В. И. Жегалов, А. Н. Миронов, Е. А. Уткина

УРАВНЕНИЯ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

УДК 517.956
ББК В161.62
Ж 46

Научный редактор — доктор физ.-мат. наук, профессор Ю. В. Обносов

Рецензенты:
Академик Е. И. Моисеев (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова).
Доктор физ.-мат. наук, профессор А. И. Кожанов (Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук).

Жегалов В. И.
Ж46 **Уравнения с доминирующей частной производной** / В. И. Жегалов, А. Н. Миронов, Е. А. Уткина. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. — 385 с.

ISBN 978-5-00019-305-1

Излагаются последние результаты в одном из динамично развивающихся направлений математической физики. Впервые в монографической литературе публикуются полученные в 2005–2006 годах решения основных задач (Гурса и Коши). Освещаются новые аспекты разрабатываемой теории и ее приложений. Значительное место уделяется отысканию возможностей построения решений рассматриваемых задач в явном виде.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов.

УДК 517.956
ББК В161.62

ISBN 978-5-00019-305-1

Оглавление

Предисловие

Основным объектом исследования в предлагаемой монографии являются уравнения вида

$$L(u) \equiv \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} + \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m-1, \\ \alpha_s \leqslant m_s,\ s=\overline{1,n}}} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x), \tag{1}$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — декартовы координаты точки x, $m = m_1 + \dots + m_n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, m_s, α_s, $s = \overline{1,n}$ — целые неотрицательные числа, $m > 1$, $u\,(x)$ — искомая, а a_α, f — известные функции. Признаком, отличающим уравнения вида (1) от других уравнений с частными производными, является наличие первого слагаемого в правой части (1), представляющего собой доминирующую производную: все остальные входящие в (1) производные получаются из нее отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования по какой-либо из независимых переменных. Заметим, что подобный признак всегда имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому можно рассматривать (1) как класс уравнений с частными производными, наиболее близкий к классу линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

При $m_s = 1$, $s = \overline{1,n}$, уравнение (1) вошло в математическую литературу под именем Л. Бианки, который одновременно с О. Николетти еще в 1895 г. [220], [235] рассматривал его как многомерное обобщение хорошо известного в математической физике уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f. \tag{2}$$

В связи с этим появление уравнений вида (1) представляет собой естественный шаг на пути теоретических обобщений.

Впоследствии обнаружились различные прикладные аспекты обсуждаемых уравнений. А именно, частные случаи (1) возникают при моделировании процессов вибрации и играют существенную роль в теории аппроксимации, теории отображений, к ним сводится задача интегрального представления преобразования одних линейных дифференциальных операторов в другие [11, с. 63, 109], [202], [203, с. 5–13].

Такие уравнения встречаются в теории упругости, при изучении фильтрации жидкости в трещиноватых породах, влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании различных биологических процессов и явлений, при изучении распространения волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задачах (см. библиографические ссылки в конце текста статьи [25]).

Среди этих уравнений наиболее известными являются указанное И. Н. Векуа [15, с. 258] основное дифференциальное уравнение изгиба тонкой сферической оболочки

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + 2\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \zeta^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + \frac{\delta E h R^2}{D}\right) u = \Phi\left(z, \zeta\right),$$

а также уравнения Аллера и Буссинеска-Лява

$$u_t = \left(a u_x + b u_{xt}\right)_x, \quad u_{ttxx} - u_{tt} + u_{xx} = 0. \tag{3}$$

Первое из них описывает процесс переноса почвенной влаги в зоне аэрации, а второе встречается при изучении продольных волн в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции. Недавно [159] было обнаружено, что второе уравнение (3) возникает также в связи с исследованием движения волн в периодических слоистых средах. К виду (1) относятся и поливибрационные уравнения Д. Манжерона.

После L. Bianchi и O. Niccoletti различные вопросы, связанные с уравнениями вида (1) изучали за рубежом H. Bateman, E. Lahaye, H. Hornich, D. Mangeron, M. Ogustoreli, D. Colton, S. Easwaran, V. Radochova, A. Corduneany, W. Rundell, M. Stecher и др. В нашей стране интерес к общему уравнению вида (1) при n=2 возник в связи с задачами теории упругости. Статьи Н. И. Мусхелишвили (1919 г.) и И. Н. Векуа (1937 г.) положили начало целому направлению исследований в данной области, развивавшемуся в течение ряда десятилетий до работ А. П. Солдатова, М. Х. Шханукова, О. М. Джохадзе и др. (примерно до 1987 г.). При $n > 2$ из публикаций на русском языке, появившихся до 1990 г., можно отметить работу [5], где ряд вопросов, относящихся к общему уравнению (1), рассматривался методами функционального анализа. Еще раньше (1956, 1958 г.г.) вышли работы М. К. Фаге [200], [201]. Во второй из них, автор, отмечая, что “Бианки и Николетти разработали лишь формальную часть теории, не вдаваясь в аналитические детали” представил вариант метода Римана, более соответствующий современному уровню строгости рассуждений. Здесь же обращает на себя внимание самооценка: “изучение сопровождается довольно сложными выкладками”. В названии же работы вслед за Г. Бейтменом [219] он использует термин “уравнение Бианки”.

В 90-х годах в Казани сформировалась группа, ведущая систематические исследования в обсуждаемой области (В. И. Жегалов, В. А. Севастьянов, Е. А. Уткина, А. Н. Миронов и др.). Участниками группы был разработан новый вариант метода Римана для уравнения Бианки [38], [41], [42], [155], [157]. Сохранилась лишь общая схема метода, а обе основные его составляющие были изменены: функция Римана определялась в предложенном варианте как решение некоторого интегрального уравнения, а основное дифференциальное тождество было взято в другой форме. Все это позволило получить более лаконичную и прозрачную схему решения задач Гурса и Коши, чем в работах предыдущих авторов. Кроме того, предложенный вариант оказался конструктивным в том смысле, что удалось выделить ряд новых случаев, когда решение может быть записано в явном виде [44], [45], [109], [112]. Для того же уравнения были поставлены и изучены новые характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях [39], [48], [110], [111].

Далее естественно было перейти к построению теории уравнения (1) в общем случае, когда искомая функция содержит кратное дифференцирование по независимым переменным. Сейчас такие уравнения называются псевдопараболическими (первым такое название использовал Д. Колтон в 1972 г. [221]).

Отмеченная выше формальная близость обсуждаемых уравнений с классом линейных обыкновенных дифференциальных уравнений породила мысль о целесообразности попытки построить для частного случая (1)

$$L^n u + \sum_{k=1}^{n} a_k L^{n-k} u = 0, \quad Lu \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad a_k = const \tag{4}$$

аналог теории уравнения

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(n-k)} = 0. \tag{5}$$

И действительно, если общий вид решения для (4) обозначить через $U(x, A)$, где A — совокупность $a_1, \ldots, a_n$, то оказалась верной [43] формула

$$U(x, A) = \sum_{r=1}^{\kappa} \sum_{j=0}^{k_r - 1} D_j u_{rj}(x, \lambda_r), \tag{6}$$

где $u_{rj}(x, \lambda_r)$ есть решения уравнений

$$Lu + \lambda_r u = 0, \quad r = 1, \ldots, \kappa, \tag{7}$$

а λ_r — корень кратности k_r уравнения

$$\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \, a_n = 0.$$

При этом

$$D_j = \sum \frac{|j|! x_1^{j_1} \ldots x_m^{j_m} \partial^{|j|}}{j_1! \ldots j_m! \partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}}, \quad j = 1,\, 2, \ldots,$$

а символ $\sum$ понимается как в обобщенной формуле бинома Ньютона: нужно взять сумму всевозможных слагаемых указанного вида, $|j| = j_1 + \cdots + j_m$. Следует полагать D_0 равным оператору тождественного преобразования, $D_{-j} u \equiv 0$, $j = 1,\, 2, \ldots$.

Нетрудно убедиться, что при $n = 1$ (6) дает хорошо известную классическую формулу общего решения уравнения (5).

Позже [60] был разработан определенный аналог метода неопределенных коэффициентов для неоднородного уравнения (4) с правой частью специального вида.

Однако главной целью оставалось распространение метода Римана на самый общий случай уравнения (1). Выяснилось, что способ построения основного тождества из работ [38], [41], [42] здесь уже не годится. Поэтому вид нужного тождества отыскивался сначала для достаточно простых случаев (при малых порядках m) [47], [49], [51].

Параллельно с этим изучалась характеристическая задача для системы уравнений с доминирующими частными производными первого порядка, являющаяся обобщением задачи Гурса [46], [81].

Все вышеупомянутые результаты были отражены в монографии [50], вышедшей в 2001 г. В [50] рассматриваемые уравнения назывались “со старшими частными производными”. Здесь же мы используем представляющийся нам теперь более подходящим термин “с доминирующей частной производной”, предложенный А. И. Кожановым. Настоящее издание является непосредственным продолжением [50] и содержит итоги работы в обсуждаемом направлении за последние полтора десятилетия. В начале этого периода были продолжены попытки дальнейшего развития метода Римана, причем они велись не только в связи с задачей Гурса, но и с задачей Коши тоже [52], [114], [115]. Наконец, в 2005 г. было спрогнозировано и доказано [181], [182] не получавшееся ранее тождество, необходимое для решения задачи Гурса в общем случае уравнения (1). В 2003 г. аналогичный результат анонсирован для задачи Коши, полный текст опубликован в 2006 г. [116].

Полученная формула решения задачи Гурса позволила распространить теорию характеристических задач с нормальными производными в граничных условиях со случая уравнения Бианки на общее псевдопараболическое уравнение (1) [186].

С другой стороны, и для уравнения Бианки, и, тем более, для общего уравнения (1) оставались неисследованными целый ряд вопросов. К ним относились, например, задачи типа Дирихле, когда носителем граничных значений искомой функции являлся весь контур, определяющий рассматриваемую характеристическую область. В последнее время некоторые такие задачи удалось решить [196], [197], [198] благодаря привлечению нового для обсуждаемого направления метода априорных оценок. Начато исследование подобных задач и для нехарактеристических областей [199].

Уже пятьдесят лет (начиная с работ [34], [134], [7]) в теории уравнений с частными производными интенсивно исследуются задачи со смещениями в граничных условиях, называемые еще нелокальными. Долгое время все публикации на эту тему ограничивались случаем уравнения (2). В последнее десятилетие подобные задачи были рассмотрены для обобщенных уравнений Аллера и Буссинеска-Лява [183], а также начались исследования простанственных вариантов указанных задач [56], [59], [191], [193] (пока для уравнений Бианки при числе переменных $n = 3,\ 4$).

Все упомянутые выше задачи рассматривались при достаточно гладких коэффициентах уравнения (1). Однако, в математической физике встречаются уравнения вида (2) с сингулярными коэффициентами, наиболее известным из которых является уравнение Эйлера-Пуассона

$$u_{xy} - \frac{\beta'}{x-y}u_x + \frac{\beta}{x-y}u_y = 0.$$

При этом имеется общее представление решений данного уравнения, получаемое каскадным методом Лапласа. В связи с этим обстоятельством возникла идея о целесообразности попытки выделить из уравнений вида (1) с сингулярными коэффициентами такие случаи, которые с точки зрения метода Лапласа можно было бы рассматривать как аналоги уравнения Эйлера-Пуассона. Подобные аналоги получены в работах [185], [187], [188].

Одной из областей применения результатов, связанных с уравнением Бианки стали факторизованные уравнения вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right) Lu = 0,$$

где L — оператор Бианки n-го порядка. Для таких уравнений поставлены новые краевые задачи неклассического характера и получены условия их однозначной разрешимости [54], [65], [122].

Интенсивный характер приобрел поиск новых возможностей решения уравнений вида (1) и граничных задач для них в явном виде. Здесь разрабатывались три подхода: факторизация уравнений с целью понижения их порядка вплоть до решения в квадратурах; выделение случаев построения в явном виде функций Римана; дальнейшее развитие метода каскадного интегрирования. Выделено значительное число уравнений, допускающих эффективную разрешимость [118], [120], [121], [53], [55], [57], [66]. Можно ожидать, что указанные результаты найдут применение к решению в явном виде интегральных уравнений Вольтерра, в том числе с несколькими независимыми переменными. Принципиальная возможность такого применения установлена в статьях [62], [68].

Была продолжена работа по исследованию систем уравнений. Здесь разработан векторно-матричный аналог метода Римана для системы с кратными доминирующими производными. Поставлен ряд новых характеристических задач для подобных систем в пространствах R^n и исследован характер их разрешимости [127], [128], [61]. Для системы первого порядка изучена задача с нормальными производными в граничных условиях [63].

Задачи с нормальными производными в граничных условиях исследовались также для квазилинейного аналога уравнения Бианки и для уравнения Лиувилля [105], [64], [106].

В последние годы началось изучение обсуждаемых уравнений методами группового анализа. Здесь результаты получены пока лишь для уравнений Бианки третьего и четвертого порядка [119], [123], [124]. Они изложены в шестой главе. Есть основания ожидать дальнейшего развития исследований в данном направлении.

Завершая на этом краткий обзор результатов, излагаемых в последующих главах, выражаем искреннюю признательность О. А. Тихоновой (Кощеевой), А. А. Кунгурцеву и Л. Б. Мироновой за предоставление своих результатов для их публикации в данной книге.

Отметим, что глава 1 написана Е. А. Уткиной, главы 3, 4, 7 — В. И. Жегаловым, а главы 2, 5, 6 — А. Н. Мироновым. Порядок глав, в основном, соответствует хронологической последовательности получения результатов.

Обращаем внимание читателей на то, что некоторые (особенно достаточно длинные) рассуждения в тексте глав не приводятся, чтобы не создавалась ситуация, когда "за деревьями не видно леса". Впрочем, везде имеются ссылки на первоисточники, где пропущенные доказательства можно найти.

Кроме того, стиль изложения местами отличается от первоисточника: мы старались представить результаты в наиболее удобной для возможного использования форме.

Думается, что внимательный читатель без особого труда может обнаружить в тексте места, которые могут послужить отправными точками для дальнейшего развития. Хотелось бы в связи с этим надеяться, что у кого-либо возникнут идеи о возможных собственных исследованиях в данном динамично развивающемся направлении теории уравнений с частными производными.

Авторы

Глава 1
Характеристические граничные задачи

§ 1. Задача Гурса

Мы рассматриваем здесь указанную в названии главы задачу для общего уравнения (1), сведения исторического характера о котором имеются в предисловии, и, в частности, процитированы источники, где уже изучен случай Бианки $m_s = 1$, $s = \overline{1, n}$. Поэтому далее предполагается, что в (1) обязательно имеются значения $m_s > 1$.

Наиболее изученным предшественниками случаем данного вида было обобщенное уравнение Аллера

$$u_{xxy} + au_{xx} + bu_{xy} + cu_x + du_y + eu = 0, \tag{1.1}$$

для которого функция Римана $V(x, y, \xi, \eta)$ определялась в [214] как решение задачи Гурса

$$L^*(V) = V_{xxy} - (aV)_{xx} - (bV)_{xy} + (cV)_x + (dV)_y - eu = 0,$$

$$V|_{x=\xi} = 0, \quad V_x|_{x=\xi} = \exp\left(\int\limits_{\eta}^{y} a(\xi, t)\, dt\right), \quad V|_{y=\eta} = \omega(x, \eta).$$

При этом функция $\omega(x, \eta)$ должна быть решением задачи Коши:

$$\omega_{xx} - b(x, \eta)\,\omega_x + d(x, \eta)\,\omega = 0, \tag{1.2}$$

$$\omega(\xi, \eta) = 0, \quad \omega_x(\xi, \eta) = 1.$$

В той же статье доказывалось существование единственной функции V. О явном построении V речь не шла. В [163] данная методика была распространена на общий случай уравнения (1) при $n = 2$.

Наша работа тоже началась с уравнения (1.1). Функция Римана при этом вводилась как решение интегрального уравнения

$$V(x,y)-\int\limits_{\eta}^{y} a(x,\tau)V(x,\tau)\,d\tau-\int\limits_{\xi}^{x}\left[b(t,y)-(x-t)\,d(t,y)\right]V(t,y)\,dt+$$
$$+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}\left[c(t,\tau)-(x-t)\,e(t,\tau)\right]V(t,\tau)=1,\quad (1.3)$$

а искомое тождество было получено в форме

$$(uR)_{xxy}\equiv RL(u)+\left[u\left(R_x-bR\right)\right]_{xy}+\left[u\left(R_y-aR\right)\right]_{xx}-$$
$$-\left[u\left(R_{xy}-(aR)_x-(bR)_y+cR\right)\right]_x-\left[u\left(R_{xx}-(bR)_x+dR\right)\right]_y+$$
$$+\left\{u_yR_x+u\,(aR)_x\right\}_x.\quad (1.4)$$

Отметим еще, что решение V уравнения (1.3) не совпадает с $V=R(x,y;\xi,\eta)$ из [240], [163], [214], [215]. Например, из (1.3) следует, что $R(x,y,x,y)=1$, а из предпоследней формулы (1.2) — $R(x,y,x,y)=0$.

Задача Гурса, рассматриваемая в области $D=\{x_0<x<x_1,y_0<y<y_1\}$, заключается здесь в отыскании функции $u(x,y)$, являющейся решением уравнения (1.4) и удовлетворяющей условиям

$$u(x_0,y)=\varphi(y),\quad u_x(x_0,y)=\varphi_1(y),\quad y\in[y_0,y_1]$$
$$u(x,y_0)=\psi(x),\quad x\in[x_0,x_1].$$

Путем интегрирования тождества (1.4) решение записывается в виде

$$u(x,y)=\varphi(y)+\int\limits_{x_0}^{x}h(\alpha,y)\,d\alpha,$$

$$h(x,y)=R(x,y_0,x,y)\,\psi'(x)+R(x_0,y,x,y)\,\varphi_1(y)-M(x,y_0,x,y)\,\psi(x)-$$
$$-M(x_0,y,x,y)\,\varphi(y)+M(x_0,y_0,x,y)\,\psi(x_0)-R(x_0,y_0,x,y)\,\psi'(x_0)+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y}\left[P(x_0,\beta,x,y)\,\varphi(\beta)-N(x_0,\beta,x,y)\,\varphi_1(\beta)\right]d\beta+\int\limits_{x_0}^{x}Q(\alpha,y_0,x,y)\,\psi(\alpha)\,d\alpha,$$

где $M=R_x-bR$,$N=R_y-aR$, $P=R_{xy}-(aR)_x-(bR)_y+cR$, $Q=R_{xx}-(bR)_x+dR$.

Как уже отмечено в предисловии, основная трудность в исследовании общей постановки задачи состояла в построении аналога тождества (1.4). Поэтому рассматривались частные случаи (1) с доминирующими частными производными u_{xxyy}, u_{xxyz}, u_{xxyyz}, u_{xxyyzz} и т. д. (это можно проследить по публикациям [169], [172], [174], [177]). Применялся один и тот же прием: выделялась некая "главная" часть (которая строилась по тому же принципу, что и в случае уравнения Бианки, и присутствовала при каждом построении) и "остаток", который вычислялся каждый раз путем вычитания левой и "главной" части тождества. Долгое время не удавалось спрогнозировать общий вид этого "остатка". Приводить подробно всю историю вопроса в данной монографии вряд ли целесообразно, тем более, что обнаружен способ изложения, который более прост для восприятия. Он состоит в том, что сначала рассматривается частный случай, когда в уравнение входит производная лишь по одной из переменных, а потом уже перейти к общему случаю. Переходим к изложению указанного способа.

Задача Гурса для общего уравнения (1) рассматривается в параллелепипеде $\{x_{10} < x_1 < x_{11}, x_{20} < x_2 < x_{21}, \ldots, x_{n0} < x_n < x_{n1}\}$, грани которого при $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $\ldots$, $x_n = x_{n0}$ обозначим соответственно X_1, X_2, $\ldots$, X_n. Мы возьмем уравнение (1) в форме

$$L(u) \equiv \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} + \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m-1 \\ \alpha_s \leqslant m_s,\, s=\overline{1,n}}} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x) \qquad (1.5)$$

где $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, .., \beta_n)$, $a_m \equiv 1$, $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — декартовы координаты, а гладкость коэффициентов определяется включениями

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in C^{|i|}\left(\overline{D}\right), \quad F \in C^{0+0+\cdots+0}\left(\overline{D}\right).$$

Здесь $C^{|\alpha|}$ — класс непрерывных в $\overline{D}$ вместе с их производными $\partial^{|r|}/\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \ldots \partial x_n^{r_n} (r_1 = 0, \ldots, \alpha_1,\ r_2 = 0, \ldots, \alpha_2,\ \ldots r_n = 0, \ldots, \alpha_n)$, функций. В дальнейшем нам будет удобно пользоваться обозначениями, введенными А.П. Солдатовым и М.Х. Шхануковым в [163]: D_z^0 — единичный оператор; $D_z^i = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^i$, i=1, 2, $\ldots$; $D_z^{-i} = \left(\int\limits_{z_0}^{z}\right)^{-i}$, $i = -1, -2, \ldots$

Сама же задача состоит в том, чтобы *найти в* D *решение уравнения* (1.5) *из класса* $u \in C^{|m|}(D) \cap C^{(m_1-1)+0+\cdots+0}\left(D \cup \overline{X_1}\right) \cap C^{0+(m_2-1)+0+\cdots+0}\left(D \cup \overline{X_2}\right) \cap \ \ldots C^{0+\cdots+0+(m_n-1)}\left(D \cup \overline{X_n}\right)$, *удовлетворяющее* *условиям*

$$D_{x_1}^{i_1} u\left(x_{10}, x_2, \ldots, x_n\right)=\varphi_{1 i_1}\left(x_2, \ldots, x_n\right), \quad\left(i_1=\overline{0, m_1-1}\right),$$

$$D_{x_2}^{i_2} u\left(x_1, x_{20}, \ldots, x_n\right)=\varphi_{2 i_2}\left(x_1, x_3 \ldots, x_n\right), \quad\left(i_2=\overline{0, m_2-1}\right), \tag{1.6}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_{x_n}^{i_n} u\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n0}\right)=\varphi_{n i_n}\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right), \quad\left(i_n=\overline{0, m_n-1}\right),$$

$$\varphi_{1 i_1} \in C^{\sum\limits_{\alpha=2}^{n} m_\alpha}\left(\overline{X_1}\right), \quad \varphi_{2 i_2} \in C^{\sum\limits_{\alpha=1,\, \alpha \neq 2}^{n} m_\alpha}\left(\overline{X_2}\right), \ldots$$

$$\varphi_{n i_n} \in C^{\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1} m_\alpha}\left(\overline{X_n}\right),$$

причем граничные значения из (1.6) *на ребрах* D *согласуются:*

$$D_{x_2}^{i_2} \varphi_{1 i_1}\left(x_{20}, x_3, \ldots, x_n\right)=D_{x_1}^{i_1} \varphi_{2 i_2}\left(x_{10}, x_3, \ldots, x_n\right),$$

$$D_{x_3}^{i_3} \varphi_{1 i_1}\left(x_2, x_{30}, x_4 \ldots, x_n\right)=D_{x_1}^{i_1} \varphi_{3 i_3}\left(x_{10}, x_2, x_4 \ldots, x_n\right), \ldots,$$

$$D_{x_n}^{i_n} \varphi_{1 i_1}\left(x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}\right)=D_{x_1}^{i_1} \varphi_{n i_n}\left(x_{10}, x_2, \ldots, x_{n-1}\right);$$

$$D_{x_3}^{i_3} \varphi_{2 i_2}\left(x_1, x_{30}, x_4, \ldots, x_n\right)=D_{x_2}^{i_2} \varphi_{3 i_3}\left(x_1, x_{20}, x_4, \ldots, x_n\right), \ldots,$$

$$D_{x_n}^{i_n} \varphi_{2 i_2}\left(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{n0}\right)=D_{x_2}^{i_2} \varphi_{n i_n}\left(x_1, x_{20}, x_3, \ldots, x_{n-1}\right),$$

$$D_{x_n}^{i_n} \varphi_{n-1 i_{n-1}}\left(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n0}\right)=D_{x_{n-1}}^{i_{n-1}} \varphi_{n i_n}\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-10}\right),$$

а сами согласованные значения непрерывно дифференцируемы.

