



Общероссийский математический портал

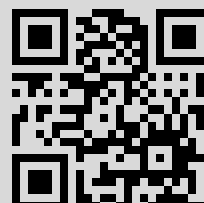
А. Н. Абызов, I_0^* -модули, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, номер 8, 3–17

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.205.4.66

2 ноября 2015 г., 15:30:38



А.Н. АБЫЗОВ

I_0^* -МОДУЛИ

Аннотация. Исследуются кольца, над которыми каждый модуль является I_0^* -модулем, двойственным к I_0 -модулю. Описываются полурегулярные кольца, над которыми каждый модуль является одновременно I_0^* -модулем и I_0 -модулем. Дано описание колец, над которыми каждый модуль является прямой суммой инъективного модуля и SV -модуля. Изучены связи между слабо бэровскими модулями и I_0^* -модулями.

Ключевые слова: полуартиновы кольца, SV -кольца, I_0 -модули, I_0^* -модули, слабо бэровские модули.

УДК: 512.553

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули — унитарными.

Модуль M называется I_0 -модулем, если каждый его немалый подмодуль содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M . Полуартиновый V -модуль называется SV -модулем. Кольцо R называется *обобщенным справа SV -кольцом*, если каждый правый R -модуль является I_0 -модулем. Обобщенные SV -кольца изучались в работах [1]–[9]. Ряд свойств обобщенных SV -колец были отражены в монографиях [10],[11].

Модуль M назовем I_0^* -модулем, если каждый несущественный подмодуль модуля M содержится в прямом слагаемом модуля M , который отличен от M . Несложно заметить, что понятие I_0^* -модуля двойственно понятию I_0 -модуля. Ясно, что каждый CS -модуль является I_0^* -модулем. Таким образом, примерами I_0^* -модулей являются инъективные, квазиинъективные, непрерывные и квазинепрерывные модули.

Хорошо известна

Теорема ([12], 13.5). *Для кольца R равносильны следующие условия:
над кольцом R каждый правый модуль является*

- 1) *модулем со свойством подъема,*
- 2) *CS -модулем,*
- 3) *прямой суммой инъективного модуля и полупростого модуля,*
- 4) *прямой суммой проективного модуля и полупростого модуля;*
- 5) *R — артиново полуцепное кольцо и $J^2(R) = 0$.*

Различные обобщения этой теоремы можно найти в работах [13]–[15]. В данной работе изучаются кольца, удовлетворяющие условиям, которые являются широкими обобщениями условий 2) и 3) из предыдущей теоремы. В первом разделе статьи изучаются кольца, над которыми каждый правый модуль является I_0^* -модулем. Во втором разделе статьи описываются кольца, над которыми каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и обобщенного SV -модуля. Здесь же описываются полурегулярные кольца,

над которыми каждый модуль является одновременно I_0 -модулем и I_0^* -модулем. В третьем разделе изучаются связи между слабо бэровскимим модулями и I_0^* -модулями.

В данной статье будем придерживаться тех же обозначений, что и в работах [1], [4].

1. КОЛЬЦА, НАД КОТОРЫМИ КАЖДЫЙ МОДУЛЬ ЯВЛЯЕТСЯ I_0^* -МОДУЛЕМ

Лемма 1.1. *Прямое слагаемое I_0^* -модуля является I_0^* -модулем.*

Доказательство. Пусть $M = M_1 \oplus M_2$ — I_0^* -модуль и M_1, M_2 — его подмодули. Покажем, что M_1 является I_0^* -модулем. Пусть N — несущественный подмодуль модуля M_1 . Тогда для некоторого собственного подмодуля N_1 модуля M имеет место равенство $M = N_1 \oplus N_2$, где N_2 — подмодуль модуля M и $N \oplus M_2 \subset N_1$. Тогда $N_1 \cap M_1$ — собственное прямое слагаемое модуля M_1 , которое содержит подмодуль N . \square

Из леммы 1.1 непосредственно следует

Лемма 1.2. *Каждый I_0^* -модуль, имеющий конечную размерность Голди, является CS -модулем.*

Лемма 1.3. *Пусть M — правый полуэртиновский R -модуль. Если в категории $\sigma(M)$ инъективная оболочка каждого простого модуля является либо простой, либо локальным M -проективным модулем длины два, то в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является I_0^* -модулем.*

Доказательство. Пусть N_0 — несущественный подмодуль модуля $N \in \sigma(M)$ и S — такой простой подмодуль модуля N , что $N_0 \cap S = 0$. Рассмотрим дополнение по пересечению N' подмодуля S в модуле N , которое содержит подмодуль N_0 . Тогда $E(N) = E(N') \oplus E(S)$. Если $E(S) = S$, то $N = N \cap E(N) = E(N') \cap N \oplus S$ и $N_0 \subset E(N') \cap N$. Предположим, что $E(S)$ — локальный проективный модуль длины два. Обозначим через π проекцию на модуль $E(S)$ относительно разложения $E(N) = E(N') \oplus E(S)$. Если $\pi|_N(N) = S$, то $N \subset E(N') \oplus S$ и, следовательно, $N = E(N') \cap N \oplus S$ и $N_0 \subset E(N') \cap N$. Если $\pi|_N(N) = E(S)$, то $\pi|_N$ — эпиморфизм. Тогда для некоторого ненулевого подмодуля S' модуля N имеем $N = \text{Ker}(\pi|_N) \oplus S'$ и $N_0 \subset \text{Ker}(\pi|_N)$. \square

Лемма 1.4. *Пусть M — I_0^* -модуль. Тогда*

- 1) *если M несингулярный и $J(M) = 0$, то каждый простой подмодуль модуля M является M -инъективным,*
- 2) *если S — простой подмодуль модуля M и $S \subset J(M)$, то $M = M_1 \oplus M_2$, где M_1, M_2 — подмодули модуля M и M_2 — однородный непростой модуль, у которого $\text{Soc}(M_2) \cong S$.*

Доказательство. 1). Пусть S — простой подмодуль модуля M , $E_M(S)$ — инъективная оболочка модуля S в категории $\sigma(M)$ и $f \in \text{Hom}(M, E_M(S))$ — ненулевой гомоморфизм. Так как M — несингулярный модуль, то $\text{Ker}(f)$ — несущественный подмодуль модуля M . Поскольку M — I_0^* -модуль, то $M = M_1 \oplus M_2$, где M_1, M_2 — подмодули модуля M , $\text{Ker}(f) \subset M_1$ и $M_2 \neq 0$. Так как $E_M(S)$ — неразложимый модуль, то $\text{Ker}(f) = M_1$ и поскольку $J(M) = 0$, модуль M_2 является простым. Таким образом, для каждого гомоморфизма f из $\text{Hom}(M, E_M(S))$ имеет место включение $f(M) \subset S$. С другой стороны, согласно ([16], 16.3) $E_M(S) = \text{Hom}(M, E_M(S))M$. Следовательно, $S = E_M(S)$.

