{\text{disc}}(h_\lambda^{(2)}(k)) + \gamma\varepsilon(k)\Big).$$

Эти множества называются, соответственно, трёхчастичной и двухчастичной ветвями существенного спектра модельного оператора $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$.

Представляем основной результат работы.

Теорема 1. *При всех значениях параметров $\mu, \lambda, \gamma > 0$ двухчастичная ветвь существенного спектра гамильтониана $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$ расположена левее его трёхчастичной ветви, т.е. следующие оценки справедливы для нижних границ двухчастичной и трехчастичной ветвей существенного спектра:*

$$\min \sigma_{\text{two}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}) < \min \sigma_{\text{three}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}).$$

Более, того для верхней границы существенного спектра оператора $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$ имеет место равенство:

$$\max \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}) = 3+3\gamma/2.$$

Следует отметить, что исследуемый в работе гамильтониан $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$ соответствует оператору энергии системы трех частиц на одномерной решетке. Теорема 1 важна при анализе дискретного спектра оператора $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$, в частности, при определении числа собственных значений (его конечность или бесконечность), см. например [1, 2]. При доказательстве первой части теоремы 1 важную роль играет тот факт, что модель Фридрихса $h_\lambda^{(2)}(0)$ имеет отрицательное собственное значение при всех значениях параметра λ. А при доказательстве второй части используется тот факт, что семейство моделей Фридрихса $h_\mu^{(\gamma,1)}(k)$ и $h_\lambda^{(2)}(k)$ не имеет собственных значений, больших $3+3\gamma/2$.

Литература

1. Муминов М.Э., Алиев Н.М. *О спектре трехчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке* // ТМФ. – 2012. – Vol. 171. – No. 3. – P. 387–403.

2. Расулов Т.Х., Расулова З.Д. *Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами* // Сиб. электрон. матем. изв. – 2015. – Т. 12. – С. 168–184.

LOCATION OF BRANCHES OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF THE MODEL HAMILTONIAN OF A THREE-PARTICLE SYSTEM ON A ONE-DIMENSIONAL LATTICE

G.H. Umirkulova

In this work, the model Hamiltonian corresponding to a system of three particles on a one-dimensional *lattice is studied as a linear, bounded and self-adjoint operator in a Hilbert space. The location of the branches of the essential spectrum of the studied Hamiltonian is analyzed.*

Keywords: lattice, model Hamiltonian, essential spectrum, two-particle and three-particle branches, Hilbert space.

УДК 514.822

О ПОПЕРЕЧНИКАХ ПО КОЛМОГОРОВУ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю.А. Фарков[1]

1 *farkov-ya@ranepa.ru*; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Формулируются три нерешенные задачи о колмогоровских и линейных поперечниках классов аналитических функций. Отмечаются некоторые связанные с этими задачами недавние результаты.

Ключевые слова: поперечники, энтропия, емкость Грина, неравенства Бернштейна, классы Харди-Соболева.

Теория поперечников возникла под влиянием идей А.Н. Колмогорова и применяется для оценки оптимальности вычислительных алгоритмов и современных методов анализа данных. Напомним, что поперечник по Колмогорову множества A в нормированном пространстве X определяется по формуле

$$d_n(A,X) := \inf_{V_n}\sup_{x\in A}\inf_{y\in V_n}\|x-y\|,$$

где V_n – произвольное подпространство в X размерности n, а линейный поперечник определяется равенством

$$\lambda_n(A,X) := \inf_{\Lambda_n}\sup_{x\in A}\|x-\Lambda_n x\|,$$

где нижняя грань берется по всем линейным ограниченным операторам Λ_n ранга n, отображающих X в себя (см. [1]-[4]).

Пусть $BH^p(U_R)$ – единичный шар класса Харди $H^p(U_R)$, где $1\le p\le\infty$ и U_R – круг радиуса $R\ge 1$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Напомним, что нормализованные меры Лебега определяются равенствами $d\sigma(e^{i\theta}) = d\theta/2\pi$ и $d\nu(z) = dxdy/\pi$, где $z = x+iy$. Для $l\in\mathbb{N}$, $1\le p\le\infty$ класс Харди-Соболева $H_R(l,p)$ состоит из всех функций f, аналитических в U_R и таких, что $f^{(l)}\in BH^p(U_R)$ (для $l=0$ положим $H_R(0,p) := BH^p(U_R)$). Значения колмогоровских и линейных поперечников для класса $H_R(l,p)$ в пространствах $L^p(\sigma)$ и $L^p(\nu)$ хорошо известны; при этом в случае $p=\infty$ классы $L^p(\sigma)$ и $L^p(\nu)$ заменяются на $C(\overline{U})$, где $\overline{U}$ – замкнутый единичный круг. В дальнейшем через s_n обозначается любой из поперечников d_n и λ_n.

Задача 1. *Вычислить точные значения поперечников*

$$s_n(H_R(l,p);L^q(\sigma)) \quad \textit{и} \quad s_n(H_R(l,p);L^q(\nu))$$

для $1 \le q < p \le \infty$, $n > l$, $R \ge 1$.

Решение задачи 1 для $l = 0$ дано в [5]; см. также замечание в [6] и обзор [7]. Подобные задачи (и связанные с ними задачи восстановления) можно рассматривать для гельфандовских поперечников и для классов функций, аналитических в круговом кольце, в полосе и в некоторых других областях (см., например, [8]-[10]).

Пусть $BA^p(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций f таких, что $\int_U |f(Rz)|^p\, d\nu(z) \le 1$, где U – единичный круг. Класс $A_R(l,p)$ состоит из всех функций f, аналитических в U_R и таких, что $f^{(l)} \in BA^p(U_R)$. Напомним, что запись $x_n \asymp y_n$ означает, что существуют $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1 x_n \le y_n \le c_2 x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$; кроме того, $x_n \sim y_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n) = 1$.

Для любых $1 \le p,q \le \infty$, $R > 1$, $l \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения

$$s_n(H_R(l,p); L^q(\sigma)) \asymp n^{-l} R^{-n}, \tag{1}$$

$$s_n(H_R(l,p); L^q(\nu)) \asymp n^{-l-1/q} R^{-n}, \tag{2}$$

$$s_n(A_R(l,p); L^q(\sigma)) \asymp n^{-l+1/p} R^{-n}, \tag{3}$$

$$s_n(A_R(l,p); L^q(\nu)) \asymp n^{-l+1/p-1/q} R^{-n}. \tag{4}$$

Оценки сверху в этих соотношениях получаются тейлоровскими аппроксимациями, а оценки снизу следуют из теоремы Тихомирова о поперечниках шара и неравенств Бернштейна для алгебраических полиномов.

Для функций, голоморфных в шаре $B_R^d := \{z \in \mathbb{C}^d : |z| < R\}$, классы $H_R(l,p,d)$ и $A_R(l,p,d)$ определяются [11] с помощью радиальной производной аналогично классам $H_R(l,p)$ и $A_R(l,p)$ с заменой круга U_R на B_R^d. Решение следующей задачи исправит доказательство предложения 4.1 в [11] (сравните с полученными в [12] оценками для случая $2 \le p \le q \le \infty$).

Задача 2. *Доказать аналоги соотношений* (1)-(4) *для классов* $H_R(l,p,d)$ *и* $A_R(l,p,d)$.

Пусть все $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ занумерованы таким образом, что $k = k(j)$, $|k(j)| \le |k(j+1)|$ $(j = 0,1,2,\dots)$, где $|k| = k_1 + \dots + k_n$. Тогда для $\tilde{n} := |k(n)|$ имеем

$$\tilde{n} = m \quad \Longleftrightarrow \quad \binom{m+d-1}{d} \le n \le \binom{m+d}{d} - 1.$$

Согласно [6, 11] справедливо равенство

$$d_n(BH^\infty(B_R^d); C(\overline{B}^d)) = R^{-\tilde{n}}, \tag{5}$$

где $\overline{B}^d$ – замкнутый единичный шар в $\mathbb{C}^d$. Полученные в [11] обобщения равенства (5) на классы функций $H_R(l,p,d)$ и $A_R(l,p,d)$ в L^p-метриках даны в дополнение к рассмотренному в [2, глава 13] случаю $d = 1$, а соответствующая формула для ε-энтропии класса $H_R(l,p,d)$ установлена в [13] (сравните с [14]-[17]).

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}^d$ и пусть E – компактное множество в Ω. Класс $BH^\infty(\Omega)$ состоит из всех функций f, голоморфных в Ω и таких, что $|f(z)| \le 1$

для всех $z \in \Omega$. При некоторых условиях на E и Ω имеет место асимптотическая формула

$$\log d_n(BH^\infty(\Omega); C(E)) \sim -2\pi \left(\frac{d!}{C(E,\Omega)}\right)^{1/d} n^{1/d}, \tag{6}$$

где $C(E,\Omega)$ – емкость Грина E относительно Ω; см. [18] и цитированную в этой работе литературу. Для достаточно регулярных E и Ω в [11, раздел 5] предлагалось решить следующую задачу.

Задача 3. *Для* $1 \le q \le \infty$ *найти порядковые оценки поперечников* $d_n(BH^\infty(\Omega); L^q(E))$.

Эта задача в случае $d = 1$ решается с помощью рядов Фабера и их обобщений (см. [5, 7, 19, 20]).

Литература

1. Тихомиров В. М. *Теория приближений* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — Т.14. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. — М., 1987. — С. 103–260.

2. Pinkus A. *n-Widths in approximation theory.* — Berlin/New York: Springer-Verlag, 1985.— 291 p.

3. DeVore R.A., Lorentz G.G. *Constructive approximation.* — Berlin/New York: Springer-Verlag, 1993.— 452 p.

4. Малыхин Ю. В. *Оценки колмогоровских поперечников и связанных с ними величин.* // Дисс. … докт. физ.-мат. наук. – М.: МИАН СССР им. В. А. Стеклова, 2025. – 189 с.

5. Farkov Yu.A. *n-Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions* // J. Complexity, **12**:1 (1996), 58–79.

6. Фарков Ю.А. *Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из* $\mathbb{C}^n$ // УМН, **45**:5(275) (1990), 197—198.

7. Фарков Ю.А. *О наилучшем линейном приближении голоморфных функций* // Фундамент. и прикл. матем., **19**:5 (2014). — С. 185—212.

8. Osipenko K. Yu., Wilderotter K. *Optimal information for approximating periodic analytic functions* // Math. Comput., **66**:220 (1997), 1579–1592.

9. Овчинцев М.П. *Оптимальное восстановление функций класса E_p, $1 \le p \le \infty$, в многосвязных областях* // Сиб. матем. журн., **37**:2 (1996), 338—360.

10. Вакарчук С.Б. *Оценки значений n-поперечников классов аналитических функций в весовых пространствах* // Матем. заметки, **108**:6 (2020), 803–822.

11. Farkov Yu.A. *The N-widths of Hardy-Sobolev spaces of several complex variables* // J. Approx. Theory, **75**:2 (1993),183–197.

12. Ding H. *The N-widths of Hardy-Sobolev and Bergman-Sobolev spaces of complex variables*// Anal. Appl., Singap. **2**:4(275) (2004), 309–335.

13. Фарков Ю.А. *Об ε-энтропии классов голоморфных функций* // Матем. заметки, **68**:2 (2000). — С. 286–293.

14. Osipenko K. Yu. *On N-widths of holomorphic functions of several variables* // J. Approx. Theory, **75**:1 (1995), 135–155.

15. Ehler M., Filbir F. *Metric entropy, n-widths, and sampling of functions on manifolds* // J. Approx. Theory **225**, 41-57 (2018).

16. Aleans D.J.J., Tozoni S.A. *Estimates for n-widths of sets of smooth functions on complex spheres* // J. Complexity **64**, Article ID 101537, 30 p. (2021).

17. Aleans D.J.J., Tozoni S.A. *Estimates for entropy numbers of sets of smooth functions on complex spheres* // J. Approx. Theory **308**, Article ID 106151, 35 p. (2025).

18. Bandtlow O.F., Nivoche S. *New solution of a problem of Kolmogorov on width asymptotics in holomorphic function spaces* // J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **24**:7 (2022), 2493–2532.

19. Фарков Ю.А. *Базисные функции Фабера–Ерохина в окрестности нескольких континуумов* // Матем. заметки, **36**:6 (1984). — С. 883-–892.

20. Фарков Ю.А. *О наилучшей линейной аппроксимации функций, аналитических в окрестности компактного множества* // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В.А. Садовничего. Москва: МАКС Пресс, 2019. — С. 529–532.

ON KOLMOGOROV WIDTHS OF CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS

Yu. A. Farkov

Three open problems on Kolmogorov and linear widths of classes of analytic functions are formulated. Some recent results related to these problems are mentioned.

Keywords: widths, entropy, Green's capacity, Bernstein inequalities, Hardy-Sobolev classes.

УДК 517.574, 517.538

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ ГОЛОМОРФНЫХ НА ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ С СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ МАЖОРАНТОЙ

Б.Н. Хабибуллин[1]

1 *khabib-bulat@mail.ru*; Институт математики с вычислительным центром Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра РАН

Недавно в журнале «Математический сборник» опубликована статья автора «Распределение корней целых функций с субгармонической мажорантой». Ключевую роль в ней играют некоторые новые категории интегральных неравенств для субгармонических функций. Будут обсуждаться возможности адаптации результатов и методов указанной статьи к весовым классам голоморфных на единичном круге функций. В основе их как отмеченные интегральные неравенства для субгармонических функций, так и их дополнительные вариации.

Ключевые слова: голоморфная функция, распределение корней, субгармоническая функция, риссовское распределение масс, тригонометрически и степенно выпуклые функции.

Через $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ обозначаем множества соответственно натуральных, действительных и комплексных чисел со стандартными алгебраическими, геометрическими и топологическим трактовками, положительной полуосью $\mathbb{R}^+ := \bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| x \geqslant 0\bigr\}$, модулем $|\cdot|$, расширениями $\mathbb{N}_0 := \{0\}\bigcup\mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0\bigcup\{+\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+\bigcup\{+\infty\}$, единичным открытым кругом $\mathbb{D} := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| < 1\bigr\}$.

Функция положительная, если область её значений содержится в $\overline{\mathbb{R}}^+$.

Функция $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ на подмножестве $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ убывающая, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \leqslant x_2$ следует противоположное нестрогое неравенство $F(x_2) \geqslant F(x_1)$.