1.1. Случай уравнения с дифференцированием лишь по одной переменной. Обозначим переменную x_1 через x, а набор $\{x_2, \ldots, x_n\}$ — через y. В области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}+\sum_{i=0}^{m-1} a_i(x, y) \frac{\partial^i u}{\partial x^i}=0 \tag{1.7}$$

(под записью $y_0 < y < y_1$ мы понимаем $x_{20} < x_2 < x_{21}, \ldots, x_{n0} < x_n < x_{n1}$). Оно получается из (1.5), если дифференцирование ведется только по первой переменной. Условия Гурса (1.6), записанные для (1.5) переходят в

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=x_0}=\varphi_i(y) \quad (0 \leqslant i \leqslant m-1) \tag{1.8}$$

$$\varphi_i \in C(p), \quad p = [y_0, y_1] = \{x_{20} \leqslant x_2 \leqslant x_{21}, \ldots, x_{n0} \leqslant x_n \leqslant x_{n1}\}.$$

По своей структуре (1.7) аналогично классическому обыкновенному линейному дифференциальному уравнению, общая теория которого (см., например, [147]) существенно опирается на теорему о том, что вронскиан m решений либо не обращается в нуль, либо равен нулю тождественно. Эта теорема не распространяется на уравнение (1.3): легко видеть, например, что уравнение $\sum\limits_{\alpha=0}^{m} \sum\limits_{\beta=0}^{n} (-1)^{m+n-(\alpha+\beta)} D_x^{\alpha-m} D_y^{\beta-n} (a_{\alpha\beta} V) = 1$ имеет решения $\exp(xy)$, $\exp(2xy)$. Их вронскиан $w = y \exp(3xy)$ обращается в нуль при $y = 0$, но в остальных точках любой ограниченной области от нуля отличен. Необращение вронскиана в нуль используется в случае обыкновенных уравнений и при построении решения задачи Коши. Можно [35] несколько изменив рассуждения из [147] обойти эту трудность для (1.3), но способ рассуждений из [35] не удается распространить на многомерное уравнение (1.1). Мы будем использовать развитие метода Римана, при этом функцию Римана V, подобно указанным выше работам В. И. Жегалова и В. А. Севастьянова, определим как решение интегрального уравнения

$$V(x, y) + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} \int\limits_{\xi}^{x} \frac{(x-t)^{m-i-1}}{(m-i-1)!} a_i(t, y) V(t, y)\, dt = 1. \tag{1.9}$$

Известно (см., например, [133, с. 154, 164]), что решение этого уравнения существует и единственно. Из (1.9) следует, что V является решением сопряженного с (1.7) уравнения

$$L^*(V) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \frac{\partial^i (a_i V)}{\partial x_1^i} \equiv 0, \quad a_m \equiv 1. \tag{1.10}$$

Когда нужно подчеркнуть зависимость V не только от x, y но и от ξ будем записывать эту функцию как $R(x, y, \xi)$. Из (1.9) следуют тождества, которые потребуются в дальнейшем:

$$\sum_{\alpha=i}^{m} (-1)^{m-\alpha} \frac{\partial^{\alpha-i} (a_\alpha R)}{\partial x^{\alpha-i}} (x, y, x) \equiv 0, \quad (i \leqslant m-1) \tag{1.11}$$

$$R(x, y, x) \equiv 1.$$

Последнее из этих тожеств получается, если положить в (1.9) $\xi = x$. Для подтверждения первого продифференцируем (1.9) $m-\alpha$ раз по x ($\alpha = \overline{1, m-1}$):

$$\frac{\partial^{m-\alpha} V}{\partial x^{m-\alpha}} + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} D_x^{m-\alpha-(m-i)} (a_i V) = 0.$$

Приравняем теперь $\xi = x$:

$$\frac{\partial^{m-\alpha} V}{\partial x^{m-\alpha}} + \sum_{i=\alpha}^{m-1} (-1)^{m-i} D_x^{i-\alpha} (a_i V) = 0.$$

Поменяв местами переменные α, i, получим (1.11).

При решении задачи существенно используется еще одно тождество, имеющее место для любой функции u из класса $C^{m+0}(D)$:

$$\frac{\partial^m [uR]}{\partial x^m} \equiv RL(u) + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{m-i+1} \frac{\partial^i}{\partial x^i} [u \sum_{\alpha=i}^{m} (-1)^{m-\alpha} \frac{\partial^{\alpha-i} [a_\alpha R]}{\partial x^{\alpha-i}}] + \\ + \sum_{i=0}^{m} \sum_{b=0}^{i} K_{ib} \frac{\partial^b u}{\partial x^b} \frac{\partial^{i-b} [a_i R]}{\partial x^{i-b}}, \quad (1.12)$$

где a_i зависят от $(x,\ y)$, а R и ее производные — от (x, y, ξ). При этом $K_{ib} = \sum\limits_{\alpha=b}^{i} (-1)^{i-\alpha} C_\alpha^b - M_{ib}$, $M_{ib} = 1$, если $b = i$ и $M_{ib} = 0$ в остальных случаях; C_n^k — биномиальные коэффициенты.

Для доказательства (1.12) перепишем это тождество в виде:

$$\frac{\partial^m [uR]}{\partial x^m} = R \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{\partial^i u}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i-1} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left[u \sum_{\alpha=i}^{m} (-1)^\alpha \frac{\partial^{\alpha-i} [a_\alpha R]}{\partial x^{\alpha-i}} \right] + \\ + \sum_{i=0}^{m} \sum_{b=0}^{i} (-1)^{i-b} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \left[u \frac{\partial^{i-b} (a_i R)}{\partial x^{i-b}} \right] - \sum_{i=0}^{m} \frac{\partial^i u}{\partial x^i} a_i R.$$

Первое и последнее слагаемые правой части взаимно уничтожаются. Перенесем слагаемое из левой части в правую и добавим ко второму:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha=i}^{m} (-1)^{i-\alpha+1} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left[u \frac{\partial^{\alpha-i} [a_\alpha R]}{\partial x^{\alpha-i}} \right] + \\ + \sum_{i=0}^{m} \sum_{b=0}^{i} (-1)^{i-b} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \left[u \frac{\partial^{i-b} (a_i R)}{\partial x^{i-b}} \right] = 0.$$

Выделим из второй суммы слагаемое при $b = 0$:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha=i}^{m} (-1)^{i-\alpha+1} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left[u \frac{\partial^{\alpha-i} [a_\alpha R]}{\partial x^{\alpha-i}} \right] + \sum_{i=0}^{m} (-1)^i u \frac{\partial^i (a_i R)}{\partial x^i} + \\ + \sum_{i=0}^{m} \sum_{b=1}^{i} (-1)^{i-b} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \left[u \frac{\partial^{i-b} (a_i R)}{\partial x^{i-b}} \right] = 0.$$

Второе слагаемое здесь в силу (1.10) равно нулю, поэтому имеем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{i-\alpha+1}\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left[u\frac{\partial^{\alpha-i}[a_\alpha R]}{\partial x^{\alpha-i}}\right]+$$
$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{b=1}^{i}(-1)^{i-b}\frac{\partial^b}{\partial x^b}\left[u\frac{\partial^{i-b}(a_iR)}{\partial x^{i-b}}\right]=0.$$

Используя равенство

$$\sum_{b=0}^{i}\sum_{\alpha=b}^{i}C_\alpha^b\frac{\partial^b u}{\partial x_1^b}\frac{\partial^{i-b}(a_iR)}{\partial x_1^{i-b}}=\sum_{\alpha=0}^{i}\sum_{b=0}^{\alpha}C_b^\alpha\frac{\partial^b u}{\partial x_1^b}\frac{\partial^{i-b}(a_iR)}{\partial x_1^{i-b}},$$

убеждаемся в выполнении тождества (1.12).

Для построения решения задачи представим (1.12) в иной форме:

$$\frac{\partial^m[uR]}{\partial x^m}\equiv RL(u)+\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i+1}\frac{\partial^i}{\partial x^i}[u\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{m-\alpha}\frac{\partial^{\alpha-i}[a_\alpha R]}{\partial x^{\alpha-i}}]+$$
$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{b=0}^{i/2-1}\frac{\partial^{b+1}u}{\partial x^{b+1}}\left\{C_{i-1-b}^{i-2-2b}\frac{\partial^{i-2-2b}(u)}{\partial x^{i-2-2b}}\frac{\partial^{b+1}(a_iR)}{\partial x^{b+1}}\right\},\quad(1.13)$$

в справедливости которого можно убедиться с помощью тождества

$$\sum_{b=0}^{i}\left[\sum_{\alpha=b}^{i}(-1)^{i-\alpha}C_\alpha^b-M_{ib}\right]\frac{\partial^b u}{\partial x^b}\frac{\partial^{i-b}(a_iR)}{\partial x^{i-b}}=$$
$$=\sum_{b=0}^{i/2-1}\sum_{\alpha=0}^{b+1}C_{b+1}^\alpha C_{i-1-b}^{i-2-2b}\frac{\partial^{\alpha+i-2-2b}u}{\partial x^{\alpha+i-2-2b}}\frac{\partial^{2b+2-\alpha}(a_iR)}{\partial x^{2b+2-\alpha}}.\quad(1.14)$$

Проверка этого равенства осуществлялась компьютерным способом.

Таким образом, мы получили последнее слагаемое (1.13). Полагаем в (1.13) x равным ξ, а x обозначим как ξ и вычислим интеграл в пределах $x_0<\xi<x$:

$$D_x^{m-1}(uR)(x,y)-D_x^{m-1}(uR)(x_0,y)=D_x^{-1}[RL(u)]+$$
$$+\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}D_x^{i-1}\left[u\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^\alpha D_x^{\alpha-i}(a_\alpha R)\right](x,y)-$$
$$-\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}D_x^{i-1}\left[u\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^\alpha D_x^{\alpha-i}(a_\alpha R)\right](x_0,y)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{b=0}^{\frac{i}{2}-1} D_x^b\left\{C_{i-1-b}^{i-2-2b} D_x^{i-2-2b}(u)\, D_x^{b+1}(a_i R)\right\}(x,y)-$$

$$-\sum_{i=2}^{m}\sum_{b=0}^{\frac{i}{2}-1} D_x^b\left\{C_{i-1-b}^{i-2-2b} D_x^{i-2-2b}(u)\, D_x^{b+1}(a_i R)\right\}(x_0,y).$$

Представим эту формулу в несколько ином виде:

$$D_x^{-1}\left[RL(u)\right]+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1} D_x^{i-1}\left[u\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha} D_x^{\alpha-i}(a_\alpha R)\right](x,y)-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1} D_x^{i-1}\left[u\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha} D_x^{\alpha-i}(a_\alpha R)\right](x_0,y)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{b=0}^{\frac{i}{2}-1} D_x^b\left\{C_{i-1-b}^{i-2-2b} D_x^{i-2-2b}(u)\, D_x^{b+1}(a_i R)\right\}(x,y)-$$

$$-\sum_{i=2}^{m}\sum_{b=0}^{\frac{i}{2}-1} D_x^b\left\{C_{i-1-b}^{i-2-2b} D_x^{i-2-2b}(u)\, D_x^{b+1}(a_i R)\right\}(x_0,y)=0.$$

Раскроем скобки во втором и третьем слагаемых:

$$D_x^{-1}\left[RL(u)\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\sum_{b=0}^{i-1} C_{i-1}^{b} D_x^{b}(u)(x,y)\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha} D_x^{\alpha-b-1}(a_\alpha R)(x,y)-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\sum_{b=0}^{i-1} C_{i-1}^{b} D_x^{b}(u)(x_0,y)\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha} D_x^{\alpha-b-1}(a_\alpha R)(x_0,y)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{b=0}^{\frac{i}{2}-1} D_x^b\left\{C_{i-1-b}^{i-2-2b} D_x^{i-2-2b}(u)\, D_x^{b+1}(a_i R)\right\}(x,y)-$$

$$-\sum_{i=2}^{m}\sum_{b=0}^{\frac{i}{2}-1} D_x^b\left\{C_{i-1-b}^{i-2-2b} D_x^{i-2-2b}(u)\, D_x^{b+1}(a_i R)\right\}(x_0,y)=0.$$

Отделим во втором и третьем слагаемом $b=i-1$:

$$D_x^{-1}\left[RL(u)\right]+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1} D_x^{i-1}(u)(x,y)\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha} D_x^{\alpha-i}(a_\alpha R)(x,y)-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}D_x^{i-1}(u)(x_0,y)\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha}D_x^{\alpha-i}(a_\alpha R)(x_0,y)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i-1}\sum_{b=0}^{i-2}C_{i-1}^{b}D_x^{b}(u)(x,y)\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha}D_x^{\alpha-b-1}(a_\alpha R)(x,y)-$$

$$-\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i-1}\sum_{b=0}^{i-2}C_{i-1}^{b}D_x^{b}(u)(x_0,y)\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha}D_x^{\alpha-b-1}(a_\alpha R)(x_0,y)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{b=0}^{\frac{i}{2}-1}D_x^{b}\left\{C_{i-1-b}^{i-2-2b}D_x^{i-2-2b}(u)\,D_x^{b+1}(a_iR)\right\}(x,y)-$$

$$-\sum_{i=2}^{m}\sum_{b=0}^{\frac{i}{2}-1}D_x^{b}\left\{C_{i-1-b}^{i-2-2b}D_x^{i-2-2b}(u)\,D_x^{b+1}(a_iR)\right\}(x_0,y)=0.$$

В полученном уравнении четвертое и шестое, пятое и седьмое слагаемые совпадают:

$$\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i-1}\sum_{b=0}^{i-2}C_{i-1}^{b}D_x^{b}(u)(x,y)\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha}D_x^{\alpha-b-1}(a_\alpha R)(x,y)=$$
$$=-\sum_{i=2}^{m}\sum_{b=0}^{\frac{i}{2}-1}D_x^{b}\left\{C_{i-1-b}^{i-2-2b}D_x^{i-2-2b}(u)\,D_x^{b+1}(a_iR)\right\}(x,y). \quad (1.15)$$

Этот факт можно доказать тоже компьютерным способом. Тогда четвертое и шестое, пятое и седьмое слагаемые взаимно уничтожаются:

$$D_x^{-1}[RL(u)]+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}D_x^{i-1}(u)(x,y)\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha}D_x^{\alpha-i}(a_\alpha R)(x,y)-$$
$$-\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}D_x^{i-1}(u)(x_0,y)\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha}D_x^{\alpha-i}(a_\alpha R)(x_0,y)=0.$$

С учетом тождеств (1.11) находим:

$$D_x^{-1}[RL(u)]+(-1)\,D_x^{m-1}(u)(x,y)\,R(x,y)-$$
$$-\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}D_x^{i-1}(u)(x_0,y)\sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^{\alpha}D_x^{\alpha-i}(a_\alpha R)(x_0,y)=0.$$

Тогда

$$D_x^{m-1} u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} (RL(u))(\xi, y)\, d\xi -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \sum_{\alpha=i}^{m} (-1)^{\alpha} D_x^{i-1}(u)(x_0,y)\, D_x^{\alpha-i}(a_\alpha R)(x_0,y)\,. \quad (1.16)$$

Интегрируя (1.16) $m-1$ раз по x_1 в пределах от x_0 до x и учитывая условия (1.8), приходим к решению рассматриваемой задачи:

$$u(x,y) = \varphi_0(y) + \sum_{i=1}^{m-2} \varphi_i(y) \int\limits_{x_{10}}^{x_1} \frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!} dt - \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \varphi_{i-1}(y) \sum_{\alpha=i}^{m} (-1)^{\alpha} \times$$

$$\times \int\limits_{x_{10}}^{x_1} \frac{(x-t)^{m-2}}{(m-2)!} \frac{\partial^{\alpha-i}(a_\alpha R(x_0,y,t))}{\partial x^{\alpha-i}} dt. \quad (1.17)$$

Подобно тому, как это делается в [8], можем считать, что при произвольных $\varphi_i(y)$, формула (1.17) дает общее представление решений уравнения (1.7).

При $u = u(x)$, $a_i = a_i(x)$ (1.7) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^m u}{dx^m} + \sum_{i=0}^{m-1} a_i(x) \frac{d^i u}{dx^i} = 0. \quad (1.18)$$

Ясно, что (1.17) дает для (1.18) решение, при этом $\varphi_i(y)$ есть константы, а коэффициенты a_i и функция Римана не зависят от y. Таким образом, (1.17) содержит в себе классический результат, причем он записывается в замкнутой форме в том смысле, что в классической теории указан метод получения решения, тогда как в данном случае решение представляется формулой.

Остановимся на частном случае $m = 2$. Формула (1.17) приобретает вид:

$$u(x,y) = \varphi_0(y)\left\{1 + \int\limits_{x_0}^{x} \left[R_\xi(x_0,y,\xi) - a_1(y)\, R(x_0,y,\xi)\right] d\xi\right\} +$$

$$+\varphi_1(y)\int\limits_{x_0}^{x} R(x_0,y,\xi)\, d\xi = \varphi_0(y)\left\{1 - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t} a_0(y)\, R(x_0,y,t_1)\, dt_1 dt\right\} +$$

$$+\varphi_1(y)\int\limits_{x_0}^{x} R(x_0,y,\xi)\, d\xi.$$

Найдем функцию Римана, уравнение для которой в данном случае есть ряд $V(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} V_k(x,y)$, где $V_0 \equiv 1$, $V_1(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} H(x,t,y)\, dt$, $V_2(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} H(x,t,y)\, V_1(t,y)\, dt$, причем $H(x,t,y) = a_1(y) - (x-t)\, a_0(y)$. Таким образом,

$$R(x,y,x_0) = V(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_1^{n-k}(y)\, a_0^k(y)\, \frac{(x-x_0)^{n+k}}{(n+k)!}.$$

Положим $a_1(y) = \lambda_1(y) + \lambda_2(y)$, $a_0(y) = \lambda_1(y)\,\lambda_2(y)$. В случае, когда $\lambda_1(y) \neq \lambda_2(y)$, получим

$$R(x,y,x_0) = \frac{\lambda_2(y)\, e^{\lambda_2(y)(x-x_0)} - \lambda_1(y)\, e^{\lambda_1(y)(x-x_0)}}{\lambda_2(y) - \lambda_1(y)}, \tag{1.19}$$

где $\lambda_{1;2}(y) = \frac{a_1(y) \mp \sqrt{a_1^2(y) - 4a_0(y)}}{2}$. Поменяем в (1.17) x и x_0 местами:

$$R(x_0,y,x) = \frac{-\lambda_2(y)\, e^{-\lambda_2(y)(x-x_0)} + \lambda_1(y)\, e^{-\lambda_1(y)(x-x_0)}}{-\lambda_2(y) + \lambda_1(y)}$$

и подставим в (1.17). Непосредственные вычисления показывают, что

$$u(x,y) = C_1(y)\, e^{-\lambda_1(y)x} + C_2(y)\, e^{-\lambda_2(y)x}, \tag{1.20}$$

где

$$C_1(y) = \frac{-\varphi_0(y)\,\lambda_2(y) - \varphi_1(y)}{(\lambda_1(y) - \lambda_2(y))\, e^{-\lambda_1(y)x_0}},$$

$$C_2(y) = \frac{-\varphi_0(y)\lambda_1(y) - \varphi_1(y)}{(\lambda_2(y) - \lambda_1(y))\, e^{-\lambda_2(y)x_0}}.$$

Пусть теперь $\lambda_1(y) = \lambda_2(y)$. Тогда функция Римана приобретает вид:

$$R(x, y, x_0) = e^{\lambda_1(y)(x-x_0)}\left[1 + (x - x_0)\lambda_1(y)\right].$$

Поменяем x с x_0 местами и вычислим соответствующие коэффициенты. Таким образом,

$$u(x, y) = C_1(y)\, e^{-\lambda_1(y)x} + C_2(y)\, x e^{-\lambda_1(y)x},$$

где

$$C_1(y) = (\varphi_0(y)\left[-x_0\lambda_1(y) + 1\right] - \varphi_1(y)\, x_0)\, e^{\lambda_1 x_0},$$
$$C_2(y) = (\varphi_0(y)\lambda_1(y) + \varphi_1(y))\, e^{\lambda_1 x_0}.$$

Запишем еще решение для комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения

$$\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{\beta=0}^{n}(-1)^{m+n-(\alpha+\beta)} D_x^{\alpha-i} D_y^{\beta}(a_{\alpha\beta}V) = 0, \quad \xi = x.$$

Тогда их можно представить в виде: $\lambda_{1;2} = \frac{\alpha\pm\beta i}{2}$, где $\beta i = \sqrt{a_1^2(y) - 4a_0(y)}$, $\alpha = a_1(y)$.