2). Пусть M_0 — дополнение по пересечению подмодуля S в модуле M . Так как M — I_0^* -модуль, то для некоторых подмодулей M_1, M_2 модуля M имеет место равенство $M = M_1 \oplus M_2$, где $M_0 \subset M_1$ и $M_2 \neq 0$. Пусть π — проекция на второе прямое слагаемое относительно

разложения $M = M_1 \oplus M_2$. Поскольку подмодуль $M_0 + S$ существует в M и $S \subset J(M)$, то $\pi(S) \neq 0$, $\text{Soc}(M_2) = \pi(S)$ и M_2 — непустой однородный модуль. \square

Лемма 1.5. *Для полупрimitивного кольца R , у которого правый цоколь существует, следующие условия эквивалентны:*

- 1) R — правое I_0^* -кольцо,
- 2) каждый простой проективный правый R -модуль является инъективным.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Импликация непосредственно следует из леммы 1.4.

2) \Rightarrow 1). Доказательство аналогично доказательству леммы 1.3. \square

Лемма 1.6. *Для регулярного кольца R следующие условия эквивалентны:*

- 1) R — полуартинново кольцо, над которым каждый правый модуль является I_0^* -модулем,
- 2) над кольцом R каждый правый модуль является I_0 -модулем,
- 3) R — правое SV -кольцо.

Доказательство. Эквивалентность 2) \Leftrightarrow 3) следует из ([3], теорема 3.7). Импликация 3) \Rightarrow 1) следует из леммы 1.3.

1) \Rightarrow 3). Импликация следует из леммы 1.5 и ([3], лемма 1.1). \square

Модуль M называется тах-модулем, если каждый ненулевой модуль из категории $\sigma(M)$ обладает максимальным подмодулем. Аналогично доказательству ([17], теорема 1) получается

Лемма 1.7. *Пусть M — правый R -модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) M — тах-модуль,
- 2) если S — простой модуль из $\sigma(M)$, то каждый ненулевой подмодуль инъективной оболочки модуля S в категории $\sigma(M)$ содержит максимальный подмодуль,
- 3) каждый ненулевой подмодуль однородного модуля из $\sigma(M)$ содержит максимальный подмодуль.

Непосредственно доказывается

Лемма 1.8. *Пусть M — правый R -модуль. Если M — тах-модуль, то для каждого модуля N из категории $\sigma(M)$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) N — полупростой модуль,
- 2) каждый максимальный подмодуль в N несуществен.

Если A, B — подмодули соответственно правых R -модулей M, N и $f : A \rightarrow B$ — гомоморфизм модулей, то через $\langle f \rangle$ будем обозначать подмодуль модуля $M \oplus N$ вида $\{m + f(m) \mid m \in M\}$.

Лемма 1.9. *Пусть M — правый R -модуль. Тогда*

- 1) если в категории $\sigma(M)$ прямая сумма I_0^* -модуля и полупростого модуля является I_0^* -модулем, то M — тах-модуль,
- 2) если в категории $\sigma(M)$ прямая сумма двух однородных модулей является I_0^* -модулем, то каждый однородный модуль в категории $\sigma(M)$ имеет длину не больше двух.

Доказательство. 1). В силу леммы 1.7 достаточно показать, что каждый однородный модуль, у которого цоколь ненулевой, обладает максимальным подмодулем. Предположим противное. Тогда существует радикальный однородный правый R -модуль N , у которого

$\text{Soc}(N) \neq 0$. Пусть n — элемент модуля M , который не принадлежит $\text{Soc}(N)$, и N_0 — максимальный подмодуль модуля nR . Из условия леммы следует, что модуль $N \oplus nR/N_0$ является I_0^* -модулем. Пусть $f : nR \rightarrow nR/N_0$ — канонический гомоморфизм. Так как $\langle f \rangle \cap nR/N_0 = 0$, то для некоторого собственного подмодуля F модуля M имеем $N \oplus nR/N_0 = F \oplus T$, $\langle f \rangle \subset F$, где T — подмодуль модуля $N \oplus nR/N_0$. Так как $\langle f \rangle \cap N$ существует в $J(N \oplus nR/N_0) = N$ и $\langle f \rangle \subset F$, то $J(T) = 0$ и, следовательно, $J(N \oplus nR/N_0) = J(F)$. Так как $n + f(n) \in F$ и $n \in J(N) \subset F$, то $f(n)R = nR/N_0 \subset F$. Тогда F — существенный подмодуль модуля $N \oplus nR/N_0$ и, следовательно, $F = N \oplus nR/N_0$, что противоречит выбору F .

Утверждение 2) следует из леммы 1.2 и ([12], 13.1). \square

Теорема 1.1. Пусть M — правый R -модуль. Если в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является I_0^* -модулем, то радикал Джекобсона каждого модуля из категории $\sigma(M)$ является полупростым.

Доказательство. Достаточно показать, что радикал Джекобсона каждого инъективного модуля из категории $\sigma(M)$ является полупростым. Предположим, что существует инъективный модуль N из категории $\sigma(M)$, у которого радикал Джекобсона не является полупростым. Без ограничения общности можно считать, что $J(N)$ существует в N . Из лемм 1.8 и 1.9 следует, что модуль $J(N)$ содержит максимальный существенный подмодуль. Обозначим его через N_0 . Пусть $f : J(N) \rightarrow J(N)/N_0$ — канонический гомоморфизм и $N' = N \oplus J(N)/N_0$. Так как $\langle f \rangle \cap J(N)/N_0 = 0$, то для некоторого собственного подмодуля F модуля N' имеем $N' = F \oplus T$, $\langle f \rangle \subset F$, где T — подмодуль модуля N' . Так как $J(N') \cap \langle f \rangle$ существует в $J(N')$, то $J(T) = 0$. Пусть $n \in J(N) \setminus N_0$. Поскольку $n + f(n) \in F$ и $n \in J(N) \subset F$, то $f(n)R = J(N)/N_0 \subset F$. Следовательно, F — существенный подмодуль модуля N' , что противоречит выбору F . \square

Теорема 1.2. Для полурегулярного полуартинового кольца R следующие условия эквивалентны:

- 1) каждый правый R -модуль является I_0^* -модулем,
- 2) в кольце R существует независимое семейство правых идеалов $(A_i)_{i \in I}$, удовлетворяющее условиям
 - a) для каждого i A_i — локальный инъективный модуль длины два,
 - b) $J(R) \subset \bigoplus_{i \in I} A_i$,
 - c) $R/J(R)$ — правое SV -кольцо.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). В силу леммы 1.6 $R/J(R)$ — правое SV -кольцо. Из леммы Цорна следует существование максимального независимого семейства локальных инъективных подмодулей длины два $(A_i)_{i \in I}$ модуля R_R . Предположим, что $J(R) \not\subset \bigoplus_{i \in I} A_i$. Так как согласно теореме 1.1 $J(R)_R$ — полупростой модуль, то для некоторого простого подмодуля S_0 модуля $J(R)_R$ имеем $S_0 \cap \bigoplus_{i \in I} A_i = 0$. Если A — дополнение по пересечению к подмодулю S_0 в модуле R_R , которое содержит подмодуль $\bigoplus_{i \in I} A_i$, то $R_R = A' \oplus B$, где A' — правый идеал кольца R , который содержит A , B — однородный не простой модуль, у которого $\text{Soc}(B) \cong S_0$. Согласно лемме 1.9 B — локальный инъективный модуль длины два. Получили противоречие с выбором семейства подмодулей $(A_i)_{i \in I}$. Следовательно, $J(R) \subset \bigoplus_{i \in I} A_i$.