Как обычно, функция $F\colon I\to\mathbb{R}$ — *выпуклая* на промежутке $I\subseteq\mathbb{R}$, если для любых двух пар чисел $a,b\in I$ и $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ из неравенств $F(x)\leqslant c_1x+c_2$ при $x:=a$ и $x:=b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x\in[a,b]$.

Функция $F\colon I\to\mathbb{R}$ — *выпуклая относительно логарифма* ln*,* или, кратко, ln-*выпуклая,* на промежутке $I\subseteq\mathbb{R}^+$, если для любых двух пар $a,b\in I$ и $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ из неравенств $F(x)\leqslant c_1\ln x+c_2$ при $x:=a$ и $x:=b$ следует такое же неравенство при всех $x\in[a,b]$.

При $p\in\mathbb{R}^+$ функция $s\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ p*-тригонометрически выпуклая* на $\mathbb{R}$ [2], [3], если для любых двух пар чисел $a\leqslant b<a+\pi/p$ и $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ из неравенств $s(x)\leqslant c_1\cos px+c_2\sin px$ при $x:=a$ и $x:=b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x\in[a,b]$.

При $0<p\in\mathbb{R}^+$ функцию $F\colon I\to\mathbb{R}$ на промежутке $I\subseteq\mathbb{R}^+$ называем p*-степенно выпуклой на* I*,* если для любых двух пар чисел $a,b\in I$ и $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ из выполнения неравенств $F(x)\leqslant c_1x^p+c_2x^{-p}$ при $x:=a$ и $x:=b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x\in[a,b]$. По определению функцию F на промежутке $I\subseteq\mathbb{R}$ называем 0-*степенно выпуклой,* если и только если она ln-*выпукла* на этом промежутке.

Все указанные именные функции F и s — частные варианты обобщённых выпуклых функций, или субфункций, на интервалах в $\mathbb{R}$ [4], [5, гл. VIII, п. 84]. Они всегда непрерывны и обладают как левой, так и правой производной $F'_{\text{пр}}$ на промежутке определения.

Для радоновской меры $\varDelta$ на круге $\mathbb{D}$ и 2π-периодической на $\mathbb{R}$ положительной непрерывной функции s *считающей радиально-аргументной функцией для* $\varDelta$ *с весом* s называется функция $\varDelta^{\mathfrak{ra}(s)}$ на интервале $[0,1)\subset\mathbb{R}$, определяемая равенством [1, п. 1.2.4]

$$\varDelta^{\mathfrak{ra}(s)}(t)\underset{t\in[0,1)}{:=}\iint_{|z|\leqslant t}s(\arg z)\,\mathrm{d}\varDelta(z),\ \text{где}\quad s(\arg 0):=\|s\|_{\mathbb{R}}:=\sup_{\mathbb{R}}s. \tag{1}$$

В частности, при $s=1$ это считающая радиальная функция $\varDelta^{\mathfrak{r}}:=\varDelta^{\mathfrak{ra}(1)}$.

Субгармонической на области $D\subseteq\mathbb{C}$ функции $u\colon D\to\overline{\mathbb{R}}$ при $u\not\equiv-\infty$ сопоставляется *риссовское распределение масс*, определяемое как радоновская мера $\varDelta_u:=\frac{1}{2\pi}\triangle u$, где $\triangle$ — оператор Лапласа, действующий в смысле теории обобщённых функций на D.

Теорема 1 ([1, теорема 5.2]). *Пусть* $p\in\mathbb{R}^+$*, функция* $s\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ — 2π*-периодическая* p*-тригонометрически выпуклая, а для некоторого промежутка* $(r,R)\subset[0,1]$ *функция* $F\colon(r,R)\to\mathbb{R}^+$ — *убывающая и* p*-степенно выпуклая с* $F(R):=\lim\limits_{R>t\to R}F(t)\in\mathbb{R}^+$ *и*

$$F(r):=\lim_{r<t\to r}F(t)<+\infty,\quad F'_{\text{пр}}(r):=\lim_{r<t\to r}\frac{F(t)-F(r)}{t-r}>-\infty. \tag{2}$$

Если M *и* u — *субгармонические на* $\mathbb{D}$ *функции,* $u(z)\leqslant M(z)$ *при всех* $z\in\mathbb{D}$ *и* $u(0)\neq-\infty$*, то для* $Q_{p,F}(r):=p\bigl(F(r)-F(R)\bigr)-rF'_{\text{пр}}(r)\overset{(2)}{<}+\infty$ *выполнено неравенство*

$$\int_r^R\bigl(-F'_{\text{пр}}(t)\bigr)\Bigl(\varDelta_u^{\mathfrak{ra}(s)}(t)-\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(s)}(t)\Bigr)\,\mathrm{d}t\leqslant\|s\|_{\mathbb{R}}Q_{p,F}(r)\bigl(M^{\circ r}-u(0)\bigr). \tag{3}$$

Если функция F положительная убывающая p-степенно выпуклая на всём промежутке $(0,R)\subset[0,1)$, *то при условии конечности верхнего предела*

$$\lim\nolimits_0^p F := \limsup_{0<t\to 0} t^p F(t) \text{ при } p>0 \quad \text{или} \quad \lim\nolimits_0^0 F := \limsup_{0<t\to 0} \frac{F(t)}{\ln(1/t)} \text{ при } p=0, \tag{4}$$

неравенство (3) *выполняется при всех* $r\in(0,R)$ *с сомножителем*

$$\frac{\lim_0^p F}{r^p}\cdot\begin{cases}2p & \text{при } p>0,\\ 1 & \text{при } p=0\end{cases} \tag{5}$$

вместо $Q_{p,F}(r)$ *в правой части* (3).

Любую функцию $Z\colon \mathbb{D}\to\overline{\mathbb{N}}_0$ называем *распределением точек* на открытом единичном круге $\mathbb{D}$ [6, пп. 0.1.2–0.1.3], [1, п. 1.2.3] с *кратностями* $Z(z)\in\overline{\mathbb{N}}_0$ *точек* $z\in\mathbb{D}$ *в* Z. При *положительной* функции $s\geqslant 0$ *считающая радиально-аргументная функция для распределения точек* Z *с весом* s на $\mathbb{D}$ — это положительная возрастающая и непрерывная справа на интервале $[0,1)$ функция

$$Z^{\mathfrak{ra}(s)}(t) \underset{t\in[0,1)}{:=} \sum_{|z|\leqslant t} Z(z)s(\arg z)\in\overline{\mathbb{R}}^+. \tag{6}$$

В частности, при $s=1$ — это обычная *считающая радиальная функция*

$$Z^{\mathfrak{r}}\colon t\underset{t\geqslant 0}{\longmapsto} Z^{\mathfrak{ra}(1)}(t)=\sum_{|z|\leqslant t} Z(z),$$

В отличие от последней считающая радиально-аргументная функция (6) с непостоянным весом s по аргументам достаточно тонко учитывает распределение точек из Z не только по радиусу, но и по аргументам.

Если f — голоморфная на $\mathbb{D}$ функция, то распределение точек, равное в каждой точке $z\in\mathbb{D}$ кратности корня функции f в этой точке, называем *распределением корней* голоморфной функции f на $\mathbb{D}$ и обозначаем его как

$$\mathcal{Z}_f\colon z\underset{z\in D}{\longmapsto}\sup\Bigl\{p\in\overline{\mathbb{R}}\Bigm| \limsup_{z\neq w\to z}\frac{|f(w)|}{|w-z|^p}<+\infty\Bigr\}\in\overline{\mathbb{N}}_0.$$

Для субгармонической функции $u:=\ln|f|$ точная взаимосвязь между риссовским распределением масс $\varDelta_{\ln|f|}$ и распределением корней $\mathcal{Z}_f$ задаётся равенством [7, теорема 3.7.8]

$$\varDelta_{\ln|f|}(S)=\sum_{z\in S}\mathcal{Z}_f(z) \quad \text{для любого } S\subseteq\mathbb{D}.$$

Пусть $\mathcal{M}=M^{\mathsf{up}}-M_{\mathsf{low}}$ — разность субгармонических на $\mathbb{D}$ функций $M^{\mathsf{up}}\not\equiv-\infty$ и $M_{\mathsf{low}}\not\equiv-\infty$, значения которой определены почти всюду по лебеговской мере $\mathfrak{m}_2$ в $\mathbb{D}$. Тогда однозначно определено *риссовское распределение зарядов*

$$\varDelta_{\mathcal{M}}:=\varDelta_{M^{\mathsf{up}}}-\varDelta_{M_{\mathsf{low}}}$$

с соответствующей радиально-считающей функцией

$$\varDelta_{\mathcal{M}}^{\mathfrak{ra}(s)}\overset{(1)}{:=}\varDelta_{M^{\mathsf{up}}}^{\mathfrak{ra}(s)}-\varDelta_{M_{\mathsf{low}}}^{\mathfrak{ra}(s)}.$$

Из теоремы 1 в этих обозначениях и для тех же функций s и F, что и в теореме 1 с (2), выводится следующий общий результат для голоморфных на $\mathbb{D}$ функций f с $f(0) \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\ln|f| \leqslant \mathscr{M}$ *на* $\mathbb{D}$ *почти всюду по лебеговской мере* $\mathfrak{m}_2$. *Тогда*

$$\int_r^R \bigl(-F'_{\text{пр}}(t)\bigr)\Bigl(\mathcal{Z}_f^{\mathfrak{ra}(s)}(t) - \Delta_{\mathscr{M}}^{\mathfrak{ra}(s)}(t)\Bigr)\,\mathrm{d}t \leqslant \|s\|_{\mathbb{R}} Q_{p,F}(r)\bigl(M^{\circ r} - u(0)\bigr). \tag{7}$$

Если функция F *такая же, как в теореме* 1 *после* (3), *то при условии* (4) *неравенство* (7) *выполняется при всех* $r \in (0, R)$ *с* (5) *вместо* $Q_{p,F}(r)$ *в правой части* (7).

Утверждению, обратному к противоположному теореме 2, можно придать форму разнообразных теорем единственности для функций на единичном круге подобно тому, как это было проделано в [1, теоремы 2.2, 2.3, следствия 2.4–2.7] применительно к целым функциям и к субгармоническим функциям на плоскости. Они будут содержать в себе как довольно специальные предшествующие наши результаты в этом направлении из статей [8] и [9] с нерадиальными по существу условиями на распределения точек, формулируемые в терминах частных проявлений радиально-аргументной считающей функции (6).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00002, https://rscf.ru/project/24-21-00002/.

Литература

1. Хабибуллин Б. Н. *Распределение корней целых функций с субгармонической мажорантой* // Матем. сб. – 2025. – Т. 216. – № 7. – С. 109–152.

2. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций* // М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

3. Малютин К. Г. *Введение в теорию тригонометрически выпуклых функций.* – М. Физматлит, 2024. – 248 с.

4. Beckenbach E. F. *Generalized convex functions* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1937. – V. 43. – No. 6. – P. 363–371.

5. Roberts A. W., Varberg D. E. *Convex functions* – Pure Appl. Math. – V. 57. – New York–London: Academic Press, 1973. – xx+300 pp.

6. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности* (монография-обзор, изд. четвёртое, дополн.). – Уфа: РИЦ БашГУ, 2012 – xvi+176 с.

7. Ransford Th. *Potential Theory in the Complex Plane.* – London Math. Soc. Stud. Texts. – V. 28. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. – 232 c.

8. Khabibullin B. N., Khabibullin F. B. *Zeros of holomorphic functions in the unit disk and ρ-trigonometrically convex functions* // Analysis and Mathematical Physics. – 2019. – V. 9. – No. 3. – P. 1087–1098.

9. Хабибуллин Б. Н. *Распределения единственности для голоморфных функций с ограничениями на рост в единичном круге* // Материалы Воронежской международной весенней математической школы «Современные методы краевых задач. Понтрягинские чтения—XXXV», Воронеж, 26–30 апреля 2024 г. Часть 1. – Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – М.: ВИНИТИ РАН, 2024. – С. 109–120.

DISTRIBUTION OF ZEROS OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS ON THE UNIT DISK WITH A SUBHARMONIC MAJORANT

B.N. Khabibullin

The autor's article "Distribution of zeros of entire functions with a subharmonic majorant" was recently published in the journal "Sbornik: Mathematics". Some new categories of integral inequalities for subharmonic functions play a key role in this. The possibilities of adapting the results and methods of this paper to the weight classes of holomorphic functions on the unit disk will be considered. They are based both on the mentioned integral inequalities for subharmonic functions and on their additional variations.

Keywords: holomorphic function, distribution of zeros, subharmonic function, Riesz mass distribution, trigonometrically and powerly convex functions.

УДК 514.822

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИСКУССТВЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЗАЦИИ

Г. Хайруллозода[1]

1 *gulshandjuraeva9@gmail.com*; Таджикский Педагогический университет им. Садриддина Айни

В работе рассмотрена модельная начально-краевая задача в случае, когда функции правой части и начального условия представимы конечными суммами рядов Фурье по тригонометрическому базису, исследована точность соответствующего приближённого метода.

Ключевые слова: точность, уравнение диффузии-конвекции, погрешность аппроксимации.

В работе [1] рассмотрены аналоги операторов конвективного и диффузионного переноса при стационарном теплопереносе в конденсированных средах и модели диффузионно-реактивного переноса. Основной целью этих исследований является тот факт, что предложенное модельное исследование схемы решения сингулярно-возмущённого уравнения стационарной теплопроводности, близкой к решению задачи для невозмущенного уравнения, позволило нам изучить изменение теплового потока и температуры в широком диапазоне температур и является эффективным методом для решения задачи стационарной теплопроводности.

В этой работе мы продолжаем исследование, результаты которого были опубликованы ранее. Рассмотрим начальную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности. Её можно записать следующим образом:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+f(x,t),\ 0<x<L,\ 0<t<R, \tag{1}$$

$$T(0,x)=T_0(x),\ \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0}=0;\ T(0,t)=0,\ T(L.t)=0. \tag{2}$$

Что касается характеристик температуры $T(x,t)$ и источник тепла $f(x,t)$, мы можем выразить их с помощью рядов Фурье по тригонометрическим функциям.