Вычисления показывают, что в данном случае

$$u(x, y) = \varphi_0(y)\, e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)} \frac{\alpha \sin\left(\frac{\beta}{2}(x - x_0)\right) + \beta\cos\left(\frac{\beta}{2}(x - x_0)\right)}{-\beta} +$$

$$+\varphi_1(y)\, e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)} \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}(x - x_0)\right)}{\beta} =$$

$$= e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)}\left[-\sin\left(\frac{\beta}{2}(x - x_0)\right)\left\{\varphi_0(y)\frac{\alpha}{\beta} - \varphi_1(y)\frac{1}{\beta}\right\} + \right.$$
$$\left. + \cos\left(\frac{\beta}{2}(x - x_0)\right)\alpha\varphi_0(y)\right].$$

Следовательно, в отличие от классического метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полученной формуле решения содержатся одновременно как случай некратного, так и кратного корня характеристического уравнения, а также вариант комплексно-сопряженных корней.

Рассмотрим далее неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \sum_{i=0}^{m-1} a_i\left(x, y\right) \frac{\partial^i u}{\partial x^i} = f\left(x, y\right). \tag{1.21}$$

Его решение имеет вид:

$$u\left(x, y\right) = \varphi_0\left(y\right) + \sum_{i=1}^{m-2} \varphi_i\left(y\right) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\left(x-t\right)^{i-1}}{(i-1)!} dt - \sum_{i=1}^{m} \left(-1\right)^{i-1} \varphi_{i-1}\left(y\right) \sum_{\alpha=i}^{m} \left(-1\right)^{\alpha}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\left(x-t\right)^{m-2}}{(m-2)!} \frac{\partial^{\alpha-i}\left(a_\alpha R\left(x_0, y, t\right)\right)}{\partial x^{\alpha-i}} dt + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\left(x-t\right)^{m-1}}{(m-1)!} R\left(t, y, x\right) dt \quad .$$

Нетрудно проверить, что если обозначить $\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} R\left(t, y, x\right)$ через $K\left(t, y, x\right)$, то мы получим частное решение, полученное методом Коши, например, в [217]. Так как $K\left(t, y, t\right) = K'_x\left(t, y, t\right) = \cdots = K_x^{(m-2)}\left(t, y, t\right) = 0$, $K_x^{(m-1)}\left(t, y, t\right) = 1$ то $u_*\left(x, y\right) = \int\limits_{x_0}^{x} K\left(t, y, x\right) f\left(t, y\right) dt$ будет частным решением (1.21), удовлетворяющим нулевым начальным условиям $\varphi_0\left(y\right) \equiv \varphi_1\left(y\right) \equiv \cdots \equiv \varphi_{n-1}\left(y\right) \equiv 0$. При этом $K\left(t, y, x\right)$ записывается в явном виде.

1.2. Общий случай. Займемся распространением рассуждений предыдущего параграфа на случай уравнения (1). Функцией Римана $R\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)$ назовем решение интегрального уравнения

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} \left(-1\right)^{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} (m_\alpha - i_\alpha)} \prod_{\alpha=1}^{n} D_{x_\alpha}^{i_\alpha - m_\alpha}\left(a_{i_1 i_2 \ldots i_n} R\right) = 1, \tag{1.22}$$

которое существует и единственно [133, с. 154, 164]. Далее для более компактной записи будем использовать мультииндексы.

Примеры обозначений

Запись	Понимаем
(x)	$x_1, x_2, \ldots, x_n$
$\sum\limits_{(i)=(0)}^{(m)}$	$\sum\limits_{i_1=0}^{m_1} \sum\limits_{i_2=0}^{m_2} \cdots \sum\limits_{i_n=0}^{m_n}$
$(m)+(i)$	$\sum\limits_{\alpha=1}^{n} (m_\alpha + i_\alpha)$
$D_{(x)}^{(i)}$	$D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_2} \ldots D_{x_n}^{i_n}$
$C_{(j)}^{(i)}$	$C_{j_1}^{i_1} \ldots C_{j_n}^{i_n}$
$\|m\|$	$m_1 + \cdots + m_n$

При использовании обозначений, которые не вытекают из предыдущих рассуждений, будем давать дополнительные пояснения. С учетом вышесказанного (1.22) примет вид

$$\sum_{(i)=(0)}^{(m)} (-1)^{|m|-|i|} D_{(x)}^{(i)-(m)} \left(a_{(i)} R\right) = 1.$$

Из (1.22) следует, что по первым n аргументам функция Римана является решением сопряженного с (1) уравнения:

$$L^* (V) = \sum_{(i)=0}^{(m)} (-1)^{|m|-|i|} D_{(x)}^{(i)} \left(a_{(i)} V\right) = 0.$$

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение.

Лемма. *Для любой функции u из класса $C^{(m)} (D)$ имеет место тождество*

$$RL (u) + \sum_{\substack{(i)=(0) \\ (i)>0}}^{(m)} (-1)^{|i|-1} D_{(x)}^{(i)} [u \sum_{(\alpha)=(i)}^{(m)} (-1)^{|\alpha|} D_{(x)}^{(\alpha)-(i)} \left(a_{(\alpha)} R\right)] +$$

$$+ \sum_{(i)=(0)}^{(m)} K_{(i)(b)} D_{(x)}^{(b)} (u) \, D_{(x)}^{(i)-(b)} \left(a_{(\alpha)} R\right) \equiv 0, \quad (1.23)$$

где $K_{(i)(b)} = \sum\limits_{(\alpha)=(b)}^{(i)} (-1)^{|i|-|\alpha|} C_{(\alpha)}^{(b)} - M_{(b)}, M_{(b)} = 1$, *если* $(b) = (i)$ *и* $M_{(b)} = 0$ *в противном случае.*

Здесь $a_{(i)}$ зависят от $((x))$, а R и ее производные — от $((x),(\xi))$. Для доказательства перепишем последнее слагаемое (1.23) в виде:

$$\sum_{(i)=(0)}^{(m)}\sum_{(b)=(0)}^{(i)}(-1)^{|i|-|b|}D_{(x)}^{(b)}\left(u\,D_{(x)}^{(i)-(b)}\left(a_{(i)}R\right)\right)-\sum_{(i)=(0)}^{(m)}D_{(x)}^{(i)}(u)\left(a_{(i)}R\right).$$

Следовательно,

$$RL(u)+\sum_{\substack{(i)=(0)\\(i)>0}}^{(m)}(-1)^{|i|-1}D_{(x)}^{(i)}\left[u\sum_{(\alpha)=(i)}^{(m)}(-1)^{(\alpha)}D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}\left(a_{(\alpha)}R\right)\right]+$$

$$+\sum_{(i)=(0)}^{(m)}\sum_{(b)=(0)}^{(i)}(-1)^{|i|-|b|}D_{(x)}^{(b)}\left(u\,D_{(x)}^{(i)-(b)}\left(a_{(i)}R\right)\right)-\sum_{(i)=(0)}^{(m)}D_{(x)}^{(i)}(u)\left(a_{(i)}R\right)\equiv 0.$$

Первое и последнее слагаемые взаимно уничтожаются:

$$\sum_{\substack{(i)=(0)\\(i)>0}}^{(m)}(-1)^{|i|-1}D_{(x)}^{(i)}\left[u\sum_{(\alpha)=(i)}^{(m)}(-1)^{|\alpha|}D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}\left(a_{(\alpha)}R\right)\right]+$$

$$+\sum_{(i)=(0)}^{(m)}\sum_{(b)=(0)}^{(i)}(-1)^{|i|-|b|}D_{(x)}^{(b)}\left(u\,D_{(x)}^{(i)-(b)}\left(a_{(i)}R\right)\right)\equiv 0.$$

Выделим во втором слагаемом те, у которых $(b)=(0)$:

$$\sum_{\substack{(i)=(0)\\(i)>0}}^{(m)}(-1)^{|i|-1}D_{(x)}^{(i)}\left[u\sum_{(\alpha)=(i)}^{(m)}(-1)^{(\alpha)}D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}\left(a_{(\alpha)}R\right)\right]+$$

$$+\sum_{(i)=(0)}^{(m)}(-1)^{|i|}uD_{(x)}^{(i)}\left(a_{(i)}R\right)+$$

$$\sum_{(i)=(0)}^{(m)}\sum_{\substack{(b)=(0)\\(b)>0}}^{(i)}(-1)^{|i|-|b|}D_{(x)}^{(b)}\left(u\,D_{(x)}^{(i)-(b)}\left(a_{(i)}R\right)\right)\equiv 0.$$

Умножим обе части $L^*(V)$ на $(-1)^{|m|}$:

$$\sum_{(i)=(0)}^{(m)}(-1)^{|i|}D_{(x)}^{(i)}\left(a_{(i)}V\right)=0.$$

Тогда
$$\sum_{\substack{(i)=(0)\\(i)>0}}^{(m)} (-1)^{|i|-1} D^{(i)}_{(x)} [u \sum_{(\alpha)=(i)}^{(m)} (-1)^{|\alpha|} D^{(\alpha)-(i)}_{(x)} \left(a_{(\alpha)} R\right)] +$$
$$+ \sum_{(i)=(0)}^{(m)} \sum_{\substack{(b)=(0)\\(b)>0}}^{(i)} (-1)^{|i|-|b|} D^{(b)}_{(x)} \left[u D^{(i)-(b)}_{(x)} \left(a_{(i)} R\right)\right] \equiv 0.$$
Учитывая формулу о возможности перестановки знаков суммирования, выписанную в предыдущем параграфе, получим необходимое.

Далее удобно представить последнее слагаемое (1.23) в форме:
$$\sum_{(\delta)=(0)}^{(1)} \sum_{(i)=2(\delta)}^{(m)} \sum_{(b)=(0)}^{(\delta)((i)/2-1)} D^{(\delta)((b)+1)}_{(x)}$$
$$\left\{C^{(i)-2(1+(b))(\delta)}_{(i)-(1+(b))(\delta)} D^{(i)-2(1+(b))(\delta)}_{(x)} (u)\, D^{((b)+1)(\delta)}_{(x)} \left(a_{(i)} R\right)\right\}, \quad (1.24)$$
причем под произведением, например, $(\delta)\left((b)+1\right)$ понимаем набор $\left(\delta_1\left(b_1+1\right), \delta_2\left(b_2+1\right), \ldots, \delta_n\left(b_n+1\right)\right)$.

Проверку этой записи начнем со случая $m_2 = m_3 = \cdots = m_n = 0$. Здесь достаточно воспользоваться формулой
$$\sum_{i_1=2}^{m_1} \sum_{b_1=0}^{i_1} \left[\sum_{\alpha_1=b_1}^{i_1} (-1)^{i_1-\alpha_1} C^{b_1}_{\alpha_1} - M_{b_1}\right] D^{b_1}_{x_1}(u)\, D^{i_1-b_1}_{x_1}\left(a_{i_1 0\ldots 0} R\right) =$$
$$= \sum_{i_1=2}^{m_1} \sum_{b_1=0}^{i_1/2-1} D^{b_1+1}_{x_1} \left\{C^{i_1-2-2b_1}_{i_1-1-b_1} D^{i_1-2-2b_1}_{x_1}(u)\, D^{b_1+1}_{x_1}\left(a_{i_1 0\ldots 0} R\right)\right\},$$
где $M_{b_1} = 1$, если $b_1 = i_1$, $M_{b_1} = 0$ в остальных случаях. Она является некоторой модификацией формулы (1.14).

К каждому множителю вида $\sum\limits_{\alpha_1=b_1}^{i_1} (-1)^{i_1-\alpha_1} C_{\alpha_1}^{b_1}$ прибавим и вычтем соответствующее M_{b_1}. Тогда

$$\sum_{(i)=(0)}^{(m)} \sum_{(b)=(0)}^{(i)} K_{(i)(b)} D_{(x)}^{(b)}(u)\, D_{(x)}^{(i)-(b)}\left(a_{(i)}R\right) =$$

$$= \sum_{(i)=(0)}^{(m)} \sum_{(b)=(0)}^{(i)} \left[\left(\sum_{\alpha_1=b_1}^{i_1} (-1)^{i_1-\alpha_1} C_{\alpha_1}^{b_1} - M_{b_1} + M_{b_1}\right) \times\right.$$

$$\times \left(\sum_{\alpha_2=b_2}^{i_2} (-1)^{i_2-\alpha_2} C_{\alpha_2}^{b_2} - M_{b_2} + M_{b_2}\right) \cdots \times$$

$$\left.\times \left(\sum_{\alpha_n=b_n}^{i_n} (-1)^{i_n-\alpha_n} C_{\alpha_n}^{b_n} - M_{b_n} + M_{b_n}\right)\right] D_{(x)}^{(b)}(u)\, D_{(x)}^{(i)-(b)}\left(a_{(i)}R\right). \quad (1.25)$$

Осталось только раскрыть скобки и мы получим представление левой части (1.25) в виде (1.8).

Поменяем в (1.23) ролями переменные (x) с (ξ) и вычислим от левой и правой частей тождества n-кратный интеграл в пределах $x_{10} \leqslant \xi_1 \leqslant x_1$, $x_{20} \leqslant \xi_2 \leqslant x_2$, $\ldots$, $x_{n0} \leqslant \xi_n \leqslant x_n$ с учетом представления остатка в виде (1.24):

$$D_{(x)}^{-1}\left[RL(u)\right] +$$

$$+ D_{(x)}^{-1}\left[\sum_{\substack{(i)=(0)\\(i)>0}}^{(m)} D_{(x)}^{(i)}\left[(-1)^{|i|-1} u \sum_{(\alpha)=(i)}^{(m)} (-1)^{(\alpha)} D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}(a_{(\alpha)}R)\right]\right]((\xi)) +$$

$$+ \sum_{\substack{(\delta)=(0)\\(\delta)>0}}^{(1)} \sum_{(\beta)=(0)}^{(\delta)} D_{(x)}^{(\delta)-(1)}\left[\sum_{(i)=2(\delta)}^{(m)} \sum_{(b)=(0)}^{((i)/2-1)(\delta)} D_{(x)}^{(b)(\delta)}\right.$$

$$\left.\left\{C_{(i)-(1+b)(\delta)}^{(i)-(2+2(b))(\delta)} D_{(x)}^{(i)-(2+2(b))(\delta)}(u) D_{(x)}^{((b)+1)(\delta)}\left(a_{(i)}R\right)\right\}\right] (-1)^{(1-\beta)(\delta)}\left(y_{\delta\beta}\right) = 0, \quad (1.26)$$

причем $y_{10} = x_{10}$, $y_{11} = x_1$, $y_{00} = \xi$ для соответствующих координат вектора (x).

Далее применим процедуру, хорошо знакомую из п. 1.1. А именно, второе слагаемое сначала представим в форме:

$$I = D_{(x)}^{-1}\left[\sum_{\substack{(i)=(0)\\(i)>0}}^{(m)} D_{(x)}^{(i)}\left[(-1)^{|i|-1}\,u\sum_{(\alpha)=(i)}^{(m)}(-1)^{(\alpha)}\,D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}\left(a_{(\alpha)}R\right)\right]\right]((\xi)) =$$

$$= D_{(x)}^{-1}\left[\sum_{\substack{(\delta)=(0)\\(\delta)>0}}^{(1)}\ \sum_{(i)=(\delta)}^{(m)(\delta)} D_{(x)}^{(i)}\left[(-1)^{|i|-1}\,u\sum_{(\alpha)=(i)}^{(m)}(-1)^{(\alpha)}\,D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}\left(a_{(\alpha)}R\right)\right]\right]((\xi))\,.$$

Затем проинтегрируем каждое из полученных слагаемых:

$$I = \prod_{\substack{\alpha=1\\\alpha\neq 1}}^{n} D_{x_\alpha}^{-1}\left[\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{0}\cdots\sum_{i_n=0}^{0} D_{x_1}^{i_1-1}\prod_{k=2}^{n} D_{x_k}^{i_k}\right.$$

$$\left.\left[(-1)^{|i|-1}u\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1}\sum_{\alpha_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{m_n}(-1)^{|\alpha|}D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}(a_{(\alpha)}R)\right](x_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\right]-$$

$$-\prod_{\substack{\alpha=1\\\alpha\neq 1}}^{n} D_{x_\alpha}^{-1}\left[\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{0}\cdots\sum_{i_n=0}^{0} D_{x_1}^{i_1-1}\prod_{k=2}^{n} D_{x_k}^{i_k}\right.$$

$$\left.\left[(-1)^{|i|-1}u\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1}\sum_{\alpha_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{m_n}(-1)^{|\alpha|}D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}(a_{(\alpha)}R)\right](x_{10},\xi_2,\ldots,\xi_n)\right]+$$

$$+\prod_{\substack{\alpha=1\\\alpha\neq 2}}^{n} D_{x_\alpha}^{-1}\left[\sum_{i_1=0}^{0}\sum_{i_2=1}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{0}\cdots\sum_{i_n=0}^{0} D_{x_2}^{i_2-1}\prod_{k=1,k\neq 2}^{n} D_{x_k}^{i_k}\right.$$

$$\left.\left[(-1)^{|i|-1}u\sum_{\alpha_1=0}^{m_1}\sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{m_n}(-1)^{|\alpha|}D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}(a_{(\alpha)}R)\right](\xi_1,x_2,\xi_3,\ldots,\xi_n)\right]-$$

$$-\prod_{\substack{\alpha=1\\\alpha\neq 2}}^{n} D_{x_\alpha}^{-1}\left[\sum_{i_1=0}^{0}\sum_{i_2=1}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{0}\cdots\sum_{i_n=0}^{0} D_{x_2}^{i_2-1}\prod_{k=1,k\neq 2}^{n} D_{x_k}^{i_k}\right.$$

$$\left.\left[(-1)^{|i|-1}u\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1}\sum_{\alpha_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{m_n}(-1)^{|\alpha|}D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}(a_{(\alpha)}R)\right](\xi_1,x_{20},\xi_3,\ldots,\xi_n)\right]+$$

$$\cdots + \prod_{\alpha=1}^{n-1} D_{x_\alpha}^{-1} \left[\sum_{i_1=0}^{0} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{0} \sum_{i_n=1}^{m_n} D_{x_n}^{i_n-1} \prod_{k=1}^{n-1} D_{x_k}^{i_k} \right.$$

$$\left. \left[(-1)^{(i)-1} u \sum_{\alpha_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{\alpha_{n-1}=0}^{m_{n-1}} \sum_{\alpha_n=i_n}^{m_n} (-1)^{(\alpha)} D_{(x)}^{(\alpha)-(i)} \left(a_{(\alpha)}R\right) \right] (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, x_n) \right] -$$

$$- \prod_{\alpha=1}^{n-1} D_{x_\alpha}^{-1} \left[\sum_{i_1=0}^{0} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{0} \sum_{i_n=1}^{m_n} D_{x_n}^{i_n-1} \prod_{k=1}^{n-1} D_{x_k}^{i_k} \right.$$

$$\left. \left[(-1)^{|i|-1} u \sum_{\alpha_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{\alpha_{n-1}=0}^{m_{n-1}} \sum_{\alpha_n=i_n}^{m_n} (-1)^{|\alpha|} D_{(x)}^{(\alpha)-(i)} \left(a_{(\alpha)}R\right) \right] (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, x_{n0}) \right] +$$

$$\cdots + \sum_{(i)=(1)}^{(m)} D_{(x)}^{(i)-1} \sum_{(\beta)=(0)}^{(1)} (-1)^{|\beta|}$$

$$\left[(-1)^{|i|-1} u \sum_{(\alpha)=(i)}^{(m)} (-1)^{|\alpha|} D_{(x)}^{(\alpha)-(i)} (a_{(\alpha)}R) \right] ((x_\beta)).$$

Здесь считаем, что $x_{k1} = x_k$. Далее потребуются тождества, получаемые из (1.22):

$$\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{|m|-|\alpha|} D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} \prod_{s=2}^{n} D_{x_s}^{\alpha_s} \left(a_{(\alpha)}R\right) (x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0,$$

$$\sum_{\alpha_1=0}^{m_1} \sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2} \sum_{\alpha_3=0}^{m_3} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{|m|-|\alpha|} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2} \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq 2}}^{n} D_{x_s}^{\alpha_s} \left(a_{(\alpha)}R\right) (\xi_1, x_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) = 0,$$

. . . .