2) \Rightarrow 1). Пусть S — простой правый R -модуль. Если $E(S)J(R) = 0$, то $E(S) = S$. Если $E(S)J(R) \neq 0$, то $S \cong S'$ для некоторого простого подмодуля S' модуля $\bigoplus_{i \in I} A_i$. Следовательно, $E(S) = A_{i_0}$ для некоторого $i_0 \in I$. Таким образом, инъективная оболочка

каждого простого правого R -модуля является либо простой, либо локальным проективным модулем длины два. Тогда из леммы 1.3 следует, что каждый правый R -модуль является I_0^* -модулем. \square

Из предыдущей теоремы и ([3], следствие 1.3) непосредственно получается

Следствие 1.1. Для полуартинового нормального кольца R следующие условия эквивалентны:

- 1) каждый правый R -модуль является I_0^* -модулем,
- 2) в кольце R существует независимое семейство правых идеалов $(A_i)_{i \in I}$, удовлетворяющее условиям
 - а) для каждого i A_i — локальный инъективный модуль длины два,
 - б) $J(R) \subset \bigoplus_{i \in I} A_i$.

Пример 1.1. Существует коммутативное кольцо R с условиями

- 1) над кольцом R каждый модуль является I_0^* -модулем,
- 2) R не является обобщенным SV -кольцом.

Доказательство. Пусть S — алгебра дуальных чисел над полем вещественных чисел, $T = \prod_{i \geq 1} S_i$, где $S = S_i$ для каждого i , и $R = \{a \in T \mid \exists N \forall i, j > N \ a_i = a_j, a_i \in \mathbb{R}\}$. Несложно заметить, что кольцо R удовлетворяет условиям 2) следствия 1.1 и $I(T) = 0$. Следовательно, согласно ([5], теорема 1) R не является обобщенным SV -кольцом и над кольцом R каждый модуль является I_0^* -модулем. \square

2. КОЛЬЦА, НАД КОТОРЫМИ КАЖДЫЙ МОДУЛЬ ЯВЛЯЕТСЯ ОДНОВРЕМЕННО I_0^* -МОДУЛЕМ И I_0 -МОДУЛЕМ

Следующий пример показывает, что существует обобщенное SV -кольцо R , у которого фактор-кольцо $R/SI(R)$ не является артиновым полуцепным. Таким образом, условия 1) и 2) открытого вопроса из работы [5] не являются эквивалентными.

Пример 2.1. Существует обобщенное справа SV -кольцо R , у которого фактор-кольцо $R/SI(R)$ не является артиновым.

Доказательство. Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство M над некоторым полем P . Пусть $I = \{f \in \text{End}_P(M) \mid \dim(\text{Jm}(f)) < \infty\}$ и $S = P + I$. Хорошо известно, что S — правое SV -кольцо, которое не является левым V -кольцом. Покажем, что кольцо обобщенных матриц $R = \begin{pmatrix} S & s^{MP} \\ 0 & P \end{pmatrix}$ является обобщенным справа SV -кольцом, удовлетворяющим условию $SI(R) = 0$. Пусть $(v_i)_{i \in I}$ — базис векторного пространства M_P и e_i — проекция на подпространство $v_i P$ относительно разложения $M = \bigoplus_{i \in I} v_i P$. Несложно заметить, что

$$\text{Soc}(S) = \bigoplus_{i \in I} e_i S$$

Так как $e_i S = e_i \text{End}_P(M) = \text{Hom}_P(M, e_i M)$, то из ([18], следствие 5.5) вытекает, что для каждого $i \in I$ правый R -модуль $L_i = (e_i S, e_i M)$ является инъективным. Ради полноты изложения приведем непосредственные вычисления, показывающие инъективность модуля L_i для каждого $i \in I$. Будем придерживаться терминологии и обозначений из работы [18]. Пусть (A, B) — правый R -модуль, (A_0, B_0) — его подмодуль и (f_1, f_2) — гомоморфизм из модуля (A_0, B_0) в модуль L_i . Рассмотрим произвольное продолжение $g_2 : B \rightarrow e_i M$ линейного отображения f_2 на векторное пространство B . Пусть $\phi : A \rightarrow \text{Hom}_P(M, B)$ — гомоморфизм модульного умножения модуля (A, B) , действующий по правилу $a \mapsto (m \mapsto am)$ и

$F : (A, B) \rightarrow L_i$ — отображение, действующее по правилу $F((a, b)) = (g_2\phi(a), g_2(b))$. Ясно, что $\phi|_{A_0} : A_0 \rightarrow \text{Hom}_P(M, B_0)$ — гомоморфизм модульного умножения модуля (A_0, B_0) . Так как при $\Omega(m) = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $F((a, b)) = F((0, am)\Omega(m)) = (0, g_2(am)) = (0, g_2\phi(a)m) = (g_2\phi(a), g_2(b))\Omega(m) = F((a, b))\Omega(m)$, то F — R -гомоморфизм. Поскольку $f_2\phi|_{A_0}(a_0)(m) = f_2(a_0m) = f_1(a_0)m$ для каждого $m \in M$ и каждого $a_0 \in A_0$, то $f_2\phi|_{A_0}(a_0) = f_1(a_0)$. Следовательно, $F((a_0, b_0)) = (g_2\phi(a_0), g_2(b_0)) = (f_2\phi|_{A_0}(a_0), f_2(b_0)) = (f_1(a_0), f_2(b_0))$ для каждой упорядоченной пары $(a_0, b_0) \in (A_0, B_0)$. Таким образом, $F|_{(A_0, B_0)} = (f_1, f_2)$.

Покажем, что $S_i = L_i/J(L_i)$ является простым инъективным модулем для каждого $i \in I$. Предположим $E(S_i) \neq S_i$ для некоторого $i \in I$. Тогда $S_i \subset J(E(S_i))$. Так как $R/J(R) \cong S \times P$ — правое V -кольцо, то $S_i \subset J(E(S_i)) = E(S_i)J(R)$ и, следовательно, S_i изоморфно простому подмодулю полупростого модуля $J(R)_R$. Таким образом, $S_i \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. С другой стороны, $S_i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что $E(S_i) = S_i$ для каждого $i \in I$. Аналогичными рассуждениями можно показать инъективность простого правого R -модуля вида $\begin{pmatrix} S & sM_P \\ 0 & P \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \text{Soc}(S) & sM_P \\ 0 & P \end{pmatrix}$. Таким образом, $I_1(R) = \begin{pmatrix} \text{Soc}(S) & sM_P \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I(R) = I_2(R) = \begin{pmatrix} S & sM_P \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R/I(R) \cong P$ и из ([5], теорема 1) следует, что R — обобщенное справа SV -кольцо. Также несложно заметить, что $SI(R) = 0$. \square

Кольцо R назовем *обобщенным справа SV -кольцом типа I*, если $R/SI(R)$ является артиновым полуцепным кольцом, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$, и типа II, если кольцо R удовлетворяет условию примера 2.1. Из ([1], теорема 2.2) следует, что кольцо, над которым каждый модуль является I_0 -модулем, является обобщенным справа SV -кольцом типа I.

