Казанский государственный университет
им. В.И. Ульянова-Ленина

Б.Н. БУРМИСТРОВ, Л.Р. СЕКАЕВА

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебное пособие

Казань
2009

УДК 512.64:514.74
ББК 22.143:22.151.5
Б 91

Печатается по рекомендации
Научно-методического совета
геологического факультета КГУ

Научный редактор: зав.кафедрой общей математики,
профессор Матвейчук М.С.

Рецензенты: доцент кафедры общей математики КГУ
Абубакиров Н.Р., доцент Уткина Е.А.

Бурмистров Б.Н., Секаева Л.Р.
Б91 Элементы линейной алгебры и аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве: учеб. пособие / Б.Н. Бурмистров, Л.Р. Секаева, Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2008г. – 81 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей. Оно содержит краткое описание теории по рассматриваемому вопросу и примеры решения задач. В пособии имеются как решенные, так и не решенные задачи, но с ответами.

В пособие включены следующие вопросы следующие вопросы: определители, матрицы, решения линейных систем тремя методами – методом Крамера, матричным методом, т.е. с помощью обратной матрицы и методом Гаусса, векторы, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.

УДК 512.64:514.74
ББК 22.143:22.151.5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В этот раздел включены следующие вопросы:
§ 1. Определители 2-ого и 3-ого порядков. Их свойства. Определители n-ого порядка и их способ вычисления.
§ 2. Матрицы. Операции над матрицами. Обратная матрица.
§ 3. Решение линейных систем и их исследование. Метод Крамера, метод решения систем с помощью обратной матрицы, метод Гаусса.

§ 1. Определители 2-ого и 3-ого порядков

<u>Определение 1.</u> Определителем 2-ого порядка является символ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и этот символ равен числу $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

<u>Определение 2.</u> Определителем 3-ого порядка называется число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \tag{2}$$

Правило вычисления определителя 2-ого порядка запомнить легко: говорят, что элементы a_{11} и a_{22} лежат на главной диагонали, а элементы a_{12} и a_{21} – на побочной диагонали. Стало быть, определитель 2-ого порядка равен разности между произведениями элементов, лежащих на главной и побочной диагоналях. Например,

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -10.$$

Определители 3-ого порядка обычно вычисляются с использованием следующего правила Саррюса: одно из трех слагаемых, входящих в правую часть (2) со знаком «+», есть произведение элементов главной диагонали, каждое из двух других – произведение элементов, лежащих на параллельной линии к этой диагонали и элемента из противоположного угла, а слагаемые, входящие в (2) со знаком «–», строятся таким же образом, но относительно побочной диагонали. Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 3+(-1)\cdot(-4)\cdot 1+(-3)\cdot 2\cdot 1-1\cdot 2\cdot 1-(-1)\cdot(-3)\cdot 3-(-4)\cdot 2\cdot 2=$$

$$=12+4-6-2-9+16=15.$$

<u>Свойства определителей на примере определителя 3-ого порядка</u>

<u>Свойство 1.</u> Величина определителя не изменится, если все его строки заменить столбцами, причем каждую строку заменить столбцом с тем же номером, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$ (проверка по правилу Саррюса).

<u>Свойство 2.</u> Перестановка двух столбцов или двух строк определителя меняет знак определителя на обратный.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$ (проверить самим).

<u>Свойство 3.</u> Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковых строки, то такой определитель равен нулю.

<u>Свойство 4.</u> Общий множитель в строке или в столбце можно вынести за знак определителя.

<u>Свойство 5.</u> Если элементы некоторого ряда (столбца или строки) равны нулю, то сам определитель равен нулю.

<u>Свойство 6.</u> Если элементы двух параллельных рядов (строк или столбцов) пропорциональны, то определитель равен нулю.

<u>Свойство 7.</u> Если каждый элемент некоторого ряда представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен

в виде суммы двух определителей, из которых один в указанном ряде имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой – вторые; элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a'_{22}+a''_{22} & a'_{23}+a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(доказать самим).

Свойство 8. Если к элементам некоторого ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+\lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+\lambda a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{13}+\lambda a_{31} \end{vmatrix}.$$

Остальные свойства определителей связаны с понятием минора и алгебраического дополнения. Минором некоторого элемента a_{ij} называется определитель, получаемый из данного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент a_{ij} и обозначается M_{ij}. Например, $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ и т.д.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (будем обозначать A_{ij}) равняется минору этого элемента, взятому со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца на пересечении которых расположен элемент, есть число четное, и с обратным знаком, если это число нечетное, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{3}$$

Свойство 9. Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ равен сумме произведений элементов некоторого ряда на их алгебраические дополнения.

Иначе говоря, можно получить 6 равенств:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$
$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \text{ и } \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},$$
$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \qquad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

<u>Свойство 10.</u> Сумма произведений элементов некоторого ряда на алгебраические дополнения параллельного ему ряда равна нулю.

Таких равенств будет 12, потому что каждый ряд (а их шесть) даст два равенства. Например,

$$\begin{matrix} a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0 \\ a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0 \end{matrix} \text{ и т.д. (проверить самим).}$$

Все эти свойства верны и для определителя порядка n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители 2-ого порядка:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \sqrt{\cos x} & -\sqrt{\sin x} \\ \sqrt{\sin^3 x} & \sqrt{\cos^3 x} \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} x+1 & y-z \\ x^2+x & xy-xz \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg} x & \sin x \\ \sin x & \mathrm{tg} x \end{vmatrix}$.

Ответы: 1) 10; 2) 0; 3) 1; 4) 0; 5) $\mathrm{tg}^2 x - \sin^2 x$.

Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} x & x-2 \\ -3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} \cos 3x & -\sin 2x \\ \sin 3x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0$;

3) $\begin{vmatrix} 4\cos\frac{x}{4} & 1 \\ 1 & \sin\frac{x}{4} \end{vmatrix} = 0$;

4) $\begin{vmatrix} x+1 & -3 \\ x & x-2 \end{vmatrix} = 0$; 5) $\begin{vmatrix} \cos x+1 & \sin x-1 \\ \sin x+1 & \cos x-1 \end{vmatrix} = 0$.

Ответы: 1) $x_1 = -3, x_2 = 2$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$; 3) $x = 2(-1)^k + 2\pi k, k \in Z$;

4) $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$; 5) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 1-3x & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & x+1 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$; 3) $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} < -5$;

4) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} < \frac{1}{2}$; 5) $\begin{vmatrix} x^2 & 2x \\ 5x & x^2 \end{vmatrix} < -9$.

Ответы: 1) $x < 0,2$; 2) $x > 2$; 3) $x \in (1;5)$; 4) $k\pi - \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$;

5) $x \in (-3;-1) \bigcup (1;3)$.

Вычислить определители 3-ого порядка:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} x+y & x & x \\ x & z+x & x \\ x & x & u+x \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

Ответы: 1) 0; 2) 21; 3) -50; 4) $xu(z+y)+yz(u+x)$; 5) $(y-x)(z-x)(z-y)$.

Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

3) $\begin{vmatrix} x & 2 & x-1 \\ 0 & x & 1-x \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4x+2$.

Ответы: 1) $x=-3$; 2) $x_1=-10$, $x_2=2$; 3) $x_1=0$, $x_2=-2$.

Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \le 2$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 2$;

3) $\begin{vmatrix} x & 1 & x-1 \\ 0 & x & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \le 0$.

Ответы: 1) $x \ge 3$; 2) $x \in \varnothing$; 3) $x \in (-\infty;-2] \cup \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Пользуясь свойством 9, а также и другими свойствами, вычислить следующие определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -6 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$.

Ответы: 1) 30; 2) 0; 3) 60; 4) $A\cdot B\cdot C\cdot D$, где $A=a+b+c+d$, $B=-a-b+c+d$, $C=a-b-c+d$, $D=a-b+c-d$; 5) $M\cdot L\cdot N$, где $M=a+b+c+d$, $L=a-b+c-d$, $N=(a-c)^2+(b-d)^2$.

При вычислении определителей высокого порядка нужно в каком-нибудь ряде (столбце или строке) сделать все элементы нулями, кроме одного и затем воспользоваться свойством 9. При этом порядок определителя понижается на единицу, а затем эту операцию повторить с полученным определителем.

Пример. 1) Вычислить определитель 5-ого порядка.

$$\begin{array}{c} (3)\ (1)\ (-3) \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

В данном определителе первые две строки оставим без изменения, затем первую строку умножим на (-3) и прибавим к третьей, затем первую строку прибавим к четвертой и, наконец, первую строку умножим на 3 и прибавим к пятой строке. В результате получили определитель с одним элементом (-1) в первом столбце, а остальные будут нулями. Можно разложить определитель по элементам этого столбца. Получим

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & -3 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \\ 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

(2)

(-2)

С этим определителем поступаем аналогично: умножим первый столбец на 2 и прибавим ко второму столбцу, затем первый столбец умножим на (-2) и прибавим к третьему.

В результате получим

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -10 & 5 & 9 \\ 1 & 5 & 1 & -4 \\ 8 & 11 & -13 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -10 & 5 & 9 \\ 5 & 1 & -4 \\ 14 & -13 & -5 \end{vmatrix} \quad (-5) \quad (13) \quad =$$

$$= -\begin{vmatrix} -35 & 0 & 29 \\ 5 & 1 & -4 \\ 79 & 0 & -57 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -35 & 29 \\ 79 & -57 \end{vmatrix} = 79 \cdot 29 - 35 \cdot 57 = 296.$$

2) Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 2 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15316.$$

3) Доказать, что определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \min(i; j)$ равен 1.

4) Доказать, что определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \max(i; j)$ равен $(-1)^{n+1} \cdot n$.

§ 2. Матрицы. Операции над матрицами

Матрицей размера $m \times n$ или $(m \times n)$ – матрицей называется прямоугольная таблица из чисел $a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) = \left\| a_{ij} \right\|,$$

состоящая из m строк и n столбцов.

Суммой $A+B$ $(m \times n)$ матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$ того же порядка, каждый элемент которой, равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Произведением λA матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$, получающаяся из матрицы A умножением всех ее элементов на λ:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Произведением AB $(m \times n)$ – матрицы A на $(n \times k)$ – матрицу $B = (b_{ij})$ называется $(m \times k)$ – матрица $C = (c_{ij})$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,k}.$$

1) Вычислить $2A - 3B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2) Вычислить: a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 3 & 3\cdot 2 + 4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot 5 & 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 4 & 3\cdot 2 + 4\cdot 5 & 3\cdot 3 + 4\cdot 6 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 4 & 5\cdot 2 + 6\cdot 5 & 5\cdot 3 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 9 + (-3)\cdot 6 & 2\cdot(-6) + (-3)\cdot(-4) \\ 4\cdot 9 + (-6)\cdot 6 & 4\cdot(-6) + (-6)\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$; k) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^5$.

Ответы: 1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -12 & -9 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$; 2) d) $\begin{pmatrix} 23 & 28 \\ 49 & 68 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 14 & -7 & -3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 11 \\ 4 & -2 & 9 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 24 & 16 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица

Сначала дадим несколько определений на основе матриц 3-ого порядка, т.е. $m = n = 3$.

1. Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю;

2. Единичной матрицей называется матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если даны две матрица A и B, то, вообще говоря, $AB \neq BA$, т.е. переместительный закон по отношению к произведению матриц не выполняется. Но для единичной матрицы этот закон выполняется: $EA = AE = A$.

3. $\det A$ – есть определитель матрицы, $\det$ – детерминант.

Если $\det A \neq 0$, то матрица A называется невырожденной, в противном случае она вырожденная.

4. Матрица B называется обратной по отношению к матрице A, если произведение $AB = E$.

Для матрицы, обратной по отношению к матрице A вводят обозначение A^{-1}.

Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$ где A_{ij} – алгебраические дополнения.

При умножении матриц A и A^{-1} выполняется переместительный закон $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Пример. Найти обратные матрицы:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=16+6-30+4=-4\neq 0$, поэтому A^{-1} существует.

$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4$, $A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7$, $A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6$,

$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8$,

$A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9$, $A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10$, $A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4$,

$A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5$,

$A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6$, $A^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ 7/4 & -9/4 & 5/4\\ 3/2 & -5/2 & 3/2\end{pmatrix}$.

Найти обратные матрицы A^{-1}:

2) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\-2&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

Ответы и решения: 2) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-5}{18}&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}\\\frac{1}{18}&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}\\\frac{7}{18}&\frac{5}{18}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix}1/9&2/9&2/9\\2/9&1/9&-2/9\\2/9&-2/9&1/9\end{pmatrix}$,

4) $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$,

5) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2/3&-4/3&-1\\-4/3&-5/3&-2\\1/3&2/3&1\end{pmatrix}$.

§ 3. Решение линейных систем и их исследование

Метод Крамера. Рассмотрим систему $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases}$

Ее решение имеет вид $x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$, $x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

Это решение можно записать в виде:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{4}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – определитель системы, а

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Эти формулы верны и для систем 3-ого порядка:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{5}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – определитель системы,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Т.е. Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ получаются из определителя системы Δ путем замены i-го столбца на столбец свободных членов. Формулы (4) и (5) называются формулами Крамера. Эти формулы верны и для систем n уравнений с n неизвестными. Из этих формул видно, что система имеет единственное решение, если $\Delta \neq 0$.