Наряду с задачей (1)-(2), которую мы будем называть «точной» непрерывной задачей, мы рассмотрим первую начально-краевую задачу с «усечённой» правой частью и «усечёнными» начальными условиями

Для решения задачи с усеченной правой частью справедлива оценка в гильбертовом пространстве $H_\infty(L_\infty)$ для любого $t > 0$ [2]:

$$\|u^{(N)}(x,t)\| \le \|u_0^{(N)}\| + \int_0^t \|g(N)(x,\Theta)\| d\Theta. \tag{3}$$

Было доказано, что для определённого класса периодических функций, производная которых порядка k удовлетворяет определённому условию $|\Psi^{(k)}| \le K$, остаточный член в ряде Фурье имеет предел для любого натурального числа k [2]:

$$\sup_{0\le x\le L}\left|\Psi(x) - \sum_{m=1}^{N-1} C^{(\Psi)}\sin(mx)\right| \le \frac{4k}{\pi^2}\frac{\ln N}{N^k} + \left(\frac{1}{N^k}\right). \tag{4}$$

Учитывая оценку (4), из неравенства (3) получим оценку для любого $t > 0$:

$$\left\|u^{(N)}\left(\frac{x}{\omega},t\right)\right\| \le 4\frac{K_1+N^2K_2}{\pi^2N^2}\frac{\ln N}{N^{k-2}} + O\left(\frac{1}{N^{k-2}}\right),$$

где

$$K_1 = \max_{0\le x\le L}\left|\left(\frac{x}{\omega}\right)\right|,\ K_2 = \max_{0\le x\le L}\left|f^{k-2}\left(\frac{x}{\omega},t\right)\right|.$$

Выполняя некоторые математические вычисления, из представлений правой части, начальных и краевых условий, получаем:

$$\varepsilon\frac{d^2C_m^{(T)}}{dt^2} + \frac{dC_m^{(T)}}{dt} = -a(\omega m)^2 C_m^{(T)} + C_m^{(f)}. \tag{5}$$

Решение уравнения (5) примет вид:

$$C_m^{(T)} = \left(C_{m,0}^{(T)} - \frac{C_m^{(f)}}{a(\omega m)^2}\right)\frac{1+\eta_m}{1+(1-\varepsilon)\eta_m}\eta e^{-\eta_m t}\left(1+\frac{2a\omega^2m^2}{1+\eta_m}e^{-t/\varepsilon}\right) + \frac{C_m^{(f)}}{a(\omega m)^2},$$

где

$$\eta_m = \frac{2a\omega^2m^2}{1+\sqrt{1-4\varepsilon\omega^2m^2}}.$$

После проделанных преобразований и вычислений, с учётом заданных начальных и граничных условий, будет найдена искомая функция:

$$T(x,t) = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^T(t)\sin(\omega m x).$$

Литература

1. Джураев Х.Ш. *О приближенно-аналитическом решении краевых задач для сингулярно-возмущенного уравнения стационарной теплопроводности.* – Проблемы автоматики и управления. – 2021. – № 1 (40). – С. 31–38.

2. Пинкёвич В.Т. *О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1940. – Т. 4. – № 6. – С. 521–528.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE DIFFUSION EQUATION BASED ON THE ARTIFICIAL HYPERBOLIZATION METHOD

The paper considers a model of the initial boundary value problem, in the case when the functions of the right-hand side and the initial condition are represented by finite sums of Fourier series on a trigonometric basis, and the accuracy of the corresponding approximate method is investigated.
Keywords: accuracy, diffusion-convection equation, approximation error.

УДК 519.2, 531.19

О ДИХОТОМИИ МАРКОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА ВЕРОЯТНОСТНОМ КАЛИБРОВОЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.Г. Халиуллин[1]

1 *samig.haliullin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье рассматриваются марковские операторы, действующие в пространстве $L^2(\mathscr{M},\tau)$, где $(H,\mathscr{M},\tau)$ — калибровочное вероятностное пространство, то есть, H — комплексное гильбертово пространство, $\mathscr{M}$ — алгебра фон Неймана на H, а τ — точное нормальное следовое состояние на $\mathscr{M}$. Также будет введено понятие бистохастического состояния и рассмотрены связи с марковскими операторами.

Ключевые слова: вероятностное калибровочное пространство, марковские операторы, дихотомия.

Определение 1. (см., например, [1]) *Вероятностным калибровочным пространством называется тройка $(H,\mathscr{M},m)$, где H — комплексное гильбертово пространство, $\mathscr{M}$ алгебра фон Неймана на H, а m — неотрицательная вещественнозначная функция на проекторах (калибровка), являющаяся точным нормальным следовым состоянием на алгебре $\mathscr{M}$.*

Существует единственное непрерывное по норме линейное продолжение τ калибровки m на все $\mathscr{M}$, которое также будет точным нормальным следовым состоянием на алгебре $\mathscr{M}$. Естественным образом на алгебре $\mathscr{M}$ вводится скалярное произведение: $(x,y)=\tau(y^*x)$. Если $x\in\mathscr{M}$, положим $\|x\|^2=\tau(x^*x)$. Пополнение алгебры $\mathscr{M}$ относительно этой нормы образует гильбертово пространство, обозначаемое $L^2(\mathscr{M},\tau)$.

Пусть $(H_1,\mathscr{M}_1,m_1)$ и $(H_2,\mathscr{M}_2,m_2)$ — два вероятностных калибровочных пространства, τ_1 и τ_2 — соответствующие точные нормальные следовые состояния. Рассмотрим алгебру фон Неймана $\mathscr{M}$, являющуюся тензорным произведением $\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2$, определённым на тензорном произведении $H=H_1\otimes H_2$, то есть,

$$\mathscr{M}=:\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2=\{x_1\otimes x_2 : x_1\in\mathscr{M}_1, x_2\in\mathscr{M}_2\}'',$$

где $(\cdot)''$ означает взятие второго коммутанта, который является наименьшей алгеброй фон Неймана, содержащей алгебраическое тензорное произведение алгебр фон

Неймана. Хорошо известно, что $\mathscr{M}$ является мультипликативной алгеброй с естественными операциями умножения и сопряжения. Зададим на $\mathscr{M}$ точное нормальное следовое состояние ρ, а также «редуцированные» состояния τ_1 и τ_2, определённые по формулам $\tau_1(x_1) = \rho(x_1 \otimes \mathbf{1})$, $\tau_2(x_2) = \rho(\mathbf{1} \otimes x_2)$, которые будут точными нормальным следовыми состояниями на соответствующих алгебрах.

Определение 2. *Точное нормальное следовое состояние ρ, заданное на алгебре $\mathscr{M} \otimes \mathscr{M}$, назовём бистохастическим, если редуцированные состояния (проекции на первую и вторую координаты) есть заданное состояние τ.*

Введём определение марковского оператора, следуя идеям М. Розенблатта [3] и А.М. Вершика, [4], [5].

Определение 3. *Марковским оператором в гильбертовом пространстве $L^2(\mathscr{M},\tau)$ назовём линейный ограниченный оператор $T : L^2(\mathscr{M},\tau) \to L^2(\mathscr{M},\tau)$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) оператор T сжимающий, то есть, $\|T\| \le 1$; 2) $T(\mathbf{1}) = T^*(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$; 3) оператор T сохраняет положительность, то есть, Tx будет положительным элементом $L^2(\mathscr{M},\tau)$, если x является положительным.*

Очевидно, марковские операторы образуют выпуклое множество.

Теорема 1. *Между множеством марковских операторов $\{T\}$ и множеством бистохастических состояний $\{\rho\}$ существует взаимно однозначное соответствие, которое задаётся соотношением: $\rho(p_1 \otimes p_2) = (Tp_1, p_2)$, где проекторы $p_1, p_2 \in \mathscr{M}$.*

Определение 4. *Марковский оператор T, действующий в $L^2(\mathscr{M},\tau)$, называется неразложимым, если у него не существует инвариантного собственного подпространства Пирса. Марковский оператор T, действующий в $L^2(\mathscr{M},\tau)$, называется эргодическим, если для любых $x, y \in L^2(\mathscr{M},\tau)$, $\mathbf{0} < x < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < y < \mathbf{1}$ существует такое $n \in Z^+$, что $(T^n x, y) > 0$.*

Теорема 2. *Если T — самосопряжённый марковский оператор, действующий на $L^2(\mathscr{M},\tau)$, где $(H,\mathscr{M},\tau)$ — вероятностное калибровочное пространство, то T эргодичен тогда и только тогда, если T неразложим. Если выполнено одно из свойств выше, то T является крайней точкой в множестве самосопряжённых марковских операторов.*

Определение 5. *Скажем, что марковские операторы T_1 и T_2 эквивалентны, если $(T_1 x, y) = 0 \Leftrightarrow (T_2 x, y) = 0$, $x > \mathbf{0}$, $y > \mathbf{0} \in L^2(\mathscr{M},\tau)$; марковские операторы T_1 и T_2 назовём взаимно сингулярными, если существуют такие $x > \mathbf{0}$, $y > \mathbf{0} \in L^2(\mathscr{M},\tau)$, что $(T_1 x, y) = 0$ и, в то же время, $(T_2 x, y) = 1$.*

В этом случае соответствующие бистохастические состояния назовём эквивалентными и сингулярными.

Теорема 3. *Пусть T_1 и T_2 — два различных самосопряжённых марковских эргодических оператора, действующих на $L^2(\mathscr{M},\tau)$. Тогда они либо эквиваленты, либо сингулярны.*

Литература

1. Segal I.E. *A non-commutative extension of abstract integration* // Ann. of Math. – 1953. – V.57. – P. 401–457.

2. Gross L. Existence and uniqueness of physical ground states // J. Functional Analysis. – 1972. – V. 10. – P. 52-109.

3. Rosenblatt M. Markov processes. Structure and asymptotic behavior // Grundlehren Math. Wiss. – 1971. – V. 184.

4. Вершик А.М. *Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы* // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1977. – Т. 72 – С. 26–61.

5. Вершик А.М. *Как выглядит типичный марковский оператор?* // Алгебра и анализ. – 2005. – Т. 17. – № 5. – С. 91–104.

ON THE DICHOTOMY OF MARKOV OPERATORS ON A PROBABILITY GAUGE SPACE

S.G Haliullin

The article considers Markov operators on $L^2(\mathscr{M},\tau)$, where $(H,\mathscr{M},\tau)$ is a gauge probability space, that is, H is a complex Hilbert space, $\mathscr{M}$ is the von Neumann algebra on H, and τ is a faithful normal tracial state on $\mathscr{M}$. The concept of a bistochastic state will also be introduced and connections with Markov operators will be considered.

Keywords: probability gauge space, Markov operators, dichotomy.

УДК 517.984

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СИСТЕМЕ ДВУХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

А.М. Халхужаев[1], Х.Ш. Махмудов[2]

1 *ahmad_x@mail.ru*; Самаркандский государственный университет имени Шарафа Рашидова; Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан

2 *mahmudovh276@gmail.com*; Самаркандский государственный университет имени Шарафа Рашидова

Рассматривается гамильтониан системы двух бозонов на двумерной решетке $\mathbb{Z}^2$ с потенциалом определенного типа. Подпространство чётных функций $L_2^e(\mathbb{T}^2)$ разлагается в прямую сумму двух инвариантных относительно оператора $H(\mathbf{k})$ подпространств: $L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^{oo}(\mathbb{T}^2)$, где $\mathbf{k}=(k_1,k_2)\in\mathbb{T}^2$. Для любого $k_1\in(-\pi,\pi]$ доказано, что оператор $H^{ee}(k_1,\pi)=H(k_1,k_2)\big|_{L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)}$ имеет бесконечное число собственных значений и для любого $k_1\in(-\pi,\pi)$ оператор $H^{oo}(k_1,\pi)=H(k_1,k_2)\big|_{L_2^{oo}(\mathbb{T}^2)}$ имеет конечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра. При $k_1\to\pi$ получена асимптотическая формула для числа собственных значений оператора $H^{oo}(k_1,\pi)$.

Ключевые слова: оператор Шредингера, решетка, бозон, квазиимпульс, инвариантные подпространства, существенный спектр, собственное значение.

Пусть $L_2(\mathbb{T}^2)$ – гильбертово пространство квадратично интегруемых функций, определённых на двумерном торе $\mathbb{T}^2$. Обозначим через $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^e(\mathbb{T}^2)$ подпространство нечетных и четных функций соответственно, пространства $L^2(\mathbb{T}^2)$. Оператор $H(\mathbf{k})$, $\mathbf{k}\in\mathbb{T}^2$, соответствующий системе двух бозонов на двумерной решетке, действует в гильбертовом пространстве четных функций $L_2^e(\mathbb{T}^2)\subset L_2(\mathbb{T}^2)$ по формуле

$$H(\mathbf{k})=H_0(\mathbf{k})-V,$$

где

$$(H_0(\mathbf{k})f)(\mathbf{q})=\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})f(\mathbf{q}),$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})=\varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{q})+\varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{q}); \quad \varepsilon(\mathbf{q})=\sum_{i=1}^{2}(1-\cos q_i), \quad \mathbf{q}=(q_1,q_2)\in\mathbb{T}^2,$$

$$(Vf)(\mathbf{q})=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^2}\Big[1+\frac{2}{10}\cos(q_1-s_1)\Big]\Big\{1+2\sum_{m=1}^{\infty}10^{-m}\cos m(q_2-s_2)\Big\}f(\mathbf{s})\,d\mathbf{s}.$$

Отметим что, существенный спектр оператора $H(\mathbf{k})$ состоит из отрезка $[m(\mathbf{k}),M(\mathbf{k})]$, где

$$m(\mathbf{k})=\min_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}), \quad M(\mathbf{k})=\max_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}).$$

Пусть $L_2^{oo}(\mathbb{T}^2)=L_2^{o}(\mathbb{T})\otimes L_2^{o}(\mathbb{T})$ и $L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)=L_2^{e}(\mathbb{T})\otimes L_2^{e}(\mathbb{T})$, тогда пространство $L_2^{e}(\mathbb{T}^2)$ можно представить в виде прямой суммы $L_2^{e}(\mathbb{T}^2)=L_2^{oo}(\mathbb{T}^2)\oplus L_2^{ee}(\mathbb{T}^2))$ (см. [1]).