Лемма 2.1. Пусть R — обобщенное справа SV -кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) R — обобщенное справа SV -кольцо типа I,
- 2) прямая сумма всякого семейства локальных правых R -модулей длины два является инъективным модулем,
- 3) прямая сумма всякого семейства попарно изоморфных локальных правых R -модулей длины два является инъективным модулем.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Пусть $(M_i)_{i \in I}$ — семейство локальных модулей длины два. Согласно ([2], лемма 4) M_i — инъективный модуль для каждого $i \in I$. Так как $R/SI(R)$ — артиново кольцо и $E\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right)SI(R) = 0$, то $E\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \bigoplus_{i \in I} M_i$.

2) \Rightarrow 3) очевидно.

3) \Rightarrow 1). Пусть кольцо R удовлетворяет условию 3). Если $\overline{R} = R/SI(R)$ не является артиновым кольцом, то из ([3], лемма 1.1 и [4], лемма 2.4) следует, что модуль \overline{R}_R содержит бесконечное независимое семейство попарно изоморфных локальных R -модулей длины два, что противоречит условию (3). Таким образом, R — обобщенное справа SV -кольцо типа I. \square

Лемма 2.2. Пусть R — кольцо формальных верхнетреугольных матриц $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$, где

- а) S — правое SV -кольцо,
- б) для некоторого идеала I кольца S выполнены условия $MI = 0$ и S/I классически полупросто,
- в) кольцо $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джексона равен нулю.

Тогда над кольцом R каждый правый модуль является одновременно I_0^* -модулем и I_0 -модулем.

Доказательство. Покажем, что над кольцом R каждый правый модуль является I_0 -модулем. Достаточно выяснить, что $I' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \subset SI(R)$. Покажем, что для каждого ординала α модуль $\text{Soc}_{\alpha+1}(I')/\text{Soc}_\alpha(I')$ является прямой суммой простых инъективных $R/\text{Soc}_\alpha(I')$ -модулей. В силу естественного изоморфизма колец $R/\text{Soc}_\alpha(I') \cong R' = \begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/\text{Soc}_\alpha(I) \end{pmatrix}$ достаточно доказать, что правый R' -модуль $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Soc}_{\alpha+1}(I')/\text{Soc}_\alpha(I) \end{pmatrix}$ является прямой суммой простых инъективных правых R' -модулей. Пусть N — простой подмодуль из $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Soc}_{\alpha+1}(I')/\text{Soc}_\alpha(I) \end{pmatrix}$. Если $E(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, то для некоторого элемента $r \in R'$ имеем

$$E(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} rR'N = N.$$

С другой стороны, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} rR'N \subset \begin{pmatrix} T & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I/\text{Soc}_\alpha(I) \end{pmatrix} = 0$. Полученное противоречие показывает, что модуль $E(N)$ можем рассматривать как модуль над кольцом $R'/\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда в силу условий исходной леммы $E(N) = N$. Таким образом, модуль $\text{Soc}_{\alpha+1}(I')/\text{Soc}_\alpha(I')$ является прямой суммой простых инъективных $R/\text{Soc}_\alpha(I')$ -модулей. Из ([3], лемма 1.1) следует, что для каждого ординала α модуль $\text{Soc}_{\alpha+1}(I')/\text{Soc}_\alpha(I')$ является прямой суммой простых инъективных R -модулей и, значит, $I' \subset SI(R)$. Тот факт, что над кольцом R каждый правый модуль является I_0^* -модулем, вытекает из теоремы 1.2. \square

Теорема 2.1. *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*

- 1) R — полурегулярное обобщенное справа SV -кольцо типа I, над которым каждый правый модуль является I_0^* -модулем,
- 2) над кольцом R каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и SV -модуля,
- 3) кольцо R изоморфно кольцу формальных верхнетреугольных матриц $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$, где
 - а) S — правое SV -кольцо,
 - б) для некоторого идеала I кольца S выполнены условия $MI = 0$ и S/I классически полупросто,
 - в) кольцо $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джексона равен нулю.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Пусть M — произвольный правый R -модуль и $(M_i)_{i \in I}$ — максимальное независимое семейство локальных подмодулей модуля M длины два. Из леммы 2.1 следует, что для некоторого подмодуля M_0 модуля M имеет место равенство $M = \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \oplus M_0$. Если $J(M_0) \neq 0$, то из полуартиновости кольца R , лемм 1.4 и 1.9 вытекает существование локального подмодуля длины два в модуле M_0 , что противоречит максимальнойности семейства $(M_i)_{i \in I}$. Так как согласно лемме 1.6 $R/J(R)$ — SV -кольцо и $M_0J(R) = 0$, то M_0 — SV -модуль.

2) \Rightarrow 1). Предположим, что кольцо R удовлетворяет условию 2). Если R не является полурегулярным справа, то из условия 2) следует, что над кольцом R найдется ненулевой инъективный правый модуль M , у которого каждый подмодуль инъективен и $\text{Soc}(M) = 0$, что невозможно. Таким образом, R — полурегулярно справа кольцо и из условия 2) имеем, что инъективная оболочка каждого простого правого R -модуля является локальным модулем длины не больше двух. Значит, из условия 2) и ([19], теорема 3.2) следует равенство $R = eR \oplus (1 - e)R$, где e — идемпотент кольца R , eR — конечная прямая сумма инъективных локальных правых R -модулей длины не больше двух и $(1 - e)R$ — SV -модуль. Так как согласно ([16], 23.4) прямая сумма V -модулей является V -модулем, то $R/J(R)$ — правое SV -кольцо. Тогда R — полурегулярное кольцо и в силу теоремы 1.2 над кольцом R

каждый правый R -модуль является I_0^* -модулем. Предположим, что кольцо $\overline{R} = R/SI(R)$ не является артиновым полуцепным. Тогда имеет место равенство $\overline{R} = f\overline{R} \oplus (1-f)\overline{R}$, где f — идемпотент кольца \overline{R} , $f\overline{R}$ — конечная прямая сумма инъективных локальных правых \overline{R} -модулей длины не больше двух и $(1-f)\overline{R}$ — ненулевой SV -модуль, который согласно ([3], лемма 1.1) не содержит простых инъективных подмодулей. Тогда правый идеал $f\overline{R}$ кольца \overline{R} содержит бесконечное семейство ортогональных примитивных идемпотентов $(f_i)_{i=1}^\infty$ и из условия 2) следует, что прямая сумма $\bigoplus_{i=1}^\infty E(f_i\overline{R})$ локальных модулей длины два является инъективным модулем. Следовательно, существует гомоморфизм из модуля $\overline{R}_{\overline{R}}$ в модуль $\bigoplus_{i=1}^\infty E(f_i\overline{R})$, который тождественно действует на подмодуле $\bigoplus_{i=1}^\infty f_i\overline{R}$, что, очевидно, невозможно. Полученное противоречие показывает, что кольцо $R/SI(R)$ является артиновым полуцепным, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$. Таким образом, R — обобщенное справа SV -кольцо типа I.