Методом Крамера решить следующие системы:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2ax_1 - 3bx_2 = 0, \\ 3ax_1 - 6bx_2 = ab. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ 3x_1+2x_2+x_3=10, \\ 4x_1+3x_2-2x_3=4. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+3x_3=14, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=16. \end{cases}$

Ответы: 1) $x_1=1$, $x_2=2$; 2) $x_1=-b$, $x_2=-{}^2\!/_3\,a$;

3) $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}}=\dfrac{29}{-29}=-1$, $x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix}}{-29}=\dfrac{-87}{-29}=3$,

$$x_3=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}}{-29}=\dfrac{-145}{-29}=5;$$

4) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$; 5) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Решить системы методом Крамера:

6) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3=1, \\ x_1-2x_2+4x_3=3, \\ 3x_1-x_2+5x_3=2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1+4x_2+6x_3=3, \\ x_1+2x_2+3x_3=4, \\ 3x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ 2x_1+x_2-x_3=3, \\ 3x_1+3x_2+2x_3=7. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 3x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

Ответы: 6) $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$; 7) несовместна; 8) неопределенна; 9) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -3$; 10) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$; 11) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$; 12) $x_1 = 2, x_2 = x_3 = x_4 = 0$; 13) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -2$.

Исследование систем

Из формул (4) видно, что возможны три случая:

1) если $\Delta \neq 0$, то x_1 и x_2 находятся единственным образом, т.е. решение системы единственно.

2) если $\Delta = 0$, то возможны два случая: $\{x_1 \cdot \Delta = \Delta_1,\, x_2 \cdot \Delta = \Delta_2\} \Rightarrow$

a) $\Delta = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то решений бесчисленное множество;

b) $\Delta = 0$, $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$. Тогда решений нет, т.е. система несовместна.

Для системы трех уравнений исследование аналогично. Запишем формулы (5) в виде $\{x_1 \cdot \Delta = \Delta_1,\, x_2 \cdot \Delta = \Delta_2,\, x_3 \cdot \Delta = \Delta_3\}$. Отсюда получаем

1) если $\Delta \neq 0$, то решение единственно, т.е. система совместна;

2) если $\Delta = 0$, то возможны следующие случаи:

a) $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то решений бесконечное число;

В этом случае возможны два подслучая:

1)' Исходная система эквивалентна двум уравнениям с тремя неизвестными. Фиксируя одно неизвестное как произвольный параметр, то два других неизвестных находятся через него.

2)' Исходная система эквивалентна одному уравнению с тремя неизвестными. Считая два неизвестных параметрами, оставшееся неизвестное выражается через эти два параметра.

b) $\Delta = 0$ и хотя бы один из $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ отличен от нуля, то система не имеет решений, т.е. она несовместна.

Решение систем матричных методом

Пусть даны матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, тогда система $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$ может быть записана в матричной форме

$$AX = B. \tag{6}$$

Здесь матрица столбец X искомая матрица. Предположим, что матрица A невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$, тогда существует обратная матрица A^{-1}.

Умножим равенство (6) слева на A^{-1}, получим

(7) $A^{-1}AX = A^{-1}B$, но $A^{-1}A = E$ и $EX = X$, т.к. E – единичная матрица. Стало быть, уравнение (7) дает решение системы:

$$X = A^{-1}B. \tag{8}$$

Пример. Решить систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Находим обратную матрицу A^{-1}. Найдем $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 4 + 6 = 5$. Следовательно, матрица A невырожденная. Обратная матрица существует.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 & -1/5 & 1 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \\ 6/5 & -3/5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7&-1&5\\-2&1&0\\6&-3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7\cdot 3+(-1)\cdot 1+5\cdot(-3)\\-2\cdot 3+1\cdot 1+0\cdot(-3)\\6\cdot 3-3\cdot 1+5\cdot(-3)\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

стало быть, $x_1=1, x_2=-1, x_3=0$.

Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}$; 2) $X\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\-5&6\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3&-1\\5&-2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&16\\9&10\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$.

Ответы: 1) $\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}6&4&3\\18&-47&2\\3&3&3\end{pmatrix}$.

Решить системы матричным методом, т.е. с помощью обратной матрицы:

5) $\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=0,\\2x_1+x_2-4x_3=16,\\x_1+x_3=-2.\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x_1+2x_2=5,\\x_2+2x_3=8,\\x_3+2x_4=11,\\2x_1+x_4=6.\end{cases}$

7) $\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$.

Ответы: 5) $x_1=1, x_2=2, x_3=-3$;

6) $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$;

7) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример. Решим № 3. Это уравнение имеет вид:
$A\,X\,B = C$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдем обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

Данное уравнение $A\,X\,B = C$ умножим слева на A^{-1}, затем справа на B^{-1}. Будем иметь $\left(A^{-1}A\right)X\,B = A^{-1}C \Rightarrow E\,X\,B\,B^{-1} = A^{-1}C\,B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}C\,B^{-1}$. Это и есть решение, нужно лишь перемножить три матрицы.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 14 + (-1)\cdot 9 & 2\cdot 16 + (-1)\cdot 10 \\ 5\cdot 14 + (-3)\cdot 9 & 5\cdot 16 + (-3)\cdot 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19\cdot(-4) + 22\cdot 7/2 & 19\cdot 3 + 22\cdot\left(-5/2\right) \\ 43\cdot(-4) + 50\cdot 7/2 & 43\cdot 3 + 50\cdot\left(-5/2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Это и есть ответ.

Рассмотрим однородную систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases}$

Для этой системы в формулах Крамера все $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, ибо один из столбцов в этих определителях равен нулю. Поэтому, если Δ – определитель системы не равен нулю ($\Delta \neq 0$), тогда уравнения: $x_1 \cdot \Delta = 0$, $x_2 \cdot \Delta = 0$, $x_3 \cdot \Delta = 0$ имеют лишь тривиальное решение, т.е. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Но если $\Delta = 0$, тогда все x_1, x_2, x_3 – могут быть произвольными. Здесь могут быть различные случаи:

1) В однородной системе третье уравнение будет следствием двух других, поэтому может быть отброшено. Тогда будем иметь два уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases} \text{ Пусть } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решим эту систему по формулам Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3. \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}x_3 & a_{12} \\ -a_{23}x_3 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{x_3}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}x_3 \\ a_{21} & -a_{23}x_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{x_3}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$ Обозначим $\frac{x_3}{\Delta} = t$. Тогда

$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} t$, $x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} t$, $x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} t$, где t – любое вещественное число.

2) В однородной системе два уравнения могут быть следствием одного, тогда система сведется к одному уравнению $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$.

Пусть $a_{11} \neq 0$. Решением будет $x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3$, где x_2 и x_3 – произвольные числа, т.е. число решений и здесь бесчисленное множество.

Метод Гаусса. Этот метод применяют когда число уравнений в системе велико. Этот метод заключается в последовательном исключении неизвестных. Поясним этот метод на системе 4-х уравнений с 4-мя неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \qquad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \qquad (2)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \qquad (3)$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. \qquad (4)$$

Допустим, что $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то изменим порядок уравнений, выбрав первым уравнение то, в котором коэффициент при x_1 не равен нулю).

Первый шаг. а) делим уравнение (1) на a_{11}, b) умножаем полученное уравнение на a_{21} и вычтем из (2); затем умножим на a_{31} и вычтем из (3); наконец, умножим на a_{41} и вычтем из (4). В результате первого шага будем иметь систему

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \qquad (5)$$

$$b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}, \qquad (6)$$

$$b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 = b_{35}, \qquad (7)$$

$$b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 = b_{45}. \qquad (8)$$

причем b_{ij} получаются по следующим формулам

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2,3,4,5),$$

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{ii}b_{ij} = a_{ij} - a_{i1}\frac{a_{ij}}{a_{11}} \quad (i = 2,3,4;\ j = 2,3,4,5).$$

Второй шаг. Поступаем с уравнениями (6), (7), (8) точно так же, как с уравнениями (1), (2), (3), (4) и т.д. В итоге исходная система преобразуется к так называемому треугольному виду

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_{24}x_4 = b_{15}, \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = c_{25}, \\ \qquad\qquad x_3 + d_{34}x_4 = d_{35}, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = e_{45}. \end{cases}$$

Эта система эквивалентна исходной и решается без труда, начиная с последнего уравнения.

Если исходная система имеет единственное решение, то последнее уравнение треугольной системы будет содержать одно неизвестное. В случае неопределенной системы, т.е. такой, в которой число неизвестных больше числа линейно независимых уравнений, допускающей поэтому бесчисленное множество решений треугольной системы не будет, так как последнее уравнение будет содержать более одного неизвестного.

Когда же система уравнений несовместна, то после приведения к треугольному (или ступенчатому) виду она будет содержать хотя бы одно уравнение вида $0=1$, т.е. уравнение, в котором все неизвестные имеют нулевые коэффициенты, а правая часть отлична от нуля. Такая система не имеет решений.

Практически удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов. На практике обычно вводят дополнительный контрольный столбец, каждым элементом которого является сумма всех элементов стоящих в строке до него. При линейных преобразованиях элементов матрицы такому же преобразованию должны подвергать и элементы контрольного столбца. Нетрудно видеть, что каждый элемент контрольного столбца преобразованной матрицы будет равен сумме элементов соответствующей строки.

Переход от одной матрицы к другой будем записывать при помощи знака эквивалентности « ~ ».

Пример. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ строим матрицу:

$$(-3)\,(-1)\,(-2)\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 & -16 \end{array}\right) \sim$$

Здесь мы умножили первую строку на (-2) и прибавили ко второй строке, затем первую строку умножили на (-1) и прибавили к третьей строке, затем первую строку умножили на (-3) и прибавили к четвертой строке. При этих операциях система осталась эквивалентной исходной. В полученной матрице переставим третью строку со второй.

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 & -9 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 & -16 \end{array}\right) (-3)\,(-4) \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 & -15 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & -20 & -24 \end{array}\right) \sim$$

В полученной матрице умножим вторую строку на (-3) и прибавим к третьей строке, затем вторую строку умножим на (-4) и прибавим к четвертой строке, поделим последнее уравнение на 4 и переставим с третьим

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 & -15 \end{array}\right) (-5) \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & 15 \end{array}\right) \sim$$

В полученной матрице умножим третью строку на (-5) и прибавим к четвертой строке. В полученной матрице поделим четвертую строку на 3. Мы получили треугольную матрицу, которая легко решается.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4, \\ x_2 - x_4 &= -2, \\ x_3 - 2x_4 &= -5, \\ x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Ответ: $x_4 = 4, x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$.

Методом Гаусса решить следующие системы:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 2$.

2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_4 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 3, x_4 = 1, x_5 = 2$.

3) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

4) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = -1$.

5) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

Решить системы методом Гаусса:

6) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

Ответы: 6) $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = -2, x_4 = 2$;

7) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -{}^3\!/_2$;

8) система несовместна;

9) $x_1 = t, x_2 = -13 + 3t, x_3 = -7, x_4 = 0$, где t – произвольное число, т.е. решений бесчисленное множество.

Примеры. Приведем решение систем (8) и (9).

Решение (8).

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 & 6 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 & 12 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -5/3 & 2/3 & 4/3 & 2/3 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 & 12 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim$$

Здесь мы поделили первое уравнение на первый коэффициент. Затем умножаем первое уравнение на (-7) и прибавляем ко второму уравнению, потом первое уравнение умножаем на (-5) и прибавляем к третьему. Получим систему эквивалентную исходной:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -5/3 & 2/3 & 4/3 & 2/3 & 2 \\ 0 & 23/3 & -11/3 & -19/3 & 1/3 & -2 \\ 0 & 46/3 & -22/3 & -38/3 & -1/3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -5/3 & 2/3 & 4/3 & 2/3 & 2 \\ 0 & 23/3 & -11/3 & -19/3 & 1/3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

В предпоследней матрице мы умножили второе уравнение на (-2) и прибавили к последнему и получили последнее уравнение: $0 = -1$, что невозможно. Стало быть, система несовместна.

Решение (9). Операции проводим такие же.

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 & 21 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 & 16 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -1/3 & 5/9 & 2/3 & 4/9 & 7/3 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 & 16 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 & 11 \end{array}\right) (-6)\,(-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -1/3 & 5/9 & 2/3 & 4/9 & 7/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 7/3 & 2 \\ 0 & 0 & 4/3 & 12 & -28/3 & 4 \end{array}\right)$$

третье уравнение дает $-\frac{1}{3}x_3 = \frac{7}{3} \Rightarrow x_3 = -7$,

четвертое уравнение дает $\frac{4}{3}\cdot(-7) + 12x_4 = -\frac{28}{3} \Rightarrow x_4 = 0$.

Из первого уравнения получаем $x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{35}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow x_1 = t,\ x_2 = -13 + 3t$.

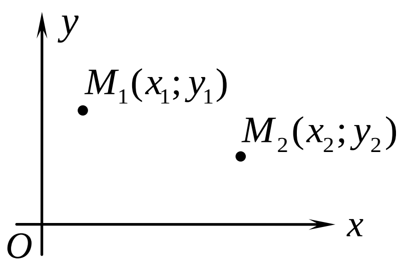
ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Этот раздел математики есть объединение алгебры и геометрии. В него обычно включают (для инженерных специальностей): аналитическую геометрию на плоскости, векторную алгебру и аналитическую геометрию в пространстве.