Заметим, что подпространства $L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^{oo}(\mathbb{T}^2)$ инвариантны относительно оператора $H(\mathbf{k})$ (см. [2]). Через $H^{ee}(\mathbf{k})$ и $H^{oo}(\mathbf{k})$ обозначаем сужения оператора $H(\mathbf{k})$ в подпространства $L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^{oo}(\mathbb{T}^2)$, соответственно.

Теорема 1. *Для любого $k_1\in(-\pi,\pi]$ оператор $H^{ee}(k_1,\pi)$ имеет бесконечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.*

Пусть $\mathcal{N}(k_1)$ – число собственных значений оператора $H^{oo}(k_1,\pi)$, лежащих левее существенного спектра. Тогда для числа $\mathcal{N}(k_1)$ при $k_1\to\pi$ справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Для любого $k_1\in(-\pi,\pi]$ оператор $H^{oo}(k_1,\pi)$ имеет конечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра. Число собственных значений $\mathcal{N}(k_1)$ увеличивается при $k_1\to\pi$ и верна следующая асимптотическая формула:*

$$\lim_{k_1\to\pi}\frac{\mathcal{N}(k_1)}{|\lg\cos\frac{k_1}{2}|}=1.$$

Литература

1. Reed M., Simon B.; *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*. – New York: Academic, – 1979.

2. Abdullaev J. I., Khalkhuzhaev A. M., Makhmudov Kh. Sh. *The Infiniteness of the Number of Eigenvalues of the Schröodinger Operator of a System of Two Particles on a Lattice*// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45. – № 10. – P. 4828–4845.

ON THE SPECTRUM OF THE SCHRÖDINGER OPERATOR CORRESPONDING TO A SYSTEM OF TWO PARTICLES ON A LATTICE

A.M. Khalkhuzhaev, Kh.Sh. Makhmudov

We consider the Hamiltonian of a system of two bosons on a two-dimensional lattice $\mathbb{Z}^2$ with a certain type potential. It is proved that the subspace of odd functions $L_2^e(\mathbb{T}^2)$ is represented as a direct sum of the subspaces $L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)$ and $L_2^{oo}(\mathbb{T}^2)$, which are invariant under the operator $H(\mathbf{k})$, $\mathbf{k}=(k_1,k_2)\in\mathbb{T}^2$, associated with this Hamiltonian. For any $k_1\in(-\pi,\pi]$, it is proved that the operator $H^{ee}(k_1,\pi)=H(k_1,k_2)|_{L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)}$ has an infinite number of eigenvalues and for any $k_1\in(-\pi,\pi)$, the operator $H^{oo}(k_1,\pi)=H(k_1,k_2)|_{L_2^{oo}(\mathbb{T}^2)}$ has a finite number of eigenvalues lying to the left of the essential spectrum. An asymptotic formula is obtained for the number of eigenvalues of the operator $H^{oo}(k_1,\pi)$

as $k_1 \to \pi$.

Keywords: Schrödinger operator, lattice, boson, quasi-momentum, invariant subspaces, essential spectrum, eigenvalue.

УДК 514.822

О ЧИСЛЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ТРЕХМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

А.М. Халхужаев[1], Х.Г. Хайитова[2]

1 *ahmad.x@mail.ru*; Самаркандский государственный университет
2 *x.xayitova@mail.ru*; Бухарский государственный университет

Рассматривается трехчастичный дискретный оператор Шредингера $H_{\mu,\gamma}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{T}^3$*, ассоциированный с системой трех частиц (две - фермионы с массой* 1 *и одна - другая частица с массой* $m = 1/\gamma$*), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов* $\mu > 0$ *на трехмерной решетке* $\mathbb{Z}^3$*. Описывается существенный спектр этого оператора.*

Ключевые слова: решетка, гамильтониан, оператор Шредингера, контактный потенциал, фермион.

В данной работе изучаются спектральные свойства семейства операторов

$$H_{\mu,\gamma}(K) := H_{0,\gamma}(K) - \mu(V_1 + V_2), \qquad \mu, \gamma > 0,$$

определенных в гильбертовом пространстве $L^{2,as}((\mathbb{T}^3)^2)$ квадратично-интегрируемых и антисимметричных функций относительно перестановки переменных, где $\mathbb{T}^3$ — трехмерный тор (зона Бриллюэна) с единичной мерой $\int_{\mathbb{T}^3} d\mathbf{p} = 1$. Невозмущенный оператор $H_{0,\gamma}(K)$ — оператор умножения на функцию

$$E_{K,\gamma}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{q}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{K} - \mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{T}^3,$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 3 - \xi(\mathbf{p}), \;\; \xi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} \cos p_i, \;\; \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3,$$

а возмущения V_i определяются как

$$(V_1 f)(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p},\mathbf{s})d\mathbf{s}, \qquad (V_2 f)(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s},\mathbf{q})d\mathbf{s}.$$

Мы вводим так называемые "канальные операторы" спектр которых описывает существенный спектр оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$.

Поскольку в рассматриваемой нами трехчастичной системе две частицы одинаковы, (т.е. операторы V_1 и V_2 унитарно эквивалентны), есть только один канальный оператор $H^{ch}_{\mu,\gamma}(K) = H_{0,\gamma}(K) - \mu V_1$, действующий в гильбертовом пространстве $L^2((\mathbb{T}^3)^2)$. Оператор $H^{ch}_{\mu,\gamma}(K)$ коммутирует с группой $\{U_{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^3\}$ унитарных операторов

$$(U_s f)(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \exp\{-i(\mathbf{s},\mathbf{p})\} f(\mathbf{p},\mathbf{q}), \quad f \in L^2((\mathbb{T}^3)^2),$$

где

$$(\mathbf{s},\mathbf{p}) = s_1 p_1 + s_2 p_2 + s_3 p_3, \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{Z}^3, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3.$$

Оператор $H^{ch}_{\mu,\gamma}(K)$ разлагается в прямой операторный интеграл

$$H^{ch}_{\mu,\gamma}(K) = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus H^{ch}_{\mu,\gamma}(K,\mathbf{p})\, d\mathbf{p}.$$

Пространство $L^2((\mathbb{T}^3)^2)$ также разлагается в соответствующий прямой интеграл

$$L^2((\mathbb{T}^3)^2) = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus L^2(\mathbb{T}^3)\, d\mathbf{p}.$$

Из единственности разложения следует, что слойный оператор $H^{ch}_{\mu,\gamma}(K,\mathbf{p})$ имеет вид

$$H^{ch}_{\mu,\gamma}(K,\mathbf{p}) = h_{\mu,\gamma}(\mathbf{K}-\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p}) I,$$

где I– единичный оператор, а $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$– оператор, определенный по формуле

$$h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) = h_{0,\gamma}(\mathbf{k}) - \mu v,$$

где

$$\big(h_{0,\gamma}(\mathbf{k}) f\big)(\mathbf{p}) = \mathscr{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}), \qquad \mathscr{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{p}) = \varepsilon\big(\mathbf{p}\big) + \gamma \varepsilon\big(\mathbf{k}-\mathbf{p}\big),$$

$$\big(v f\big)(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s})\, d\mathbf{s},$$

$\gamma = \frac{1}{m} > 0$ — отношение масс частиц, $\mu > 0$ — энергия взаимодействия фермиона с третьей частицей.

Для каждого $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{T}^3$ обозначим

$$E_{\min,\gamma}(K) = \min_{\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} E_{K,\gamma}(\mathbf{p},\mathbf{q}), \quad E_{\max,\gamma}(K) = \max_{\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} E_{K,\gamma}(\mathbf{p},\mathbf{q}),$$

$$\Lambda^{\min}_{\mu,\gamma}(K) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3} \{z_{\mu,\gamma}(K-\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p})\}, \quad \Lambda^{\max}_{\mu,\gamma}(K) = \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3} \{z_{\mu,\gamma}(K-\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p})\},$$

где $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$– единственное собственное значение оператора $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$.

Следующая теорема опысивает структуру и местоположение существенного спектра оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$.

Теорема 1. *Существенный спектр $\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}(K))$ оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$ совпадает со спектром канального оператора $H^{ch}_{\mu,\gamma}(K)$:*

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}(K)) = [\Lambda^{\min}_{\mu,\gamma}(K), \Lambda^{\max}_{\mu,\gamma}(K)] \cup [E_{\min,\gamma}(K), E_{max,\gamma}(K)].$$

Литература

1. Abdullaev J.I., Khalkhuzhaev A.M., Boymurodov J. K. *The Number of Eigenvalues of the Three-Particle Schrodinger Operator on Three Dimensional Lattice* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. – No. 12. – P. 3486–3495 .

ON THE NUMBER OF EIGENVALUES OF THE THREE-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATOR ON A THREE-DIMENSIONAL LATTICE

A.M. Khalkhuzhaev, X.G. Khayitova

A three-particle discrete Schrodinger operator $H_{\mu,\gamma}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{T}^3$ is considered, it is associated with a system of three particles (two fermions with mass 1 and one other particle with mass $m = 1/\gamma$) interacting via pairwise contact potentials on the three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^3$. The essential spectrum of this operator is described.

Keywords: lattice, Hamiltonian, Schrödinger operator, contact potential, fermion.

УДК 517.518

О СУММИРУЕМОСТИ ПО МЕРЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Ю.Х. Хасанов[1], А.Н. Давлатов[2]

1 *yukhas60@mail.ru*; Российско-Таджикский (Славянский) университет
2 *ahliddin-86@mail.ru*; Таджикский Государственный Педагогический университет

В заметке найдены аналоги теорем типа Вихманна о суммируемости по мере в пространстве измеримых почти всюду функций, т.е. получены аналоги классических теоремам о суммируемости в пространстве $M(S,\Sigma,\mu)$, где $S = [0,1]$ и μ – мера Лебега, а множество M состоит из измеримых почти всюду конечных на $[0,1]$ функций.

Ключевые слова: теорема Вихманна, суммируемость по мере, пространство измеримых функций, матрица конечного типа, сходимость по мере.

Пусть $g_k(t)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ – измеримые функции и $A = (\alpha_{nk})$ – числовая матрица.В дальнейшем нам понадобиться следующее преобразование

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} g_k(t). \tag{1}$$

Определение 1 [1]. *Последовательность измеримых функций $f_n(x)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ сходится по мере к функции $F(x)$, если для любого положительного число σ выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - F(x)| \geq \sigma\} = 0.$$

Определение 2. *Последовательность измеримых функций $f_n(x)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ суммируема по мере методом A или A–суммируема по мере, если сходится по мере последовательность $e(t) = P_n(t)$, которая определена соотношением (1).*

Пространство всех A–суммируемых по мере последовательностей обозначим через $F_A(M)$, где M – измеримые почти всюду конечных на отрезке $[0,1]$ функций.

Пусть $S = [0,1]$ есть μ–мера Лебега и M состоит из измеримых почти всюду конечных на отрезке $[0,1]$ функций. Вихманн Ф. [2] доказал, что для включения $F_A(M) \subset F(M)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{nk} = \alpha_k; \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} = \alpha_k; \ \sup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}| < \infty, \tag{2}$$

кроме того, существует натуральное число K такое, что числа отличных от нуля элементов любой строки матрицы A не превосходит K.

Здесь нам удалось найти анлоги теорем типа Вихманна о суммируемости по мере в пространстве измеримых почти всюду функций.

Теорема 1. *Пусть матрица A является матрицей конечного типа, т.е. существует натуральное число K такое, что числа отличных от нуля элементов любой строки матрицы A не превосходит K. Тогда для включения $F_A(M) \subset F^0(M)$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (2) и $F = F_A(R)$.*

Заметим, что теорема 1 устанавливает необходимые и достаточные условия A–суммируемости по мере для всех сходящихся по мере к нулю последовательностей.

Следующее утверждение устанавливает A–суммируемость по мере к нулю для всех сходящихся по мере к нулю последовательностей.

Теорема 2. *Пусть матрица A является матрицей конечного типа. Тогда для включения $F_A(M) \subset F^0(M)$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (2) и $F = F_A(R)$.*

Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1968. – 496 с.

2. Вихманн Ф. *О консервативности матриц относительно сходимости по мере* // Изв. АН Эстон. ССР, Физ., мат. – 1971. – Т. 20. – № 3. – С. 275–278.

ON THE SUMMABILITY OF A MEASURE IN THE SPACE OF MEASURABLE FUNCTIONS

Yu.Kh. Khasanov, A.N. Davlatov

In this note, we find analogues of the Wichmann type theorem on summability over a measure in the space of almost everywhere measurable functions, i. e. analogues of classical theorems on summability in the space $M(S,\Sigma,\mu)$, where $S = [0,1]$ and μ are the Lebesgue measure, and the set M consists of almost everywhere measurable finite on $[0,1]$ functions.

Keywords: Wichmann's theorem, summability over measure, space of measurable functions, finite type matrix, convergence in measure.

УДК 517.984

ЧИСЛОВАЯ ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Ж.Т. Хусенова[1]

1 *j.t.husenova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет

В данной работе рассматривается модель Фридрихса H с четырехмерным возмущением, соответствующая оператору энергии системы двух частиц на одномерной решетке. С помощью числовой области значений четырех вспомогательных моделей Фридрихса с одномерными возмущениями была проанализирована числовая область значений исследуемой модели Фридрихса.

Ключевые слова: модель Фридрихса, возмущения, система частиц, числовая область значений.

Одним из классических методов изучения спектра линейного ограниченного оператора A в комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ является изучение его числовой области значений. Последнее множество определяется следующим образом:

$$\mathscr{W}(A) := \{(Ax, x) : x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\}.$$

В данной работе исследуем числовую область значений модели Фридрихса с четырехмерным возмущением в одномерном случае. В работе [1] для модели Фридрихса с двумерным возмущением найдены условия совпадаемости его спектра с числовой областью значений.

В гильбертовом пространстве $L_2[-\pi;\pi]$ рассмотрим оператор вида:

$$H := H_0 - V_1 - V_2 - V_3 - V_4, \tag{1}$$

где H_0 — оператор умножения на функцию $u(\cdot)$:

$$(H_0 f)(x) = u(x) f(x), \quad f \in L_2[-\pi;\pi];$$

а V_α, $\alpha = 1,2,3,4$ - интегральные операторы вида:

$$(V_\alpha f)(x) = v_\alpha(x) \int_{-\pi}^{\pi} v_\alpha(t) f(t) dt, \quad f \in L_2[-\pi;\pi].$$

Здесь $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2,3,4$ – вещественнозначные непрерывные функции, определенные на отрезке $[-\pi;\pi]$, причем функции $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$, $v_3(\cdot)$ и $v_4(\cdot)$ линейно независимы.