1) \Rightarrow 3). Так как $SI(R) \cap J(R) = 0$ и $\lg(R_R/SI(R)) < \infty$, то модуль $J(R_R)$ имеет конечную длину и из теоремы 1.2 вытекает существование такого идемпотента $e \in R$, что eR — прямая сумма локальных инъективных модулей длины два и $J((1-e)R) = 0$. Поскольку $\text{Hom}(eR, (1-e)R) = 0$, то $(1-e)Re = 0$. Несложно заметить, что $eSI(R) = 0$. Значит, $SI(R) \subset (1-e)R(1-e)$. Поскольку согласно теореме 1.2 $R/J(R)$ — SV -кольцо, то $(1-e)R$ — SV -модуль и из ([1], теорема 3.8) следует $(1-e)R(1-e)$ — SV -кольцо.

3) \Rightarrow 1). Импликация вытекает из леммы 2.2. \square

Замечание. Из предыдущих результатов следует, что кольцо R из примера 2.1 является обобщенным справа SV -кольцом, над которым каждый правый модуль является I_0^* -модулем, и для кольца R не выполнено условие 2) из теоремы 2.1.

Следствие 2.1. Для кольца R следующие условия эквивалентны:

- 1) R — полурегулярное обобщенное SV -кольцо, над которым каждый правый модуль является I_0^* -модулем,
- 2) R — кольцо, у которого каждый примитивный образ артинов, и над кольцом R каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и SV -модуля,
- 3) кольцо R изоморфно кольцу формальных верхнетреугольных матриц $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$, где
 - а) S — SV -кольцо,
 - б) для некоторого идеала I кольца S выполнены условия $MI = 0$ и S/I классически полупросто,
 - в) кольцо $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.

Доказательство. Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 2) следует из теоремы 2.1 и ([1], теорема 2.2).

1) \Rightarrow 3). Согласно теореме 2.1 кольцо R изоморфно кольцу верхнетреугольных матриц $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$, удовлетворяющему условиям 3) теоремы 2.1. Так как согласно ([1], теорема 2.2) у кольца R каждый примитивный образ артинов, то у кольца S каждый примитивный образ также является артиновым и, значит, согласно ([20], теорема 2.7) S — SV -кольцо.

3) \Rightarrow 1). В силу леммы 2.2 достаточно показать, что $R' = \begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ — обобщенное SV -кольцо. Ясно, что $I' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ — идеал кольца $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$. Так как S — SV -кольцо, то из ([1], теорема 3.11) следует существование в кольце R' для некоторого ординала α семейства идеалов $(I_\beta)_{\beta < \alpha}$, удовлетворяющего условиям $I' = \bigcup_{\beta < \alpha} I_\beta$, $I_\beta \subset I_\gamma$, если $\beta < \gamma < \alpha$, и $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ — прямая сумма полных матричных колец конечного порядка над телами. Тогда из условия 3 в) теоремы 2.1

следует, что каждый примитивный образ кольца R' является артиновым. Значит, согласно ([1], теорема 2.2) R' — обобщенное SV -кольцо. \square

Теорема 2.2. *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*

- 1) R — полурегулярное кольцо, над которым каждый модуль является одновременно I_0 -модулем и I_0^* -модулем,
- 2) над кольцом R каждый модуль является прямой суммой инъективного модуля и SV -модуля,
- 3) R — прямое произведение SV -кольца и артинового полуцепного кольца, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.

Доказательство. Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 2) следует из теоремы 2.1.

Импликация 3) \Rightarrow 1) проверяется непосредственно.

1) \Rightarrow 3). Согласно теореме 2.1 кольцо R изоморфно кольцу формальных верхнетреугольных матриц $R' = \begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$, удовлетворяющему условиям 3) теоремы 2.1. Из доказательства импликации 2) \Rightarrow 1) теоремы 2.1 следует, что $J(R')$ содержится в конечной прямой сумме

инъективных локальных левых R' -модулей длины два и, значит, $M' = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J\left(\sum_{i=1}^n R'e'_i\right)$,

где e'_1, \dots, e'_n — ортогональные примитивные идемпотенты и $R'e'_i$ — локальный инъективный модуль длины два для каждого $1 \leq i \leq n$. Для произвольного $1 \leq i \leq n$ идемпотент e'_i имеет вид $\begin{pmatrix} f_i & m_i \\ 0 & e_i \end{pmatrix}$, где f_i, e_i — идемпотенты соответственно колец T и S . Так как $J(R') \begin{pmatrix} f_i & m_i \\ 0 & e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(T)f_i & Me_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — простой подмодуль модуля M' , то $e_i \neq 0$. Поскольку $e'_i + J(R')$ — примитивный идемпотент в $R'/J(R')$, то $f_i = 0$. Таким образом, без ограничения общности можем считать, что $e'_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_i \end{pmatrix}$, где e_i — примитивный идемпотент кольца S . Поскольку $M = \bigoplus_{i=1}^n Me_i$ — разложение полупростого левого T -модуля в прямую сумму

простых подмодулей, то $M\left(1 - \sum_{i=1}^n e_i\right) = 0$. Если для некоторого примитивного идемпотента e кольца S выполнено условие $eS \cong e_iS$, где $1 \leq i \leq n$, то несложно заметить, что $Me \neq 0$. Поэтому правые идеалы $\left(\sum_{i=1}^n e_i\right)S$ и $\left(1 - \sum_{i=1}^n e_i\right)S$ кольца S не содержат изоморфных

простых правых R -подмодулей. Следовательно, $e = \sum_{i=1}^n e_i$ — центральный идемпотент кольца S и кольцо R изоморфно прямому произведению SV -кольца $(1 - e)S$ и артинового полуцепного кольца $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & eS \end{pmatrix}$, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю. \square

Лемма 2.3. *Пусть M — квазипроективный модуль, у которого $\text{Soc}(M)$ существует и $J(M) = 0$. Если $\text{Soc}(M)$ является дистрибутивным модулем, то $\text{End}(M)$ — нормальное кольцо. В частности, полупримитивное полуартиново кольцо, у которого каждый примитивный идемпотент централен, является нормальным.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого идемпотента f кольца $\text{End}(M)$ выполнено равенство $f\text{End}(M)(1 - f) = 0$. Пусть f — идемпотент кольца $\text{End}(M)$, отличный от 0 и 1. Если $(1 - f)\text{End}(M)f \neq 0$, то из условия леммы следует существование ненулевого гомоморфизма из fM в простой подмодуль S модуля $(1 - f)M$. Так как S — проективный модуль в категории $\sigma(M)$ и $\text{Soc}(fM)$ существует в fM , то S изоморфен некоторому подмодулю модуля fM , что противоречит условию исходной леммы. \square

Лемма 2.4. *Пусть R — полуартиново кольцо без бесконечного множества ортогональных нецентральных идемпотентов. Тогда*

- 1) если $J(R)=0$, то R — прямое произведение классически полупростого кольца и нормального кольца,
- 2) R — полурегулярное кольцо.