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Метод координат

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат xOy. Тогда каждая M на плоскости будет определена двумя координатами: $M(x;y)$, x – абсцисса, y – ордината.



1) Расстояние между точками M_1 и M_2 определяются по формуле:

$$d=\left|M_1M_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,;$$

2) Если точка M_3 делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, т.е. $\dfrac{M_1M_3}{M_3M_2}=\lambda$, то координаты точки деления $M_3(x_3;y_3)$ определяются по формулам:

$$x_3=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y_3=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Если $\lambda=1$, то M_3 есть середина отрезка M_1, M_2, поэтому координаты середины отрезка определяются по формулам:

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_3=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

3) Площадь треугольника определяется по формуле:

$$S=\pm\frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right],$$

где $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ – вершины треугольника.

Эту формулу легко запомнить, если ее запишем в виде определителей:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

1. Даны точки $A(0;0)$, $B(3;-4)$, $C(-3;4)$, $D(-2;2)$, $E(10;-3)$. Определить расстояние между точками: 1) A и B; 2) B и C; 3) A и C; 4) C и D; 5) A и D; 6) D и E.

2. Даны две противоположные вершины квадрата $P(3;5)$ и $Q(1;-3)$. Вычислить его площадь.

3. Сторона ромба равна $5\sqrt{10}$, две его противоположные вершины суть точки $P(4;9)$ и $Q(-2;1)$. Вычислить площадь этого ромба.

4. Доказать, что треугольник с вершинами $A(1;1)$, $B(2;3)$ и $C(5;-1)$ прямоугольный.

5. На оси абсцисс найти точку M, расстояние которой до точки $N(2;-3)$ равнялось бы 5.

6. На оси ординат найти точку M, расстояние которой до точки $N(-8;13)$ равнялось бы 17.

7. Даны две точки $M(2;2)$ и $N(5;-2)$; на оси абсцисс найти такую точку P, чтобы угол MPN был прямым.

8. Через точку $M_1(1;-2)$ проведена окружность радиуса 5, касающейся оси Ox. Определить координаты центра C окружности.

9. Определить координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(1;2)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(1;0)$ и $B(-1;-2)$.

10. Даны две противоположные вершины квадрата $A(3;0)$ и $C(-4;1)$. Найти две его другие вершины.

11. Даны две смежные вершины квадрата $A(2;-1)$ и $B(-1;3)$. Определить две его другие вершины.

12. Даны вершины треугольника $M_1(-3;6)$, $M_2(9;-10)$ и $M_3(-5;4)$. Определить центр C и радиус R описанного около этого треугольника круга.

13. Точки $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ и $P(-2;2)$ являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.

14. Даны три вершины $A(2;3)$, $B(4;-1)$ и $C(0;5)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D.

15. Даны вершины треугольника $A(1;4)$, $B(3;-9)$, $C(-5;2)$. Определить длину его медианы, проведенной из вершины B.

16. Даны вершины треугольника $A(3;-5)$, $B(-3;3)$, $C(-1;-2)$. Определить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

17. Даны вершины треугольника $A(2;-5)$, $B(1;-2)$, $C(4;7)$. Найти точку пересечения со стороной AC биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

18. Точка M пересечения медиан треугольника лежит на оси абсцисс, две вершины его – точки $A(2;-3)$ и $B(-5;1)$, третья вершина C лежит на оси ординат. Определить координаты точек M и C.

19. Точки $A(4;2)$, $B(7;-2)$ и $C(1;6)$ являются вершинами треугольника, сделанного из однородной проволоки. Определить центр тяжести этого треугольника.

20. Определить площадь параллелограмма, три вершины которого суть точки $M(-2;3)$, $N(4;-5)$ и $P(-3;1)$.

21. Три вершины параллелограмма суть точки $A(3;7)$, $B(2;-3)$ и $C(-1;4)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

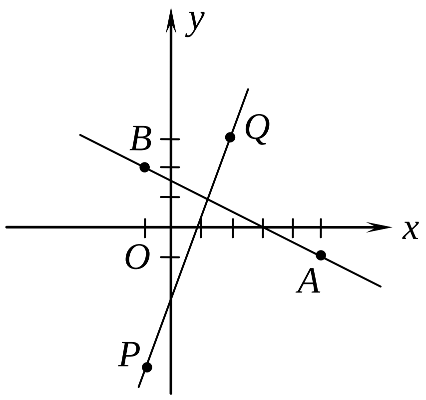
22. Площадь треугольника $S=3$, две его вершины суть точки $A(3;1)$ и $B(1;-3)$, а третья вершина C лежит на оси Oy. Определить координаты вершины C.

23. Площадь треугольника $S=4$, две его вершины суть точки $A(2;1)$ и $B(3;-2)$, а третья вершина C лежит на оси Ox. Определить координаты вершины C.

Примеры. 1. Решим несколько задач на метод координат.

1. Определить координаты точки $P(x;y)$, симметричной точке $Q(2;3)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(5;-1)$ и $B(-1;2)$.

Решение. Строим чертеж. Из чертежа имеем систему



$$\begin{cases}|PA|=|AQ| \\ |PB|=|BQ|\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-5)^2+(y+1)^2=3^2+4^2 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=3^2+1^2\end{cases} \Rightarrow$$

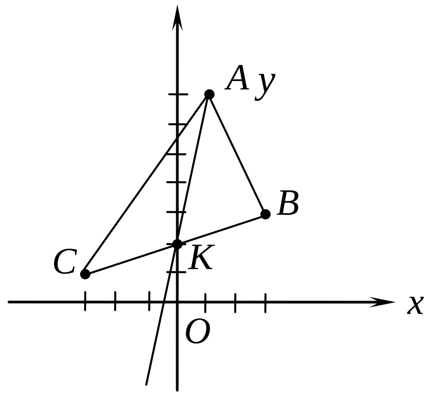
$$\begin{cases}x^2-10x+25+y^2+2y+1=25 \\ x^2+2x+1+y^2-4y+4=10\end{cases}.$$

Вычтем из второго уравнения первое. Получим: $12x-6y=6 \Rightarrow \quad y+1=2x$. Подставляем в первое уравнение. Получим $x^2-10x+25+4x^2=25 \Rightarrow$ $5x^2-10x=0 \Rightarrow$ $x_1=0$, $x_2=2$. Стало быть, имеем две точки $(0;-1)$ и $(2;3)$, удовлетворяющие нашей системе, но одна совпадает с точкой Q, следовательно отпадает.

Ответ: $P(0;-1)$.

2. Даны три вершины $A(1;7)$, $B(3;3)$ и $C(-3;1)$ параллелограмма. Найти его четвертую вершину D, противоположную вершине A.

Решение. Строим чертеж. CB – есть диагональ параллелограмма.



Находим координаты середины $CB \Rightarrow K$;

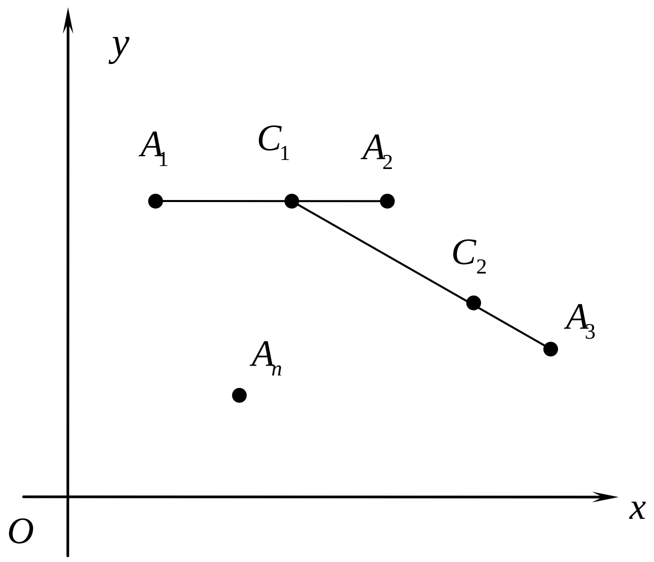
$x_K = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 0$, $y_K = \dfrac{y_B + y_C}{2} = 2$. Точка K является серединой и отрезка AD. Поэтому

$$\frac{x_D + x_A}{2} = x_K \Rightarrow \frac{x_D + 1}{2} = 0,\ x_D = -1.$$

$$\frac{y_D + y_A}{2} = y_K \Rightarrow \frac{y_D + 7}{2} = 2,\ y_D = -3.$$

Ответ: $D(-1;-3)$.

3. Определить центр масс n материальных точек. Пусть в точках $A_1(x_1;y_1)$,



$A_2(x_2;y_2),\ldots,A_n(x_n;y_n)$ содержатся массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

1) Находим центр тяжести двух материальных точек A_1 и A_2. Обозначим его $C_1(x;y)$. Имеем: $|A_1C_1|m_1 = |C_1A_2|m_2$ (равенство двух

моментов масс), т.е. $\lambda = \dfrac{A_1C_1}{C_1A_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$. Следовательно,

$$x_{C_1} = \frac{x_{A_1} + \lambda x_{A_2}}{1+\lambda} = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_1}{m_2}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m_1+m_2}.$$

2) Находим центр тяжести C_2 двух материальных точек C_1 с массой m_1+m_2 и A_3 с массой m_3. Аналогично находим

$$\lambda = \frac{m_3}{m_1+m_2}, \qquad x_{C_2} = \frac{x_{C_1} + \lambda x_3}{1+\lambda} = \frac{\frac{x_1m_1+x_2m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}} = \frac{x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Окончательно будем иметь: $x_{\text{Ц.Т.}} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_km_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$, $y_{\text{Ц.Т.}} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} y_km_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$.

4. В точках $A_1(3;-2)$, $A_2(4;4)$, $A_3\left(-5;-5/2\right)$ сосредоточены массы $m_1=4$, $m_2=7$, $m_3=8$. Определить центр масс этой системы.

Ответ: $(0;0)$.

5. Площадь треугольника $S=4{,}5$, две его вершины находятся в точках $A(3;-4)$ и $B(-1;3)$, а третья вершина C находится на линии $y=x-1$. Найти координаты точки C.

Решение. Имеем: $4{,}5 = \pm\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ x & x-1 & 1 \end{vmatrix}$. Это дает два решения $C_1(0;-1)$, $C_2\left(\dfrac{18}{11};\dfrac{7}{11}\right)$.

6. Определить центр и радиус круга, описанного около треугольника с вершинами $A(-3;-1)$, $B(5;3)$, $C(6;-4)$.

Решение. Обозначим центр $K(x;y)$ и радиус R. Тогда $|AK|=|BK|=|CK|=R \Rightarrow \begin{cases}(x+3)^2+(y+1)^2=(x-5)^2+(y-3)^2\\(x+3)^2+(y+1)^2=(x-6)^2+(y+4)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+y=3\\3x-y=7\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix}x=2\\y=-1\end{matrix} \Rightarrow R=5$.

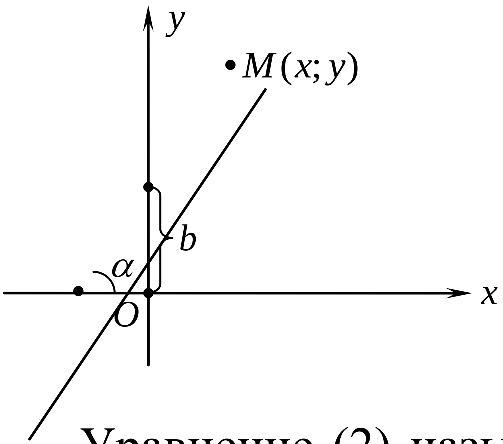
Ответ: $K(2;-1), R=5$.

§ 2. Прямая линия

Уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

называется общим уравнением прямой. Угол α называется углом наклона прямой к оси Ox.



$\mathrm{tg}\alpha=k$, k – угловой коэффициент прямой.

Если $B\neq 0$, то уравнение (1) можно привести к виду:

$$y=kx+b, \qquad (2)$$

где $b=-\dfrac{C}{B}$, $k=-\dfrac{A}{B}$.

Уравнение (2) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Уравнение

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (3)$$

является уравнением прямой, которая проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$ и имеет угловой коэффициент k.

Если прямая проходит через две точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, то ее угловой коэффициент определяется по формуле

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Тогда из уравнения (3) можно получить уравнение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \qquad (4)$$

которое называется уравнением прямой, проходящей через две указанные точки.

Если известны угловые коэффициенты двух прямых k_1 и k_2, то один из углов φ между этими прямыми определяется по формуле:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов

$$k_1=k_2.$$

Признаком перпендикулярности двух прямых является соотношение

$$k_1k_2=-1 \text{ или } k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

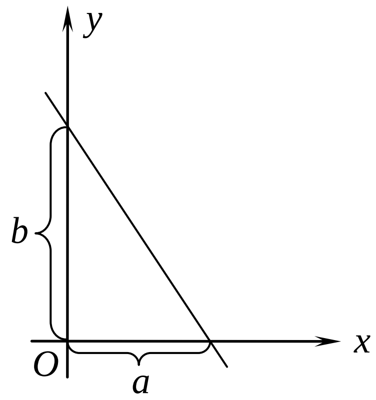
Иначе говоря, угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по величине и противоположны по знаку.