$$\sum_{\alpha_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{\alpha_{n-1}=0}^{m_{n-1}} \sum_{\alpha_n=i_n}^{m_n} (-1)^{|m|-|\alpha|} D_{x_n}^{\alpha_n-i_n} \prod_{s=1}^{n-1} D_{x_s}^{\alpha_s} \left(a_{(\alpha)}R\right) (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, x_n) = 0,$$

$$\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2} \sum_{\alpha_3=0}^{m_3} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{|m|-|\alpha|} D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2}$$

$$\prod_{s=3}^{n} D_{x_s}^{\alpha_s} \left(a_{(\alpha)}R\right) (x_1, x_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) = 0,$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1}\cdots\sum_{\alpha_{n-1}=0}^{m_{n-1}}\sum_{\alpha_n=i_n}^{m_n}(-1)^{|m|-|\alpha|}D_{x_1}^{\alpha_1-i_1}D_{x_n}^{\alpha_n-i_n}
$$

$$
\prod_{s=2}^{n-1}D_{x_s}^{\alpha_s}\left(a_{(\alpha)}R\right)(x_1,\xi_2,\ldots\xi_{n-1},x_n)=0,
$$

$$
\sum_{\alpha_1=0}^{m_1}\sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2}\sum_{\alpha_3=i_3}^{m_3}\sum_{\alpha_4=0}^{m_4}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{m_n}(-1)^{|m|-|\alpha|}D_{x_2}^{\alpha_2-i_2}D_{x_3}^{\alpha_3-i_3}
$$

$$
\prod_{\substack{s=1\\ s\neq 2,3}}^{n}D_{x_s}^{\alpha_s}\left(a_{(\alpha)}R\right)(\xi_1,x_2,x_3,\xi_4\ldots,\xi_n)=0,
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\sum_{\alpha_1=0}^{m_1}\sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2}\sum_{\alpha_3=0}^{m_3}\cdots\sum_{\alpha_{n-1}=0}^{m_{n-1}}\sum_{\alpha_n=i_n}^{m_n}(-1)^{|m|-|\alpha|}D_{x_2}^{\alpha_2-i_2}D_{x_n}^{\alpha_n-i_n}
$$

$$
\prod_{\substack{s=1\\ s\neq 2,n}}^{n}D_{x_s}^{\alpha_s}\left(a_{(\alpha)}R\right)(\xi_1,x_2,\xi_3\ldots,\xi_{n-1},x_n)=0,
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\sum_{\alpha_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{\alpha_{n-2}=0}^{m_{n-2}}\sum_{\alpha_{n-1}=i_{n-1}}^{m_{n-1}}\sum_{\alpha_n=i_n}^{m_n}(-1)^{|m|-|\alpha|}D_{x_2}^{\alpha_2-i_2}D_{x_n}^{\alpha_n-i_n}
$$

$$
\prod_{s=1}^{n-2}D_{x_s}^{\alpha_s}\left(a_{(\alpha)}R\right)(\xi_1,\ldots,\xi_{n-2},x_{n-1},x_n)=0,
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\sum_{(\alpha)=(i)}^{(m)}(-1)^{|m|-|\alpha|}D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}\left(a_{(\alpha)}R\right)((x))=0. \tag{1.27}
$$

Рассмотрим подробно доказательство первого из указанных тождеств. Для этого перепишем (1.22):

$$
\sum_{(\alpha)=(0)}^{(m)}(-1)^{|m|-|\alpha|}D_{(x)}^{(\alpha)-(m)}\left(a_{(\alpha)}R\right)=1.
$$

Вычислим производную порядка $D_{x_1}^{m_1-i_1}D_{x_2}^{m_2}\dots D_{x_n}^{m_n} \quad (1 \leqslant i_1 \leqslant m_1)$:

$$\sum_{(\alpha)=(0)}^{(m)} (-1)^{|m|-|\alpha|}\, D_{x_1}^{\alpha_1-i_1}D_{x_2}^{\alpha_2}\dots D_{x_n}^{\alpha_n}\left(a_{(\alpha)}R\right)((\xi)) = 0.$$

Положим теперь $\xi_1 = x_1$:

$$\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1}\sum_{\alpha_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{|m|-|\alpha|}\, D_{x_1}^{\alpha_1-i_1}D_{x_2}^{\alpha_2}\dots D_{x_n}^{\alpha_n}\left(a_{(\alpha)}R\right)(x_1,\dots,\xi_n) = 1.$$

Мы получили необходимое.

Представим первое слагаемое (1.27) в виде:

$$\prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq 1}}^{n} D_{x_\alpha}^{-1}\left[\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{0}\cdots\sum_{i_n=0}^{0} D_{x_1}^{i_1-1}\right.$$

$$\left.\left[(-1)^{i_1-1}\, u\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1}\sum_{\alpha_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{|\alpha|}\, D_{(x)}^{(\alpha)-(i)}\left(a_{(\alpha)}R\right)\right](x_1,\xi_2\dots,\xi_n)\right] =$$

$$= \prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-1}\left[\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{0}\cdots\sum_{i_n=0}^{0}\sum_{b_1=0}^{i_1-1}\right.$$

$$\left[(-1)^{i_1-1}C_{i_1-1}^{b_1}D_{x_1}^{b_1}(u)\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1}\sum_{\alpha_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{m_n}(-1)^{|\alpha|}D_{x_1}^{\alpha_1-b_1-1}\right.$$

$$\left.\left.\prod_{k=2}^{n} D_{x_k}^{\alpha_k}(a_{(\alpha)}R)\right](x_1,\xi_2\dots,\xi_n)\right] =$$

$$= \prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-1}\left[\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{0}\cdots\sum_{i_n=0}^{0}\sum_{b_1=i_1-1}^{i_1-1}\right.$$

$$\left[(-1)^{i_1-1}D_{x_1}^{i_1-1}(u)\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1}\sum_{\alpha_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{m_n}(-1)^{|\alpha|}D_{x_1}^{\alpha_1-i_1}\right.$$

$$\left.\left.\prod_{k=2}^{n} D_{x_k}^{\alpha_k}\left(a_{(\alpha)}R\right)\right](x_1,\xi_2\dots,\xi_n)\right] +$$

$$+ \prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-1}\left[\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{0}\cdots\sum_{i_n=0}^{0}\sum_{b_1=0}^{i_1-2}\right.$$

$$\left[(-1)^{i_1-1}C_{i_1-1}^{b_1}D_{x_1}^{b_1}(u)\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1}\sum_{\alpha_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{m_n}(-1)^{|\alpha|}D_{x_1}^{\alpha_1-b_1-1}\right.$$

$$\left.\left.\prod_{k=2}^{n}D_{x_k}^{\alpha_k}(a_{(\alpha)}R)\right](x_1,\xi_2\ldots,\xi_n)\right]. \qquad (1.28)$$

Используя (1.27), получим, что первое слагаемое в (1.28) равно нулю.

Применим формулу (1.15) и преобразование, изученным для случаев $n=2$, $n=3$. Например, первое из слагаемых остатка (третье в (1.26) при $(\delta)=(1,0,\ldots,0)$)

$$\prod_{k=2}^{n}D_{x_k}^{-1}\left[\sum_{i_1=2}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{b_1=0}^{i_1/2-1}D_{x_1}^{b_1}\right.$$

$$\left.\left\{C_{i_1-1-b_1}^{i_1-2-2b_1}D_{x_1}^{i_1-2-2b_1}\prod_{\alpha=2}^{n}D_{x_\alpha}^{i_\alpha}(u)D_{x_1}^{b_1+1}(a_{(i)}R)\right\}\right](x_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=$$

$$=\prod_{k=2}^{n}D_{x_k}^{-1}\left[\sum_{i_1=2}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{b_1=0}^{i_1/2-1}(-1)^{i_2+\cdots+i_n}D_{x_1}^{b_1}\left\{C_{i_1-1-b_1}^{i_1-2-2b_1}D_{x_1}^{i_1-2-2b_1}\right.\right.$$

$$\left.\left.\prod_{\alpha=2}^{n}D_{x_\alpha}^{0}(u)D_{x_1}^{b_1+1}\prod_{\alpha=2}^{n}D_{x_\alpha}^{i_\alpha}(a_{i_1\cdots n}R)\right\}\right](x_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)+\cdots+$$

$$+\sum_{i_1=2}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\cdots\sum_{i_n=1}^{m_n}\sum_{k_2=0}^{i_2-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{i_n-1}\sum_{b_1=0}^{i_1/2-1}D_{x_1}^{b_1}\left\{(-1)^{k_2+\cdots+k_n+i_2+\cdots+i_n-n+1}C_{i_1-1-b_1}^{i_1-2-2b_1}\times\right.$$

$$\left.D_{x_1}^{i_1-2-2b_1}\prod_{\alpha=2}^{n}D_{x_\alpha}^{k_\alpha}(u)\,D_{x_1}^{b_1+1}\prod_{\alpha=2}^{n}D_{x_\alpha}^{i_\alpha-1-k_\alpha}\left(a_{(i)}R\right)\right\}((x)).$$

В силу (1.15), второе слагаемое (1.28) сократится с первым слагаемым в предыдущем равенстве. Аналогичные рассуждения можно провести и с остальными. Тогда формула значительно упростится:

$$D_{(x)}^{(m)-1}(u)\left((x)\right)=D_{(x)}^{-1}\left[RL\left(u\right)\right]-\prod_{k=2}^{n}D_{x_k}^{-1}\left[\sum_{i_1=1}^{m_1}(-1)^{i_1-1}D_{x_1}^{i_1-1}(u)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1}\sum_{\alpha_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{m_n}(-1)^{|\alpha|}D_{x_1}^{\alpha_1-i_1}\prod_{k=2}^{n}D_{x_k}^{\alpha_k}\left(a_{(\alpha)}R\right)\right](x_{10},\xi_2,\ldots,\xi_n)-$$

$$
- \prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}} D_{x_k}^{-1} \Bigg[\sum_{i_2=1}^{m_2} (-1)^{i_2-1} D_{x_2}^{i_2-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=0}^{m_1} \sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{|\alpha|} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2} \prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}} D_{x_k}^{\alpha_k} \left(a_{(\alpha)}R\right) \Bigg] (\xi_1, x_{20}, \xi_3, \ldots, \xi_n) - \ldots
$$

$$
- \prod_{k=1}^{n-1} D_{x_k}^{-1} \Bigg[\sum_{i_n=1}^{m_n} (-1)^{i_n-1} D_{x_n}^{i_n-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=0}^{m_1} \sum_{\alpha_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{\alpha_n=i_n}^{m_n} (-1)^{|\alpha|} D_{x_n}^{\alpha_n-i_n} \prod_{k=1}^{n-1} D_{x_k}^{\alpha_k} \left(a_{(\alpha)}R\right) \Bigg] (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, x_{n0}) +
$$

$$
+ \prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{-1} \Bigg[\sum_{i_1=1}^{m_2} \sum_{i_2=1}^{m_2} (-1)^{i_1+i_2-1} D_{x_1}^{i_1-1} D_{x_2}^{i_2-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2} \sum_{\alpha_3=0}^{m_3} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{|\alpha|} D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2}
$$

$$
\prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{\alpha_k} \left(a_{(\alpha)}R\right) (x_{10}, x_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) \Bigg] +
$$

$$
+ \prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{-1} \Bigg[\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} (-1)^{i_1+i_2-1} D_{x_1}^{i_1-1} D_{x_2}^{i_2-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2} \sum_{\alpha_3=0}^{m_3} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{|\alpha|} D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2}
$$

$$
\prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{\alpha_k} \left(a_{(\alpha)}R\right) \Bigg] (x_1, x_{20}, \xi_3, \ldots, \xi_n) -
$$

$$
- \prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{-1} \Bigg[\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} (-1)^{i_1+i_2-1} D_{x_1}^{i_1-1} D_{x_2}^{i_2-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2} \sum_{\alpha_3=0}^{m_3} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{|\alpha|} D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2}
$$

$$
\prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{\alpha_k} \left(a_{(\alpha)}R\right) \Bigg] (x_{10}, x_{20}, \xi_3, \ldots, \xi_n) - \ldots
$$

$$+\sum_{(i)=(1)}^{(m)} (-1)^{|i|-1} D_{(x)}^{(i)-1}(u) \sum_{(\alpha)=(i)}^{(m)} (-1)^{|\alpha|} D_{(x)}^{(\alpha)-(i)} \left(a_{(\alpha)}R\right)(x_{10}, x_{20}, .., x_{n0}). \tag{1.29}$$

Осталось только проинтегрировать (1.29) по x_1, $x_2, \ldots,$ x_n соответственно $m_1 - 1$, $m_2 - 1, \ldots,$ $m_n - 1$ раз. Обозначим через $H((x),(x))$ правую часть (1.29) без первого слагаемого. Тогда

$$u((x)) = D_{(x)}^{-(m)}[RF] + D_{(x)}^{-(m)+1}[H] + F_1, \tag{1.30}$$

где

$$F_1 = \sum_{i_1=0}^{m_1-2} D_{x_1}^{-i_1}(\varphi_{i_1}(x_2, .., x_n)) + \sum_{i_2=0}^{m_2-2} D_{x_2}^{-i_2}(\varphi_{i_2}(x_1, x_3.., x_n)) + \cdots +$$

$$+\sum_{i_n=0}^{m_n-2} D_{x_n}^{-i_n}(\varphi_{i_n}(x_1, .., x_{n-1})) - \sum_{i_1=0}^{m_1-2}\sum_{i_2=0}^{m_2-2} D_{x_1}^{-i_1} D_{x_2}^{-i_2}\left(D_{x_2}^{i_2}\varphi_{i_1}(x_{20}, x_3.., x_n)\right) -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1-2}\sum_{i_3=0}^{m_3-2} D_{x_1}^{-i_1} D_{x_3}^{-i_3}\left(D_{x_3}^{i_3}\varphi_{i_1}(x_2, x_{30}, x_4.., x_n)\right) - \ldots$$

$$-\sum_{(i)=(0)}^{(m)-2} D_{(x)}^{-(i)}\left(D_{x_2}^{i_2}\ldots D_{x_n}^{i_n}\varphi_{i_1}(x_{20}, x_{30}, \ldots, x_{n0})\right).$$

Из формулы (1.30) видно, что условия гладкости на коэффициенты уравнения (1) обеспечивают принадлежность решения классу $C^{|m|}(D)$. Если считать функции $\varphi_{1i_1}\left(i_1 = \overline{0, m_1}\right), \ldots,$ $\varphi_{ni_n}\left(i_n = \overline{0, m_n}\right)$ произвольными, то можно рассматривать (1.30) как общее представление решения уравнения (1) подобно тому, как это делается в книге А.В. Бицадзе [8, с. 66]. Формула (1.30) получена в [182]. Случай трехмерного пространства изучен в [181], а четырехмерного — в [244].

1.3. Теорема существования и единственности решения задачи. Все рассуждения проведены с помощью тождественных преобразований, поэтому построенное решение является единственным.

Получим еще одно доказательство существования и единственности поставленной задачи, независимое от предыдущих рассуждений. Этот результат может быть сформулирован как

Теорема 1.1. *Решение задачи* (1), (1.6) *в классе* $u \in C^{|m|}(D) \cap C^{(m_1-1)+0+\dots+0}\left(D\cup\overline{X_1}\right) \cap C^{0+(m_2-1)+0+\dots+0}\left(D\cup\overline{X_2}\right) \cap \dots C^{0+\dots+0+(m_n-1)}\left(D\cup\overline{X_n}\right)$ *имеет единственное решение.*

1.3.1. Вспомогательная формула: интегральный аналог формулы Лейбница. Проинтегрируем (1) по каждой из переменных x_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ соответственно m_k раз в диапазонах $x_{k0} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$. Получим

$$D_{(x)}^{-(m)} \sum_{(i)=(0)}^{(m)} a_{(i)} D_{(x)}^{(i)} u = D_{(x)}^{-(m)} F(x).$$

Для вычисления выражения в левой части нам потребуется вспомогательная формула (интегральный аналог формулы дифференцирования по правилу Лейбница). Запишем только одно слагаемое этой формулы, считая, что $i_2 = n$ и порядок интеграла тоже равен n в случае уравнения в трехмерном пространстве:

$$\begin{gathered}D_{x_2}^{-n}\left[a_{i_1 n i_3}(x_1,x_2,x_3)\, D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{n} D_{x_3}^{i_3} u(x_1,x_2,x_3)\right] = \\ = \sum_{i=0}^{n} D_{x_2}^{-i}\left[C_n^i D_{x_2}^i(a_{i_1 n i_3}(x_1,x_2,x_3)) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u(x_1,x_2,x_3)\right](-1)^i - \\ - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{i} D_{x_2}^{-i}[C_{n-(i-i_2)}^{i_2} D_{x_2}^{i_2}(a_{i_1 n i_3}(x_1,x_{20},x_3)) \\ D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i-i_2} D_{x_3}^{i_3} u(x_1,x_{20},x_3)]\,(-1)^{i_2}. \quad (1.31)\end{gathered}$$

Доказательство (1.31) получим методом математической индукции.

Действительно, при $n = 1$ имеем:

$$\begin{gathered}D_{x_2}^{-1}\left[a_{i_1 1 i_2}(x_1,x_2,x_3)\, D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{1} D_{x_3}^{i_3} u(x_1,x_2,x_3)\right] = \\ = a_{i_1 1 i_2}(x_1,x_2,x_3)\, D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u(x_1,x_2,x_3) - \\ - a_{i_1 1 i_2}(x_1,x_{20},x_3)\, D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u(x_1,x_{20},x_3) - \\ - D_{x_{20}}^{-1}\left[D_{x_2}^{1} a_{i_1 1 i_2}(x_1,x_2,x_3)\, D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u(x_1,x_2,x_3)\right].\end{gathered}$$

Следовательно, формула в этом случае верна.

Считая, что она верна при произвольном n, проверим ее при $n+1$:

$$\begin{gathered}D_{x_2}^{-(n+1)}\left[a_{i_1 n+1 i_3}(x_1,x_2,x_3)\, D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{n+1} D_{x_3}^{i_3} u(x_1,x_2,x_3)\right] = \\ = D_{x_2}^{-1}\Bigg\{\Bigg[\sum_{i=0}^{n} D_{x_2}^{-i}[C_n^i D_{x_2}^i(a_{i_1 n+1 i_3}(x_1,x_2,x_3)) D_{x_1}^{i_1}\end{gathered}$$

$$D_{x_2}^{1} D_{x_3}^{i_3} u(x_1, x_2, x_3)] \, (-1)^{i} \Bigg] -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i} D_{x_2}^{-i} [C_{n-(i-i_2)}^{i_2} D_{x_2}^{i_2} (a_{i_1 n+1 i_3}(x_1, x_{20}, x_3))$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i-i_2+1} D_{x_3}^{i_3} u(x_1, x_{20}, x_3)] \, (-1)^{i_2} \Bigg\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} D_{x_2}^{-i} \left[C_n^i D_{x_2}^{i} \left(a_{i_1 n+1 i_3} \left(x_1, x_2, x_3 \right) \right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u \left(x_1, x_2, x_3 \right) \right] (-1)^{i} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n} D_{x_2}^{-i} \left[C_n^i D_{x_2}^{i} \left(a_{i_1 n+1 i_3} \left(x_1, x_{20}, x_3 \right) \right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u \left(x_1, x_{20}, x_3 \right) \right] (-1)^{i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} D_{x_2}^{-(i+1)} \left[C_n^i D_{x_2}^{i+1} \left(a_{i_1 n+1 i_3} \left(x_1, x_2, x_3 \right) \right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u \left(x_1, x_2, x_3 \right) \right] (-1)^{i+1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i} D_{x_2}^{-i} [C_{n-(i-i_2)}^{i_2} D_{x_2}^{i_2} \left(a_{i_1 n+1 i_3} \left(x_1, x_{20}, x_3 \right) \right)$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i-i_2+1} D_{x_3}^{i_3} u \left(x_1, x_{20}, x_3 \right) \big] (-1)^{i_2} .$$

Переобозначим в третьем слагаемом i через $i+1$:

$$\sum_{i=0}^{n} D_{x_2}^{-i} [C_n^i D_{x_2}^{i} \left(a_{i_1 n+1 i_3} \left(x_1, x_2, x_3 \right) \right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u \left(x_1, x_2, x_3 \right)] (-1)^{i} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n} D_{x_2}^{-i} [C_n^i D_{x_2}^{i} \left(a_{i_1 n+1 i_3} \left(x_1, x_{20}, x_3 \right) \right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u \left(x_1, x_{20}, x_3 \right)] (-1)^{i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} D_{x_2}^{-i} [C_n^{i-1} D_{x_2}^{i} \left(a_{i_1 n+1 i_3} \left(x_1, x_2, x_3 \right) \right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u \left(x_1, x_2, x_3 \right)] (-1)^{i} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{i} D_{x_2}^{-i} [C_{n-(i-i_2)}^{i_2} D_{x_2}^{i_2} (a_{i_1 n+1 i_3}(x_1, x_{20}, x_3))$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i-i_2+1} D_{x_3}^{i_3} u \left(x_1, x_{20}, x_3 \right)] (-1)^{i_2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D_{x_2}^{-i} [\left(C_n^i + C_n^{i-1} \right) D_{x_2}^{i} \left(a_{i_1 n+1 i_3} \left(x_1, x_2, x_3 \right) \right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u \left(x_1, x_2, x_3 \right)] (-1)^{i} +$$

$$+ D_{x_2}^{0} [C_n^0 D_{x_2}^{0} \left(a_{i_1 n+1 i_3} \left(x_1, x_2, x_3 \right) \right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u \left(x_1, x_2, x_3 \right)] (-1)^{0} +$$

$$+D_{x_2}^{n+1}[C_{n+1}^{n+1}D_{x_2}^{n+1}\left(a_{i_1n+1i_3}\left(x_1,x_2,x_3\right)\right)D_{x_1}^{i_1}D_{x_3}^{i_3}u\left(x_1,x_2,x_3\right)]\left(-1\right)^{n+1}-$$

$$-\sum_{i=0}^{n}D_{x_2}^{-i}[C_n^iD_{x_2}^i\left(a_{i_1n+1i_3}\left(x_1,x_{20},x_3\right)\right)D_{x_1}^{i_1}D_{x_3}^{i_3}u\left(x_1,x_{20},x_3\right)]\left(-1\right)^i-$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{i}D_{x_2}^{-i}[C_{n-(i-i_2)}^{i_2}D_{x_2}^{i_2}(a_{i_1n+1i_3}(x_1,x_{20},x_3))$$

$$D_{x_1}^{i_1}D_{x_2}^{i-i_2+1}D_{x_3}^{i_3}u\left(x_1,x_{20},x_3\right)]\left(-1\right)^{i_2}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1}D_{x_2}^{-i}[C_n^iD_{x_2}^i\left(a_{i_1n+1i_3}\left(x_1,x_2,x_3\right)\right)D_{x_1}^{i_1}D_{x_3}^{i_3}u\left(x_1,x_2,x_3\right)]\left(-1\right)^i-$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{i}D_{x_2}^{-i}[C_{n+1-(i-i_2)}^{i_2}D_{x_2}^{i_2}\left(a_{i_1n+1i_3}(x_1,x_{20},x_3)\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1}D_{x_2}^{i-i_2}D_{x_3}^{i_3}u\left(x_1,x_{20},x_3\right)]\left(-1\right)^{i_2}.$$