Доказательство. 1). Из условия исходной леммы следует существование в кольце R конечного семейства примитивных ортогональных идемпотентов $\{e_i\}_{i=1}^n$ таких, что в правом идеале $\text{Soc}\left(\left(1 - \sum_{i=1}^n e_i\right)R\right)$ каждый примитивный идемпотент является центральным. Так как у модулей $\left(1 - \sum_{i=1}^n e_i\right)R$ и $\sum_{i=1}^n e_i R$ нет изоморфных простых подмодулей, то идемпотент $\sum_{i=1}^n e_i$ является центральным и утверждение пункта следует из леммы 2.3.

2) непосредственно следует из п. 1). □

Теорема 2.3. Для кольца R без бесконечного множества ортогональных нецентральных идемпотентов следующие условия эквивалентны:

- 1) над кольцом R каждый правый модуль является одновременно I_0^* -модулем и I_0 -модулем,
- 2) над кольцом R каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и SV -модуля.
- 3) кольцо R изоморфно кольцу верхнетреугольных матриц $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$, где
 - а) S — полуартиново нормальное регулярное кольцо,
 - б) для некоторого идеала I кольца S выполнены условия $MI = 0$ и S/I классически полупросто,
 - в) кольцо $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.

Доказательство. Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 2) вытекает из теоремы 2.1, леммы 2.4 и ([9], теорема 2).

1) \Rightarrow 3). Из доказательства импликации 2) \Rightarrow 1) теоремы 2.1 следует, что R — полуартиново кольцо и для некоторого конечного семейства $(A_i)_{i \in I}$ инъективных подмодулей длины два модуля R_R имеет место равенство $R_R = \bigoplus_{i \in I} A_i \oplus B$, где B — подмодуль модуля R_R , у которого $J(B) = 0$. Так как R — кольцо без бесконечных множеств ортогональных нецентральных идемпотентов, то для модуля B существует разложение вида $B = C \oplus D$, где C — полупростой подмодуль модуля B конечной длины, не содержащий центральных примитивных идемпотентов, а D — подмодуль модуля B , у которого каждый примитивный идемпотент является центральным. Пусть e — такой идемпотент кольца R , что $eR = \bigoplus_{i \in I} A_i \oplus C$ и $(1 - e)R = D$. Ясно, что $(1 - e)Re = 0$. В силу леммы 2.3 $(1 - e)R(1 - e)$ является нормальным кольцом. Обозначим через I наибольший абелево-регулярный идеал кольца R . Согласно ([4], теорема 4.2) R/I является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю. Из ([4], теорема 4.2) следует, что каждый простой подфактор модуля I_R является инъективным. Значит, $eI = 0$ и $I \subset (1 - e)R = (1 - e)R(1 - e)$.

3) \Rightarrow 1) вытекает из леммы 2.2 и ([3], следствие 1.5). □

Аналогично доказательству теоремы 2.2 обосновывается

Следствие 2.2. Для кольца R без бесконечного множества ортогональных нецентральных идемпотентов следующие условия эквивалентны:

- 1) над кольцом R каждый модуль является одновременно I_0^* -модулем и I_0 -модулем,

- 2) над кольцом R каждый модуль является прямой суммой инъективного модуля и SV -модуля,
- 3) R — прямое произведение нормального регулярного полуартинового кольца и артинового полуцепного кольца, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.

Пример 2.2. Существует кольцо R , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) R — обобщенное SV -кольцо, над которым каждый правый модуль является I_0^* -модулем,
- 2) над кольцом R существует левый модуль, который не является I_0^* -модулем.

Доказательство. Пусть P — некоторое поле, $R = \prod_{i \geq 1} P_i$, где $P = P_i$ для каждого i , $S = \{a \in R \mid \exists N \forall i, j > N a_i = a_j\}$ и ${}_P P_S$ — P - S -бимодуль, у которого умножение слева на элементы из P совпадает с умножением в поле P , а умножение справа определяется правилом $p(1_{RP'} + s_0) = pp'$, где $s_0 \in \text{Soc}(S) = \bigoplus_{i \geq 1} P_i$. Несложно заметить, что кольцо $R' = \begin{pmatrix} P & PPS \\ 0 & S \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям леммы 2.2. Значит, R' — обобщенное SV -кольцо, над которым каждый правый модуль является I_0^* -модулем. Подмодуль $M = \begin{pmatrix} 0 & P \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ модуля ${}_R R'$ является простым и $M \not\subseteq J(R'e) = 0$ для каждого примитивного идемпотента e кольца R' . Тогда из теоремы 1.2 следует, что над кольцом R' не каждый левый модуль является I_0^* -модулем. \square

3. СЛАБО БЭРОВСКИЕ МОДУЛИ

Далее будем придерживаться следующих обозначений. Пусть A — подмножество кольца R . Тогда через $l(A)$ (соответственно $r(A)$) будем обозначать левый (соответственно правый) аннулятор множества A в кольце R . Если M — правый R -модуль и N — произвольное подмножество модуля M , то через $l(N)$ будем обозначать множество

$$\{f \in \text{End}_R(M) \mid f(N) = 0\}.$$

Модуль M назовем *слабо бэровским модулем*, если каждый ненулевой аннулятор $l(N)$ произвольного подмодуля N модуля M содержит ненулевой идемпотент.

Модуль M называется *\mathcal{K} -несингулярным*, если $l(N) = 0$ для каждого существенного подмодуля N модуля M . Модуль M называется *\mathcal{K} -некосингулярным*, если для каждого подмодуля N модуля M из равенства $l(N) = 0$ следует существенность подмодуля N в модуле M . Кольцо R называется *некосингулярным справа*, если модуль R_R является \mathcal{K} -некосингулярным, и кольцо R называется *справа Утуми-кольцом*, если R одновременно является несингулярным справа и некосингулярным справа.

Правый R -модуль M называется *\mathcal{T} -некосингулярным*, если $\text{Hom}_R(M, N) = 0$ для каждого малого подмодуля N модуля M . Модуль M называется *\mathcal{T} -модулем*, если для каждого немалого подмодуля N модуля M выполнено условие $\text{Hom}_R(M, N) \neq 0$. Назовем модуль M *дуально слабо бэровским*, если каждый подмодуль N модуля M , у которого $\text{Hom}_R(M, N) \neq 0$, содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M .

Следующие два утверждения аналогичны соответственно утверждениям ([21], теорема 2.12; [22], теорема 2.14) и проверяются непосредственно.