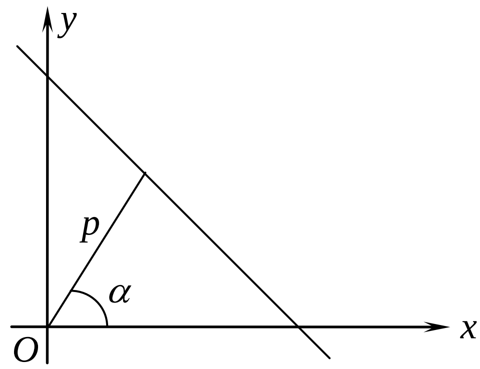
Как видим, уравнение прямой есть уравнение первого порядка относительно двух переменных x и y, которые являются координатами переменной точки $M(x;y)$ (т.е. текущими координатами). Мы указали три вида уравнений прямой, не считая общего. Укажем еще два:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (5)$$

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \qquad (6)$$

Уравнение (5) называется уравнением прямой в отрезках, где a и b отрезки, отсекаемые на осях координат (см. рисунок).





Уравнение (6) называется нормальным уравнением прямой, где p – расстояние от начала координат до прямой (длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую), а α – угол образованный этим перпендикуляром с осью Ox. Если прямая задана в общем виде (1), то из него можно получить уравнение прямой (5) в отрезках:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1,$$

здесь $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$, стало быть, это можно сделать, если $A\neq 0$ и $B\neq 0$.

Из общего уравнения (1) нормальное уравнение (6) можно получить всегда. Для этого уравнение (1) нужно умножить на нормирующий множитель

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

и знак выбрать противоположным знаку свободного члена C в уравнении (1). Это нормальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Нормальное уравнение позволяет найти расстояние d от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой. Имеем $d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\right|$, если прямая задана в общем виде (1), то $d=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

Замечание. Расстояние от точки $(x_0;y_0)$ до прямой дается формулами: $d=\pm(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p)$ или $d=\pm\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$. Чтобы эти формулы всегда давали положительное значение для расстояния d, знак «+» выбирают тогда, если начало координат и исследуемая точка $(x_0;y_0)$ лежат по разные стороны от прямой и знак «–», если начало координат и точка $(x_0;y_0)$ лежат по одну сторону от прямой.

24. Площадь треугольника $S=8\,\text{кв. ед.}$, две его вершины суть точки $A(1;-2)$ и $B(2;3)$, а третья вершина C лежит на прямой $2x+y-2=0$. Определить координаты вершины C.

25. Площадь треугольника $S=1{,}5\,\text{кв. ед.}$, две его вершины суть точки $A(2;-3)$ и $B(3;-2)$, центр тяжести этого треугольника лежит на прямой $3x-y-8=0$. Определить координаты третьей вершины C.

26. Найти проекцию точки $P(-6;4)$ на прямую $4x-5y+3=0$.

27. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5;13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

28. Даны середины сторон треугольника $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$ и $M_3(3;-4)$. Составить уравнения его сторон.

29. Составить уравнение прямой, если точка $P(2;3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

30. Даны две вершины треугольника $M_1(-10;2)$ и $M_2(6;4)$; его высоты пересекаются в точке $N(5;2)$. Определить координаты третьей вершины M_3.

31. Даны две вершины треугольника $A(3;-1)$ и $B(5;7)$ и точка пересечения его высот $N(4;-1)$. Составить уравнения сторон этого треугольника.

32. Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин $B(-4;-5)$ и уравнения двух высот $5x+3y-4=0$ и $3x+8y+13=0$.

33. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $C(4;-1)$, а также уравнения высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведенных из одной вершины.

34. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $A(1;1)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 2 кв. ед.

35. Через точку $K(4;3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3 кв. ед. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.

36. Даны вершины треугольника $A(-10;-13)$, $B(-2;3)$ и $C(2;1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C.

37. Даны две смежные вершины квадрата $A(2;0)$ и $B(-1;4)$. Составить уравнения его сторон.

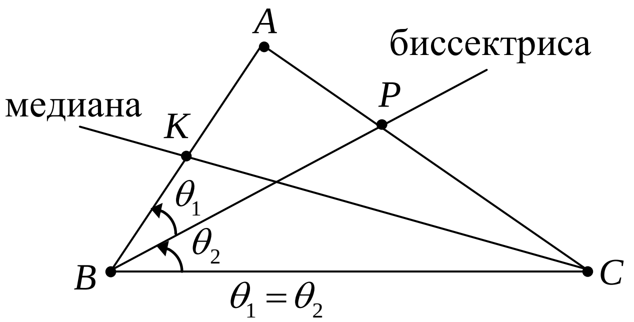
38. Точка $A(5;-1)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $4x-3y-7=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат остальные стороны этого квадрата.

Примеры. 2. Решим несколько задач.

1. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3;-1)$, а также уравнения биссектрисы $x-4y+10=0$ и медианы $6x+10y-59=0$, проведенных из различных вершин.

Решение. Видим, что точка A не лежит на указанных биссектрисе и медиане потому что, координаты точки A не удовлетворяют этим уравнениям.

Делаем чертеж схематический.



1) точка K – середина отрезка AB, поэтому $x_K=\dfrac{x_A+x_B}{2}$, $y_K=\dfrac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ x_K=\dfrac{3+x_B}{2},\ y_K=\dfrac{-1+y_B}{2}$.

2) $(x_K;y_K)$ лежит на медиане, значит $6\cdot\left(\dfrac{3+x_B}{2}\right)+10\cdot\left(\dfrac{-1+y_B}{2}\right)-59=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\ 3x_B+5y_B=55$.

3) точка $(x_B;y_B)$ лежит на данной биссектрисе.

Поэтому имеем систему $\begin{cases}3x_B+5y_B=55\\ x_B-4y_B=-10\end{cases}\Rightarrow\quad x_B=10,\ y_B=5$.

4) Можно записать уравнение

$AB\Rightarrow\quad \dfrac{x-3}{10-3}=\dfrac{y+1}{5+1}\Rightarrow\quad y=\dfrac{6}{7}x-\dfrac{25}{7}$.

5) Найдем угловой коэффициент прямой BC, приравняв $\operatorname{tg}\theta_1$ и $\operatorname{tg}\theta_2$

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{k_{AB}-k_{BP}}{1+k_{AB}k_{BP}}=\frac{\frac{6}{7}-\frac{1}{4}}{1+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{17}{34}=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\theta_2=\frac{k_{BP}-k_{BC}}{1+k_{BP}k_{BC}}=\frac{\frac{1}{4}-k_{BC}}{1+\frac{1}{4}k_{BC}}=\frac{1-4k_{BC}}{4+k_{BC}}.$$

Имеем $\frac{1-4k_{BC}}{4+k_{BC}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\ k_{BC}=-\frac{2}{9}$.

6) Уравнение $BC\Rightarrow$

$$y-y_B=-\frac{2}{9}(x-x_B)\Rightarrow y-5=-\frac{2}{9}(x-10)\Rightarrow 2x+9y=65.$$

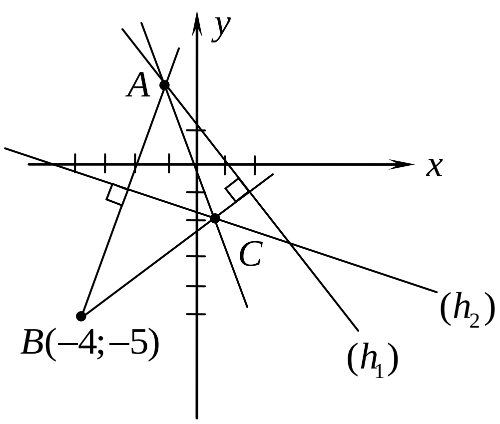
7) Для нахождения $(x_C;y_C)$ имеем систему $\begin{cases}6x+10y-59=0\\ 2x+9y-65=0\end{cases}\Bigg|\ \begin{matrix}x_C=-3,5\\ y_C=8\end{matrix}$.

8) Осталось записать уравнение прямой $AC\Rightarrow\frac{x-3}{3,5-3}=\frac{y+1}{8+1}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ 18x+13y-41=0$.

2. Решим задачу №32.

Решение. Убеждаемся, что данные высоты не проходят через данную вершину B. Строим высоты и т.B.



(h_1): $5x+3y-4=0$, (h_2): $3x+8y+13=0$, имеем $K_{h_1}=-\frac{5}{3}$, $K_{h_2}=-\frac{3}{8}$.

Пусть вершина A находится на высоте (h_1), а вершина C на высоте (h_2).

1) Проведем прямую, проходящую через точку B перпендикулярно к высоте (h_1). Это будет уравнение стороны треугольника BC. Имеем $y+5=K_{BC}(x+4)$, но $K_{BC}=-\frac{1}{K_{h_1}}=\frac{3}{5}$, т.е.

$$y+5=\frac{3}{5}(x+4)\Rightarrow\ 3x-5y-13=0\ \ (BC).$$

2) Находим точку $C\Rightarrow\begin{cases}3x+8y+13=0\\3x-5y-13=0\end{cases}\Rightarrow C(1;-2)$.

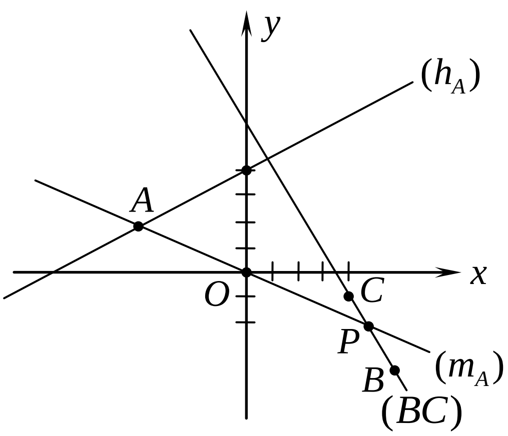
3) Проведем через точку B прямую перпендикулярно к высоте (h_2). Это будет уравнение прямой, на которой лежит вершина A. Имеем: $y+5=K_{AB}(x+4)$, но $K_{AB}=-\frac{1}{K_{h_2}}=\frac{8}{3}$, т.е.

$$y+5=\frac{8}{3}(x+4)\Rightarrow\ 8x-3y+17=0.$$

4) Находим точку $A\Rightarrow\begin{cases}5x+3y-4=0\\8x-3y+17=0\end{cases}\Rightarrow A(-1;3)$.

5) Прямая $AC\Rightarrow 5x+2y-1=0$. Прямую AC получаем как прямую, проходящую через две данные точки. Имеем:

$$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-3}{-2-3}\Rightarrow -5x-5=2y-6\Rightarrow\ \Rightarrow 5x+2y-1=0.$$



3. Решим задачу №33. Дана вершина $C(4;-1)$, из другой вершины (пусть это будет точка A) проведены медиана $2x+3y=0$ (m_A) и высота $2x-3y+12=0$ (h_A).

Построим чертеж.

1) Находим точку

$A:\begin{cases} 2x-3y+12=0 \\ 2x+3y \qquad =0 \end{cases} \Big| \Rightarrow \ \Rightarrow A(-3;2)$.

2) Сторона BC должна быть перпендикулярна высоте (h_A). Из условия перпендикулярности находим угловой коэффициент $K_{BC}=-\dfrac{1}{K_{h_A}}=-\dfrac{3}{2}$.

3) Уравнение (BC): $y+1=-\dfrac{3}{2}(x-4) \Rightarrow \ 3x+2y-10=0$.

4) Уравнение (AC): $\dfrac{x-4}{-3-4}=\dfrac{y+1}{2+1} \Rightarrow 3x+7y-5=0$.

5) Осталось найти точку B, а затем и уравнение стороны (AB). Сторона BC и медиана (m_A) пересекаются в середине стороны BC. Обозначим ее через $P(x_P;y_P)$.

Имеем: $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x+2y-10=0 \end{cases} \Big| \Rightarrow \ P(6;-4)$.

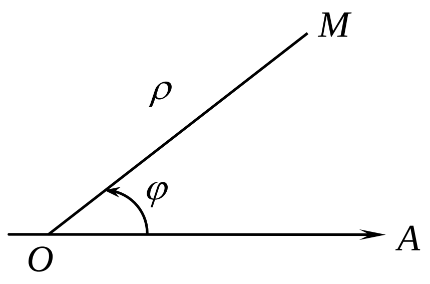
6) Находим координаты точки B: $\dfrac{x_C+x_B}{2}=x_P$, $\dfrac{y_C+y_B}{2}=y_P \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \dfrac{x_B+4}{2}=6 \Rightarrow \ x_B=8$, $\dfrac{y_B-1}{2}=-4 \Rightarrow \ y_B=-7$.