Таким образом, формулу (1.31) можно считать доказанной. Вычислим теперь

$$D_{x_2}^{-m_2}\left[a_{i_1i_2i_3}\left(x_1,x_2,x_3\right)D_{x_1}^{i_1}D_{x_2}^{i_2}D_{x_3}^{i_3}u\left(x_1,x_2,x_3\right)\right]=$$

$$=D_{x_2}^{-(m_2-i_2)}D_{x_2}^{-i_2}\left[a_{i_1ni_3}\left(x_1,x_2,x_3\right)D_{x_1}^{i_1}D_{x_2}^{i_2}D_{x_3}^{i_3}u\left(x_1,x_2,x_3\right)\right]=$$

$$=D_{x_2}^{-(m_2-i_2)}\Bigg\{\sum_{i_{21}=0}^{i_2}D_{x_2}^{-i_{21}}[C_{i_2}^{i_{21}}D_{x_2}^{i_{21}}(a_{i_1i_2i_3}(x_1,x_2,x_3))$$

$$D_{x_1}^{i_1}D_{x_3}^{i_3}u(x_1,x_2,x_3)]\left(-1\right)^{i_{21}}-$$

$$-\sum_{i_{21}=0}^{i_2-1}\sum_{i_{22}=0}^{i_{21}}D_{x_2}^{-i_{21}}[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}}D_{x_2}^{i_{22}}\left(a_{i_1i_2i_3}\left(x_1,x_{20},x_3\right)\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1}D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}}D_{x_3}^{i_3}u\left(x_1,x_{20},x_3\right)]\left(-1\right)^{i_{22}}\Bigg\}.$$

Подставляя полученное выражение в исходную формулу, получим:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}D_{x_2}^{-m_2}\left[a_{i_1i_2i_3}\left(x_1,x_2,x_3\right)D_{x_1}^{i_1}D_{x_2}^{i_2}D_{x_3}^{i_3}u\right]=$$

$$=\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}D_{x_2}^{-(m_2-i_2)}\Bigg\{\sum_{i_{21}=0}^{i_2}D_{x_2}^{-i_{21}}$$

$$\left[C_{i_2}^{i_{21}} D_{x_2}^{i_{21}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_1, x_2, x_3\right)\right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u\left(x_1, x_2, x_3\right)\right] (-1)^{i_{21}} -$$

$$-\sum_{i_{21}=0}^{i_2-1} \sum_{i_{22}=0}^{i_{21}} D_{x_2}^{-i_{21}} [C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} D_{x_2}^{i_{22}}$$

$$\left.\left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_1, x_{20}, x_3\right)\right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}} D_{x_3}^{i_3} u\left(x_1, x_{20}, x_3\right)\right] (-1)^{i_{22}} \Bigg\} = 0,$$

или,

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}}$$

$$\left[C_{i_2}^{i_{21}} D_{x_2}^{i_{21}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_1, x_2, x_3\right)\right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u\left(x_1, x_2, x_3\right)\right] (-1)^{i_{21}} -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2-1} \sum_{i_{22}=0}^{i_{21}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}}$$

$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} D_{x_2}^{i_{22}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_1, x_{20}, x_3\right)\right)$$

$$\left. D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}} D_{x_3}^{i_3} u\left(x_1, x_{20}, x_3\right)\right] (-1)^{i_{22}} = 0.$$

Теперь проведем интегрирование по еще одной переменной (x_3):

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-m_3}$$

$$\left[C_{i_2}^{i_{21}} D_{x_2}^{i_{21}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_1, x_2, x_3\right)\right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} u\left(x_1, x_2, x_3\right)\right] (-1)^{i_{21}} -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2-1} \sum_{i_{22}=0}^{i_{21}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-m_3}$$

$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} D_{x_2}^{i_2} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_1, x_{20}, x_3\right)\right) D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}} D_{x_3}^{i_3} u\left(x_1, x_{20}, x_3\right)] (-1)^{i_{22}} = 0,$$

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \sum_{i_{31}=0}^{i_3} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2}^{i_{21}} C_{i_3}^{i_{31}} D_{x_2}^{i_{21}} D_{x_3}^{i_{31}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_1, x_2, x_3\right)\right) D_{x_1}^{i_1} u\left(x_1, x_2, x_3\right)] (-1)^{i_{21}+i_{31}} -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \sum_{i_{31}=0}^{i_3-1} \sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2}^{i_{21}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{21}} D_{x_3}^{i_{32}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_1, x_2, x_{30}\right)\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_{31}-i_{32}} u\left(x_1, x_2, x_{30}\right)] (-1)^{i_{21}+i_{32}} -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}\sum_{i_{21}=0}^{i_2-1}\sum_{i_{22}=0}^{i_{21}}\sum_{i_{31}=0}^{i_3} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3}^{i_{31}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{31}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_1, x_{20}, x_3\right)\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}} u\left(x_1, x_{20}, x_3\right)] \, (-1)^{i_{22}+i_{31}} +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}\sum_{i_{21}=0}^{i_2-1}\sum_{i_{22}=0}^{i_{21}}\sum_{i_{31}=0}^{i_3-1}\sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{32}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_1, x_{20}, x_{30}\right)\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}} D_{x_3}^{i_{31}-i_{32}} u\left(x_1, x_{20}, x_{30}\right)\big] \, (-1)^{i_{22}+i_{32}} = 0.$$

1.3.2. Применение принципа сжимающих отображений. Теперь вернемся к интегрированию n-мерного уравнения:

$$\sum_{(i)=(0)}^{(m)} \sum_{i_{11}=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n1}=0}^{i_n} \prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{-(m_k-i_k)-i_{k1}}$$

$$\left((-1)^{i_{11}+\cdots+i_{n1}} \prod_{k=1}^{n} C_{i_k}^{i_{k1}} \prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{i_{k1}} \left(a_{(i)}\left(x\right)\right) u\right) = \Omega,$$

где Ω зависит от коэффициентов (1), граничных данных (1.6) и является полностью известной. Переставим операции суммирования и придем к

$$\sum_{(i)=(0)}^{(m)} \prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{-(i_k)} \Bigg(\sum_{i_{11}=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n1}=0}^{i_n} (-1)^{i_{11}+\cdots+i_{n1}} \prod_{k=1}^{n} C_{m_k-i_k+i_{k1}}^{i_{k1}}$$

$$\prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{i_{k1}} (a_{m_1-i_1+i_{11},\ldots,m_n-i_n+i_{n1}}(x))u \Bigg) = \Omega.$$

Обозначим для краткости

$$b_{(i)} =$$

$$= (-1)^{i_{11}+\cdots+i_{n1}} \sum_{i_{11}=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n1}=0}^{i_n} \prod_{k=1}^{n} C_{m_k-i_k+i_{k1}}^{i_{k1}} \prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{i_{k1}} \left(a_{m_1-i_1+i_{11},\ldots,m_n-i_n+i_{n1}}\left(x\right)\right),$$

причем $b_{(m)} \equiv 1$. Представим полученное уравнение в операторном виде

$$u - Ku = \Omega, \quad Ku = \sum_{\substack{(i)=(0) \\ |i|<|m|}}^{(m)} \prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{-(i_k)} \left(b_{(i)} u\right).$$

Проверим, что оператор K непрерывен на множестве $u \in C^{|m|}(D) \cap C^{(m_1-1)+0+\dots+0}\left(D \cup \overline{X_1}\right) \cap C^{0+(m_2-1)+0+\dots+0}\left(D \cup \overline{X_2}\right) \cap ..C^{0+\dots+0+(m_n-1)}\left(D \cup \overline{X_n}\right)$, воспользовавшись нормой пространства C. Пусть u_1 и u_2 — две функции из класса искомых решений. Тогда

$$\|Ku_1 - Ku_2\| = \left\| \sum_{\substack{(i)=(0)\\|i|<|m|}}^{m} \prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{-(i_k)}(b_{(i)}(u_1(x) - u_2(x))) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|u_1 - u_2\| \sum_{\substack{(i)=(0)\\|i|<|m|}}^{m} M \frac{x_1^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{x_n^{i_n}}{i_n!}, \quad M = \max b_{(i)}.$$

Очевидно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\left(M \sum\limits_{\substack{(i)=(0)\\|i|<|m|}}^{(m)} \frac{x_{11}^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{x_{n1}^{i_n}}{i_n!}\right)}$$

такое, что из условия $\|\omega_1 - \omega_2\| < \delta$ следует $\|K\omega_1 - K\omega_2\| < \varepsilon$. Непрерывность оператора K доказана. Покажем, что некоторая степень K является сжимающим отображением. Действительно,

$$\left\|K^2\varphi_1 - K^2\varphi_2\right\| < \left(M \sum_{\substack{(i)=(0)\\|i|<|m|}}^{(m)} \frac{x_{11}^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{x_{n1}^{i_n}}{i_n!}\right)^2 \frac{1}{2!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \dots,$$

$$\|K^p\varphi_1 - K^p\varphi_2\| < \left(M \sum_{\substack{(i)=(0)\\|i|<|m|}}^{(m)} \frac{x_{11}^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{x_{n1}^{i_n}}{i_n!}\right)^p \frac{1}{p!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

При некотором p

$$\frac{\left(\sum\limits_{\substack{(i)=(0)\\|i|<|m|}}^{(m)} \frac{x_{11}^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{x_{n1}^{i_n}}{i_n!} M\right)^p}{p!} < 1,$$

следовательно, K^p является сжимающим. Известно, [67, с.82] если K — непрерывное отображение полного метрического пространства в себя, такое что некоторая степень является сжатием, то уравнение

$$\omega - K\omega = 0$$

имеет единственное решение (в нашем случае, нулевое). Из этого следует, что (1.1) имеет единственное решение в классе $u \in C^{|m|}(D) \cap C^{(m_1-1)+0+\cdots+0}\left(D \cup \overline{X_1}\right) \cap C^{0+(m_2-1)+0+\cdots+0}\left(D \cup \overline{X_2}\right) \cap \ldots C^{0+\cdots+0+(m_n-1)}\left(D \cup \overline{X_n}\right)$. Теорема 1.1 полностью доказана.

§ 2. Другие характеристические граничные задачи

Здесь мы обращаемся к задачам, которые редуцируются к задаче Гурса. Первой из них (ей посвящен пункт 2.1) является задача с условиями на всей границе. Рассматриваются уравнение

$$L(u) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} a_{ij}(x,y) D_x^i D_y^j u(x,y) = f(x,y), \quad a_{22} \equiv 1 \tag{2.1}$$

и его трехмерный аналог

$$L(u) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0}^{2} a_{ijk}(x,y,z) D_x^i D_y^j D_z^k u(x,y,z) = f(x,y,z).$$

Подобные постановки для уравнения более частного вида, чем (2.1), встречаются в работах Т. И. Кигурадзе [229], [230], где они изучаются другими методами. Подобно Т. И. Кигурадзе, будем называть задачу с условиями на всей границе задачей Дирихле. В обоих случаях применяется одинаковый подход, поэтому подробно мы рассматриваем первую задачу, а для второй формулируем ее постановку и теорему о ее разрешимости.

В пункте 2.2 этого параграфа изучаются задачи об отыскании решений частных случаев уравнения (1) по соотношениям, связывающим значения искомой функции в различных переменных точках, лежащих на границе и внутри рассматриваемой области. Впервые подобные задачи при исследовании проблем теплопроводности встречались еще у В. А. Стеклова [164] (второе издание книги, первое было в 1922 г.). Может показаться странным, но никто из математиков более 30 лет не обратил на эту задачу свое внимание. Поэтому началом систематического изучения таких задач естественно считать работы Ф. И. Франкля [205] (1956 г.) и В. И. Жегалова [34] (1962 г.). Именно в [34] обнаружилась качественная новизна не только в постановке задачи, но и в результатах: наряду с однозначной и безусловной разрешимостью появились другие варианты, когда решение оказывалось неединственным, или в связи с использованием теории задачи Гильберта для аналитических функций возникали определенные условия разрешимости. Важную роль в привлечении внимания к данной тематике сыграли статьи А. М. Нахушева [134] и А. В. Бицадзе, А. А. Самарского [7] от 1969 г. Вскоре образовался широкий фронт исследований в обсуждаемом направлении. В литературе эти задачи получили название “со смещением” или “нелокальные”. Сюда же начали относить задачи с граничными условиями интегрального типа. Некоторые первые итоги были подведены А. А. Самарским в обзоре [151], где была подчеркнута качественная новизна указанных задач и их возникновение при решении современных проблем физики. Впоследствии В. И. Жегалов включил в формулировку различные варианты задачи Геллерстедта [36], а также исследовал ряд других постановок [37] для уравнений смешанного типа и уравнения вида

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f.$$

Анализ многочисленных публикаций позволяет рассматривать краевые задачи со смещениями как эффективный инструмент теоретических обобщений. Активная разработка рассматриваемого направления ведется в Москве (В. А. Ильин и Е. И. Моисеев [87], [88], [89], [129], А. Л. Скубачевский [160], [161]), [162]), Новосибирске (А. И. Кожанов [94]–[98]), Нальчике (А. М. Нахушев и его ученики [134]–[138]), Самаре и Стерлитамаке (О. А. Репин и Л. С. Пулькина, К. Б. Сабитов с учениками [149] и др.), Белгороде (А. П. Солдатов [163] и др.), Ташкенте (М. С. Салахитдинов с учениками).

Итоги многих исследований подведены в монографиях А.М. Нахушева [137], М. С. Салахитдинова [152], Л. И. Сербиной [158], Л. С. Пулькиной [148], З. А. Нахушевой [139]. Однако до последнего времени изучались лишь задачи на плоскости и то лишь в случае некратных характеристик. Что же касается пространственных задач, то были лишь две постановки [38], [40], носившие довольно частный характер. В данной монографии предпринята попытка продвинуться в нелокальных задачах дальше, рассмотрев случаи как с кратными характеристиками для уравнений (1) (при $n \geqslant 2$) так и с некратными (при $n = 3, 4$). А именно, первоначально рассматриваются задачи для двух плоских уравнений — (1.1) и (2.1). Затем — задачи для уравнения Бианки в пространствах $n = 3, 4$. Результат исследования каждой задачи сформулирован в виде теоремы.

Еще одним направлением исследований пункта 2.2 является задача Гурса для уравнения, аргументы искомой функции которого претерпевают определенное смещение.

Дальнейшим предметом нашего изучения (пункт 2.3) является метод непосредственного нахождения решения (каскадного интегрирования Лапласа), известный для уравнения (2) [86], [168]. Каскадный метод был предложен Лапласом в 1773 г. [231] для уравнения (2) и получил впоследствии большую известность: он излагался в учебниках для студентов-математиков, авторами которых были, например, Г. Дарбу, Э. Гурса, Ф. Трикоми, Н.Х. Ибрагимов. Эти учебники издавались и переиздавались за рубежом, а также переводились на русский язык для издания в нашей стране. В настоящее время наиболее доступными русскоязычными являются издания [168, с. 177–186], [86, с. 210–212]. Обзор различных обобщений обсуждаемого метода за 18–19 века имеется в [238]. Например, в [223] метод распространен на эллиптические уравнения. В последнее время наблюдается определенное возрождение интереса к данной теме: в [228] разработано распространение метода на параболические уравнения, в [69]–[72] — на нелинейные уравнения и системы (линейные и нелинейные), а также на трех- и четырехмерные уравнения типа Бианки (см. главу 3).

В основном, указанные авторы рассматривали уравнения с достаточно гладкими коэффициентами. Но известны также результаты применения метода Лапласа к уравнениям с сингулярными коэффициентами, например, к хорошо известному в математической физике, уравнению Эйлера-Пуассона

$$u_{xy} - \frac{\beta'}{x-y}u_x + \frac{\beta}{x-y}u_y = 0.$$

При ряде различных значений n Е. А. Уткиной изучены уравнения (1), для которых удается провести рассуждения упомянутого метода, построены некоторые аналоги уравнения Эйлера-Пуассона. В п. 2.3.1 упомянутый метод был применен сначала к уравнению (1.1), для которого были получены пары групп условий на коэффициенты, позволяющие понизить его порядок на единицу. В п. 2.3.2 были построены аналоги уравнения Эйлера-Пуассона. При этом было показано, что построение каскада удается осуществить при некоторых дополнительных ограничениях на коэффициенты. Затем аналогичные рассуждения были проведены уже для уравнения (2.1) (п. 2.3.3).

Перейдем к подробному изложению только что перечисленных результатов.

2.1. Задача Дирихле и нелокальные задачи.

2.1.1. Задача Дирихле.

Плоский случай. Здесь мы рассматриваем уравнение (2.1).

Пусть $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1\}$, $p = [0, y_1]$, $q = [0, x_1]$, а коэффициенты уравнения (2.1) принадлежат классам $a_{ij} \in C^{i+j}\left(\overline{D}\right)$, $f \in C^{0+0}\left(\overline{D}\right)$.

Задача 2.1. *Найти функцию* $u\,(x,y) \in C^{2+2}\,(D) \cap C^{1+0}\,(D \cup p) \cap$ $\cap C^{0+1}\,(D \cup q) \cap C^{0+0}\left(\overline{D}\right)$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (2.1) *и удовлетворяющую условиям*

$$u\,(0,y) = \varphi_0\,(y)\,, \quad u\,(x,0) = \psi_0\,(x)\,, \tag{2.2}$$

$$u(x_1, y) = \varphi_1(y), \quad u(x, y_1) = \psi_1(x), \tag{2.3}$$
$$\varphi_0, \varphi_1 \in C^2(p), \quad \psi_0, \psi_1 \in C^2(q).$$

Из принадлежности $u(x,y)$ классу $C\left(\overline{D}\right)$ следуют соотношения:

$$\varphi_0(y_1) = \psi_1(0), \quad \varphi_0(0) = \psi_0(0), \quad \psi_0(x_1) = \varphi_1(0), \quad \varphi_1(y_1) = \psi_1(x_1).$$

Здесь предлагается способ получения условий, обеспечивающих однозначную разрешимость данной задачи. При этом задача редуцируется к уравнениям Фредгольма, однозначная разрешимость которых выводится из доказываемой на основе априорных оценок теореме единственности.

1. Сначала запишем решение задачи с условиями (2.2) и

$$u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad u_y(x, 0) = \psi_2(x). \tag{2.4}$$

Соотношения (2.2), (2.4) представляют собой граничные значения задачи Гурса, решение которой дается формулой (6.26) из [50] (впервые полученной в [172]):

$$u(x,y) = \varphi_0(y) + \psi_0(x) - \varphi_0(0) + \int\limits_0^x \int\limits_0^y h(\alpha, \beta, \alpha, \beta)\, d\beta d\alpha +$$
$$+ \int\limits_0^x \int\limits_0^y \int\limits_0^\alpha \int\limits_0^\beta R(\alpha_1, \beta_1, \alpha, \beta) f(\alpha_1, \beta_1)\, d\beta_1 d\alpha_1 d\beta d\alpha, \tag{2.5}$$

где

$$h(x,y,x,y) = \psi_2'(x) R(x,0) + \varphi_2'(y) R(0,y) - \varphi_2'(0) R(0,0) -$$
$$-\varphi_2(y) P(0,y) - \psi_0'(x) P(x,0) + \varphi_2(0) P(0,0) - \varphi_0'(y) N(0,y) -$$
$$-\psi_2(x) N(x,0) + \psi_2(0) N(0,0) + \varphi_0(y) T(0,y) + \psi_0(x) T(x,0) -$$
$$-\varphi_0(0) T(0,0) - \int\limits_0^y \left[\varphi_0(\beta) F_1(0,\beta) - \varphi_2(\beta) Q(0,\beta)\right] d\beta -$$
$$- \int\limits_0^x \left[\psi_0(\alpha) F_2(\alpha,0) - \psi_2(\alpha) K(\alpha,0)\right] d\alpha.$$

При этом $N = R_x - a_{12}R$, $P = R_y - a_{21}R$, $K = N_x + a_{02}R$, $Q = P_y + a_{20}R$, $T = R_{xy} - (a_{21}R)_x - (a_{12}R)_y + a_{11}R$, $F_1 = T_y + (a_{20}R)_x - a_{10}R$, $F_2 = T_x + (a_{02}R)_y - a_{01}R$, R — функция Римана. Здесь у функций R, N,

P, K, Q, T, F_1, F_2 выписана только первая пара аргументов, второй всегда является (x, y).