При этих предположениях на параметр функции, оператор H, определенный по формуле (1), ограничен и самосопряжен в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi;\pi]$.

Оператор возмущения V невозмущенного оператора H_0 является самосопряженным оператором ранга 4. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что $\sigma_{\text{ess}}(H) = [m; M]$, где числа m и M определяются следующим образом:

$$m := \min_{x \in [-\pi;\pi]} u(x), \quad M := \max_{x \in [-\pi;\pi]} u(x).$$

Можно показать, что модель Фридрихса H имеет не более четырех собственных значений, лежащих левее точки m. По определению оператор V_k является положительным. Следовательно, оператор V также является положительным как сумма положительных операторов. Теперь из положительности оператора V следует, что модель Фридрихса H не имеет собственный значений, лежащих правее M и поэтому

$$\max \sigma(H) = \max \sigma_{\text{ess}}(H) = M.$$

Следующее утверждение является основным результатом работы.

Теорема 1. *а) Имеет место соотношение* $M \notin \mathcal{W}(H)$;

б) Число $z = M$ *является предельной точкой множества* $\mathcal{W}(H)$.

Чтобы использовать в дальнейших исследованиях наряду с моделью Фридрихса H, рассмотрим линейные, ограниченные и самосопряженные операторы

$$H_k := H_0 - V_k, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi;\pi]$. *По определению модели Фридрихса* H_1, H_2, H_3 *и* H_4 *имеют одномерное возмущение.*

Теорема 2. *Существуют индексы* $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ *такие, что*

$$\mathcal{W}(H_i) \subset \mathcal{W}(H_j) \subset \mathcal{W}(H_k).$$

Для формулировки следующего результата обозначим через $\text{supp}\{v_\alpha(\cdot)\}$ носитель функции $v_\alpha(\cdot)$ и через $\mu(\Omega)$ меру Лебега множества $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Если для любых* $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ *выполняется условие*

$$\mu(\text{supp}\{v_i(\cdot)\} \cap \text{supp}\{v_j(\cdot)\}) = 0,$$

то существует индекс $k \in \{1, 2, 3\}$ *такой, что* $\mathcal{W}(H_k) = \mathcal{W}(H)$.

Следует отметить, что класс функций $v_k(\cdot)$, $k = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяющих условию теоремы, не пуст.

Полученные в данной работе утверждения о числовой области значений модели Фридрихса H важны при определении интервала, в котором расположены собственные значения этой модели.

Литература

1. Bahronov B.I., Rasulov T.H. *On the Numerical Range of a Friedrichs Model with Rank Two Perturbation: Threshold Analysis Technique* // AIP Conf. Proc. – 2023. – Vol. 2764.

NUMERICAL RANGE OF THE FRIEDRICHS MODEL WITH RANK FOUR PERTURBATION

J.T. Husenova

In this note we consider the Friedrichs model H with rank four perturbation corresponding to the energy operator of system of two particles on one-dimensional lattice. Using the numerical range of four auxiliary Friedrichs models with rank one perturbations the numerical ranges of investigated Friedrichs model is analyzed.

Keywords: model Friedrichs, perturbation, system of particles, numerical range.

УДК 591.65

АППРОКСИМАЦИЯ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ

И.А. Шакиров[1]

1 *iskander.sh.57@yandex.ru*; Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета

Константа Лебега классического оператора Фурье равномерно приближается логарифмическо-дробно-рациональной функцией двумя различными способами, проводится сравнение результатов аппроксимации.

Ключевые слова: оператор Фурье, константа Лебега, дробно-рациональная функция, погрешность аппроксимации.

Рассматривается константа Лебега $L_n = ||S_n||$ классического оператора Фурье

$$S_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi} \quad (S_n(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(s) D_n(t-s)\,ds, \quad t \in \widetilde{T} = [0, 2\pi], n \in N). \tag{1}$$

Ее улучшенная верхняя оценка используется в работе [1] при оценке равномерной сходимости сумм Фурье $S_n(x,t)$ для функций, имеющих ограниченную вариацию, а также для гельдеровых функций; в [2] более детально изучено поведение ядра Дирихле $D_n(u)$, на основе которого получены несколько отличные от ранее известных точные и асимптотические формулы для L_n; в [3] и [4] установлены неулучшаемые двусторонние оценки константы Лебега логарифмическими функциями, а также хорошее ее приближение логарифмическо-дробно-рациональной функцией. Частичные суммы Фурье, оператор (1) и его фундаментальная характеристика L_n остаются актуальным объектом изучения.

Построена логарифмическо-дробно-рациональная приближенная формула вида

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + b + \frac{c_1}{(n+a)^2} - \frac{c_2}{(n+a)^4} \overset{def}{=} u_n(a,b,c_1,c_2), \quad n \in N \tag{2}$$

двумя способами: 1) используя асимптотическое разложение константы Лебега L_n по степеням $1/(n+a)^2$, 2) исходя из условия совпадения левой и правой частей (2) при первоначальных значениях аргумента n; проведено сравнение аппроксимативных качеств этих приближенных формул.

Коэффициенты a, b в правой части (2) определим как $a = 0.5$, $b = \widetilde{\alpha}_0 = 1,270353244921...$ ($\widetilde{\alpha}_0 = c_0 + (4/\pi^2)\ln 2$, c_0 — константа Ватсона), заметим, что при таком их выборе константа Лебега наилучшим образом оценивается снизу логарифмической составляющей [3]. Затем для определения других коэффициентов из (2) используем первые две дробно-рациональные слагаемые в соответствующем асимптотическом разложении

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) + \widetilde{\alpha}_0 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{c_r}{2^{2r}}(\frac{1}{n+0.5})^{2r}, \quad n \in N.$$

Тогда аппроксимационная формула имеет вид

$$L_n \approx u_n(0.5, \widetilde{\alpha}_0, c_1^*, c_2^*), \quad n \in N, \quad (c_1^* = 0,002997974544..., c_2^* = 0,000124835270...). \quad (3)$$

При построении второй приближенной формулы вида (2) поступим следующим образом. Первые два коэффициента при логарифмической составляющей оставим без изменения ($a = 0.5, b = \widetilde{\alpha}_0$), а неизвестные константы c_1, c_2 определим из условия совпадения правой и левой частей (2) при значениях аргумента $n = 1, n = 2$:

$$L_1 = u_n(0.5, \widetilde{\alpha}_0, c_1, c_2), \;\; L_2 = u_n(0.5, \widetilde{\alpha}_0, c_1, c_2).$$

Полученная относительно c_1, c_2 система уравнений с ненулевым определителем имеет единственное решение $\overline{c}_1 = 0.002996972641...$, $\overline{c}_2 = 0.000116069468...$, что и завершает построение второй аппроксимационной формулы:

$$L_n \approx u_n(0.5, \widetilde{\alpha}_0, \overline{c}_1, \overline{c}_2), \;\; n \in N. \quad (4)$$

Для допущенной в приближенных формулах (3), (4) абсолютной равномерной (дискретной) погрешности имеет место следующая

Теорема. *Величина погрешности аппроксимации константы Лебега L_n логарифмическо-дробно-рациональной функцией в приближенной формуле (4) составляет* 10^{-8} *степени, что на полтора порядка лучше, чем в формуле (3).*

Литература

1. Попов А. Ю., Семенова Т. Ю. *Уточнение оценки скорости равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной вариации //* Математические заметки. – 2023. – Т. 113. – № 4. – С. 544–559.

2. Alvarez J., Guman-Partida M. *Properties of the Dirichlet kernel* // Electron. J. Math. Anal. Appl. – 2023. – Т. 11. – С. 96–110.

3. Shakirov I. A. *About the Optimal Replacement of the Lebesque Constant Fourier Operator by a Logarithmic Function* // Lobachevskii J. Math. – 2018. – Т. 39. – № 6. – С. 841–846 .

4. Шакиров И. А. *Приближение константы Лебега оператора Фурье логарифмическо-дробно-рациональной функцией* // Изв. вузов. Математика. – 2023. – № 11. – С. 75–85.

APPROXIMATION OF THE LEBESGUE CONSTANT OF THE FOURIER OPERATOR

I.A. Shakirov

The Lebesgue constant of the classical Fourier operator is uniformly approximated by a logarithmic fractional rational function in two different ways, and the results of the approximation are compared.

Keywords: Fourier operator, Lebesgue constant, fractional rational function, approximation error.

УДК 517.925

ИНВАРИАНТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

М.В. Шамолин[1]

1 *shamolin@rambler.ru*; Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к четномерному многообразию. При этом силовое поле (генератор сдвига в системе) разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: инвариант динамической системы, существенно особые точки инварианта, система с диссипацией, интегрируемость.

Как известно, нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) [1, 2, 3] облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для них коэффициенты искомых инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4, 5, 6]). Наш подход – в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m-1$ независимый нетривиальный тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий.

Ранее [5, 7] важные случаи интегрируемых систем с конечным числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались автором. При этом упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Понятия “консервативность”, “силовое поле”, “диссипация” и др. для систем классической механики вполне естественны. Поскольку в работе изучаются системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Исследование “в целом” начинается с изучения приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой ускорение движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, рассматриваются как обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать "силовые поля". Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат касательного пространства (по одной из квазискоростей системы), получим силовое поле (генератор сдвига) с диссипацией разного знака.

Словосочетание "диссипация разного знака" несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация "со знаком "плюс" — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация "со знаком "минус" — это своеобразная "подкачка" энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В предлагаемой работе силовое поле (генератор сдвига системы) разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых может быть выделена система с конечным числом степеней свободы на своем четномерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

Литература

1. Poincaré H. *Calcul des probabilités.* – Gauthier–Villars, Paris, 1912.

2. Колмогоров А.Н. *О динамических системах с интегральным инвариантом на торе* // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 93. – № 5. С. 763–766.

3. Козлов В.В. *Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений* // Успехи матем. наук. – 2019. – Т. 74. – № 1(445). – С. 117–148.

4. Шамолин М.В. *Об интегрируемости в трансцендентных функциях* // Успехи матем. наук. – 1998. – Т. 53. № 3. – С. 209–210.

5. Шамолин М.В. *Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования* // Доклады РАН. – 2015. – Т. 464. – № 6. – С. 688–692.

6. Шамолин М.В. *Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией* // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. – 2024. – Т. 516. – № 1. – С. 65–74.

7. Шамолин М.В. *Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле* // Доклады РАН. – 2015. – Т. 461. – № 5. – С. 533–536.

INVARIANTS OF DYNAMICAL SYSTEMS OF ODD ORDER WITH DISSIPATION

M.V. Shamolin

We present new cases of integrable dynamical systems homogeneous in terms of variables of arbitrary odd order in which a system on a tangent bundle to an even-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field (the shear generator in the system) is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of different signs. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both the first integrals and invariant differential forms are given.

Keywords: invariant of a dynamical system, essentially special points of invariant, system with dissipation, integrability.

УДК 514.822

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ДЛЯ СПЕКТРА ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПАРАМЕТРА

М.Ш. Шарипова[1]

1 *m.sh.sharipova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет

В данной работе исследуется операторная матрица третьего порядка $\mathscr{A}_\mu$, действующая в обрезанном трёхчастичном подпространстве пространства Фока, зависящая от спектрального параметра $\mu > 0$. С помощью классической теории возмущений получена нижняя оценка для спектра операторной матрицы $\mathscr{A}_\mu$.

Ключевые слова: операторная матрица, спектр, классическая теория возмущения.

Обозначим через $\mathbb{T}$ одномерный тор. Пусть $\mathscr{H}_1 := \mathbb{C}$ — одномерное пространство комплексных чисел, $\mathscr{H}_2 := L_2(\mathbb{T})$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комлекснозначных) функций, определённых на $\mathbb{T}$ и $\mathscr{H}_3 := L_2(\mathbb{T}^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathbb{T}^2$. Обозначим через $\mathscr{H}$ прямую сумму пространств $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ и $\mathscr{H}_3$, т.е. $\mathscr{H} := \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2 \oplus \mathscr{H}_3$. В современной математической физике гильбертово пространство $\mathscr{H}$ называют трёхчастичным обрезанным подпространством пространства Фока. Произвольный элемент f этого пространства имеет вид $f = (f_1, f_2, f_3)$, где $f_i \in \mathscr{H}_i$, $i = 1,2,3$, а его норма вычисляется по следующей формуле:

$$\|f\| = \left(|f_1|^2 + \int_{\mathbb{T}^1} |f_2(x)|^2\,dx + \int_{\mathbb{T}^2} |f_3(x,y)|^2\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим операторную матрицу третьего порядка $\mathcal{A}_\mu$, действующую в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и зависящую от спектрального параметра $\mu > 0$, вида

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} & 0 \\ \mu A_{21} & A_{22} & \mu A_{23} \\ 0 & \mu A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

со следующими матричными элементами $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 1,2,3$:

$$A_{11} f_1 = \varepsilon f_1,\ (A_{12} f_2) = \int_{\mathbb{T}} v(t) f_2(t) dt;$$

$$A_{21} = A_{12}^*,\ (A_{22} f_2(x)) = (\varepsilon + u(x)) f_2(x),\ (A_{23} f_3)(x) = \int_{\mathbb{T}} v(t) f_3(x,t) dt;$$

$$A_{32} = A_{23}^*,\ (A_{33} f_3)(x,y) = (\varepsilon + u(x) + u(y)) f_3(x,y),\ f_i \in \mathcal{H}_i,\ i = 1,2,3.$$

Здесь $\varepsilon \in \mathbb{R}$; $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}$.

С помощью простых вычислений имеем:

$$(A_{12}^* f_1)(x) = v(x) f_1, \quad f_1 \in \mathcal{H}_1,$$

$$(A_{23}^* f_2)(x,y) = v(y) f_2(x), \quad f_2 \in \mathcal{H}_2.$$

Отметим, что операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$, заданная в таком виде, является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

В математической физике операторы A_{12} и A_{23} обычно интерпретируются как операторы уничтожения, а их сопряжённые операторы A_{12}^* и A_{23}^* называются операторами рождения. Операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$, зависящая от спектрального параметра $\mu > 0$, как правило, рассматривается в качестве гамильтониана квантовой системы частиц на одномерной решётке, в которой число частиц не сохраняется и не превышает трех.