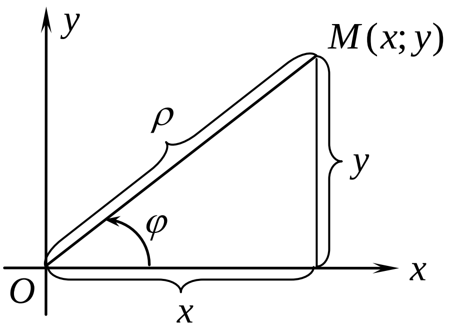
7) Осталось записать уравнение стороны (AB):

$$\frac{x+3}{8+3}=\frac{y-2}{-7-2} \Rightarrow \ 9x+11y+5=0.$$

§ 3. Полярные координаты. Преобразование декартовых прямоугольных координат



Полярные координаты суть числа $\rho=OM$ и φ – угол поворота луча OM против часовой стрелки, начиная от полярной оси OA. Угол φ имеет

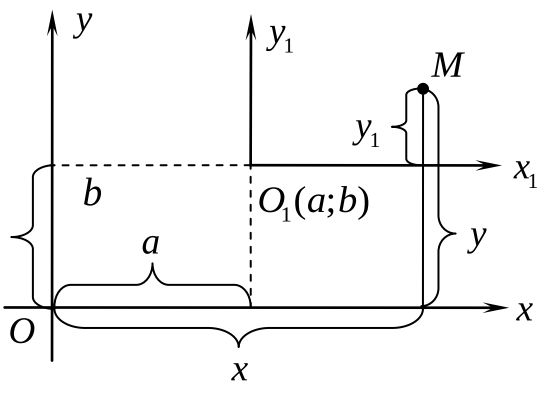


бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину $\pm 2\pi k$, где k – целое положительное число). Значение полярного угла, удовлетворяющее неравенствам $-\pi \le \varphi \le +\pi$ или $0 \le \varphi \le 2\pi$ называется главным.

Связь прямоугольных декартовых координат с полярным видна из этого чертежа.

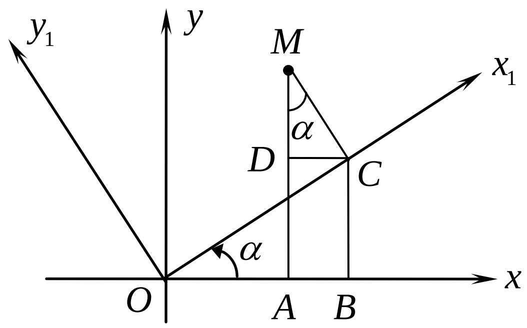
$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y}{x},\ \varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi k \end{array}\right. .$$

Преобразование декартовых прямоугольных координат бывает двух типов: параллельной перенос осей и поворот осей на заданный угол α. Рассмотрим первый: xOy – старая система координат, $x_1O_1y_1$ – новая система координат.



Точка M имеет координаты в старой системе x и y, а в новой x_1 и y_1. Между ними связь очевидна: $O_1(a;b)$ – новое начало координат, ее координаты в старой системе координат должны быть известны, это a и b.

$$\begin{cases} x = a + x_1 \\ y = b + y_1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = x - a \\ y_1 = y - b \end{cases}.$$



Второй случай. Поворот осей.

$\begin{cases} AM = y \\ OA = x \end{cases} \Rightarrow$ x и y – координаты точки M в старых осях.

$\begin{cases} OC = x_1 \\ MC = y_1 \end{cases} \Rightarrow$ x_1 и y_1 – координаты точки M в новых осях.

$$OA = x = OB - AB = OC\cos\alpha - DC = x_1\cos\alpha - MC\sin\alpha = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha .$$

Итак, получена формула: $x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha$.

Аналогично получается и другая: $y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha$.

Чтобы получить выражения новых координат через старые, нужно последнюю систему решить относительно x_1 и y_1 или применить полученные формулы, когда α нужно заменить на $-\alpha$, что мы и сделаем

$$x_1 = x\cos(-\alpha) - y\sin(-\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y_1 = x\sin(-\alpha) + y\cos(-\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Итак, $\begin{array}{l} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{array}$

39. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам $M_1\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(2;-\frac{\pi}{4}\right)$, $M_3(1;2)$, $M_4(3;-1)$. Построить эти 8 точек.

40. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам $M_1\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$, $M_3(1;2)$, $M_4(1;-2)$. Построить эти 8 точек.

41. Начало координат перенесено (без изменения направления осей) в точку $O_1(3;-4)$. Координаты точек $A(1;3)$, $B(-3;0)$ и $C(-1;4)$ определены в новой системе. Вычислить координаты этих же точек в старой системе координат.

42. Даны точки $A(2;1)$, $B(-1;3)$ и $C(-2;5)$. Найти их координаты в новой системе, если начало координат перенесено (без изменения направления осей): 1) в точку A; 2) в точку B; 3) в точку C.

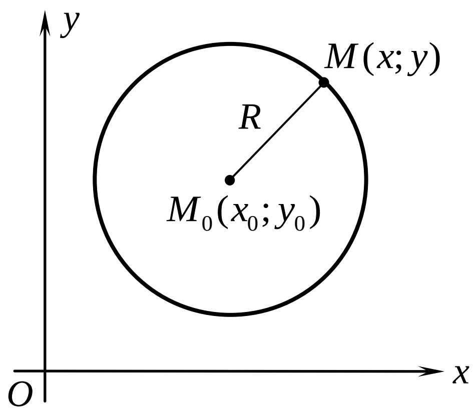
43. Оси координат повернуты на угол $\alpha = 60^\circ$. Координаты точек $A(2\sqrt{3};-4)$, $B(\sqrt{3};0)$ и $C(0;-2\sqrt{3})$ определены в новой системе координат.

44. Даны точки $M(3;1)$, $N(-1;5)$ и $P(-3;-1)$. Найти их координаты в новой системе координат, если оси координат повернуты на угол: 1) -45°; 2) 90°; 3) -90°; 4) 180°.

§ 4. Кривые второго порядка

Кривых 2-ого порядка существует четыре вида: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Рассмотрим их канонические (простейшие уравнения).



Окружность. Ее каноническое уравнение

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Здесь точка $M_0(x_0;y_0)$ – центр окружности, R – радиус, $M(x;y)$ – переменная точка на указанной линии.

Если точка $M_0(x_0;y_0)$ совпадает с центром координат, то ее уравнение будет

$$x^2+y^2=R^2.$$

45. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

1) точки $A(3;2)$ и $B(-1;6)$ являются концами одного из диаметров окружности;

2) центр окружности совпадает с точкой $C(1;-1)$ и прямая $5x-12y+9=0$ является касательной к окружности;

3) окружность проходит через точки $A(3;1)$ и $B(-1;3)$, а ее центр лежит на прямой $3x-y-2=0$;

4) окружность проходит через три точки $A(1;1)$, $B(1;-1)$ и $C(2;0)$.

46. Точка $C(3;-1)$ является центром окружности, отсекающей на прямой $2x-5y+18=0$ хорду, длина которой равна 6. Составить уравнение окружности.

47. Написать уравнение окружности радиуса $R=\sqrt{5}$, касающейся прямой $x-2y-1=0$ в точке $M_1(3;1)$.

48. Составить уравнения окружностей, проходящих через точку $A(-1;5)$ и касающихся двух пересекающихся прямых: $3x+4y-35=0$, $4x+3y+14=0$.

49. Составить уравнения окружностей, которые проходят через точку $A(1;0)$ и касаются двух параллельных прямых: $2x+y+2=0$, $2x+y-18=0$.

50. Определить, при каких значениях углового коэффициента k прямая $y=kx$

1) пересекает окружность $x^2+y^2-10x+16=0$;

2) касается этой окружности;

3) проходит вне этой окружности.

51. Определить длину хорды окружности $x^2+y^2-4x-8y+10=0$, делящейся в точке $A(1;2)$ пополам.

Эллипс. Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

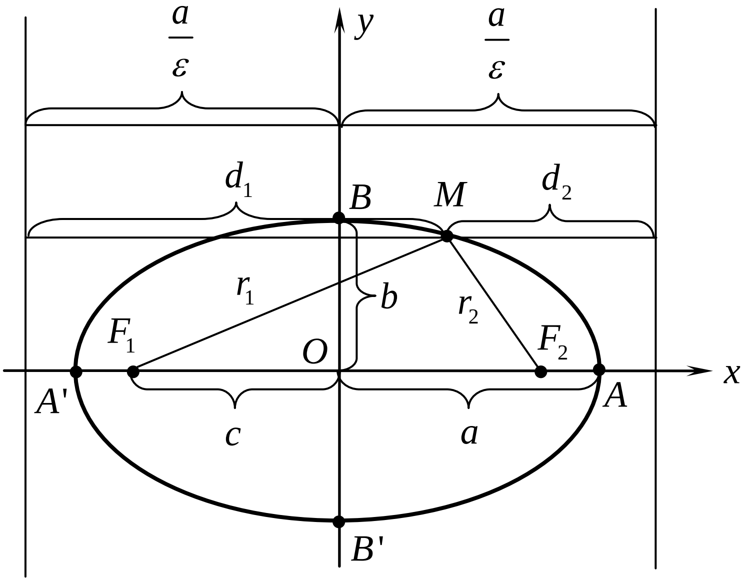
Форма кривой указана на рисунке.

Если $AA' = 2a > BB' = 2b$, то фокусы эллипса находятся на оси Ox (большой оси эллипса).

$\left.\begin{array}{l}\text{Здесь } AA' - \text{большая полуось (a} - \text{большая полуось)} \\ \qquad BB' - \text{малая полуось (b} - \text{малая полуось)}\end{array}\right| a > b.$

$F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ два фокуса эллипса, где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$



$F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются фокальными радиусами переменной точки $M(x;y)$.

Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, где a – большая полуось эллипса называется эксцентриситетом эллипса. Очевидно, что $0 \le \varepsilon \le 1$.

Можно получить формулы: $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$.

Две прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса. Если $b > a$, то фокусы находятся на оси Oy и директрисами будут две прямые $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$, соответственно эксцентриситетом будет число

$$\varepsilon = \frac{c}{b}.$$

Каждая директриса обладает свойством:
если r – расстояние произвольной точки эллипса до некоторого фокуса, d – расстояние от этой же точки до односторонней с этим фо-

кусом директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса

$$\frac{r}{d} = \varepsilon .$$

Стало быть: $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ и $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ (см. чертеж).

52. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) расстояние между его фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

2) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами $2c = 4$;

3) расстояние между его директрисами равно 32 и $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

53. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) расстояние между его фокусами $2c = 24$ и $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

2) его малая ось равна 16 и $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

3) расстояние между его директрисами равно $\frac{32}{3}$ и $\varepsilon = \frac{3}{4}$.

54. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

55. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$, расстояние которых до левого фокуса равно 2,5.

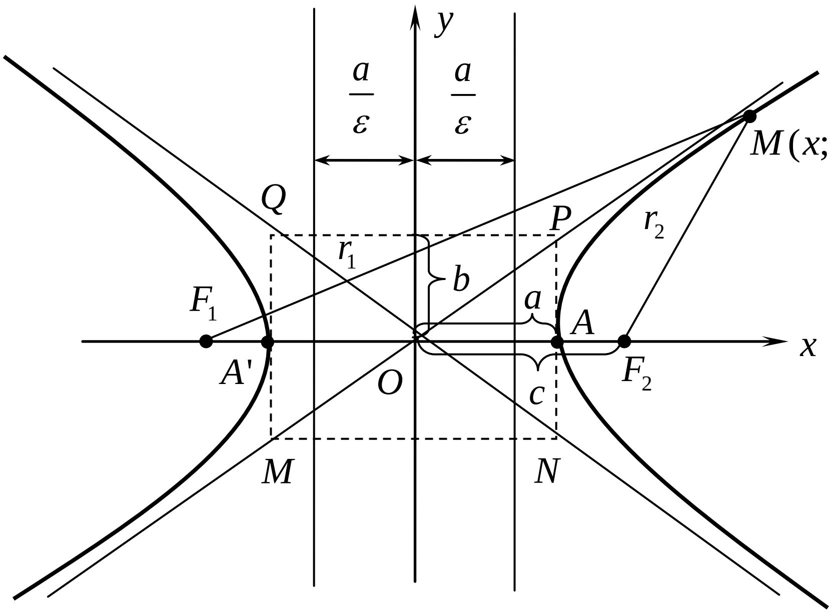
56. Составить уравнение эллипса, касающегося двух прямых $3x - 2y - 20 = 0$, $x + 6y - 20 = 0$, при условии, что его оси совпадают с осями координат.

57. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, параллельных прямой $3x + 2y + 7 = 0$.

58. Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2+4y^2=20$, перпендикулярных к прямой $2x-2y-13=0$.

Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$



$2a$ и $2b$ – оси гиперболы, a и b – полуоси, $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ – фокусы гиперболы, где

$$c=\sqrt{a^2+b^2};$$

$A(a;0)$ и $A'(-a;0)$ – вершины гиперболы, $y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоты гиперболы, они являются диагоналями основного прямоугольника $MNPQ$ со сторонами $2a$ и $2b$; эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}$, очевидно, что $\varepsilon\geq 1$.