Далее мы считаем (2.5) общим представлением искомого решения через φ_k, ψ_k, $k = 0, 2$. Подставляя в (2.5) аргументы точек (x, y_1), (x_1, y) и учитывая известные значения (2.2), (2.3), приходим к системе нагруженных интегральных уравнений, в которой искомыми функциями являются φ_2, ψ_2 и константа $\varphi_2'(0)$:

$$
\begin{gathered}
\psi_2(x) \int\limits_0^{y_1} R(x, 0, x, \eta)\, d\eta - \int\limits_0^{x} \psi_2(\xi) \int\limits_0^{y_1} \left(R_\xi(\xi, 0, \xi, \eta) + N(\xi, 0, \xi, \eta)\right) d\eta d\xi + \\
+ \int\limits_0^{x} \int\limits_0^{\alpha} \psi_2(\alpha) \int\limits_0^{y_1} K(\alpha_1, 0, \alpha, \eta)\, d\alpha_1 d\alpha d\eta - \\
- \int\limits_0^{y_1} \varphi_2(\eta) \int\limits_0^{x} \left(R_\eta(0, \eta, \xi, \eta) + P(0, \eta, \xi, \eta)\right) d\xi d\eta + \\
+ \int\limits_0^{y_1} \int\limits_0^{\eta} \varphi_2(\beta) \int\limits_0^{x} Q(0, \beta, \xi, \eta)\, d\xi d\beta d\eta - \varphi_2'(0) \int\limits_0^{x} \int\limits_0^{y_1} R(0, 0, \xi, \eta)\, d\eta d\xi = I_1, \\
\varphi_2(y) \int\limits_0^{x_1} R(0, y, \xi, y)\, d\xi - \int\limits_0^{y} \varphi_2(\eta) \int\limits_0^{x_1} \left(R_\eta(0, \eta, x, \eta) + P(0, \eta, \xi, \eta)\right) d\eta d\xi + \\
+ \int\limits_0^{y} \int\limits_0^{\eta} \varphi_2(\beta) \int\limits_0^{x_1} Q(0, \beta, \xi, \eta)\, d\xi d\beta d\eta - \\
- \int\limits_0^{x_1} \psi_2(\xi) \int\limits_0^{y} \left(R_\xi(\xi, 0, \xi, \eta) + N(\xi, 0, \xi, \eta)\right) d\eta d\xi + \\
+ \int\limits_0^{x_1} \int\limits_0^{\xi} \psi_2(\alpha) \int\limits_0^{y} K(\alpha, 0, \xi, \eta)\, d\eta d\xi d\alpha - \varphi_2'(0) \int\limits_0^{x_1} \int\limits_0^{y} R(0, 0, \xi, \eta)\, d\eta d\xi = I_2.
\end{gathered} \tag{2.6}
$$

Функции I_1, I_2 в (2.6) зависят от граничных значений (2.2), (2.3), коэффициентов (2.1) и R.

Если $\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} R\left(0,0,\xi,\eta\right)d\eta d\xi \neq 0$, определим $\varphi_2'\left(0\right)$, подставив в первое из уравнений (2.6) $x = x_1$:

$$\varphi_2'(0) = \frac{1}{\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} R(0,0,\xi,\eta)d\eta d\xi}\times$$

$$\times\left(-\int\limits_0^{x_1}\psi_2\left(\xi\right)\int\limits_0^{y_1}(R_\xi(\xi,0,\xi,\eta)+N(\xi,0,\xi,\eta))d\eta d\xi-\right.$$

$$-\int\limits_0^{y_1}\varphi_2\left(\eta\right)\int\limits_0^{x_1}\left(R_\eta\left(0,\eta,\xi,\eta\right)+P\left(0,\eta,\xi,\eta\right)\right)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{\alpha}\psi_2\left(\alpha\right)\int\limits_0^{y_1}K\left(\alpha_1,0,\alpha,\eta\right)d\alpha_1 d\alpha d\eta+$$

$$\left.+\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{\eta}\varphi_2\left(\beta\right)\int\limits_0^{x_1}Q\left(0,\beta,\xi,\eta\right)d\xi d\beta d\eta\right)+I_{30}.$$

Если $\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} R\left(0,0,\xi,\eta\right)d\eta d\xi = 0$, но хотя бы один из интегралов $\int\limits_0^{\lambda x_1}\int\limits_0^{y_1} R\left(0,0,\xi,\eta\right)d\eta d\xi$, $\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{\lambda y_1} R\left(0,0,\xi,\eta\right)d\eta d\xi$, где $0<\lambda<1$ — произвольное фиксированное, не равен нулю, используем для нахождения $\varphi_2'\left(0\right)$ соответственно соотношения:

$$\varphi_2'(0) = \frac{1}{\int\limits_0^{\lambda x_1}\int\limits_0^{y_1} R\left(0,0,\xi,\eta\right)d\eta d\xi}\times$$

$$\times\left(-\int\limits_0^{\lambda x_1}\psi_2(\xi)\int\limits_0^{y_1}(R_\xi(\xi,0,\xi,\eta)+N(\xi,0,\xi,\eta))d\eta d\xi-\right.$$

$$-\int\limits_0^{y_1}\varphi_2\left(\eta\right)\int\limits_0^{\lambda x_1}\left(R_\eta\left(0,\eta,\xi,\eta\right)+P\left(0,\eta,\xi,\eta\right)\right)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^{\lambda x_1}\int\limits_0^{\alpha}\psi_2(\alpha)\int\limits_0^{y_1}K(\alpha_1,0,\alpha,\eta)\,d\alpha_1 d\alpha d\eta+$$

$$\left.+\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{\eta}\varphi_2(\beta)\int\limits_0^{\lambda x_1}Q(0,\beta,\xi,\eta)\,d\xi d\beta d\eta\right)+I_{31},$$

$$\varphi_2'(0)=\frac{1}{\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{\lambda y_1}R(0,0,\xi,\eta)\,d\eta d\xi}\times$$

$$\left(-\int\limits_0^{x_1}\psi_2(\xi)\int\limits_0^{\lambda y_1}(R_\xi(\xi,0,\xi,\eta)+N(\xi,0,\xi,\eta))d\eta d\xi-\right.$$

$$-\int\limits_0^{\lambda y_1}\varphi_2(\eta)\int\limits_0^{x_1}\left(R_\eta(0,\eta,\xi,\eta)+P(0,\eta,\xi,\eta)\right)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{\alpha}\psi_2(\alpha)\int\limits_0^{\lambda y_1}K(\alpha_1,0,\alpha,\eta)\,d\alpha_1 d\alpha d\eta$$

$$\left.+\int\limits_0^{\lambda y_1}\int\limits_0^{\eta}\varphi_2(\beta)\int\limits_0^{x_1}Q(0,\beta,\xi,\eta)\,d\xi d\beta d\eta\right)+I_{32}.$$

Если же $\int\limits_0^{\lambda x_1}\int\limits_0^{y_1}R(0,0,\xi,\eta)\,d\eta d\xi=0$ и $\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{\lambda y_1}R(0,0,\xi,\eta)\,d\eta d\xi=0$ при любом $0<\lambda<1$, то последние слагаемые в (2.6) $\varphi_2'(0)\int\limits_0^{x}\int\limits_0^{y_1}R(0,0,\xi,\eta)\,d\eta d\xi$ и $\varphi_2'(0)\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y}R(0,0,\xi,\eta)\,d\eta d\xi$ равны нулю и мы получим более простую систему. Таким образом, для нахождения каждой из функций φ_2, ψ_2 получим уравнения фредгольмовского типа.

2. Обратимся теперь к доказательству единственности решения задачи (2.1)–(2.3). А именно, проверим, что при однородных условиях (2.2), (2.3) однородное уравнение (2.1) имеет только нулевое решение. Доказательство осуществляем методом априорной оценки с помощью энергетического неравенства [108] (Ладыженская О. А.).

Воспользовавшись понятиями скалярного произведения в пространстве $L_2[0,x_1]\times[0,y_1]$ $(u,v)=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}u(x,y)\,v(x,y)\,dydx$ и нормы $\|u\|^2=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}u^2(x,y)\,dydx$, вычислим скалярное произведение

$$(L(u),u)=\left(D_x^2D_y^2u+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<4}}^{2}\sum_{j=0}^{2}a_{ij}(x,y)\,D_x^iD_y^ju,u\right)=$$

$$=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\left(D_x^2D_y^2uu+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<4}}^{2}\sum_{j=0}^{2}a_{ij}D_x^iD_y^juu\right)(x,y)\,dydx.$$

Далее проинтегрируем выражение по частям, имеем:

$$(L(u),u)=\|u_{xy}\|^2+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\left(-\frac{a_{21xxy}(x,y)}{2}-\frac{a_{12xyy}(x,y)}{2}+\right.$$

$$+\frac{a_{20xx}(x,y)}{2}+\frac{a_{02yy}(x,y)}{2}+\frac{a_{11xy}(x,y)}{2}-\frac{a_{10x}(x,y)}{2}-$$

$$\left.-\frac{a_{01y}(x,y)}{2}+a_{00}(x,y)\right)u^2(x,y)\,dydx+$$

$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\left(\frac{a_{21y}(x,y)}{2}-a_{20}(x,y)\right)u_x^2(x,y)\,dydx+$$

$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\left(\frac{a_{12x}(x,y)}{2}-a_{02}(x,y)\right)u_y^2(x,y)\,dydx+$$

$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}(a_{12y}+a_{21x}-a_{11})(x,y)\,u_x(x,y)\,u_y(x,y)\,dydx.$$

Так как функции $a_{ij}(x,y)$ являются непрерывными на компакте, то они достигают своих точных верхних и точных нижней граней. Введем обозначения $\sup\limits_{(x,y)\in D}a_{ij}(x,y)=sa_{ij}$, $\inf\limits_{(x,y)\in D}a_{ij}(x,y)=ia_{ij}$. Получаем оценку

$$(L(u),u)\geqslant\|u_{xy}\|^2+\|u\|^2\left(-\frac{sa_{21xxy}}{2}-\frac{sa_{12xyy}}{2}+\right.$$

$$+\frac{ia_{20xx}}{2}+\frac{ia_{02yy}}{2}+\frac{ia_{11xy}}{2}-\frac{sa_{10x}}{2}-\frac{sa_{01y}}{2}+$$

$$+ia_{00})+\|u_x\|^2\left(\frac{ia_{21y}}{2}-sa_{20}\right)+\|u_y\|^2\left(\frac{ia_{12x}}{2}-sa_{02}\right)+$$

$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\left(a_{12y}+a_{21x}-a_{11}\right)(x,y)\,u_x(x,y)\,u_y(x,y)\,dydx.$$

Используя неравенства Коши-Буняковского: $|(u,v)|\leqslant\|u\|\,\|v\|$, Коши "с ε": $|ab|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|a|^2+\frac{|b|^2}{2\varepsilon}$, справедливое при любом $\varepsilon>0$ [108], получим

$$(L(u),u)\geqslant\|u_{xy}\|^2+\|u\|^2\left(-\frac{sa_{21xxy}}{2}-\frac{sa_{12xyy}}{2}+\right.$$

$$+\frac{ia_{20xx}}{2}+\frac{ia_{02yy}}{2}+\frac{ia_{11xy}}{2}-\frac{sa_{10x}}{2}-\frac{sa_{01y}}{2}+$$

$$\left.+ia_{00}\right)+\|u_x\|^2\left(\frac{ia_{21y}}{2}-sa_{20}-\varepsilon\left|s\left(a_{12y}+a_{21x}-a_{11}\right)\right|^2\right)+$$

$$+\|u_y\|^2\left(\frac{ia_{12x}}{2}-sa_{02}-\frac{1}{4\varepsilon}\right).$$

Здесь $s\left(a_{12y}+a_{21x}-a_{11}\right)=\sup\limits_{(x,y)\in D}\left(a_{12y}+a_{21x}-a_{11}\right)(x,y)$. При этом $(L(u),u)=(f,u)$. Обозначив

$$\alpha_1=-\frac{sa_{21xxy}}{2}-\frac{sa_{12xyy}}{2}+\frac{ia_{20xx}}{2}+\frac{ia_{02yy}}{2}+\frac{ia_{11xy}}{2}-\frac{sa_{10x}}{2}-\frac{sa_{01y}}{2}+ia_{00},$$

$\alpha_2=\frac{ia_{21y}}{2}-sa_{20}$, $\quad\alpha_3=\frac{ia_{12x}}{2}-sa_{02}$, приходим к неравенству

$$(f,u)\geqslant\|u_{xy}\|^2+\|u\|^2\alpha_1+\|u_x\|^2\left(\alpha_2-\varepsilon\left|s\left(a_{12y}+a_{21x}-a_{11}\right)\right|^2\right)+$$

$$+\|u_y\|^2\left(\alpha_3-\frac{1}{4\varepsilon}\right).$$

Потребуем неотрицательности коэффициентов при нормах. Тогда из третьей и четвертой скобок следует, что $4\alpha_2\alpha_3\geqslant\left|s\left(a_{12y}+a_{21x}-a_{11}\right)\right|^2$. Полагаем теперь $f\equiv0$, получим, что все слагаемые в правой части являются нулевыми. В частности, $\|u_{xy}\|=0$ и, следовательно, $u_{xy}=0$. Проинтегрируем последнее равенство по x и y в диапазоне от 0 до x и от 0 до y соответственно. Учитывая, что условия на границе являются нулевыми получим, что функция u может быть только нулевой.

При $f \equiv 0$, $\varphi_k \equiv \psi_k \equiv 0$ $(k = 0,\ 1)$ система уравнений (2.6) является тоже однородной. В силу доказанной единственности решения задачи эта система допускает в данном случае только нулевое решение. По теореме Фредгольма [16] это означает однозначную разрешимость неоднородной системы уравнений (2.6).

Таким образом, имеет место

Теорема 2.1. *Если коэффициенты уравнения* (2.1) *удовлетворяют неравенствам* $\alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_2 \geqslant 0, \quad \alpha_3 \geqslant 0, \quad 4\alpha_2\alpha_3 \geqslant |s\,(a_{12y} + a_{21x} - a_{11})|^2$ *то задача* (2.1)–(2.3) *имеет единственное решение.*

Отметим, что условия теоремы являются существенными. Рассмотрим, например, задачу Дирихле для уравнения $u_{xxyy} + \pi^2 u_{xx} = 0$ в области $D = [0,1] \times [0,1]$ с нулевыми условиями на границе. В нем коэффициент $a_{20} = \pi^2 > 0$, а все остальные равны нулю, условие теоремы не выполнено. Решением, в чем можно убедиться непосредственно, является $u\,(x,y) = \sin \pi x \sin \pi y$, отличная от тождественного нуля в области D.

Трехмерный случай. Подобная задача была исследована и в трехмерном случае [194]. Рассуждения от проведенных в двумерном случае принципиально не отличаются. Поэтому здесь мы приведем лишь постановку задачи и теорему о ее разрешимости.

Далее речь пойдет об уравнении

$$L\,(u) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0}^{2} a_{ijk}\,(x,y,z)\, D_x^i D_y^j D_z^k u\,(x,y,z) = f\,(x,y,z)\,, \quad a_{222} \equiv 1, \tag{2.7}$$

которое можно считать обобщением уравнений Манжерона [233] и Буссинеска-Лява из теории колебаний [163, формула (20)], а также усложнением уравнения Бианки [201], связанного с интегральным представлением одних дифференциальных операторов через другие [202], и играющего важную роль в теориях аппроксимации и отображений [11, с. 109].

Пусть $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1, 0 < z < z_1\}$. Обозначим X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1 — грани D при $x = 0, x = x_1$, $y = 0$, $y = y_1$, $z = 0$, $z = z_1$ соответственно. Полагаем, что гладкость коэффициентов из (2.7) определяется включениями $a_{\alpha\beta\gamma} \in C^{\alpha+\beta+\gamma}\left(\overline{D}\right), f \in C^{0+0+0}\left(\overline{D}\right)$.

Задача 2.2. *Найти функцию* $u\,(x,y,z) \in C^{2+2+2}\,(D) \cap$ $\cap C^{1+0+0}\left(D \cup \overline{X_0}\right) \cap C^{0+1+0}\left(D \cup \overline{Y_0}\right) \cap C^{0+0+1}\left(D \cup \overline{Z_0}\right) \cap C^{0+0+0}\left(\overline{D}\right)$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (2.7) *и удовлетворяющую условиям*

$$u\,|_{X_0} = \varphi_0\,(y,z)\,, \quad u\,|_{Y_0} = \psi_0\,(x,z)\,, \quad u\,|_{Z_0} = \theta_0\,(x,y) \tag{2.8}$$

$$u\left|_{X_1} = \varphi_2\left(y,z\right), \quad u\right|_{Y_1} = \psi_2\left(x,z\right), u\left|_{Z_1} = \theta_2\left(x,y\right).\right. \tag{2.9}$$

Для принадлежности $u \in C^{0+0+0}\left(\overline{D}\right)$ следует предполагать

$$\varphi_0\left(0,z\right) = \psi_0\left(0,z\right), \quad \varphi_0\left(y,0\right) = \theta_0\left(0,y\right), \quad \psi_0\left(x,0\right) = \theta_0\left(x,0\right),$$

$$\varphi_0\left(y_1,z\right) = \psi_2\left(0,z\right), \quad \varphi_0\left(y,z_1\right) = \theta_2\left(0,y\right),$$
$$\psi_0\left(x_1,z\right) = \varphi_2\left(0,z\right), \quad \varphi_2\left(y,0\right) = \theta_2\left(x_1,y\right).$$

Задача 2.2, как и в двумерном случае, редуцируется к системе уравнений Фредгольма для определения недостающих условий Гурса

$$u_x\left|_{X_0} = \varphi_0\left(y,z\right), \quad u_y\right|_{Y_0} = \psi_0\left(x,z\right), \quad u_z\left|_{Z_0} = \theta_0\left(x,y\right).\right.$$

Ее однозначная разрешимость выводится из доказываемой на основе априорных оценок теореме единственности. А именно, доказана

Теорема 2.2. *Если коэффициенты уравнения* (2.7) *удовлетворяют неравенствам* $\alpha_1 \geqslant 0$,$\alpha_2 \geqslant \frac{|ss_1|}{2} + \frac{|ss_3|}{2}$, $\alpha_3 \geqslant \frac{|ss_1|}{2} + \frac{|ss_2|}{2}$, $\alpha_4 \geqslant \frac{|ss_2|}{2} + \frac{|ss_3|}{2}$, $\alpha_5 \geqslant \frac{|ss_4|}{2} + \frac{|ss_5|}{2}$, $\alpha_6 \geqslant \frac{|ss_5|}{2} + \frac{|ss_6|}{2}$, $\alpha_7 \geqslant \frac{|ss_4|}{2} + \frac{|ss_6|}{2}$ *то задача* (2.7)–(2.9) *имеет единственное решение.*

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0 \\ 0<i+j+k<6}}^{2}\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=0}^{2}\left(-1\right)^{i+j+k+1}\Delta_{i+j+k+1}D_x^iD_y^jD_z^ka_{ijk} - sa_{000},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=0 \\ 0<j+k<4}}^{2}\sum_{k=0}^{2}\left(-1\right)^{j+k}\Delta_{j+k}D_y^jD_z^ka_{2jk} + ia_{200},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0 \\ 0<i+k<4}}^{2}\sum_{k=0}^{2}\left(-1\right)^{i+k}\Delta_{i+k}D_x^iD_z^ka_{i2k} + ia_{020},$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0 \\ 0<i+j<4}}^{2}\sum_{j=0}^{2}\left(-1\right)^{i+j}\Delta_{i+j}D_x^iD_y^ja_{ij2} + ia_{002},$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}ia_{221z} - sa_{220}, \quad \alpha_6 = \frac{1}{2}ia_{212y} - sa_{202}, \quad \alpha_7 = \frac{1}{2}ia_{122x} - sa_{022}.$$

2.1.2. Задачи со смещениями.

Смещения в граничных условиях. Многие авторы называют подобные граничные условия нелокальными. Рассмотрим нелокальную задачу для уравнения, являющегося обобщением уравнения Аллера.

Для точек, лежащих на границе и внутри области $D = \{(x, y \in (0,1))\}$ введем обозначения

$$b_1 = (x, 0)\,, \quad b_2 = (0, x)\,, \quad b_3 = (x, x)\,,$$

$$b_4 = (1 - x, 0)\,, \quad b_5 = (0, 1 - x)\,, \quad b_6 = (1 - x, 1 - x)\,.$$

Точки, получаемые из b_k заменой x на y обозначим соответственно через c_k.

Задача 2.3. *Требуется найти функцию* $u(x,y) \in C^{2+1}(D) \cap C^{0+0}\left(\overline{D}\right)$, *являющуюся в* D *решением уравнения*

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{1} a_{ij}(x,y)\, D_x^i D_y^j u(x,y) = 0, \tag{2.10}$$

$$a_{21} \equiv 1, \quad a_{ij} \in C^{i,j}\left(\overline{D}\right),$$

и удовлетворяющую следующим трем условиям

$$\begin{gathered}
\alpha_{10}(x)\, u(b_1) + \alpha_{01}(x)\, u(b_2) + \alpha_{11}(x)\, u(b_3) + \alpha_{10}^1(1-x)\, u(b_4) + \\
+\alpha_{01}^1(1-x)\, u(b_5) + \alpha_{11}^1(1-x)\, u(b_6) = \psi_1(x)\,, \quad x \in [0,1] \\
\beta_{10}(y)\, u(c_1) + \beta_{01}(y)\, u(c_2) + \beta_{11}(y)\, u(c_3) + \beta_{10}^1(1-y)\, u(c_4) + \\
+\beta_{01}^1(1-y)\, u(c_5) + \beta_{11}^1(1-y)\, u(c_6) = \psi_2(x)\,, \quad y \in [0,1]\,. \\
\gamma_{10}(x)\, u(b_1) + \gamma_{01}(x)\, u(b_2) + \gamma_{11}(x)\, u(b_3) + \gamma_{10}^1(1-x)\, u(b_4) + \\
+\gamma_{01}^1(1-x)\, u(b_5) + \gamma_{11}^1(1-x)\, u(b_6) = \psi_3(x)\,, x \in [0,1]\,.
\end{gathered} \tag{2.11}$$

При этом на отрезках своего определения $\alpha_{ij}, \alpha_{ij}^1, \beta_{ij}, \beta_{ij}^1, \gamma_{ij}, \gamma_{ij}^1 \in C$.

Данную задачу будем исследовать путем ее редукции к однозначно разрешимой задаче Гурса с граничными условиями

$$u(0,y) = \varphi(y)\,, \quad u_x(0,y) = \varphi_1(y)\,, \quad u(x,0) = \psi(x)\,, \tag{2.12}$$

решение которой определяется используемыми в дальнейших рассуждениях формулами, являющимися частным случаем (2.13) при $m = 2$, $n = 1$:

$$u(x,y) = \varphi(y) + \int\limits_{x_0}^{x} h(\alpha, y)\, d\alpha, \tag{2.13}$$

$$h(x,y) = R(x,y_0,x,y)\,\psi'(x) + R(x_0,y,x,y)\,\varphi_1(y) - M(x,y_0,x,y)\,\psi(x) -
- M(x_0,y,x,y)\,\varphi(y) + M(x_0,y_0,x,y)\,\psi(x_0) - R(x_0,y_0,x,y)\,\psi'(x) +
+ \int\limits_{y_0}^{y} \left[P(x_0,\beta,x,y)\,\varphi(\beta) - N(x_0,\beta,x,y)\,\varphi_1(\beta)\right] d\beta +
+ \int\limits_{x_0}^{x} Q(\alpha,y_0,x,y)\,\psi(\alpha)\,d\alpha. \quad (2.14)$$

При этом R — функция Римана, а $M = R_x - bR$, $N = R_y - aR$, $P = R_{xy} - (aR)_x - (bR)_y + cR$, $Q = R_{xx} - (bR)_x + dR$.