Введем обозначение:

$$m := \min_{x\in\mathbb{T}} u(x); \quad M := \max_{x\in\mathbb{T}} u(x).$$

Основной результат работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Имеет место следующая оценка для нижней границы:*

$$\min \sigma(\mathcal{A}_\mu) \geq \begin{cases} \varepsilon - \sqrt{2}\mu \|v\|, & \text{если } m \geq 0; \\ \varepsilon + 2m - \sqrt{2}\mu \|v\|, & \text{если } m < 0. \end{cases}$$

Следует отметить, что теорема 1 доказывается с использованием классической теоремы теории возмущений [1]. Аналогичную оценку можно получить для верхней границы операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

Литература

1. Kato T. *Perturbation theory for linear operators.* – Classics Math., Springer, Berlin, 1995, reprint of the 1980 edition.

THE LOWER ESTIMATE FOR THE SPECTRUM OF A THIRD-ORDER OPERATOR MATRIX DEPENDING ON A PARAMETER

M.Sh. Sharipova

In this work we investigate a third-order operator matrix $\mathscr{A}_\mu$, acting in the truncated three-particle subspace of the Fock space and depending on a spectral parameter $\mu > 0$. Using classical perturbation theory, we obtain the lower estimate for the spectrum of the operator matrix $\mathscr{A}_\mu$.
Keywords: operator matrix, spectrum, classical perturbation theory.

УДК 517.91

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ПОНТРЯГИНА О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

З.И. Шарифзода[1], Н.И. Нуров[2]

1 *sakhara-2803@mail.ru*; Таджикский национальный университет, механико-математический факультет
2 *nid1@mail.ru*; Таджикский национальный университет, механико-математический факультет

В работе изучается вопрос о существовании периодических решений-циклов в нелинейных дифференциальных уравнениях с малым параметром. Получены необходимые и достаточные условия существования периодических решений, которые существенно расширяют область применимости метода малого параметра Л.С.Понтрягина из теории динамических систем на плоскости. В отличие от метода Понтрягина, не предполагается дифференцируемость всех входящих в систему функций, кроме этого, система не является гамильтоновой. В работе применяются топологические методы нелинейного анализа. На основе предложенных методов сформулированы и доказаны теоремы о необходимых и достаточных условиях существования периодических решений при условии непрерывности всех входящих в систему функций. С целью упрощения изучаемой системы в работе используется переход к полярной системе координат и жордановы преобразования.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, малый параметр, жорданово преобразование, гомотопия, вращение векторных полей.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon f(x, \varepsilon), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n$, а $f(x,\varepsilon)$ – непрерывная вектор–функция по совокупности переменных x, ε; ε — параметр; $A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, 3, ..., n,$ — квадратная матрица. В дальнейшем предполагается, что характеристическое уравнение матрицы A

системы (1): $\det(A-\lambda I)=0$ и сред всех своих корней имеет собственное значение вида $\pm i\beta, \beta>0$.

При сделанных относительно спектра матрицы A системы (1) предположениях, согласно теореме Жордана получим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{y}_1=\beta y_2+\sum_{j=3}^{n} b_{1j}y_j+\varepsilon g_1(y_1,y_2,y_3,\varepsilon), \\ \dot{y}_2=-\beta y_1+\sum_{j=3}^{n} b_{2j}y_j+\varepsilon g_2(y_1,y_2,y_3,\varepsilon), \\ \dot{y}_3=\sum_{j=3}^{n} b_{3j}y_j+\varepsilon g_3(y_1,y_2,y_3,\varepsilon), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dot{y}_n=\sum_{j=3}^{n} b_{nj}y_j+\varepsilon g_n(y_1,y_2,y_3,\varepsilon). \end{cases} \tag{2}$$

По правой части системы (2) определим аналог функции Понтрягина[1]:

$$F(\rho)=\int_0^{2\pi}[g_1(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,0,0,\ldots,0)\cos\varphi+g_2(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,0,0,\ldots,0)\sin\varphi]d\varphi.$$

Напомним, что норма в пространстве непрерывных функций определяется следующим равенством: $\|x(t)\|=\max\limits_t|x(t)|$, где $|\cdot|$ — евклидова норма в пространстве R^n. Сформулируем необходимое условие существования периодических решений системы (1) при $\varepsilon\to 0, \varepsilon>0$.

Теорема 1. *Предположим, что для некоторой последовательности значений $\varepsilon=\varepsilon_k\neq 0, \varepsilon_k\to 0$, при $k\to\infty$ система (1) имеет периодическое решение $x(t+\omega_k,\varepsilon_k)\equiv x(t,\varepsilon_k)$, с наименьшим периодом $\omega_k=\omega(\varepsilon_k)>0$, удовлетворяющее условию $C_1\leq \|x(t,\varepsilon_k)\|<C_2$, $0<C_1<C_2$ заданные числа. Тогда существует такое $\rho_0\in[C_1,C_2]$ что $F(\rho_0)=0$.*

Сформулированное необходимое условие при некоторых дополнительных ограничениях поведения функции $F(\rho)$ в окрестности решения уравнения $F(\rho)=0$ является также и достаточным условием существования периодического решения системы (1) при достаточно малых значениях $\varepsilon>0$, а именно справедливо следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\rho_0>0$ – решение уравнения $F(\rho)=0$, и в окрестности $[\rho_0-\delta_0,\rho_0+\delta_0]$, точки ρ_0, где $\rho_0-\delta_0>0$, функция $F(\rho)\neq 0$ при $\rho\neq\rho_0$, причём $F(\rho_0-\delta_0)\cdot F(\rho_0+\delta_0)<0$. Тогда система (1) при достаточно малых значениях $|\varepsilon|>0$ имеет нестационарное $\omega(\varepsilon)$ – периодическое решение $x(t,\varepsilon)$.*

Литература

1. Баутин Н.Н. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* – М.: Наука, 1976. – 496 с.

2. Шарифзода З. И., Мухамадиев Э. М., Нуров И. Дж. *О циклических решениях уравнения Понтрягина с малым параметром* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2021. – Т. 194. – С. 167–171.

ON ONE ANALOGUE OF PONTRYAGIN'S THEOREM ON THE EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS DEPENDING ON A SMALL PARAMETER

Z.I. Sharifzoda, I.D. Nurov

This work considered the question of the existence of periodic solutions-cycles in nonlinear differential equations with a small parameter. Necessary and sufficient conditions for the existence of periodic solutions are obtained, they significantly expand the area of applicability of the small parameter method of L.S. Pontryagin from the theory of dynamic systems on the plane. Unlike the Pontryagin method, the differentiability of all functions included in the system is not assumed. Moreover, the system is not Hamiltonian. The work employs topological methods of nonlinear analysis. Based on the proposed methods, theorems on necessary and sufficient conditions for the existence of periodic solutions are formulated and proven, assuming the continuity of all functions included in the system. To simplify the studied system, the work uses a transition to the polar coordinate system and Jordan transformations.

Keywords: nonlinear differential equations, small parameter, Jordan transformation, homotopy, rotation of vector fields.

УДК 517.56

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: НОВЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ОБОБЩЕНИЯ

И.А. Шилин[1]

1 *ilyashilin@li.ru*; Московский технический университет связи и информатики; Национальный исследовательский университет МЭИ

Теоретико-групповыми методами выведены некоторые известные формулы для интегральных преобразований Мейера, Меллина, Бушмана–Эрдейи и Мелера–Фока и их обобщения.

Ключевые слова: преобразование Мейера, обратное преобразование Меллина, преобразование Бушмана–Эрдейи, преобразование Мелера–Фока, интеграл Барнса, максимальная компактная подгруппа, максимальная абелева подгруппа, максимальная нильпотентная подгруппа, представление группы.

Рассматриваются три родственные группы размерностей 3, 6 и 6, в каждой из которых выделяются некоторые подгруппы (максимальная компактная, максимальная абелева, максимальная нильпотентная и некоторые другие) и для каждой из которых вводятся два представления. В пространстве первого представления для выделенных подгрупп конструируются базисы, состоящие из общих собственных функций коммутирующих друг с другом операторов Казимира для соответствующей вложенной цепочки подгрупп.

Формула связи между Q-образами базисных функций, где Q — линейный оператор, сплетающий указанные выше представления, зависит от нескольких параметров. Присваивая этим параметрам нулевые значения, получаем в точности известные формулы для интегральных преобразований Мейера

$$\int_0^{+\infty} K_{\sigma+1/2}(t)\, J_{-\sigma-1/2}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\sigma/2)}{4\,\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)} \quad (-1 < \Re(\sigma), \tag{1}$$

$$\int_0^{+\infty} t^{-1/2} K_{\sigma+1/2}(t)\,\mathrm{d}t = 2^{-3/2}\,\Gamma(-\sigma/2)\,\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \quad (-1 < \Re(\sigma) < 0), \tag{2}$$

$$\int_0^{+\infty} [K_{\sigma+1/2}(t)]^2\,\mathrm{d}t = 2^{-2}\,\pi\,\Gamma(-\sigma/2)\,\Gamma(1+\sigma/2) \quad (-1 < \Re(\sigma), \tag{3}$$

$$\int_0^{+\infty} t\,[K_{\sigma+1}(t)]^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma(2+\sigma)\,\Gamma(-\sigma) \quad (-2 < \Re(\sigma) < 0)$$

и обратного преобразования Меллина (интегралов Барнса)

$$\int_{-\mathbf{i}\infty}^{+\mathbf{i}\infty} \Gamma\left[\frac{\sigma}{2}+1+t, -\frac{\sigma}{2}+t, -\frac{\sigma}{2}-t, \frac{\sigma}{2}+1-t\right]\mathrm{d}t = 2\pi\mathbf{i}\,\Gamma(-\sigma)\,\Gamma(\sigma+2) \quad (-2 < \Re(\sigma) < 0),$$

$$\int_{-\mathbf{i}\infty}^{+\mathbf{i}\infty} \left(\frac{p^2}{4}\right)^{-t} \Gamma\left[\frac{\sigma}{2}+1+t, -\frac{\sigma}{2}+t\right]\mathrm{d}t = 4\pi\mathbf{i}\,p\,K_{\sigma+1}(p) \quad (-2 < \Re(\sigma) < 0).$$

Кроме того, получена известные ранее формула для преобразования Бушмана–Эрдейи

$$\int_0^1 t^{-\sigma-2}\,P_n^{|m|}(t)\,P_{-\frac{1}{2}+\mathbf{i}p}^{-|m|}(t^{-1})\,\mathrm{d}t = (-1)^m\,2^{n-\sigma-2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\Gamma\left[\begin{matrix}\frac{n-|m|-\sigma+\mathbf{i}p}{2}, \frac{n-|m|-\sigma-\mathbf{i}p}{2}\\ 1+n-|m|, n-\sigma\end{matrix}\right]\times$$
$$\times\ {}_4F_3\left[\left.\begin{matrix}\frac{|m|-n}{2}, \frac{1+|m|-n}{2}, \frac{1+\sigma-n}{2}, 1-\frac{\sigma+n}{2}\\ \frac{1}{2}-n, \frac{5}{8}+\frac{\sigma+|m|-n+\mathbf{i}p}{2}, \frac{5}{8}+\frac{\sigma+|m|-n-\mathbf{i}p}{2}\end{matrix}\right|4\right] \quad \left(\Re(\sigma) < -\frac{1}{2}\right)$$

и связанная с ней формула для преобразования Мелера–Фока

$$\int_0^{+\infty} t\sinh(\pi t)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathbf{i}t\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mathbf{i}t\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\mathbf{i}t}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\mathbf{i}t}{2}\right)P_{-1/2+\mathbf{i}t}(s)\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2^{3/2-2\nu}\pi^{3/2}\,s^{-2\nu-1/2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\nu\right) \quad (0 \leqslant \Re(\nu) < \frac{1}{4}).$$

Для некоторых из этих формул найдены обобщения: они получаются из формул связи между Q-образами во втором пространстве представления, если придавать параметрам этих формул произвольные (допустимые) значения.

Подробный вывод формул (1) и (2) и их обобщений приведен в статье [2], а формулы (3) и ее обобщения — в работе [1].

Литература

1. Shilin I. A., Choi J. *On some formulas for single and double integral transforms related to the group* $SO(2,2)$ // Symmetry. – 2024. – V. 16. – Issue 9. – ID 1102.

2. Shilin I. A., Choi J. *Some formulas for Bessel functions related to* $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$*-matrices and an intertwining operator* // Integ. Transf. Spec. Func. – 2025. – V. 36. – Issue 2. – P. 132–144.

SOME FORMULAS FOR INTEGRAL TRANSFORMS: NEW PROOFS AND GENERALIZATIONS

I.A. Shilin

Some well-known formulas for the integral transformations of Meijer, Mellin, Bushman–Erdelyi and Mehler–Fock and their generalizations obtained by using group-theoretical methods.

Keywords: Meijer transform, Mellin transform, Bushman–Erdelyi transform, Mehler–Fock transform, Barnes integral, maximal compact subgroup, maximal Abelian subgroup, maximal nilpotent subgroup, group representation.

УДК 517.929.7

УСЛОВИЯ НА ГРАНИЧНЫЕ СМЕЩЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ КОНЕЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ В ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ВОЗВРАТА

Е.А. Широкова[1], М. Алхело[2]

1 *elena.shirokova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *alhelomustafa@outlook.sa*;

Для плоской задачи теории упругости рассматривается область с граничной точкой возврата, где при напряжении могут развиваться трещины. Найдены условия на представление в виде полиномов Фурье плоских граничных смещений в терминах полярного угла единичной окружности при соответствующем конформном отображении, которые обеспечивают конечные значения компонент тензора напряжений в граничных точках возврата. Построены примеры.

Ключевые слова: точка возврата, тензор напряжений, краевая задача.