Лемма 3.1. *Для правого R -модуля M следующие условия равносильны:*

- 1) M — \mathcal{K} -некосингулярный слабо бэровский модуль,
- 2) M — \mathcal{K} -антисингулярный I_0^* -модуль.

Лемма 3.2. *Для правого R -модуля M следующие условия равносильны:*

- 1) M — дуально слабо бэровский T -модуль,
- 2) M — T -некосингулярный I_0 -модуль.

Теорема 3.1. Для правого R -модуля M следующие условия равносильны:

- 1) в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является I_0^* -модулем,
- 2) если $N \in \sigma(M)$, то для каждого $f \in \text{End}(N)$, у которого образ несуществен и $l(f) \neq 0$, существует такой ненулевой идемпотент $e \in \text{End}(N)$, что $ef = 0$.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2) очевидно.

2) \Rightarrow 1). Пусть N_0 — несущественный подмодуль модуля N . Для каждого $n \in N$ через \bar{n} будем обозначать смежный класс $n + N_0$. Рассмотрим внешнюю прямую сумму модулей $N' = N/N_0 \oplus N \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i \right)$, где $N_i = N_0$ для каждого $i \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим гомоморфизмы $f, g \in \text{End}(N')$, действующие по правилам

$$\begin{aligned} f((\bar{n}, t, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)) &= (\bar{n}, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots), \\ g((\bar{n}, t, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)) &= (\bar{n}, 0, 0, \dots, 0, \dots). \end{aligned}$$

Несложно заметить, что образ f несуществен в N' и $gf = 0$. Тогда $\text{Jm}(f) = N/N_0 \oplus N_0 \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i \right)$ содержится в собственном прямом слагаемом модуля N' . Следовательно, N_0 содержится в собственном прямом слагаемом модуля N . \square

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 3.2. Для правого R -модуля M следующие условия равносильны:

- 1) в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является I_0 -модулем,
- 2) если $N \in \sigma(M)$, то для каждого $f \in \text{End}(N)$, у которого ядро некосущественно и $r(f) \neq 0$, существует такой ненулевой идемпотент $e \in \text{End}(N)$, что $fe = 0$.

Следствие 3.1. Для V -модуля M следующие условия равносильны:

- 1) в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является I_0 -модулем,
- 2) если $N \in \sigma(M)$, то $\text{End}(N)$ — слабо бэровское слева кольцо.

Введем для правого R -модуля M условие (*):

$f \text{Hom}_R(M, N) \neq 0$ для каждого подмодуля N модуля M

и каждого ненулевого гомоморфизма $f \in \text{Hom}_R(N, M)$.

Лемма 3.3. Для правого R -модуля M

- 1) если M — слабо бэровский модуль, то $S = \text{End}_R(M)$ — слабо бэровское справа кольцо,
- 2) если $S = \text{End}_R(M)$ — правое слабо бэровское кольцо и модуль N удовлетворяет условию (*), то M — слабо бэровский модуль.

Доказательство. 1). Пусть I — правый идеал кольца S и $l(I) \neq 0$. Так как M — слабо бэровский модуль, то для некоторого ненулевого идемпотента $e \in S$ имеем $eIM = 0$ и, следовательно, $eI = 0$.

2). Пусть N — подмодуль модуля M и $I = l(N) \neq 0$. Покажем, что $I = \text{lr}(I)$. Если $I \neq \text{lr}(I)$, то для некоторого гомоморфизма $\phi \in S$ имеем $\phi r(I) = 0$ и $\phi(N) \neq 0$. Так как $\text{Hom}_R(M, N) \subset r(I)$, то $\phi \text{Hom}_R(M, N) = 0$ и, значит, в силу условия (*) $\phi(N) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $I = \text{lr}(I)$. Поскольку $S = \text{End}_R(M)$ — правое слабо бэровское кольцо, то идеал I содержит ненулевой идемпотент кольца S . \square

Правый R -модуль M называется *вполне идемпотентным*, если для каждого его подмодуля N выполнено равенство $N = \text{Hom}_R(M, N)N$.

Теорема 3.3. *Для вполне идемпотентного правого R -модуля M следующие условия равносильны:*

- 1) M — слабо бэровский модуль,
- 2) $\text{End}_R(M)$ — правое слабо бэровское кольцо.

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2) следует из леммы.

2) \Rightarrow 1). В силу леммы 3.6 достаточно проверить выполнимость условия (*). Пусть N — подмодуль модуля M и $f \in \text{Hom}_R(N, M)$ — ненулевой гомоморфизм. Так как $fN = f \text{Hom}_R(M, N)N \neq 0$, то $f \text{Hom}_R(M, N) \neq 0$. \square

Теорема 3.4. *Пусть M — правый R -модуль. Если модуль M является ретрактбельным и несингулярным, то следующие условия равносильны:*

- 1) M — слабо бэровский модуль,
- 2) $\text{End}_R(M)$ — слабо бэровский модуль.

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2) следует из леммы 3.3.

2) \Rightarrow 1). Предположим, что условие (*) не выполнено для модуля M . Тогда для некоторого подмодуля M' модуля M и ненулевого гомоморфизма $f \in \text{Hom}_R(M', M)$ выполнено равенство $f \text{Tr}_M(M') = 0$. Если M_0 — ненулевой подмодуль модуля M' , то $\text{Hom}_R(M, M_0) \neq 0$ и, значит, $\text{Tr}_M(M')$ — существенный подмодуль модуля M' . Тогда $f(M')$ — ненулевой сингулярный подмодуль M , что противоречит несингулярности модуля M . \square

Теорема 3.5. *Пусть M — правый R -модуль. Если модуль M является ретрактбельным и несингулярным, то следующие условия равносильны:*

- 1) M — I_0^* -модуль,
- 2) M — слабо бэровский K -некосингулярный модуль,
- 3) $\text{End}_R(M)$ — правое слабо бэровское некосингулярное справа кольцо,
- 4) $\text{End}_R(M)$ — правое I_0^* -кольцо.

Доказательство. Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 2) следует из леммы 3.1. Эквивалентность 3) \Leftrightarrow 4) следует из леммы 3.1 и ([23], теорема 3.1).

Импликация 2) \Rightarrow 3) вытекает из ([23], теорема 3.6) и теоремы 3.3.

3) \Rightarrow 2). Согласно лемме 2.1 $\text{End}_R(M)$ — несингулярное справа кольцо. Тогда $\text{End}_R(M)$ — справа Утуми-кольцо и импликация следует из ([23], теорема 3.6) и теоремы 3.4. \square

Теорема 3.6. *Для полупрIMITивного полуртинового справа кольца R следующие условия равносильны:*

- 1) R — справа I_0^* -кольцо,
- 2) R — некосингулярное справа кольцо,
- 3) каждый простой подмодуль модуля R_R является инъективным.

Доказательство. Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 2) вытекает из леммы 3.1. Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 3) вытекает из леммы 1.5. \square

Теорема 3.7. *Для полуртинового регулярного кольца R равносильны условия*

- 1) R — правое SV -кольцо,
- 2) для каждого ординала α кольцо $R/\text{Soc}_\alpha(R_R)$ является некосингулярным справа.