Эти же соотношения можно рассматривать при произвольных φ, φ_1, ψ как общее преставление решений уравнения (2.10). В самом деле, взяв любое решение $u(x,y)$, мы всегда можем вычислить правые части (2.12), а затем подставить их в (2.13)–(2.14).

Для реализации указанной выше редукции введем вектор $\Phi(x) = [u(b_1), u(b_2), u(b_3)]$ и будем использовать условия (2.11), полагая во втором из них $y = x$. В результате придем к векторно-матричному линейному алгебраическому уравнению, содержащему в качестве неизвестных $\Phi(x)$ и $\Phi(1-x)$:

$$A(x)\,\Phi(x) + B(1-x)\,\Phi(1-x) = \Psi(x), \quad (2.15)$$

где $\Psi(x)$ — полностью известный вектор, составленный из правых частей условий (2.11). Элементами матриц A, B являются коэффициенты условий (2.11) при значениях искомой функции в точках с индексами $k = 1, 2, 3$ и $k = 4, 5, 6$ соответственно.

Если

$$\Delta(x, 1-x) = \det \begin{bmatrix} A(x) & B(1-x) \\ B(x) & A(1-x) \end{bmatrix} \neq 0, \quad (2.16)$$

то (2.15) имеет единственное решение, записываемое любой из формул

$$\Phi(x) = \frac{\det \begin{bmatrix} \Psi(x) & B(1-x) \\ \Psi(1-x) & A(1-x) \end{bmatrix}}{\Delta(x,1-x)}, \quad (2.17)$$

$$\Phi(1-x) = \frac{\det \begin{bmatrix} A(x) & \Psi(x) \\ B(x) & \Psi(1-x) \end{bmatrix}}{\Delta(x,1-x)}. \quad (2.18)$$

Нетрудно видеть, что (2.17) и (2.18) представляют собой фактически одну формулу: при перестановке местами аргументов x и $1-x$ в правой части

(2.18), мы получаем (2.17). Из непрерывности искомого решения, следует условие согласования

$$\varphi(0) = \psi(0), \tag{2.19}$$

которое мы будем считать выполненным.

Осталось определить $\varphi_1(y)$. Подставляем в (2.13) значение $y = x$:

$$u(x, x) = \varphi(x) + \int_0^x h(\alpha, x)\, d\alpha.$$

Учитывая, что $u(x, x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ уже известны, приходим с учетом (2.14), к уравнению Вольтерра второго рода

$$\varphi_1(x) \int_0^x R(0, x, \alpha, x)\, d\alpha -$$

$$-\int_0^x \left(\int_0^x N(0, \beta, \alpha, x)\, d\alpha \right) \varphi_1(\beta)\, d\beta = u(x, x) - \varphi(x) -$$

$$-\int_0^x [\, R(\alpha, 0, \alpha, y)\, \psi'(\alpha) - M(\alpha, 0, \alpha, y)\, \psi(\alpha) - M(0, x, \alpha, x)\, \varphi(x) +$$

$$+M(0, 0, \alpha, x)\, \psi(0) - R(0, 0, \alpha, x)\, \psi'(\alpha) + \int_0^x P(0, \beta, \alpha, x)\, \varphi(\beta)\,]\, d\beta d\alpha,$$

где неизвестной является $\varphi_1(x)$. Хорошо известно, что оно однозначно разрешимо [133]. Таким образом, верна

Теорема 2.3. *Задача* 2.3 *при выполнении условий* (2.16), (2.19) *однозначно разрешима.*

Далее рассмотрим нелокальную задачу для уравнения, являющегося обобщением уравнения Буссинеска-Лява.

Задача 2.4. *Найти функцию* $u(x, y) \in C^{2+2}(D) \cap C^{0+0}\left(\overline{D}\right)$, *являющуюся в* D *решением уравнения*

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} a_{ij}(x, y)\, D_x^i D_y^j u(x, y) = 0, a_{22} \equiv 1, \quad a_{ij} \in C^{i,j}\left(\overline{D}\right),$$

и удовлетворяющую условиям

$$\alpha_{10}(x)\, u(x, 1-x) + \alpha_{01}(x)\, u(1-x, x) + \alpha_{01}^1(x)\, u_x(b_2) +$$

$$+\alpha_{10}^{1}(x)\,u_y(b_1)=\psi_1(x)\,,x\in[0,1]$$

$$\beta_{10}(y)\,u(y,1-y)+\beta_{01}(y)\,u(1-y,y)+\beta_{01}^{1}(y)\,u_x(c_2)+$$

$$+\beta_{10}^{1}(y)\,u_y(c_1)=\psi_2(y)\,,y\in[0,1]$$

$$\gamma_{10}(x)\,u(x,1-x)+\gamma_{01}(x)\,u(1-x,x)+\gamma_{01}^{1}(x)\,u_x(b_2)+$$

$$+\gamma_{10}^{1}(x)\,u_y(b_1)=\psi_3(x)\,,x\in[0,1]$$

$$\delta_{10}(y)\,u(y,1-y)+\delta_{01}(y)\,u(1-y,y)+\delta_{01}^{1}(y)\,u_x(c_2)+$$

$$+\delta_{10}^{1}(y)\,u_y(c_1)=\psi_4(y)\,,y\in[0,1]\,.$$

Разрешимость этой задачи характеризует

Теорема 2.4. *Задача* 2.4 *при выполнении условий* $\det A\neq 0$*,* $\det A_2(x)\neq 0$*,* $a_{00}(0,0)\neq 0$ *однозначно разрешима.*

Здесь матрица A составлена из коэффициентов при искомой функции в постановке задачи 1.4. Матрица A_2 состоит из элементов $d_{11}^2=0$,

$$d_{12}^2=1-\int\limits_0^{1-x}P(x,0,x,\eta)\,d\eta+\int\limits_0^{1-x}P(0,0,0,\eta)\,d\eta,$$

$$d_{21}^2=1-\int\limits_0^{1-x}N(0,1-x,\xi,1-x)\,d\eta,$$

$$d_{22}^2=0,\quad d_{11}^3=\int\limits_0^{x}\left(N_y(\xi,0,\xi,\eta)+N(0,\eta,\xi,\eta)-(1-x-\eta)\,F_1(0,\beta)\right)d\xi.$$

Затем нами были изучены нелокальные задачи для уравнений Бианки в пространствах размерности $n=3$, 4. Рассмотрим сначала случай $n=3$. Уравнение Бианки в этом пространстве имеет вид

$$u_{x_1x_2x_3}(x_1,x_2,x_3)+\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{\substack{i_3=0\\ i_1+i_2+i_3<3}}^{1}a_{i_1i_2i_3}(x_1,x_2,x_3)\times$$

$$\times D_{x_1}^{i_1}D_{x_2}^{i_2}D_{x_3}^{i_3}u(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2,x_3)\,,\quad(2.20)$$

область $G=\{x_1,x_2,x_3\in(0,1)\}$, при этом $a_{i_1i_2i_3}\in C^{i_1+i_2+i_3}\left(\overline{G}\right)$, $f\in C^{0+0+0}\left(\overline{G}\right)$, X_1, X_2, X_3 — грани G при $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ соответственно.

Задача 2.5. *Найти функцию* $u(x_1, x_2, x_3) \in C^{1+1+1}(G) \cap C^{0+0+0}\left(\overline{G}\right)$*, являющуюся в* G *решением уравнения* (2.20) *и удовлетворяющую условиям*

$$\sum_{\substack{i_1=0 \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \\ (i_1,i_2,i_3)\neq P(1,2,3)}}^{3} \sum_{i_2=0}^{3} \sum_{i_3=0}^{3} \alpha^k_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}) u(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}) = \psi_k(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}),\ k = \overline{1,3},$$

$P(1,2,3)$ — перестановка чисел 1, 2, 3, $x_0 = 0$, $\alpha^k_{i_1 i_2 i_3} \in C$ *на соответствующих гранях* X_1, X_2, X_3.

Справедлива

Теорема 2.5. *Рассматриваемая задача при выполнении условий* $\mathrm{rank}\left[\ A_1(x_1, 0)\quad B_1(x_1, x_1)\ \right] = 6$*,* $\det C^1_{12}(x_1, x_2) \neq 0$ *имеет единственное решение.*

Здесь $A_1 = \left\|\beta^1_{ij}\right\|$, $B_1 = \left\|\delta^1_{ij}\right\|$, а их элементы

$$\beta^1_{1+3(k-1),1}(x_1, 0, 0) = \sum_{\substack{i_2,i_3=0,2,3 \\ i_2+i_3<5}} \alpha^k_{1 i_2 i_3}(x_1, 0, 0),$$

$$\beta^1_{1+3(k-1),2}(0, x_1, 0) = \sum_{\substack{i_1,i_3=0,2,3 \\ i_1+i_3<5}} \alpha^k_{i_1 1 i_3}(0, x_1, 0),$$

$$\beta^1_{1+3(k-1),3}(0, 0, x_1) = \sum_{\substack{i_1,i_2=0,2,3 \\ i_1+i_2<5}} \alpha^k_{i_1 i_2 1}(0, 0, x_1),$$

$$\beta^1_{2+3(k-1),1}(x_1, 0, 0) = \sum_{\substack{i_2,i_3=0,1,3 \\ i_2+i_3<4}} \alpha^k_{2 i_2 i_3}(x_1, 0, 0),$$

$$\beta^1_{2+3(k-1),2}(0, x_1, 0) = \sum_{\substack{i_1,i_3=0,1,3 \\ i_1+i_3<4}} \alpha^k_{i_1 2 i_3}(0, x_1, 0),$$

$$\beta^1_{2+3(k-1),3}(0, 0, x_1) = \sum_{\substack{i_1,i_2=0,1,3 \\ i_1+i_2<4}} \alpha^k_{i_1 i_2 2}(0, 0, x_1)$$

$$\beta^1_{3+3(k-1),1}(x_1, 0, 0) = \sum_{\substack{i_2,i_3=0,1,2 \\ i_2+i_3<3}} \alpha^k_{3 i_2 i_3}(x_1, 0, 0),$$

$$\beta^1_{3+3(k-1),2}\left(0,x_1,0\right)=\sum_{\substack{i_1,i_3=0,1,2\\ i_1+i_3<3}}\alpha^k_{i_1 3 i_3}\left(0,x_1,0\right),$$

$$\beta^1_{3+3(k-1),3}\left(0,0,x_1\right)=\sum_{\substack{i_1,i_2=0,1,2\\ i_1+i_2<3}}\alpha^k_{i_1 i_2 3}\left(0,0,x_1\right),$$

$$\delta^1_{1+3(k-1),1}\left(x_1,x_1,0\right)=\sum_{i_1=0,2,3}\alpha^k_{11i_1}\left(x_1,x_1,0\right),$$

$$\delta^1_{1+3(k-1),2}\left(x_1,0,x_1\right)=\sum_{i_1=0,2,3}\alpha^k_{1i_1 1}\left(x_1,0,x_1\right),$$

$$\delta^1_{1+3(k-1),3}\left(0,x_1,x_1\right)=\sum_{i_1=0,2,3}\alpha^k_{i_1 11}\left(0,x_1,x_1\right),$$

$$\delta^1_{2+3(k-1),1}\left(x_1,x_1,0\right)=\sum_{i_1=0,1,3}\alpha^k_{22i_1}\left(x_1,x_1,0\right),$$

$$\delta^1_{2+3(k-1),2}\left(x_1,0,x_1\right)=\sum_{i_1=0,1,3}\alpha^k_{2i_1 2}\left(x_1,0,x_1\right),$$

$$\delta^1_{2+3(k-1),3}\left(0,x_1,x_1\right)=\sum_{i_1=0,1,3}\alpha^k_{i_1 22}\left(0,x_1,x_1\right),$$

$$\delta^1_{3+3(k-1),1}\left(x_1,x_1,0\right)=\sum_{i_1=0,1,2}\alpha^k_{33i_1}\left(x_1,x_1,0\right),$$

$$\delta^1_{3+3(k-1),2}\left(x_1,0,x_1\right)=\sum_{i_1=0,1,2}\alpha^k_{3i_1 3}\left(x_1,0,x_1\right),$$

$$\delta^1_{3+3(k-1),3}\left(0,x_1,x_1\right)=\sum_{i_1=0,1,2}\alpha^k_{i_1 33}\left(0,x_1,x_1\right)\quad (k=1,2,3),$$

$$C^1_{12}=\left\|c^k_{ij}\right\|\left(k=1,\quad i,\,j=\overline{1,3}\right),$$

$$c^1_{j1}=\sum_{i=0}^{2}\alpha^j_{i12}\left(x_i,x_1,x_2\right)R^{\eta(i)}\left(0,x_1,x_2\right),$$

$$c^1_{j2}=\sum_{i=0}^{2}\alpha^j_{1i2}\left(x_1,x_i,x_2\right)R^{\eta(i)}\left(x_1,0,x_2\right),$$

$$c^1_{j3}=\sum_{i=0}^{2}\alpha^j_{12i}\left(x_1,x_2,x_i\right)R^{\eta(i)}\left(x_1,x_2,0\right),\quad j=\overline{1,3},$$

$\eta(i) = \begin{cases} 1, i > 0 \\ 0, i \leqslant 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда [93, с. 200], применяющаяся в операционном исчислении.

Остановимся еще на четырехмерном случае ($n = 4$). Уравнение Бианки имеет здесь вид

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{i_3=0}^{1}\sum_{i_4=0}^{1} a_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) \times$$
$$\times D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_2} D_{x_3}^{i_3} D_{x_4}^{i_4} u(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (2.21)$$

$a_{1111} \equiv 1$, $a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \in C^{i_1, i_2, i_3, i_4}\left(\overline{D}\right)$, $f \in C^{0,0,0,0}\left(\overline{D}\right)$, $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0,1)\}$. Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — грани D при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ соответственно. Рассмотрим первую из задач, предложенную для (2.21).

Задача 2.6. *Найти функцию* $u(x_1, x_2, x_3, x_4) \in C^{1,1,1,1}(D) \cap C^{0,0,0,0}\left(\overline{D}\right)$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (2.21) *и удовлетворяющую условиям*

$$\begin{gathered}
\sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_2=0}^{3}\sum_{i_3=0}^{3}\sum_{\substack{i_4=0 \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 \text{ при ненулевых индексах } i}}^{3} \alpha^1_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}) \quad u(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}) = \psi_1(x_1, x_2, x_3), \\
\sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0 \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 \text{ при ненулевых индексах } i,\, i_k \neq 1}}^{4} \alpha^2_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}) \quad u(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}) = \psi_2(x_2, x_3, x_4), \\
\sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0 \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 \text{ при ненулевых индексах } i,\, i_k \neq 3}}^{4} \alpha^3_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}) \quad u(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}) = \psi_3(x_1, x_2, x_4), \\
\sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0 \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 \text{ при ненулевых индексах } i,\, i_k \neq 2}}^{4} \alpha^4_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}) \quad u(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}) = \psi_4(x_1, x_3, x_4),
\end{gathered} \quad (2.22)$$

где $\alpha^j_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ $(i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4)$ — *заданные на соответствующих гранях* $\overline{X}_1, \overline{X_2}, \overline{X_3}, \overline{X_4}$ *непрерывные функции,* $x_0 = 0$.

При исследовании задачи 2.6 использованы обозначения

$$\frac{\psi_1(0,0,0)}{\sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_2=0}^{3}\sum_{i_3=0}^{3}\sum_{\substack{i_4=0 \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 \text{ если } i_k > 0}}^{3} \alpha^1_{i_1 i_2 i_3 i_4}(0,0,0,0)} = u_1,$$

$$\frac{\psi_2\left(0,0,0\right)}{\sum\limits_{i_1=0,i_1\neq 1}^{4}\sum\limits_{i_2=0,i_2\neq 1}^{4}\sum\limits_{\substack{i_3=0,i_3\neq 1\\ i_1\neq i_2\neq i_3\neq i_4\,\text{если}\,i_k>0}}^{4}\sum\limits_{i_4=0,i_4\neq 1}^{4}\alpha^2_{i_1i_2i_3i_4}\left(0,0,0,0\right)}=u_2,$$

$$\frac{\psi_3\left(0,0,0\right)}{\sum\limits_{i_1=0,i_1\neq 3}^{4}\sum\limits_{i_2=0,i_2\neq 3}^{4}\sum\limits_{\substack{i_3=0,i_3\neq 3\\ i_1\neq i_2\neq i_3\neq i_4\,\text{если}\,i_k>0}}^{4}\sum\limits_{i_4=0,i_4\neq 3}^{4}\alpha^3_{i_1i_2i_3i_4}\left(0,0,0,0\right)}=u_3,$$

$$\frac{\psi_4\left(0,0,0\right)}{\sum\limits_{i_1=0,i_1\neq 2}^{4}\sum\limits_{i_2=0,i_2\neq 2}^{4}\sum\limits_{\substack{i_3=0,i_3\neq 2\\ i_1\neq i_2\neq i_3\neq i_4\,\text{если}\,i_k>0}}^{4}\sum\limits_{i_4=0,i_4\neq 2}^{4}\alpha^4_{i_1i_2i_3i_4}\left(0,0,0,0\right)}=u_4.$$

Были заданы квадратные матрицы четвертого порядка, элементами которых соответственно являются у A^1:

$$\beta^1_{11}\left(x_1\right)=\sum_{i_2=0}^{3}\sum_{i_3=0}^{3}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1, i_2\neq i_3\neq i_4\,\text{при}\,i_k>0}}^{3}\alpha^1_{1i_2i_3i_4}\left(x_1,0,0,0\right),$$

$$\beta^1_{12}\left(x_1\right)=\sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_3=0}^{3}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1, i_1\neq i_3\neq i_4\,\text{при}\,i_k>0}}^{3}\alpha^1_{i_11i_3i_4}\left(0,x_1,0,0\right),$$

$$\beta^1_{13}\left(x_1\right)=\sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_2=0}^{3}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1, i_1\neq i_2\neq i_4\,\text{при}\,i_k>0}}^{3}\alpha^1_{i_1i_21i_4}\left(0,0,x_1,0\right),$$

$$\beta^1_{14}\left(x_1\right)=\sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_2=0}^{3}\sum_{\substack{i_3=0\\ i_k\neq 1, i_1\neq i_2\neq i_3\,\text{при}\,i_k>0}}^{3}\alpha^1_{i_1i_2i_31}\left(0,0,0,x_1\right),$$

$$\beta^1_{21}\left(x_1\right)=\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,2, i_2\neq i_3\neq i_4\,\text{при}\,i_k>0}}^{4}\alpha^2_{2i_2i_3i_4}\left(x_1,0,0,0\right),$$

$$\beta^1_{22}\left(x_1\right)=\sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,2, i_1\neq i_3\neq i_4\,\text{при}\,i_k>0}}^{4}\alpha^2_{i_12i_3i_4}\left(0,x_1,0,0\right),$$

$$\beta_{23}^{1}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,2, i_1\neq i_2\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_1 i_2 2 i_4}^{2}(0,0,x_1,0),$$

$$\beta_{24}^{1}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_3=0\\ i_k\neq 1,2, i_1\neq i_2\neq i_3 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_1 i_2 i_3 2}^{2}(0,0,0,x_1),$$

$$\beta_{31}^{1}(x_1) = \sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,3, i_2\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{1 i_2 i_3 i_4}^{3}(x_1,0,0,0),$$

$$\beta_{32}^{1}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,3, i_1\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_1 1 i_3 i_4}^{3}(0,x_1,0,0),$$

$$\beta_{33}^{1}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,3, i_1\neq i_2\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_1 i_2 1 i_4}^{3}(0,0,x_1,0),$$

$$\beta_{34}^{1}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_3=0\\ i_k\neq 1,3, i_1\neq i_2\neq i_3 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_1 i_2 i_3 1}^{3}(0,0,0,x_1),$$

$$\beta_{41}^{1}(x_1) = \sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,2, i_2\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{1 i_2 i_3 i_4}^{4}(x_1,0,0,0),$$

$$\beta_{42}^{1}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,2, i_1\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_1 1 i_3 i_4}^{4}(0,x_1,0,0),$$

$$\beta_{43}^{1}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,2, i_1\neq i_2\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_1 i_2 1 i_4}^{4}(0,0,x_1,0),$$

$$\beta_{44}^{1}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_3=0\\ i_k\neq 1,2, i_1\neq i_2\neq i_3 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_1 i_2 i_3 1}^{4}(0,0,0,x_1),$$