Нахождение условий на граничные смещения, предотвращающих сингулярности напряжений в точке возврата, например, для области, полученной отображением $z(\zeta)=(\zeta-1)^2$, где $\zeta=1$ — прообраз точки возврата $z=0$, связь компонент тензора напряжений с граничными смещениями проявляется через комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \mathrm{Re}\left[2\Phi'(z) - z\overline{\Phi''(z)} - \overline{\Psi'(z)}\right],\\ \sigma_{22} &= \mathrm{Re}\left[2\Phi'(z) + z\overline{\Phi''(z)} + \overline{\Psi'(z)}\right],\\ \sigma_{12} &= -\mathrm{Im}\left[z\overline{\Phi''(z)} + \overline{\Psi'(z)}\right].\end{aligned} \tag{1}$$

Аналитические в соответствующей области функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ являются решением краевой задачи:

$$[-\kappa\Phi(z) + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]_{z=z(s)\in\partial D} = -2\mu(u(s) + i\,v(s)), \quad s \in [0, L]. \tag{2}$$

Введем обозначения $f(\zeta) = \Phi(z(\zeta))$, $g(\zeta) = \Psi(z(\zeta))$. Тогда краевое условие (2) примет вид:

$$[-\kappa f(\zeta) + \frac{z(\zeta)}{\overline{z'(\zeta)}}\overline{f'(\zeta)} + \overline{g(\zeta)}]_{\zeta=e^{i\theta}} = R_1(\theta) + iR_2(\theta), \quad \text{где } q(\zeta) = \overline{z}\left(\frac{1}{\zeta}\right). \tag{3}$$

Граничные смещения задаются в форме рядов Фурье:

$$R_1(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta,$$

$$R_2(\theta) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos k\theta + \delta_k \sin k\theta.$$

Очевидно, что раз точке возврата соответствует $\zeta = 1$,для того, чтобы значения компонент тензора напряжений были конечными в точке возврата, необходимо выполнение условий:

$$f'(1) = 0, \tag{4}$$

и

$$[\,q(\zeta)\left(\frac{f'(\zeta)}{z'(\zeta)}\right)' + g'(\zeta)\Big]_{\zeta=1} = 0. \tag{5}$$

В соответствии с необходимым условием ограниченности напряжений (4) и (5) мы получаем условие на заданные коэффициенты::

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\delta_k + i\gamma_k) + i\left[(\gamma_1 - \beta_1) + 2(\gamma_2 - \beta_2)\right] \cdot \frac{1-\kappa}{2\kappa^2 + \kappa - 1} = 0. \tag{6}$$

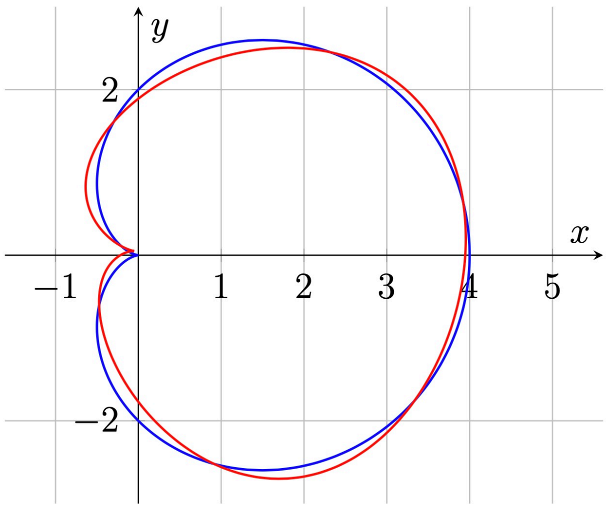
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k[(\alpha_k + \delta_k) - i(\beta_k - \gamma_k)] + \frac{\alpha_1 + \delta_1 + 2(\alpha_2 + \delta_2)}{4\kappa + 2} - i\frac{(\gamma_1 - \beta_1) + 2(\gamma_2 - \beta_2)}{4\kappa - 2} = 0. \tag{7}$$

Пусть, например, $\mu = 10$,

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -1, \qquad \delta_1 = -1,\ \delta_2 = -1,\ \delta_3 = 1,$$

$$\gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = -1,\ \gamma_2 = -1,\ \gamma_3 = 1, \qquad \beta_1 = -1,\ \beta_2 = -1,\ \beta_3 = 1.$$

В этом случае получаем результат смещений (красная линия):



CONDITIONS ON BOUNDARY DISPLACEMENTS THAT ENSURE FINITE VALUES OF THE STRESS TENSOR COMPONENTS AT THE BOUNDARY CUSP POINT

E.A. Shirokova, M. Alhelo

A domain with boundary cusp points is considered, where the boundary displacements can provide the stress that promotes crack propagation from the cusp. Boundary displacements in the form of Fourier polynomials are found that ensure the finite values of the stress tensor components at the cusp points. Examples are constructed where non-zero displacements yield finite stress tensor components at the boundary cusp points.

Keywords: cusp point, Stress tensor, Boundary value problem.

УДК 512.58, 517.986

О ФУНКТОРАХ МЕЖДУ КОМПАКТНЫМИ C^*-СООТНОШЕНИЯМИ

К.А. Шишкин[1]

1 *keril911@gmail.com*; Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

Т. А. Лорингом был предложен категорный подход к понятию универсальной C^*-алгебры, порождённой множеством образующих, удовлетворяющих набору соотношений. В рамках данного подхода рассматриваются категории, называемые C^*-соотношениями. Для заданного множества X объектами C^*-соотношения на X являются функции из X в C^*-алгебры, а морфизмами служат $*$-гомоморфизмы C^*-алгебр, делающие соответствующие треугольные диаграммы коммутативными. При этом объекты и морфизмы C^*-соотношения должны удовлетворять ряду естественных аксиом. C^*-соотношение, определяющее универсальную C^*-алгебру, называется компактным. Данный доклад посвящен функторам между C^*-соотношениями, заданными, вообще говоря, на различных множествах. Показывается, что каждый функтор между компактными C^*-соотношениями с точностью до изоморфизмов категорий является функтором между компактными $*$-полиномиальными соотношениями на одном и

том же множестве X.

Ключевые слова: C^*-соотношение, универсальная C^*-алгебра, функтор, $*$-полиномиальное соотношение.

В работе Т. А. Лоринга [1] был предложен категорный подход к понятию универсальной C^*-алгебры, порождённой множеством образующих, удовлетворяющих набору соотношений. В рамках данного подхода рассматриваются специальные категории представлений. Такие категории удовлетворяют ряду естественных аксиом и называются C^*-соотношениями. В этих терминах *универсальная C^*-алгебра, порождённая C^*-соотношением $\mathscr{R}$*, - это инициальный объект в категории $\mathscr{R}$. Однако, универсальная C^*-алгебра существует не для всякой категории $\mathscr{R}$. В том случае, когда C^*-соотношение определяет универсальную C^*-алгебру, оно называется компактным.

В [2] было показано, что всякое компактное C^*-соотношение изоморфно категории $*$-полиномиальных соотношений. Иначе говоря, порождающие соотношения соответствующей универсальной C^*-алгебры могут быть представлены множеством инволютивных полиномов от порождающих элементов. В [3] был установлен категорный критерий для существования универсальной C^*-алгебры для заданного множества порождающих соотношений. В [4] было показано, что всякий функтор между C^*-соотношениями, с точностью до изоморфизмов категорий, является функтором между $*$-полиномиальными соотношениями, заданными на одном и том же множестве. Соответствующие универсальные C^*-алгебры при этом являются изоморфными.

В докладе обсуждается следующий результат.

Теорема. *Пусть $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{F}_{X_1}$, $\mathscr{R}_2 \subset \mathscr{F}_{X_2}$ – компактные C^*-соотношения на множествах X_1 и X_2 соответственно и $\mathscr{T} : \mathscr{R}_1 \to \mathscr{R}_2$ – функтор. Тогда существуют множество Y, наборы инволютивных полиномов $P_1, P_2 \subset F(Y)$, функтор $\mathscr{G} \colon \mathscr{R}(Y, P_1) \to \mathscr{R}(Y, P_2)$ и изоморфизмы $\mathscr{V} : \mathscr{R}_1 \to \mathscr{R}(Y, P_1)$ и $\mathscr{W} : \mathscr{R}_2 \to \mathscr{R}(Y, P_2)$ такие, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{R}_1 \arrow[r, "\mathscr{T}"] \arrow[d, "\mathscr{V}"'] & \mathscr{R}_2 \arrow[d, "\mathscr{W}"'] \\
\mathscr{R}(Y, P_1) \arrow[r, "\mathscr{G}"] & \mathscr{R}(Y, P_2)
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Более того, имеют место изоморфизмы C^*-алгебр

$$C^*(\mathscr{R}_1) \cong C^*(Y, P_1) \text{ и } C^*(\mathscr{R}_2) \cong C^*(Y, P_2).$$

Литература

1. Loring T.A. *C^*-algebra relations* // Math. Scand. – 2010. – Vol. 107. – P. 43–72.

2. Berdnikov I.S., Gumerov R.N., Lipacheva E.V., Shishkin K.A. *On C^*-algebra and $*$-polynomial relations* // Lobachevskii J. Math. – 2023. – Vol. 44. – P. 1988–1995.

3. Gumerov R.N., Lipacheva E.V., Shishkin K.A. *Categorical criterion for existence of universal C^*-algebras* // Ufa Math. J. – 2024. – Vol. 16. – No. 3. – P. 113–124.

4. Шишкин К.А. *Функторы между C^*-соотношениями* // Известия вузов. Математика (в печати).

ON FUNCTORS BETWEEN COMPACT C^*-RELATIONS

K.A. Shishkin

In the framework of a categorical approach to the notion of a universal C^*-algebra generated by a set of generators subject to relations, T.A. Loring introduced and studied categories called the C^*-relations. Given a set X, a C^*-relation on X is a category whose objects are functions from X to C^*-algebras and morphisms are $*$-homomorphisms of C^*-algebras making the appropriate triangle diagrams commute. Moreover, these functions and $*$-homomorphisms satisfy certain natural axioms. A C^*-relation is said to be compact if it determines a universal C^*-algebra. In this report, it is shown that every functor between arbitrary compact C^*-relations is a functor between $*$-polynomial relations on the same set X up to isomorphisms of categories.

Keywords: C^*-relation, universal C^*-algebra, functor, $*$-polynomial relation.

УДК 517.52

ПРИЗНАКИ ДИНИ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА ХААРА

В.И. Щербаков[1]

1 *kafmathan@mail.ru*; Московский технический университет связи и информатики

В статье формулируются некоторые признаки сходимости рядов Фурье по системам типа Хаара, аналогичные признаку Дини.

Ключевые слова: системы типа Хаара, обобщённые системы Хаара, системы Прайса.

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k \, (n = 0,1,2,\ldots)$, а $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n = 0,1,2,\ldots p_n - 1\}$ — абелева группа последовательностей с операцией $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю p_n : $(\{x_n\}\dot{+}\{y_n\} = \{(x_n + y_n) \mathrm{mod} p_n\})$ и обратной операцией $\dot{-}$. Отображение $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{m_n}$ переводит группу последовательностей G на отрезок $[0,1]$ и является взаимно-однозначным, за исключением прообразов точек $\dfrac{l}{m_n}$ $(l = 1,2,3\ldots, m_n - 1;$ $n = 1,2,\ldots)$, которые имеют два прообраза. Поэтому на группу G с отрезка $[0,1]$ переносятся понятия меры и интеграла Лебега, а также понятия ортогональных и ортонормированных систем функций (под функцией будем понимать отображение группы G во множество комплексных чисел $\mathbb{C}$). Окрестностями нуля в G являются подгруппы $G_n = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G | x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0\}$. Эта топология задаёт непрерывные функции.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}\}$ — система типа Хаара, определённая и занумерованная в [1], а $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система Прайса [2].

Пусть $V(x) = m_n$, если $x \in G_{n-1} \setminus G_n$ и $S(x) = \dfrac{m_{n-1}}{\sin \dfrac{x_n}{p_n}}$ для $x \in G_{n-1} \setminus G_n (n = 0,1,\ldots)$

— мажоранты ядер Дирихле ($V(x)$ — мажоранта Виленкина, которая в [3] обозначена $[1/x]$). Для систем Прайса и систем типа Хаара эти мажоранты совпадают.

Один из 6 признаков сходимости Дини на системах Прайса даёт

Теорема DP (классический признак Дини) *При выполнении* **обоих** *условий*

$$\int\limits_{G} \frac{|f(x\dot{+}t)-f(x)|}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{G_n\setminus G_{n+1}} \frac{|f(x\dot{+}t)-f(x)|}{t}\,dt < \infty \text{ и}$$

$$\int\limits_{G} \frac{|f(x\dot{-}t)-f(x)|}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{G_n\setminus G_{n+1}} \frac{|f(x\dot{-}t)-f(x)|}{t}\,dt < \infty \qquad (1)$$

ряд Фурье по системе Прайса от функции $f(t)$ сходится к ней в точке x.

Для систем типа Хаара соответствующий признак выглядит следующим образом:

Теорема DH (классический признак Дини) *При выполнении* **обоих** *условий*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n\setminus G_{n=1}} \frac{|f(x\dot{+}t)-f(x)|}{t}\,dt = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n\setminus G_{n+1}} \frac{|f(x\dot{-}t)-f(x)|}{t}\,dt = 0 \qquad (2)$$

ряд Фурье по системе типа Хаара от функции $f(t)$ сходится к ней в точке x.

То есть для систем типа Хаара сходимость ряда (1) не требуется; достаточно, чтобы общий член этого ряда стремился к нулю.

Теорема KDS (классический симметричный признак Дини) *При выполнении* **обоих** *условий*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n\setminus G_{n+1}} \frac{|f(x\dot{+}t)+f(x\dot{-}t)-2f(x)|}{t}\,dt = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n\setminus G_{n+1}} \frac{|f(x\dot{+}t)-f(x\dot{-}t)|}{t}\,dt = 0 \qquad (3)$$

ряд Фурье по системе типа Хаара от функции $f(t)$ сходится к ней в точке x.

В зависимости от мажорант ядер Дирихле $V(x)$ и $S(x)$ существуют также V-признак Дини (признак Дини-Виленкина), симметричный V-признак Дини (симметричный признак Дини-Виленкина), S-признак Дини и симметричный S-признак Дини как для систем типа Хаара, так и для систем Прайса. В отличие от “классического” признака Дини в них требуется выполнение хотя бы одного из условий, аналогичного (1) (для систем Прайса) или (2) (для систем типа Хаара), причём оба этих условия будут эквивалентными. Подробнее об этом будет сказано в докладе, см. также [3] — [5].