Доказательство. Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 2) непосредственно следует из теоремы 3.6 и ([3], лемма 1.1). \square

Из теоремы 3.7 вытекает

Следствие 3.2. Для полуартинового регулярного кольца R длины Леви равносильны два условия:

- 1) R — правое SV -кольцо,
- 2) R — некосингулярное справа кольцо.

Замечание. Пусть P — некоторое поле и $CFM_{\mathbb{N}}(P)$ — кольцо $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -конечно-столбцовых матриц над полем P . Рассмотрим в кольце $CFM_{\mathbb{N}}(P)$ подкольцо R вида $PE + N$, где E — единичная матрица, а $N = \{A \in CFM_{\mathbb{N}}(P) \mid A_{ij} = 0 \text{ для почти всех пар } (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. В работе [20] было показано, что R не является правым SV -кольцом. Покажем, как этот факт получается из предыдущего следствия. Пусть I — правый идеал кольца R , состоящий из всех матриц, у которых сумма элементов в каждом столбце равна нулю. Ясно, что $I \subset \text{Soc}(R)$ и $\text{Soc}(R) \neq I$. Таким образом, I несуществен в R_R . Непосредственные вычисления показывают, что $l(I) = 0$. Значит, согласно следствию 3.2 R не является правым SV -кольцом. Аналогично можно показать, что R не является левым SV -кольцом.

Пусть V — бесконечномерное векторное пространство над полем P , $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — базис векторного пространства V , $I = \{f \in \text{End}_P(V) \mid \dim(\text{Jm}(f)) < \infty\}$ и $S = P + I$. Хорошо известно, что S является правым SV -кольцом, но не является левым V -кольцом. Покажем как этот факт вытекает из следствия 3.2. Пусть $N_0 = \{f \in I \mid \forall \alpha, \beta \in A f(e_\alpha) = f(e_\beta)\}$, $N = \{f \in I \mid f(e_\alpha) = 0 \text{ для почти всех } \alpha \in A\}$. Ясно, что N_0 является простым подмодулем модуля ${}_S S$ и $N \cap N_0 = 0$. Так как правый аннулятор N в кольце S равен нулю и N не существен в ${}_S S$, то согласно следствию 3.2 кольцо S не является левым V -кольцом. Пусть T — несущественный правый идеал кольца S . Тогда $T \cap \pi S = 0$ для некоторого примитивного идемпотента π кольца S . Пусть $v \in \pi V$ и $v \neq 0$. Если $v \in TV$, то несложно заметить, что для некоторого $f \in T$ имеет место равенство $vP = \text{Jm}(f)$. Следовательно, $f \in \pi S$, что противоречит равенству $T \cap \pi S = 0$. Поэтому $TV \cap vP = 0$ и, значит, для некоторого ненулевого линейного оператора $g \in I$ имеем $gTM = 0$, $gT = 0$. Таким образом, каждый несущественный правый идеал кольца S имеет ненулевой аннулятор и из следствия 3.2 получаем, что S — правое V -кольцо.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абызов А.Н. *О некоторых классах полуартиновых колец*, Сиб. матем. журн. **53** (5), 955–966 (2012).
- [2] Абызов А.Н. *Обобщенные SV -модули*, Сиб. матем. журн. **50** (3), 481–488 (2009).
- [3] Абызов А.Н. *Слабо регулярные кольца над нормальными кольцами*, Сиб. матем. журн. **49** (4), 721–738 (2008).
- [4] Абызов А.Н. *Обобщенные SV -кольца ограниченного индекса nil-потентности*, Изв. вузов. Матем., № 12, 3–14 (2011).
- [5] Абызов А.Н., Туганбаев А.А. *Кольца, над которыми все модули являются I_0 -модулями*. II, Фундамент. и прикл. матем. **14** (2), 3–12 (2008).
- [6] Абызов А.Н., Туганбаев А.А. *Подмодули и прямые слагаемые*, Фундамент. и прикл. матем. **14** (6), 3–31 (2008).
- [7] Туганбаев А.А. *Модули с большим числом прямых слагаемых*, Фундамент. и прикл. матем. **12** (8), 233–241 (2006).
- [8] Туганбаев А.А. *Кольца, над которыми все модули являются I_0 -модулями*, Фундамент. и прикл. матем. **13** (5), 193–200 (2007).
- [9] Туганбаев А.А. *Кольца без бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов*, Фундамент. и прикл. матем. **14** (1), 207–221 (2008).
- [10] Туганбаев А.А. *Теория колец. Арифметические модули и кольца* (МЦНМО, М., 2009)
- [11] Jain S.K., Srivastava A.K., Tuganbaev A.A. *Cyclic modules and the structure of rings* (Oxford University Press, Oxford, 2012).

- [12] Dung N.V., Huynh D.V., Smith P.F., Wisbauer R. *Extending modules* (Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994).
- [13] Huynh D.V., Rizvi S.T. *On some classes of artinian rings*, J. Algebra **223**, 133–153 (2000).
- [14] Oshiro K. and Wisbauer R. *Modules with every subgenerated module lifting*, Osaka J. Math. **32**, 513–519 (1995).
- [15] Vanaja N. *All finitely generated M -subgenerated modules are extending*, Comm. Algebra **24**, 543–572 (1996).
- [16] Wisbauer R. *Foundations of module and ring theory* (Gordon and Breach, Philadelphia, 1991).
- [17] Faith C. *Rings whose modules have maximal submodules*, Publ. Mat. **39** (1), 201–214 (1995).
- [18] Крылов П.А., Туганбаев А.А. *Модули над кольцами формальных матриц*, Фундамент. и прикл. матем. **15** (8), 145–211 (2009).
- [19] Dinh H.Q., Huynh D.V. *Some results on self-injective rings and Σ -CS rings*, Commun. Algebra **31** (12), 6063–6077 (2003).
- [20] Baccella G. *Semi-artinian V -rings and semi-artinian von Neumann regular rings*, J. Algebra **173**, 587–612 (1995).
- [21] Rizvi S.T., Roman C.S. *Baer and quasi-Baer modules*, Commun. Algebra **32** (1), 103–123 (2004).
- [22] Tutuncu D.K., Tribak R. *On dual Baer module*, Glasg. Math. J. **52** (2), 261–269 (2010).
- [23] Khuri S.M. *Endomorphism rings of nonsingular modules*, Ann. Sci. Math. Quebec **4** (2), 145–152 (1980).

А.Н. АБЫЗОВ

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: adel.abyzov@kpfu.ru

A.N. Abyzov

I_0^* -modules

Abstract. We study rings over which every module is an I_0^* -module dual to I_0 -module. We describe semiregular rings over which every module is simultaneously I_0^* -module and I_0 -module. We give a description of rings over which every module is a direct sum of injective module and SV -module. We investigate relations between weakly Baer modules and I_0^* -modules.

Keywords: semi-artinian rings, SV -rings, I_0 -modules, I_0^* -modules, weakly Baer modules.

A.N. Abyzov

Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: adel.abyzov@kpfu.ru