4. Вычисление несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f : [a + \infty) \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ для любого числа $b \in (a + \infty)$. В этом случае говорят, что

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

несобственный интеграл с единственной особенностью в $+\infty$.

Если существует конечный

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^{b} f(x)\,dx, \tag{2}$$

то говорят, что интеграл (1) *сходится*. Если же предел (2) бесконечен или вообще не существует, то говорят, что интеграл (1) *расходится*.

В случае существования предела (2) интегралу (1) приписывается значение этого предела, то есть

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^{b} f(x)\,dx.$$

Аналогичным образом рассматривается

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx.$$

В частности,

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^{b} f(x)\,dx,$$

если предел в правой части равенства существует.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется сходящимся, если сходятся $\int\limits_{-\infty}^{d} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{d}^{+\infty} f(x)\,dx$, где d — некоторое число. В этом случае $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int\limits_{d}^{+\infty} f(x)\,dx$. Отметим, что эти определения от значения d не зависят.

Пример 1. Возьмём $c \in \mathbb{R}$.

$$\int\limits_0^{+\infty} c\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} c\,dx = \lim_{b\to+\infty} bc = \begin{cases} +\infty, & \text{если } c>0,\\ 0, & \text{если } c=0,\\ -\infty, & \text{если } c<0.\end{cases}$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} c\,dx$ сходится только при $c = 0$.

Пример 2.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}(2\sqrt{x})|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(2\sqrt{b}-2) = +\infty,$$

то есть интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ расходится.

Пример 3.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{x})\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{b}+1) = 1.$$

Сравнивая примеры 2 и 3 отметим, что обе функции, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ и $\frac{1}{x^2}$, монотонно стремятся к нулю при $x\to+\infty$, однако функция $\frac{1}{x^2}$ делает это существенно быстрее. Разобранные примеры 2 и 3 — это частные случаи следующего общего утверждения, которое, думаю, было доказано на лекции и несложно проверить самостоятельно.

Пример 4.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha\le 1 \text{ (интеграл расходится)},\\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha>1.\end{cases}$$

При вычислении сходящихся интегралов часто используют символическую (сокращенную) запись решения. Например:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = (-\frac{1}{x})\Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Пример 5. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx$ расходится, так как $\int\limits_0^{b} \cos x\,dx = \sin b$, а функция $\sin b$ не имеет предела при $b \to +\infty$.

Пример 6.

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \ln|x|\,\Big|_a^{-1} = \lim_{a\to-\infty} (-\ln|a|) = -\infty.$$

Интеграл расходится.

Иногда бывает удобно вычисление обычного интеграла Римана свести к вычислению несобственного. Так, в следующем примере выполняем замену $\operatorname{tg} x = t$:

Пример 7.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+4}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{2}\big) = \frac{\pi}{4}.$$