Литература

1. Щербаков В.И. *Признак Жордана для систем типа Хаара* // Изв. вузов, сер. матем. – 2024. – № 11. – С. 61–80.

2. Price J.J. *Certain groups of orthonormal step functions* // Canad. J. Math. – 1957. – Vol. 9. – № 3. – P. 417–425.

3. Виленкин Н.Я. *Об одном классе полных ортонормальных систем* // Изв. АН СССР. сер. матем. – 1947. – Т. 11. – № 4. – С. 363–400.

4. Щербаков В.И. *Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для обобщённых систем Хаара* // Математические заметки. – 2017. – Т. 101. – № 31. – С. 446–473.

5. Щербаков В.И. *Сравнения V- и S-признаков Дини. Контрпримеры на симметричные признаки Дини по обобщённым системам Хаара и Уолша* // Изв. вузов, сер. матем. – 2019. – № 9. – С. 73–95.

DINI CONVERGENCE TEST FOR HAAR TYPE SYSTEMS

V.I. Shcherbakov

Some tests of convergence of the Fourier series for Haar type systems similar to Dini's tests are presented.

Keywords: Haar type systems, generalized Haar's systems, Price's systems.

УДК 517.9, 519.6

САМОРЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ МЕТОД ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Д.Д. Япаров[1]

1 *iaparovdd@susu.ru*; Южно-Уральский государственный университет(НИУ)

В работе предлагается подход к построению численных решений обратных задач в динамических измерительных системах, в условиях зашумленности исходных данных.

Ключевые слова: обратная задача, численный метод, динамиченские системы.

В настоящее время одной из актуальных задач в области ресурсосбережения является проблема эффективности контроля расхода жидкостей и газов в трубопроводах. Контроль осуществляется посредством кориолисовых расходомеров, которые можно представить в виде динамической системы с распределенными параметрами.

В данной работе предлагается численный метод определения колебаний прямолинейного участка трубы с учетом воздействия внешнего импульса с учетом потока жидкости в соответствии с результатами динамических измерений. Модель колебаний представлена дифференциальными уравнениями в частных производных четвертого порядка с заданными начальными и граничными условиями.

$$\frac{\partial^4\eta}{\partial^4\xi}+(\beta v^2+\gamma)\frac{\partial^2\eta}{\partial^2\xi}+2\beta v\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau}\partial\xi+(1+\beta)\frac{\partial^2\eta}{\partial^2\tau}+\chi\frac{\partial\eta}{\partial\tau},$$

где функция ξ характеризует расстояние от левого конца трубы до текущей точки, $\xi\in[0;L]$, а τ соответствует текущему моменту времени. В данной работе мы исследуем колебания элемента сечения трубы длиной L. Пусть v – приведенная скорость потока жидкости, $\beta=\frac{M_f}{M_T}$, где M_T – масса трубки на единицу длины, а M_f – масса жидкости на единицу длины, $\eta(\xi,\tau)$ — отклонение трубы от исходного состояния в направлении, перпендикулярном оси трубы, χ – коэффициент демпфирования, γ – отношение произведения осевого усилия и квадрата длины к жесткости при изгибе.

Поскольку концы трубного элемента жестко закреплены, граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид: $\eta(0,\tau)=\eta(L,\tau)=0, \eta'_\xi(0,\tau)=\eta'_x i(L,\tau)=0$.

Отсутствие дополнительного прогиба трубы в начальный момент времени для значений $\xi \in [0; L]$ реализуется в виде начального условия $\eta'_\tau(\xi,0) = 0$.

Ситуация, когда труба получает внешний импульс, представляется в виде дополнительного условия $\eta(\xi,0) = f(\xi)$.

В работе представлен метод обработки зашумленных динамических измерений, основанный на решении обратных задач, обладающий эффектом саморегуляризации для динамических систем с распределенными параметрами. Разработаны вычислительные схемы, на основе которых проведен вычислительный эксперимент и выполнен сравнительный анализ результатов восстановления входного сигнала с тестовыми функциями. Результаты эксперимента свидетельствуют о том, что предложенный метод сохраняет уровень погрешности восстановленного входного сигнала на уровне погрешности исходных данных.

SELF-REGULARIZING METHOD FOR DYNAMIC SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

D.D. Yaparov

The paper proposes an approach to constructing numerical solutions of inverse problems in dynamic measuring systems, under conditions of noisy initial data.

Keywords: inverse problem, numerical method, dynamic systems.

УДК 517.9, 519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Н.М. Япарова[1]

1 *natyap7@mail.ru; iaparovanm@susu.ru*; Южно-Уральский государственный университет(НИУ)

В статье обсуждается подход к построению численных решений обратных задач теплопередачи в условиях неопределенности, обусловленной отсутствием начальных условий в рассматриваемых задачах.

Ключевые слова: обратная задача, численный метод, устойчивость метода.

Реализация современных быстро протекающих энергоемких процессов связана с разработкой и исследованием методов обработки информации в автоматических системах управления технологическими процессами для систем с распределенными параметрами. Важнейшими объектами исследования, имеющими вид систем с распределенными параметрами, являются процессы, связанные с распределением тепла внутри технического объекта, когда по измерениям температуры в граничной области технического объекта необходимо определить внутреннее тепловое состояние объекта. Математические модели распределения тепла внутри объекта представлены обратными задачами теплопроводности. При этом особого внимания требуют технологические процессы, такие как комплексная и вторичная термообработки, диагностика теплового состояния работающего оборудования, в которых невозможно сформировать априорную информацию о начальном тепловом состоянии объекта, что, в свою очередь, приводит к отсутствию начальных условий в обратных задачах.

В данной работе представлен подход к построению методов решения обратных задач теплопроводности с неизвестными начальными условиями, Обобщенная математическая модель задач теплопереноса в линейном приближении имеет следующий вид. Объект представлен ограниченной замкнутой областью $\Omega \subset R^m$, $n = \overline{1, n}$. Измерения температуры проводятся во временном интервале $[0, T]$ на части внешней поверхности объекта. Этой части соответствует множество Г. Объект подвергается внешнему тепловому тепловому воздействию, плотность внешних тепловых потоков характеризуется функцией $G(x, t), x \in \Gamma$. Температуре тела соответствует функция $u(x, t)$, а теплофизические свойства материала характеризуются функциями $\rho = \rho(x, t)$, $c = c(x, t)$ и $\lambda = \lambda(x, t)$. Влияние теплообмена с окружающей средой представлено температурой окружающей среды и коэффициентом теплообмена с окружающей средой $h(x, t)$ и наличие возможных внутренних источников тепла учитывается в функции $f(x, t)$. Уравнение теплопереноса внутри объекта имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{s,k=1}^{m} a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_k} + \sum_{k=1}^{m} b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_k} + \gamma(x, t)u + f(x, t), \tag{1}$$

где $a = \frac{\lambda(x,t)}{c(x,t)\rho(x,t)}$, $b = \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}\frac{1}{c(x,t)\rho(x,t)}$, $\gamma(x, t) = \frac{-h(x,t)}{c(x,t)\rho(x,t)}$.

Тепловому режиму, оказывающему внешнее воздействие, соответствуют граничные условия

$$u(x, t)\,|_{\Gamma} = p(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial \overline{n}}\,|_{\Gamma} = g(x, t), \quad t \in [0, T].$$

где функция $g(x, t) = -\frac{G(x,t)}{\lambda(x,t)}$, а вектор n является нормалью к внешней границе объекта.

Принимая во внимание технические требования к отсутствию фазовых переходов второго рода и резких изменений температурных градиентов, получаем, что существуют $\Phi, \beta, C > 0$ такие, что

$$\left\{\max_{\overline{\Omega}_T}\left|\partial^2 u_t\right|, \max_{\overline{\Omega}_T}\left|\partial u_x\right|, \max_{\overline{\Omega}_T}\left|\partial^2 u_x\right|, \max_{\overline{\Omega}_T}\left|\partial^3 u_x\right|\right\} \le C,$$

$$\max_{\overline{\Omega}_T}|u(x, t)| \le \Phi e^{\beta(x+t)}.$$

Коэффициенты уравнения теплопроводности удовлетворяют условиям: $a(x, t) \in C^1(\Omega_T)$, $b(x, t) \in C(\Omega_T)$, $\gamma(x, t), f(x, t) \in C(\Omega_T)$, а множество $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.

Так как в начальный момент времени невозможно определить температуру во внутренних точках объекта без нарушения его целостности, получаем, что начальные условия не могут быть сформированы из результатов измерений и являются неизвестными. В задаче требуется найти значения $u(x, t)$, соответствующие температуре во внутренних точках объекта, а также в тех граничных точках, где она неизвестна.

В работе представлен подход к построению методов решения обратных задач теплопроводности с неизвестными начальными условиями. Разработаны вычислительные схемы и найдены условия, гарантирующие устойчивость предложенных численных методов. Проверка представленной концепции и реализованных вычислительных процедур проводилась посредством экспериментальных исследований.

Экспериментальные данные свидетельствуют о работоспособности предлагаемого подхода, а полученные практические показатели точности соответствуют теоретическим оценкам.

NUMERICAL SOLUTION OF INVERSE HEAT TRANSFER PROBLEMS UNDER UNCERTAINTY

N.M. Yaparova

The article discusses an approach to numerical solving the inverse heat transfer problems under uncertainty that is caused by the absence of initial conditions in these problems.

Keywords: inverse problem, numerical method, stability of the method.

УДК 517.984

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ

Ф.Ю.Яшиева[1]

1 ; Бухарский государственный педагогический институт, Бухара, Узбекистан

В данной работе рассматриваются модели Фридрихса с одномерным и двумерным возмущениями. Обсуждается вопрос об исследования собственных значений этих моделей Фридрихса с помощью математических пакетов.

Ключевые слова: модель Фридрихса, возмущения, собственное значение, математический пакет.

В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T})$ квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}$, рассмотрим модель Фридрихса вида

$$H^{(1)} := H_0 - V_1, \tag{1}$$

где H_0 – оператор умножения на функцию $u(\cdot)$:

$$(H_0 f)(x) = u(x) f(x), \quad f \in L_2(\mathbb{T});$$

а V_1 – интегральный оператор вида:

$$(V_1 f)(x) = v_1(x) \int_{\mathbb{T}} v_1(t) f(t) dt, \quad f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Здесь $u(\cdot)$ и $v_1(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции, определенные на торе $\mathbb{T}$.

При этих предположениях на параметр функции оператор $H^{(1)}$, определенный по формуле (1), ограничен и самосопряжен в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T})$.

Оператор возмущения V_1 невозмущенного оператора H_0 является одномерным самосопряженным оператором. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что $\sigma_{\rm ess}(H^{(1)}) = [m; M]$, где числа m и M определяются следующим образом:

$$m := \min_{x \in \mathbb{T}} u(x), \quad M := \max_{x \in \mathbb{T}} u(x).$$

Определим регулярную в $\mathbb{C}\setminus[m;M]$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $H^{(1)}$)

$$\Delta_1(z) := 1 - \int_{\mathbb{T}} \frac{v_1^2(t)\,dt}{u(t)-z}.$$

Отметим, что число $z \in \mathbb{C}\setminus[m;M]$ является собственным значением оператора $H^{(1)}$ тогда и только тогда, когда $\Delta_1(z)=0$. Из этого факта следует, что

$$\sigma_{\text{disc}}(H^{(1)}) = \{z \in \mathbb{C}\setminus[m;M] : \Delta_1(z) = 0\}. \tag{2}$$

Эта функция монотонно убывает на интервалах $(-\infty;m)$ и $(M;+\infty)$. Модель Фридрихса $H^{(1)}$ имеет максимум одно простое собственное значение, меньшее m, и не имеет собственных значений, больших M. Если параметр функции имеют явный вид, то можем найти приближенное значение собственных значений, используя математические пакеты, такие как MathCad и Maple.

Теперь в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T})$, рассмотрим модель Фридрихса вида

$$H^{(2)} := H_0 - V_1 - V_2, \tag{3}$$

где V_2 – интегральный оператор вида:

$$(V_2 f)(x) = v_2(x)\int_{\mathbb{T}} v_2(t) f(t)\,dt, \quad f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Здесь $v_2(\cdot)$ – вещественнозначная непрерывная функция, определенная на торе $\mathbb{T}$.

Можно легко проверить, что оператор $H^{(2)}$, определенный по формуле (3), ограничен и самосопряжен в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T})$.

По определению оператор $H^{(2)}$ является двумерным. Случай n-мерных возмущений проанализирован в работе [1].

Определим регулярную в $\mathbb{C}\setminus[m;M]$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $H^{(2)}$)

$$\Delta_2(z) := \left(1 - \int_{\mathbb{T}} \frac{v_1^2(t)\,dt}{u(t)-z}\right)\left(1 - \int_{\mathbb{T}} \frac{v_2^2(t)\,dt}{u(t)-z}\right) - \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{v_1(t)v_2(t)\,dt}{u(t)-z}\right)^2.$$

В отличие от функции $\Delta_1(\cdot)$, функция $\Delta_2(\cdot)$ не обладает свойством монотонности. Поэтому анализ собственных значений оператора $H^{(2)}$ представляет некоторую сложность. В работе [2] частично (в некоторых условиях на параметр функции) изучено количество собственных значений, их расположение и условия их существования модели Фридрихса $H^{(2)}$. Если параметрическая функция имеет специальный вид, то интервал, в котором лежит собственное значение, можно определить с помощью математических пакетов.

Литература

1. Rasulov T. H., Rasulova Z. D. *Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials* // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. – 2014. – Vol. 5. – No. 3. – P. 327–342.

2. Расулов Т. Х. *Существенный спектр одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке* // ТМФ. – 2011. – Том 166. – № 1. – С. 95–109.

STUDY OF EIGENVALUES OF FRIEDRICHS MODEL USING MATHEMATICAL REDACTOR

F.Yu. Yashieva

In this work we consider the Friedrichs model with rank one and two perturbations. The eigenvalues of these models are investigated using mathematical redactor.

Keywords: model Friedrichs, perturbation, eigenvalue, mathematical redactor.

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Т. 69

XVII МЕЖДУНАРОДНАЯ КАЗАНСКАЯ

ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ

”ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ”

Материалы конференции

(Казань, 23 – 28 августа 2025 г.)

Техническая редакция, набор и верстка: А. Ю. Дютин.