Фокальные радиусы вычисляются по формулам:
для точек, лежащих на правой ветви гиперболы:

$$r_1=\varepsilon x+a,\ r_2=\varepsilon x-a.$$

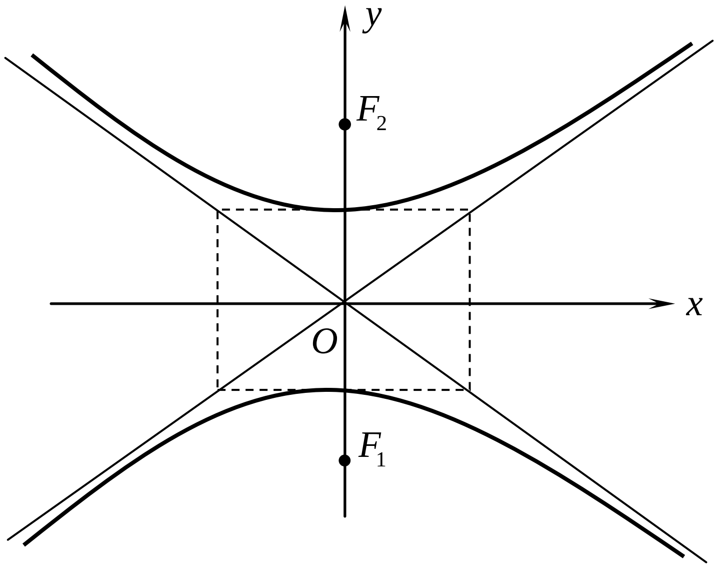
для левой ветви:

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \; r_2 = -\varepsilon x + a.$$

Уравнения $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ есть уравнения директрис гиперболы.

Как и для эллипса, директриса гиперболы обладает следующим свойством: если r – расстояние от произвольной точки гиперболы до некоторого фокуса, d – расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть величина равная эксцентриситету гиперболы:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$



Гипербола $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется сопряженной к первой гиперболе. Она пересекает ось ординат и фокусы ее находятся на оси Oy.

Для нее $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Директрисы: $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

59. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) расстояние фокусами $2c = 20$, уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$;

2) расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$ и ось $2b = 6$;

3) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

60. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) расстояние между фокусами $2c = 10$ и $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

2) уравнения асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48;

3) расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и $\varepsilon = \frac{7}{5}$.

61. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найти: 1) полуоси a b; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

62. Дана точка $M_1\left(10; -\sqrt{5}\right)$ на гиперболе $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$. Составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки M_1.

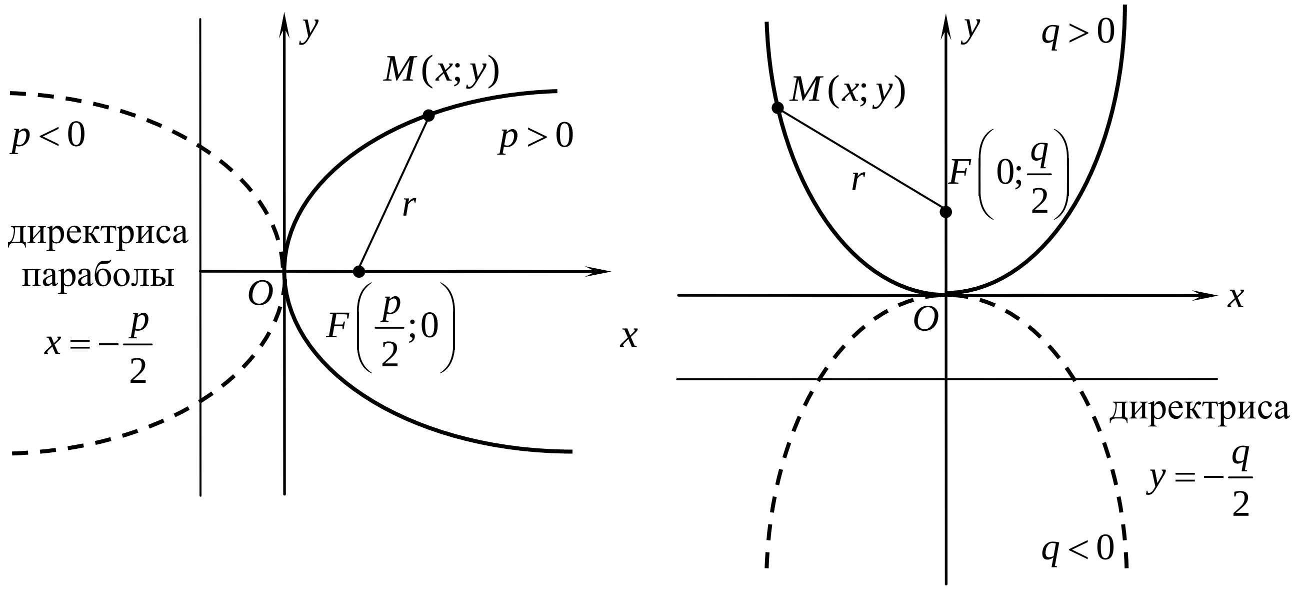
63. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ и уравнения директрис $x = \pm\frac{16}{5}$.

64. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $\varepsilon = 2$.

65. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в вершинах эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, а директрисы проходят через фокусы этого эллипса.

Парабола. Каноническое уравнение параболы бывает двух видов:

$$y^2 = 2px \text{ и } x^2 = 2qy.$$



Для первой параболы имеет место формула $r = x + \frac{p}{2}$, где $r = FM$, p – параметр параболы. Для второй параболы: $r = y + \frac{q}{2}$.

66. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси Ox, и ее параметр $p = 3$;

2) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox, и ее параметр $p = 0,5$;

3) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси Oy, и ее параметр $q = \frac{1}{4}$;

67. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

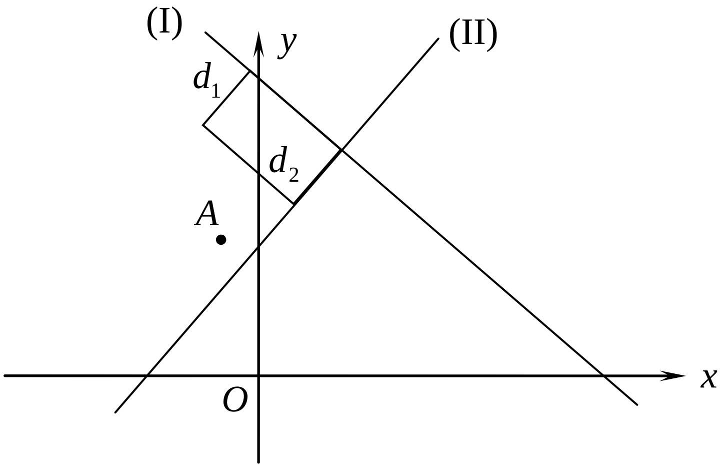
1) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $B(-1;3)$;

2) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $D(4;-8)$.

68. Из точки $A(5;9)$ проведены касательные к параболе $y^2 = 5x$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

Примеры. Решим несколько задач на кривые второго порядка.

1. Решим задачу № 48. Нанесем данные задачи на координатную плоскость:



Мы обозначили:

$3x+4y-35=0$. (I)

$4x+3y+14=0$. (II)

Искомое уравнение окружности имеет вид:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Нам известен центр $C(x_0;y_0)$ и радиус R, т.е. 3 неизвестные.

Нам нужно решить систему:

$d_1=d_2=R=\sqrt{(x_A-x_0)^2+(y_A-y_0)^2}$,

где $d_1=\pm\dfrac{3x_0+4y_0-35}{5}$, $d_2=\pm\dfrac{4x_0+3y_0+14}{5}$. Знаки нужно выбрать так: для d_1 знак «–», для d_2 знак «+» (см. замечание на стр. 32).

Стало быть, имеем $-\dfrac{3x_0+4y_0-35}{5}=\dfrac{4x_0+3y_0+14}{5}\Rightarrow y_0=3-x_0$.

Из нашей системы получаем одно уравнение с одним неизвестным: $\sqrt{(1-x_0)^2+(5-3+x_0)^2}=d_1=d_2=\dfrac{x_0+23}{5}$, т.е.

$$1+2x_0+x_0^2+4+4x_0+x_0^2=\frac{1}{25}(x_0+23)^2\Rightarrow\ 49x_0^2+104x_0-404=0.$$

Получаем:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ x_0=2\\ 2)\ x_0=-\dfrac{202}{49}\end{array}\right|\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}1)\ y_0=1\\ 2)\ y_0=\dfrac{349}{49}\end{array}\right|\Rightarrow\ \begin{array}{l}1)\ R=5\\ 2)\ R=\dfrac{185}{49}.\end{array}$$

Итак, получаем две окружности:

1) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$;

$$2)\ \left(x+\frac{202}{49}\right)^2+\left(y-\frac{349}{49}\right)^2=\left(\frac{185}{49}\right)^2.$$

2. Решим задачу № 56. Из условия задачи следует, что искомое уравнение эллипса должно быть в виде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Нужно найти a и b.

Решение: две системы $\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ 3x-2y-20=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ x+6y-20=0 \end{cases}$ должны иметь совпадающие корни. А это означает, что после сведения каждой системы к одному квадратному уравнению (например, относительно переменной x), то дискриминанты того и другого уравнения должны быть нулями. Это и даст нам два уравнения относительно a и b.

Имеем:

$$1)\ b^2x^2+a^2\left(\frac{3}{2}x-10\right)^2=a^2b^2 \Rightarrow x^2\left(b^2+\frac{9}{4}a^2\right)-30a^2x+100a^2-a^2b^2=0.$$

$$D_1=225a^4+\left(b^2+\frac{9}{4}a^2\right)\left(a^2b^2-100a^2\right)=0.$$

$$b^4a^2+\frac{9}{4}a^4b^2-100a^2b^2=0 \Rightarrow b^2+\frac{9}{4}a^2=100.$$

$$2)\ b^2x^2+a^2\left(-\frac{x}{6}+20\right)^2=a^2b^2 \Rightarrow x^2\left(b^2+\frac{a^2}{36}\right)-\frac{20}{3}a^2x+400a^2-a^2b^2=0.$$

$$D_2=\frac{100}{9}a^4+\left(b^2+\frac{a^2}{36}\right)\left(a^2b^2-400a^2\right)=0.$$

$$\frac{a^4b^2}{36}+a^2b^4-400a^2b^2=0 \Rightarrow b^2+\frac{a^2}{36}=400.$$

Отсюда находим $a^2=40, b^2=10$.

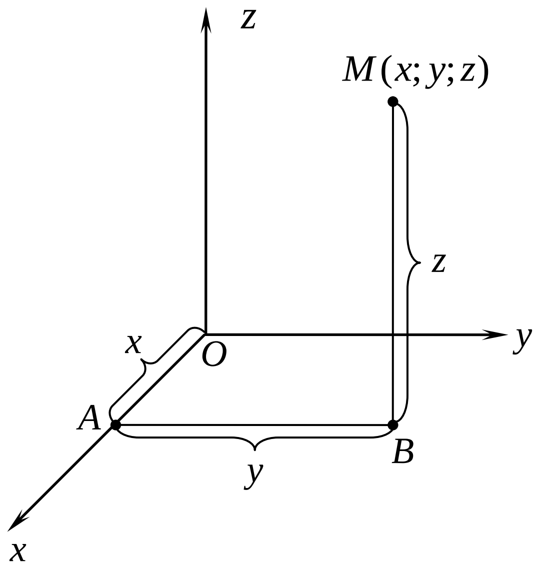
Ответ: $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1.$

3. Решим задачу № 65. Для эллипса имеем: $a_э = 10$, $b_э = 8$, $c_э = 6$, $\varepsilon_э = \dfrac{3}{5}$. Для гиперболы будем иметь: $c_г = 10$, $\dfrac{a_г}{\varepsilon_г} = 6$. Стало быть, для гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ мы имеем: $c = 10$, $\dfrac{a}{\varepsilon} = 6$, но $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, значит $\dfrac{a^2}{c} = 6 \Rightarrow a^2 = 60$, но $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = 40$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{60} - \dfrac{y^2}{40} = 1$.

II. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Рассматривается теперь пространственная декартова прямоугольная система координат $Oxyz$.



Расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ определяется формулой

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$ –

координаты точки деления.

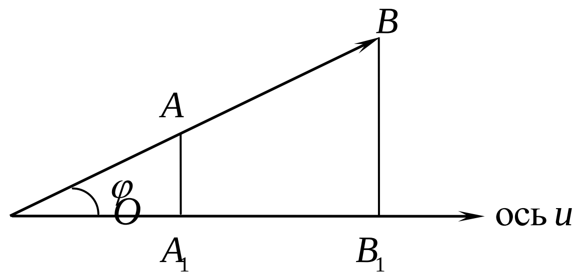
В частности координаты середины отрезка вычисляются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

§ 1. Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок. В геометрии рассматриваются свободные векторы. Такие векторы называются равными, если они имеют одинаковые длины, лежат на параллельных прямых и направлены в одну сторону, т.е. векторы (свободные) не связаны с точкой приложения. Число, равное длине вектора называется модулем вектора. Если $\vec{a}$ – вектор, $|\vec{a}|$ – его модуль. Единичный вектор имеет длину 1. Единичный вектор, имеющий одинаковое направление с данным вектором $\vec{a}$, называется ортом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}_0$, стало быть

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$



A_1B_1 называется проекцией вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось u.

$$\text{пр}_u\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.$$

$$X = \text{пр}_{Ox}\vec{a},\ Y = \text{пр}_{Oy}\vec{a},\ Z = \text{пр}_{Oz}\vec{a}.$$

$$X = |\vec{a}|\cos\alpha, \qquad Y = |\vec{a}|\cos\beta,$$

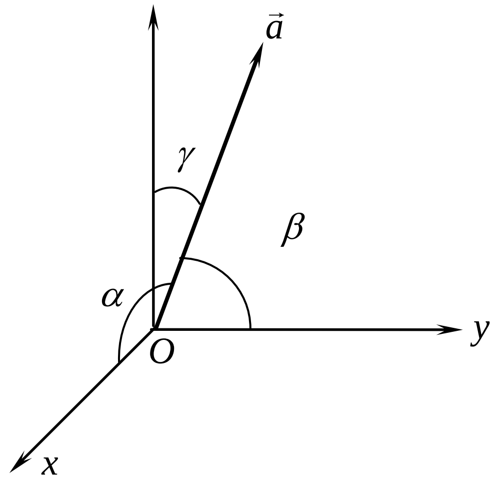
$$Z = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

X, Y, Z называются координатами вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a} = \{X;Y;Z\}$.

Если $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ являются соответственно началом и концом вектора $\vec{a}$, то его координаты X, Y, Z определяются по формулам:

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1.$$

Очевидно, что



$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,.$$

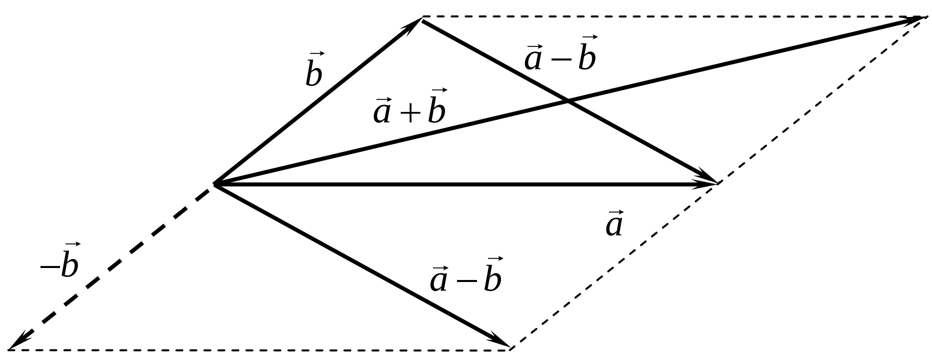
Если α, β, γ – углы, которые составляют вектор $\vec{a}$ с координатными осями, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Очевидно, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Отсюда видим, что один из углов α, β, γ можно определить, если заданы два других.

§ 2. Линейные операции над векторами

Складываются векторы по правилу параллелограмма.



Разность
складывается аналогично:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right).$$

Сложение векторов и умножение векторов на число называются линейными операциями над векторами.

Имеют место две основные теоремы о проекциях векторов:

1. $\text{пр}_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = \text{пр}_u\vec{a}_1 + \text{пр}_u\vec{a}_2 + \ldots + \text{пр}_u\vec{a}_n$.

2. $\text{пр}_u(\alpha\vec{a}) = \alpha\,\text{пр}_u\vec{a}$, где α – число.

В частности, если $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \{X_1 + X_2; Y_1 + Y_2; Z_1 + Z_2\},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{X_1 - X_2; Y_1 - Y_2; Z_1 - Z_2\},$$

$$\alpha\vec{a} = \{\alpha X; \alpha Y; \alpha Z\}.$$

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными.

Признаком коллинеарности двух векторов

$$\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\} \text{ и } \vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$$

является пропорциональность их координат:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}.$$

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом, если эти векторы удовлетворяют следующим условиям:

1) вектор $\vec{i}$ лежит на оси Ox, вектор $\vec{j}$ – на оси Oy, вектор $\vec{k}$ – на оси Oz;

2) каждый из векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлен на своей оси в положительную сторону;

3) векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные, т.е. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

Любой вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k},$$

где X, Y, Z – суть проекции вектора на координатные оси, которые называются координатами вектора $\vec{a}$.

69. На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от точки $A(-3; 4; 8)$ равно 12.

70. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(1; -3; 7)$ и $B(5; 7; -5)$.

71. Даны вершины треугольника $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -6)$, $C(-5; 0; 2)$. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.

72. Даны вершины треугольника $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

73. Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a}=\{3;-1;4\}$, если его начало совпадает с точкой $M(1;2;-3)$.

74. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a}=\{12;-15;-16\}$.

75. Может ли вектор составлять с двумя координатными осями следующие углы: 1) $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$; 2) $\beta=60^\circ$, $\gamma=60^\circ$; 3) $\alpha=150^\circ$, $\gamma=30^\circ$?

76. Определить координаты точки M, если ее радиус-вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен 3.

77. Даны: $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Вычислить $|\vec{a}-\vec{b}|$.

78. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60^\circ$, причем $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$.

79. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ и $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарны.

80. Найти орт вектора $\vec{a}=\{3;4;-12\}$.

§ 3. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi .$$

Если угол φ – острый, то $(\vec{a}\cdot\vec{b})>0$, если φ – тупой, то $(\vec{a}\cdot\vec{b})<0$, если $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, то $(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$.

Также имеем: $(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\} \text{ и } \vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\},$$

то $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$. Поэтому $X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0$ есть условие перпендикулярности.

Имеем также

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

81. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить: 1) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

82. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$ определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

83. Дано, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

84. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$; зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

85. Даны вершины треугольника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$. Определить его внешний угол при вершине A.

86. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$ и удовлетворяет условию $(\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})) = -6$.

87. Даны два вектора $\vec{a} = \{5; 2; 5\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 2\}$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

88. Даны три вектора $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

§ 4. Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $[\vec{a}\vec{b}]$, и определяется тремя условиями:

1) $\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ перпендикулярен к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) направление вектора $[\vec{a}\vec{b}]$ соответствует «правилу правой руки». Это означает, что если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $[\vec{a}\vec{b}]$ приведены к общему началу, то вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ должен быть направлен так, как направлен средний палец правой руки, большой палец которой направлен по первому сомножителю (т.е. по вектору $\vec{a}$), а указательный – по второму (т.е. по вектору $\vec{b}$). Про такие векторы говорят, что они образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей, именно $[\vec{a}\vec{b}]=-[\vec{b}\vec{a}]$.

Модуль векторного произведения $[\vec{a}\vec{b}]$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|=S.$$

Векторное произведение $[\vec{a}\vec{b}]$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Если система координатных осей правая и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в этой системе своими координатами:

$$\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\} \text{ и } \vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\},$$

то векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ определяется формулой:

$$[\vec{a}\vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}$$

или

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

§ 5. Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $[\vec{a}\vec{b}]$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, т.е. $\left([\vec{a}\vec{b}]\cdot\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

Смешанное произведение $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ равно объему параллелепипеда построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, со знаком «–», если тройка левая. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны (принадлежат одной плоскости), то смешанное произведение $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = 0$.

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\},\ \vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\},\ \vec{c} = \{X_3; Y_3; Z_3\},$$

то смешанное произведение $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ определяется формулой:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

89. Даны: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a}\vec{b}) = 12$. Найти $\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|$.

90. Даны: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ и $\left|[\vec{a}\vec{b}]\right| = 72$. Найти $(\vec{a}\vec{b})$.

91. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить: 1) $[\vec{a}\vec{b}]^2$; 2) $[(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})]^2$; 3) $[(\vec{a}+3\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})]^2$.

92. Даны векторы $\vec{a} = \{3;-1;-2\}$ и $\vec{b} = \{1;2;-1\}$. Найти координаты векторных произведений: 1) $[\vec{a}\vec{b}]$; 2) $[(2\vec{a}+\vec{b})\vec{b}]$; 3) $[(2\vec{a}-\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})]$.

93. Даны точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

94. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

95. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = \{2;-2;1\}$ и $\vec{b} = \{2;3;6\}$.

96. Даны векторы $\vec{a} = \{2;-3;1\}$, $\vec{b} = \{-3;1;2\}$ и $\vec{c} = \{1;2;3\}$. Вычислить $\left[[\vec{a}\vec{b}]\cdot\vec{c}\right]$ и $\left[\vec{a}\cdot[\vec{b}\vec{c}]\right]$.

97. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

98. Даны три вектора $\vec{a} = \{1;-1;3\}$, $\vec{b} = \{-2;2;1\}$, $\vec{c} = \{3;-2;5\}$. Вычислить $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

99. Доказать, что четыре точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

100. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ и $D(4;1;3)$.

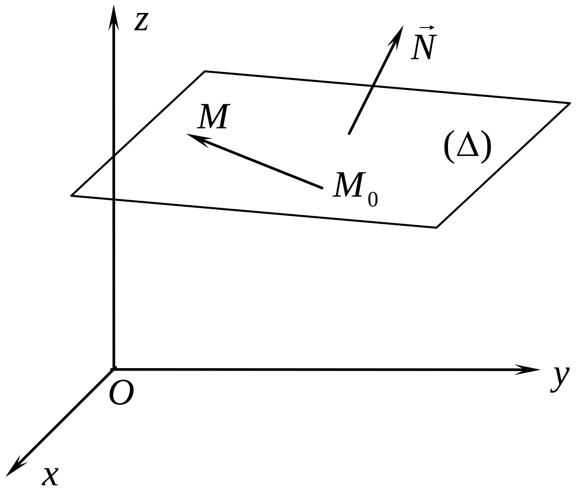
101. Даны вершины тетраэдра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

102. Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

III. Уравнение плоскости и прямой в пространстве

При изучении уравнений плоскостей и прямых в пространстве широко применяется векторная алгебра.

§ 1. Уравнение плоскости в пространстве



Рассмотрим плоскость (Δ).

Пусть вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$ перпендикулярен плоскости (Δ) и пусть точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежит на плоскости. Тогда координаты любой точки плоскости $M(x; y; z)$ будут удовлетворять уравнению:

$(\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$ Это уравнение можно записать в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Это и есть общее уравнение плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ будет

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

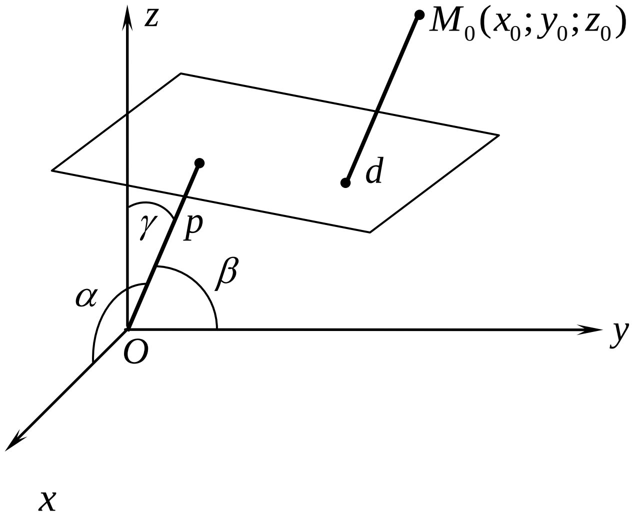
Уравнение плоскости в «отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Нормальное уравнение плоскости:

1) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ или

2) $\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$.



Расстояние от точки до плоскости d:

$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\right|$

или

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

§ 2. Прямая в пространстве

1) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ задана прямая как пересечение двух плоскостей.

2) каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Эта прямая проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и параллельна вектору (направляющий вектор) $\vec{a}=\{m;n;p\}$.

3) параметрические уравнения прямой:

$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$, t − произвольный параметр.

4) уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

103. Даны две точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

104. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}=\{3;1;-1\}$ и $\vec{b}=\{1;-2;1\}$.

105. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

106. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $2x-y+3z-1=0$ и $x+2y+z+1=0$.

107. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $M_1(1;-1;-2)$, $M_2(3;1;1)$ перпендикулярно к плоскости $x-2y+3z=0$.

108. Плоскость проходит через две точки $M_1(1;2;-1)$ и $M_2(-3;2;1)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b=3$. Составить уравнение плоскости в «отрезках».

109. Составить уравнение плоскости, параллельной вектору $\vec{l}=\{2;1;-1\}$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки $a=3$, $b=-2$.

110. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x-2y+4z-5=0$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки $a=-2$, $b=\frac{2}{3}$.

111. Вычислить расстояние d от точки $P(-1;1;-2)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

112. На оси Oy найти точку, отстоящую от плоскости $x+2y-2z-2=0$ на расстоянии $d=4$.

113. Вывести уравнение геометрического места точек, отклонение которых от плоскости $4x-4y-2z+3=0$ равно 2.

114. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x-2y-z-3=0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d=5$.

115. Найти точки пересечения прямой

$$\begin{cases} 2x+y-z-3=0, \\ x+y+z-1=0. \end{cases}$$

с координатными плоскостями.

116. Определить, при каком значении D прямая $\begin{cases} 2x+3y-z+D=0, \\ 3x-2y+2z-6=0. \end{cases}$ пересекает: 1) ось Ox; 2) ось Oy; 3) ось Oz.

117. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 5x-2y-z-3=0, \\ x+3y-2z+5=0. \end{cases}$ параллельно вектору $\vec{l}=\{7;9;17\}$.

118. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x-2y+z-3=0, \\ x-2z=0. \end{cases}$ перпендикулярно плоскости $x-2y+z+5=0$.

119. Даны вершины треугольника $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$ и $C(5;1;-7)$. Составить параметрическое уравнение его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

120. Даны вершины треугольника $A(2;-1;-3)$, $B(5;2;-7)$, $C(-7;11;6)$. Составить каноническое уравнение биссектрисы его внешнего угла при вершине A.

121. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;3;-5)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$$

122. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1;2;-3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a}=\{6;-2;-3\}$ и пересекает прямую

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}.$$

123. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4;-5;3)$ и пересекает две прямые

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1} \text{ и } \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}.$$

124. Найти проекцию точки $P(2;-1;3)$ на прямую

$$x=3t,\ y=5t-7,\ z=2t+2.$$

125. Найти точку Q, симметричную точке $P(4;1;6)$ относительно прямой

$$\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$$

126. Найти точку Q, симметричную точке $P(1;3;-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

127. Вычислить расстояние d точки $P(1;-1;-2)$ от прямой

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}.$$

128. Убедившись, что прямые $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0. \end{cases}$ и $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние d между ними.

129. Вычислить кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми в каждом из следующих случаев:

1) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$, $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$;

2) $x=2t-4,\ y=-t+4,\ z=-2t-1$;

$x=4t-5,\ y=-3t+5,\ z=-5t+5$;

3) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$, $x=6t+9,\ y=-2t,\ z=-t+2$.

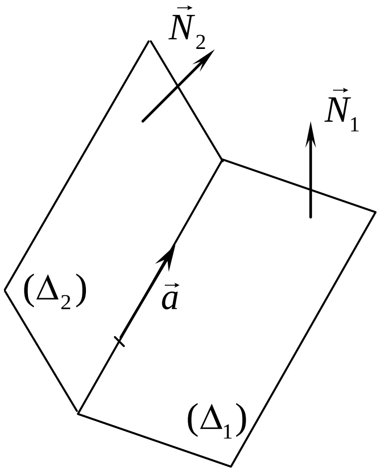
Примеры. Решение задачи № 118.

1. Чтобы записать уравнение плоскости, нужно знать точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на плоскости и нормальный вектор $\vec{N}=\{A;B;C\}$. Тогда уравнение плоскости запишется в виде:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

где $x;y;z$ – текущие координаты плоскости.

2. У нас прямая, через которую проходит плоскость, дана в виде пересечения двух плоскостей: $\begin{cases} 3x-2y+z-3=0 & (\Delta_1) \\ x-3z=0 & (\Delta_2) \end{cases}$.



Следовательно, даны два нормальных вектора

$$\vec{N}_1=\{3;-2;1\} \text{ и } \vec{N}_2=\{1;0;-3\}.$$

Можем найти направляющий вектор данной прямой

$$\vec{a}=\left[\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=\{6;10;2\}\Rightarrow\{3;5;1\}.$$

3. Искомая плоскость перпендикулярна третьей данной плоскости (Δ_3): $x-2y+z+5=0$. Ее нормальный вектор $\vec{N}_3=\{1;-2;1\}$.

4. Следовательно, мы имеем два вектора $\vec{a}$ и $\vec{N}_3$, которые параллельны исходной плоскости. Значит, векторное произведение этих векторов даст искомый нормальный вектор: $\vec{N}=\left[\vec{a}\cdot\vec{N}_3\right]=\{7;-2;-11\}$.

5. Осталось найти точку, лежащую в искомой плоскости. Но это есть любая точка данной прямой: $\begin{cases} 3x-2y+z-3=0, \\ x-3z=0. \end{cases}$ Положим здесь $z=0$, и найдем x и $y\Rightarrow$ $M_0\left(0;-\frac{3}{2};0\right)$.

6. Стало быть, искомое уравнение плоскости будет:

$$7(x-0)-2\left(y+\frac{3}{2}\right)-11(z-0)=0 \Rightarrow \quad 7x-2y-11z-6=0\,.$$

Решение задачи № 122.

Чтобы решить эту задачу, нам надо знать направляющий вектор искомой прямой $\vec{a}=\{m;n;p\}$. Решение будет иметь вид:

$$\frac{x+1}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{p} \Rightarrow \quad \frac{x+1}{m_0}=\frac{y-2}{n_0}=\frac{z+3}{1}.$$

Мы поделили наши равенства в знаменателях на p. Получили $\vec{a}_0=\{m_0;n_0;1\}$. Чтобы найти m_0 и n_0 надо знать два уравнения.

Первое уравнение: $6m_0-2n_0-3\cdot 1=0$ (условие перпендикулярности).

Второе уравнение: смешанное произведение трех векторов $\vec{a}_0$, $\vec{a}_1=\{3;2;-5\}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ равно нулю, т.к. эти три вектора лежат в одной плоскости, где $\vec{a}_1$ направляющий вектор данной прямой и $M_2(1;-1;3)$ точка на этой прямой: $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2;-3;6\}$. Получаем второе уравнение:

$$\begin{vmatrix} m_0 & n_0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \quad 3m_0+8n_0+13=0\,.$$

Имеем систему:

$$\left\{\begin{array}{l} 6m_0-2n_0-3=0 \\ 3m_0+28n_0+13=0 \end{array}\right| \Rightarrow \quad n_0=-\frac{1}{2}, m_0=\frac{1}{3} \Rightarrow \quad \vec{a}_0=\left\{\frac{1}{3};\frac{-1}{2};1\right\} \Rightarrow \quad \{2;-3;6\}\,.$$

Получаем ответ: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. 1) 5; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 13.

2. 34 кв. ед.

3. 150 кв. ед.

4. Применить теорему Пифагора.

5. $M_1(6;0)$ и $M_2(-2;0)$.

6. $M_1(0;28)$ и $M_2(0;-2)$.

7. $P_1(1;0)$ и $P_2(5;-5)$.

8. $C_1(-3;-5)$ и $C_2(5;-5)$.

9. $M_2(3;0)$.

10. $B(0;4)$, $D(-1;-3)$.

11. Условию задачи удовлетворяют два квадрата, симметрично расположенных относительно стороны AB. Вершины одного квадрата суть точки $C_1(-5;0)$, $D_1(-2;4)$, вершины другого – $C_2(3;6)$ и $D_2(6;2)$.

12. $C(3;-2)$, $R=10$.

13. $(1;-3)$, $(3;1)$ и $(-5;7)$.

14. $D_1(2;1)$, $D_2(-2;9)$, $D_3(6;-3)$.

Указание. Четвертая вершина параллелограмма может быть противоположной любой из данных.

15. 13.

16. $\frac{14}{3}\sqrt{2}$.

17. $\left(\frac{5}{2};-2\right)$.

18. $M(-1;0)$, $C(0;2)$.

19. $(4;2)$.

Указание. Вес однородной проволоки пропорционален ее длине.

20. 20 кв. ед.

21. 7,4.

22. $(0;-8)$ или $(0;-2)$.

23. $(5;0)$ или $\left(-\frac{1}{3};0\right)$.

24. $C_1(-1;4)$ или $C_2\left(\frac{25}{7};-\frac{36}{7}\right)$.

25. $C_1(1;-1)$ или $C_2(-2;-10)$.

26. $(-2;-1)$.

27. $Q(11;-11)$.

28. $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$.

29. $2x+3y-13=0$.

30. $M_3(6;-6)$.

31. $4x-y-13=0$, $x-5=0$, $x+8y+5=0$.

32. $3x-5y-13=0$, $8x-3y+17=0$, $5x+2y-1=0$.

33. $3x+7y-5=0$, $3x+2y-10=0$, $9x+11y+5=0$.

34. $x+y-2=0$, $\left(1+\sqrt{2}\right)x+\left(1-\sqrt{2}\right)y-2=0$, $\left(1-\sqrt{2}\right)x+\left(1+\sqrt{2}\right)y-2=0$.

35. $(2;0)$, $(0;-3)$ и $(-4;0)$, $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

36. 4.

37. Условию задачи удовлетворяют два квадрата:

1) $4x+3y-8=0$, $4x+3y+17=0$, $3x-4y+19=0$, $3x-4y-6=0$ и

2) $4x+3y-8=0$, $4x+3y-33=0$, $3x-4y-6=0$, $3x-4y+19=0$.

38. Условию задачи удовлетворяют два квадрата:

1) $3x+4y-11=0$, $4x-3y-23=0$, $3x+4y-27=0$;

2) $3x+4y-11=0$, $4x-3y-23=0$, $3x+4y+5=0$.

39. $M_1'\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$, $M_2'\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$, $M_3'(1;-2)$, $M_4'(3;1)$.

40. $M_1'\left(3;\frac{5}{4}\pi\right)$, $M_2'\left(2;\frac{2}{3}\pi\right)$, $M_3'(1;2+\pi)$, $M_4'(1;\pi-2)$.

41. $A(4;-1)$, $B(0;-4)$, $C(2;0)$.

42. 1) $A(0;0)$, $B(-3;2)$, $C(-4;4)$;

2) $A(3;-2)$, $B(0;0)$, $C(-1;2)$;

3) $A(4;-4)$, $B(1;-2)$, $C(0;0)$.

43. $A\left(3\sqrt{3};1\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$, $C\left(3;-\sqrt{3}\right)$.

44. 1) $M\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$, $N\left(-3\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$, $P\left(-\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$;

2) $M(1;-3)$, $N(5;1)$, $P(-1;3)$;

3) $M(-1;3)$, $N(-5;-1)$, $P(1;-3)$;

4) $M(-3;-1)$, $N(1;-5)$, $P(3;1)$.

45. 1) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$; 2) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$;

3) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$; 4) $(x-1)^2+y^2=1$.

46. $(x-3)^2+(y+1)^2=38$.

47. $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ и $(x-2)^2+(y-3)^2=5$.

48. $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ и $\left(x+\frac{202}{49}\right)^2+\left(y-\frac{349}{49}\right)^2=\left(\frac{185}{49}\right)^2$.

49. $(x-5)^2+(y+2)^2=20$ и $\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{22}{5}\right)^2=20$.

50. 1) $|k|<\frac{3}{4}$; 2) $k=\pm\frac{3}{4}$; 30 $|k|>\frac{3}{4}$.

51. $2\sqrt{5}$.

52. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{5}+y^2=1$; 3) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

53. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$; 2) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$; 3) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$.

54. 1) 5 и 3; 2) $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$; 3) $\varepsilon=\frac{4}{5}$; 4) $x=\pm\frac{25}{4}$.

55. $\left(-2;\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ и $\left(-2;-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$.

56. $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$.

57. $3x+2y-10=0$ и $3x+2y+10=0$.

58. $x+y=\pm 5$.

59. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

60. 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; 2) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$; 3) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$.

61. 1) $a=3, b=4$; 2) $F_1(0;-5), F_2(0;5)$; 3) $\varepsilon=\frac{5}{4}$; 4) $y=\pm\frac{4}{3}x$;

5) $y=\pm\frac{16}{5}$.

62. $x+4\sqrt{5}y+10=0$ и $x-10=0$.

63. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

64. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

65. $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1$.

66. 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-x$; 3) $x^2=-\frac{y}{2}$.

67. 1) $y^2=-9x$; 2) $x^2=-2y$.

68. $5x-18y+25=0$.

II. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

69. $(5;0;0)$ и $(-11;0;0)$.

70. $(0;2;0)$.

71. 7.

72. $\frac{2}{3}\sqrt{74}$.

73. $N(4;1;1)$.

74. $\cos\alpha=\frac{12}{25}, \cos\beta=-\frac{3}{5}, \cos\gamma=-\frac{16}{25}$.

75. 1) нет; 2) может; 3) нет.

76. $M_1\left(\sqrt{3};\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$.

77. $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=22$.

78. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{129}$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7$.

79. $\alpha=4$, $\beta=-1$.

80. $\vec{a}_0=\left\{\frac{3}{13};\frac{4}{13};-\frac{12}{13}\right\}$.

81. 1) -62; 2) 162; 3) 373.

82. $|\vec{p}|=10$.

83. $\alpha=\pm\frac{3}{5}$.

84. $\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

85. $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.

86. $\vec{x}=\{-3;3;3\}$.

87. 6.

88. -4.

89. 16.

90. ± 30.

91. 1) 3; 2) 27; 3) 300.

92. 1) $\{5;1;7\}$; 2) $\{10;2;14\}$; 3) $\{20;4;28\}$.

93. 14.

94. 5.

95. $\sin\varphi=\frac{5\sqrt{17}}{21}$.

96. $\{-7;14;-7\}$, $\{10;13;19\}$.

97. ± 27.

98. -7.

99. 3.

100. 3.

101. 11.

102. $D_1(0;8;0)$, $D_2(0;-7;0)$.

III. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

103. $x-y-3z+2=0$.

104. $x+4y+7z+16=0$.

105. $2x-3y-27=0$.

106. $7x-y-5z=0$.

107. $4x-y-2z-9=0$.

108. $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-\frac{3}{2}}=1$.

109. $2x-3y+z-6=0$.

110. $x-3y-2z+2=0$.

111. $d=4$.

112. $(0;7;0)$, $(0;-5;0)$.

113. $4x-4y-2z+15=0$.

114. $2x-2y-z-18=0$ и $2x-2y-z+12=0$.

115. $(2;-1;0)$, $\left(\frac{4}{3};0;-\frac{1}{3}\right)$, $(0;2;-1)$.

116. 1) -4; 2) 9; 3) 3.

117. $\alpha(5x-2y-z-3)+\beta(x+3y-2z+5)=0$.

118. $11x-2y-15z-3=0$.

119. $x=3t+3,\ y=15t+1,\ z=19t-3$.

120. $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{7}$.

121. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{-5}$.

122. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}$.

123. $\frac{x+4}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}$.

124. $(3;-2;4)$.

125. $(2;-3;2)$.

126. $(4;1;-3)$.

127. $d=7$.

128. $d=25$.

129. 1) 13; 2) 3; 3) 7.