для A^2:

$$\beta_{11}^2(x_1) = \sum_{i_2=0}^{3}\sum_{i_3=0}^{3}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 3, i_2\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{3} \alpha_{3i_2i_3i_4}^1(x_1,0,0,0),$$

$$\beta_{12}^2(x_1) = \sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_3=0}^{3}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 3, i_1\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{3} \alpha_{i_13i_3i_4}^1(0,x_1,0,0),$$

$$\beta_{13}^2(x_1) = \sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_2=0}^{3}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 3, i_1\neq i_2\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{3} \alpha_{i_1i_23i_4}^1(0,0,x_1,0),$$

$$\beta_{14}^2(x_1) = \sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_2=0}^{3}\sum_{\substack{i_3=0\\ i_k\neq 3, i_1\neq i_2\neq i_3 \text{ при } i_k>0}}^{3} \alpha_{i_1i_2i_33}^1(0,0,0,x_1),$$

$$\beta_{21}^2(x_1) = \sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,4, i_2\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{4i_2i_3i_4}^2(x_1,0,0,0),$$

$$\beta_{22}^2(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,4, i_1\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_14i_3i_4}^2(0,x_1,0,0),$$

$$\beta_{23}^2(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,4, i_1\neq i_2\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_1i_24i_4}^2(0,0,x_1,0),$$

$$\beta_{24}^2(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_3=0\\ i_k\neq 1,4, i_1\neq i_2\neq i_3 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_1i_2i_34}^2(0,0,0,x_1),$$

$$\beta_{31}^2(x_1) = \sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 3,4, i_2\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{4i_2i_3i_4}^3(x_1,0,0,0),$$

$$\beta_{32}^2(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 3,4, i_1\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha_{i_14i_3i_4}^3(0,x_1,0,0),$$

$$\beta_{33}^{2}(x_1)=\sum_{\substack{i_1=0\\ i_k\neq 4,3,i_1\neq i_2\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_4=0}^{4}\alpha_{i_1i_24i_4}^{3}(0,0,x_1,0),$$

$$\beta_{34}^{2}(x_1)=\sum_{\substack{i_1=0\\ i_k\neq 4,3,i_1\neq i_2\neq i_3 \text{ при } i_k>0}}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\alpha_{i_1i_2i_34}^{3}(0,0,0,x_1),$$

$$\beta_{41}^{2}(x_1)=\sum_{\substack{i_2=0\\ i_k\neq 2,4,i_2\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{i_4=0}^{4}\alpha_{4i_2i_3i_4}^{4}(x_1,0,0,0),$$

$$\beta_{42}^{2}(x_1)=\sum_{\substack{i_1=0\\ i_k\neq 2,4,i_1\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{i_4=0}^{4}\alpha_{i_14i_3i_4}^{4}(0,x_1,0,0),$$

$$\beta_{43}^{2}(x_1)=\sum_{\substack{i_1=0\\ i_k\neq 2,4,i_1\neq i_2\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_4=0}^{4}\alpha_{i_1i_24i_4}^{4}(0,0,x_1,0),$$

$$\beta_{44}^{2}(x_1)=\sum_{\substack{i_1=0\\ i_k\neq 2,4,i_1\neq i_2\neq i_3 \text{ при } i_k>0}}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\alpha_{i_1i_2i_34}^{4}(0,0,0,x_1)$$

для A^3:

$$\beta_{11}^{3}(x_1)=\sum_{\substack{i_2=0\\ i_k\neq 2,i_2\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{3}\sum_{i_3=0}^{3}\sum_{i_4=0}^{3}\alpha_{2i_2i_3i_4}^{1}(x_1,0,0,0),$$

$$\beta_{12}^{3}(x_1)=\sum_{\substack{i_1=0\\ i_k\neq 2,i_1\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{3}\sum_{i_3=0}^{3}\sum_{i_4=0}^{3}\alpha_{i_12i_3i_4}^{1}(0,x_1,0,0),$$

$$\beta_{13}^{3}(x_1)=\sum_{\substack{i_1=0\\ i_k\neq 2,i_1\neq i_2\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{3}\sum_{i_2=0}^{3}\sum_{i_4=0}^{3}\alpha_{i_1i_22i_4}^{1}(0,0,x_1,0),$$

$$\beta_{14}^{3}(x_1)=\sum_{\substack{i_1=0\\ i_k\neq 2,i_1\neq i_2\neq i_3 \text{ при } i_k>0}}^{3}\sum_{i_2=0}^{3}\sum_{i_3=0}^{3}\alpha_{i_1i_2i_32}^{1}(0,0,0,x_1),$$

$$\beta^3_{21}(x_1) = \sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,3, i_2\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha^2_{3i_2i_3i_4}(x_1,0,0,0),$$

$$\beta^3_{22}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,3, i_1\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha^2_{i_13i_3i_4}(0,x_1,0,0),$$

$$\beta^3_{23}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 1,3, i_1\neq i_2\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha^2_{i_1i_23i_4}(0,0,x_1,0),$$

$$\beta^3_{24}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_3=0\\ i_k\neq 1,3, i_1\neq i_2\neq i_3 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha^2_{i_1i_2i_33}(0,0,0,x_1),$$

$$\beta^3_{31}(x_1) = \sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 3,2, i_2\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha^3_{2i_2i_3i_4}(x_1,0,0,0),$$

$$\beta^3_{32}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 3,2, i_1\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha^3_{i_12i_3i_4}(0,x_1,0,0),$$

$$\beta^3_{33}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 3,2, i_1\neq i_2\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha^3_{i_1i_22i_4}(0,0,x_1,0),$$

$$\beta^3_{34}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_3=0\\ i_k\neq 2,3, i_1\neq i_2\neq i_3 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha^3_{i_1i_2i_32}(0,0,0,x_1),$$

$$\beta^3_{41}(x_1) = \sum_{i_2=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 2,3, i_2\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha^4_{3i_2i_3i_4}(x_1,0,0,0),$$

$$\beta^3_{42}(x_1) = \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_3=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 2,3, i_1\neq i_3\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4} \alpha^4_{i_13i_3i_4}(0,x_1,0,0),$$

$$\beta_{43}^{3}\left(x_1\right)=\sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_4=0\\ i_k\neq 2,3,i_1\neq i_2\neq i_4 \text{ при } i_k>0}}^{4}\alpha_{i_1 i_2 3 i_4}^{4}\left(0,0,x_1,0\right),$$

$$\beta_{44}^{3}\left(x_1\right)=\sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4}\sum_{\substack{i_3=0\\ i_k\neq 2,3,i_1\neq i_2\neq i_3 \text{ при } i_k>0}}^{4}\alpha_{i_1 i_2 i_3 3}^{4}\left(0,0,0,x_1\right).$$

Обозначим $B^1\left(x_1,x_2\right)$, $B^2\left(x_2,x_1\right)$ — матрицы размером 12×6. Их элементами являются $\left\|\gamma_{ij}^1\right\|$, $\left\|\gamma_{ij}^2\right\|$. Выпишем первые три строки матриц:

$$\gamma_{11}^1=\alpha_{1230}^1+\alpha_{1203}^1+\alpha_{1200}^1,\quad \gamma_{12}^1=\alpha_{1023}^1+\alpha_{1320}^1+\alpha_{1020}^1,$$
$$\gamma_{13}^1=\alpha_{1302}^1+\alpha_{1032}^1+\alpha_{1002}^1,\quad \gamma_{14}^1=\alpha_{3102}^1+\alpha_{0132}^1+\alpha_{0102}^1,$$
$$\gamma_{15}^1=\alpha_{0312}^1+\alpha_{3012}^1+\alpha_{0012}^1,\quad \gamma_{16}^1=\alpha_{3120}^1+\alpha_{0123}^1+\alpha_{0120}^1,$$
$$\gamma_{11}^2=\alpha_{2130}^1+\alpha_{2103}^1+\alpha_{2100}^1,\quad \gamma_{12}^2=\alpha_{2013}^1+\alpha_{2310}^1+\alpha_{2010}^1,$$
$$\gamma_{13}^2=\alpha_{2301}^1+\alpha_{2031}^1+\alpha_{2001}^1,\quad \gamma_{14}^2=\alpha_{3201}^1+\alpha_{0231}^1+\alpha_{0201}^1,$$
$$\gamma_{15}^2=\alpha_{0321}^1+\alpha_{3021}^1+\alpha_{0021}^1,\quad \gamma_{16}^1=\alpha_{3210}^1+\alpha_{0213}^1+\alpha_{0210}^1,$$
$$\gamma_{21}^1=\alpha_{1320}^1+\alpha_{1302}^1+\alpha_{1300}^1,\quad \gamma_{22}^1=\alpha_{1230}^1+\alpha_{1032}^1+\alpha_{1030}^1,$$
$$\gamma_{23}^1=\alpha_{1203}^1+\alpha_{1023}^1+\alpha_{1003}^1,\quad \gamma_{24}^1=\alpha_{2103}^1+\alpha_{0123}^1+\alpha_{0103}^1,$$
$$\gamma_{25}^1=\alpha_{2013}^1+\alpha_{0213}^1+\alpha_{0013}^1,\quad \gamma_{26}^1=\alpha_{2130}^1+\alpha_{0132}^1+\alpha_{0130}^1,$$
$$\gamma_{21}^2=\alpha_{3120}^1+\alpha_{3102}^1+\alpha_{3100}^1,\quad \gamma_{22}^2=\alpha_{3210}^1+\alpha_{3012}^1+\alpha_{3010}^1,$$
$$\gamma_{23}^2=\alpha_{3201}^1+\alpha_{3021}^1+\alpha_{3001}^1,\quad \gamma_{24}^2=\alpha_{2301}^1+\alpha_{0321}^1+\alpha_{0301}^1,$$
$$\gamma_{25}^2=\alpha_{2031}^1+\alpha_{0231}^1+\alpha_{0031}^1,\quad \gamma_{26}^2=\alpha_{2310}^1+\alpha_{0312}^1+\alpha_{0310}^1,$$
$$\gamma_{31}^1=\alpha_{2310}^1+\alpha_{2301}^1+\alpha_{2300}^1,\quad \gamma_{32}^1=\alpha_{2031}^1+\alpha_{2130}^1+\alpha_{2030}^1,$$
$$\gamma_{33}^1=\alpha_{2103}^1+\alpha_{2013}^1+\alpha_{2003}^1,\quad \gamma_{34}^1=\alpha_{1203}^1+\alpha_{0213}^1+\alpha_{0203}^1,$$
$$\gamma_{25}^1=\alpha_{1023}^1+\alpha_{1023}^1+\alpha_{0023}^1,\quad \gamma_{26}^1=\alpha_{1230}^1+\alpha_{0231}^1+\alpha_{0230}^1,$$
$$\gamma_{31}^2=\alpha_{3210}^1+\alpha_{3201}^1+\alpha_{3200}^1,\quad \gamma_{32}^2=\alpha_{3021}^1+\alpha_{3120}^1+\alpha_{3020}^1,$$
$$\gamma_{33}^2=\alpha_{3102}^1+\alpha_{3012}^1+\alpha_{3002}^1,\quad \gamma_{34}^2=\alpha_{1302}^1+\alpha_{0312}^1+\alpha_{0302}^1,$$
$$\gamma_{35}^2=\alpha_{1032}^1+\alpha_{1032}^1+\alpha_{0032}^1,\quad \gamma_{36}^1=\alpha_{1320}^1+\alpha_{0321}^1+\alpha_{0320}^1.$$

Следующие три строки матрицы получаются, если мы добавим уже записанные строки и в них произведем замену индексов: 1 на 2, 2 на 3, 3 на 4. Далее опять добавим те же строки и в них заменяем (опять же по отношению к первым) 3 на 4 (1 и 2 остаются). И, наконец, после добавления тех же строк, заменим 2 — на 3, 3 — на 4.

Введем

$$\phi\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left[\varphi_1\left(x_1,x_2,x_3\right),\,\varphi_2\left(x_1,x_2,x_3\right),\,\varphi_3\left(x_1,x_2,x_3\right),\,\varphi_4\left(x_1,x_2,x_3\right)\right],$$

а также построим состоящие из четырех элементов вектор-строки A_{ijk} путем добавления 0 при сохранении порядка индексов, например, $A_{123}\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left[\alpha_{0123},\alpha_{1023},\alpha_{1203},\alpha_{1230}\right]\left(x_1,x_2,x_3\right)$. Перепишем (2.22) в виде системы

$$\begin{gathered}
A^1_{123}\left(x_1,x_2,x_3\right)\phi\left(x_1,x_2,x_3\right)+A^1_{213}\left(x_2,x_1,x_3\right)\phi\left(x_2,x_1,x_3\right)+\\
+A^1_{231}\left(x_2,x_3,x_1\right)\phi\left(x_2,x_3,x_1\right)+A^1_{312}\left(x_3,x_1,x_2\right)\phi\left(x_3,x_1,x_2\right)+\\
+A^1_{321}\left(x_3,x_2,x_1\right)\phi\left(x_3,x_2,x_1\right)+\\
+A^1_{132}\left(x_1,x_3,x_2\right)\phi\left(x_1,x_3,x_2\right)=\psi^1_5\left(x_1,x_2,x_3\right),\\
A^2_{234}\left(x_1,x_2,x_3\right)\phi\left(x_1,x_2,x_3\right)+A^2_{324}\left(x_2,x_1,x_4\right)\phi\left(x_2,x_1,x_4\right)+\\
+A^2_{342}\left(x_2,x_3,x_1\right)\phi\left(x_2,x_3,x_1\right)+A^2_{423}\left(x_3,x_1,x_2\right)\phi\left(x_3,x_1,x_2\right)+\\
A^2_{432}\left(x_3,x_2,x_1\right)\phi\left(x_3,x_2,x_1\right)+\\
+A^2_{243}\left(x_1,x_3,x_2\right)\phi\left(x_1,x_3,x_2\right)=\psi^2_5\left(x_1,x_2,x_3\right),\\
A^3_{124}\left(x_1,x_2,x_3\right)\phi\left(x_1,x_2,x_3\right)+A^3_{214}\left(x_2,x_1,x_3\right)\phi\left(x_2,x_1,x_3\right)+\\
+A^3_{241}\left(x_2,x_3,x_1\right)\phi\left(x_2,x_3,x_1\right)+A^3_{412}\left(x_3,x_1,x_2\right)\phi\left(x_3,x_1,x_2\right)+\\
+A^3_{421}\left(x_3,x_2,x_1\right)\phi\left(x_3,x_2,x_1\right)+\\
+A^3_{142}\left(x_1,x_3,x_2\right)\phi\left(x_1,x_3,x_2\right)=\psi^3_5\left(x_1,x_2,x_3\right),\\
A^4_{134}\left(x_1,x_2,x_3\right)\phi\left(x_1,x_2,x_3\right)+A^4_{314}\left(x_2,x_1,x_3\right)\phi\left(x_2,x_1,x_3\right)+\\
+A^4_{341}\left(x_2,x_3,x_1\right)\phi\left(x_2,x_3,x_1\right)+A^4_{413}\left(x_3,x_1,x_2\right)\phi\left(x_3,x_1,x_2\right)+\\
+A^4_{431}\left(x_3,x_2,x_1\right)\phi\left(x_3,x_2,x_1\right)+\\
+A^4_{143}\left(x_1,x_3,x_2\right)\phi\left(x_1,x_3,x_2\right)=\psi^4_5\left(x_1,x_2,x_3\right),
\end{gathered}$$

к каждому уравнению которой добавляем еще пять уравнений (всего их 24 — по количеству неизвестных). Поясним, как появляются добавляемые уравнения на примере первого. Поменяем попарно ролями переменные x_1, x_2, x_3 (в силу их независимости операция возможна), затем добавим его в систему. Обозначим матрицу системы через $\|\delta_{ij}\|\ \left(i,j=\overline{1,24}\right)$.

Разрешимость этой задачи характеризует

Теорема 2.6. *Задача* 2.6 *при условиях*

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4,$$
$$\det\left(A^1(x_1)\right) \neq 0, \quad \det\left(A^2(x_1)\right) \neq 0, \quad \det\left(A^3(x_1)\right) \neq 0,$$
$$\left(A^1(x_1)\right)^{-1}\psi^1(x_1) = \left(A^2(x_1)\right)^{-1}\psi^2(x_1) = \left(A^3(x_1)\right)^{-1}\psi^3(x_1),$$
$$\det\left[B^1(x_1,x_2); B^2(x_2,x_1)\right] \neq 0, \quad \det\|\delta_{ij}\| \neq 0.$$

имеет единственное решение, записываемое через функцию Римана R уравнения (2.21) *в виде явной формулы.*

Теперь перейдем ко второй постановке задачи для уравнения (2.21). Ее исследование рассмотрим подробно.

Задача 2.7. *Найти функцию $u \in C^{1+1+1+1}(D) \cap C^{0+0+0+0}\left(\overline{D}\right)$, являющуюся в D решением уравнения* (2.21) *и удовлетворяющую условиям*

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4=0 \\ i\neq P(1,2,3,4),\, i\neq P(k,k,k,j) \\ i_1\neq i_2\neq i_3\neq i_4}}^{4} \alpha_i^k(x)u(x) = \psi_k(x_{1234}), \quad (k=\overline{1,4}) \tag{2.23}$$

$x_0 = 0$, $\alpha_i^k \in C$ *на соответствующих гранях* $X_k \quad \left(k=\overline{1,4}\right)$.

Из (2.23) нетрудно усмотреть, что в этих условиях содержатся как точки, расположенные на гранях куба, так и на его ребрах, а также точки с попарно совпадающими значениями аргументов — всего 613.

Наша цель состоит в отыскании условий, достаточных для однозначной разрешимости данной задачи. Здесь, как и ранее существенную роль играет частный случай этой задачи с граничными условиями (Гурса).

Известно [41], [50, с. 49], что единственное решение задачи для уравнения (2.21), с условиями

$$\begin{aligned} u|_{X_1} &= \varphi_1(x_2,x_3,x_4), \quad & u|_{X_2} &= \varphi_2(x_1,x_3,x_4), \\ u|_{X_3} &= \varphi_3(x_1,x_2,x_4), \quad & u|_{X_4} &= \varphi_4(x_1,x_2,x_3). \end{aligned} \tag{2.24}$$

записываемое через функцию Римана R уравнения (2.21), дается формулой

$$u(x_{1234}) = \sum_{i=\{V\{\overline{1,4},3\},0\}} (Ru)(x_i) - \sum_{i=\{V\{\overline{1,4},2\},0,0\}} (Ru)(x_i) +$$
$$+ \sum_{i=\{V\{\overline{1,4},1\},0,0,0\}} (Ru)(x_i) - (Ru)(0,0,0,0) -$$

$$-D_{x_4}^{-1}\Bigg[\sum_{i=\{V\{\overline{1,3},2\},0\}}(Au)(x_i,\xi_4)-$$

$$-\sum_{i=\{V\{\overline{1,3},1\},0,0\}}(Au)(x_i,\xi_4)+(Au)(0,0,0,\xi_4)\Bigg]d\xi_4-$$

$$-D_{x_3}^{-1}\Bigg[\sum_{i=\{V\{\{1,2,4\},2\},0\}}(Bu)(x_i,\xi_3)-$$

$$-\sum_{i=\{V\{\{1,2,4\},1\},0,0\}}(Bu)(x_i,\xi_3)+(Bu)(0,0,\xi_3,0)\Bigg]d\xi_3-$$

$$-D_{x_2}^{-1}\Bigg[\sum_{i=\{V\{\{1,3,4\},2\},0\}}(Cu)(x_i,\xi_2)-$$

$$-\sum_{i=\{V\{\{1,3,4\},1\},0,0\}}(Cu)(x_i,\xi_2)+(Cu)(0,\xi_2,0,0)\Bigg]d\xi_2-$$

$$-D_{x_1}^{-1}\Bigg[\sum_{i=\{V\{\overline{2,4},2\},0\}}(Du)(\xi_1,x_i)-$$

$$-\sum_{i=\{V\{\overline{2,4},1\},0,0\}}(Du)(\xi_1,x_i)+(Du)(\xi_1,0,0,0)\Bigg]d\xi_1+$$

$$+D_{x_3}^{-1}D_{x_4}^{-1}\left[\,(Eu)(x_{02},\xi_{34})+(Eu)(x_{10},\xi_{34})-(Eu)(0,0,\xi_{34})\,\right]d\xi_4 d\xi_3+$$

$$+D_{x_2}^{-1}D_{x_4}^{-1}\left[\,(Fu)(0,\xi_2,x_3,\xi_4)+(Fu)(x_1,\xi_2,0,\xi_4)-(Fu)(0,\xi_2,0,\xi_4)\,\right]d\xi_4 d\xi_2-$$

$$-D_{x_2}^{-1}D_{x_3}^{-1}[(Gu)(0,\xi_{23},x_4)+(Gu)(x_1,\xi_{23},0)-(Gu)(0,\xi_{23},0)]d\xi_3 d\xi_2+$$

$$+D_{x_1}^{-1}D_{x_4}^{-1}\left[\,(Hu)(\xi_1,x_{03},\xi_4)+(Hu)(\xi_1,x_{20},\xi_4)-(Hu)(\xi_1,0,0,\xi_4)\,\right]d\xi_4 d\xi_1+$$

$$+D_{x_1}^{-1}D_{x_3}^{-1}\left[\,(Ku)(\xi_1,0,\xi_3,x_4)+(Ku)(\xi_1,x_2,\xi_3,0)-(Ku)(\xi_1,0,\xi_3,0)\,\right]d\xi_3 d\xi_1+$$

$$+D_{x_1}^{-1}D_{x_2}^{-1}\left[\,(Su)(\xi_{12},0,x_4)+(Su)(\xi_{12},x_{30})-(Su)(\xi_{12},0,0)\,\right]d\xi_2 d\xi_1-$$

$$-D_{x_2}^{-1}D_{x_3}^{-1}D_{x_4}^{-1}(Mu)(0,\xi_{234})\,d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2-$$

$$-D_{x_1}^{-1}D_{x_2}^{-1}D_{x_4}^{-1}(Nu)(\xi_1,0,\xi_{34})\,d\xi_4 d\xi_3 d\xi_1-$$

$$-D_{x_1}^{-1}D_{x_2}^{-1}D_{x_4}^{-1}(Pu)(\xi_{12},0,\xi_4)\,d\xi_4 d\xi_2 d\xi_1-$$

$$-D_{x_1}^{-1}D_{x_2}^{-1}D_{x_3}^{-1}(Qu)(\xi_{123},0)\,d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1. \tag{2.25}$$

Здесь $V\{\overline{1,4},3\}$ — выборка по возрастанию чисел из $\overline{1,4}$ по три, необходимые нули добавляются на место отсутствующего индекса. Так, множество $\{V\{\overline{1,3},1\},0,0\}$состоит из наборов {1,0,0}, {0,2,0}, {0,0,3}. Аналогично, в случае присутствия переменной ξ, она помещается на место, соответствующее индексу, например в (x_{10}, ξ_3, x_4) — на третьем месте. При этом $A, \ldots, Q$ зависят от коэффициентов уравнения (2.21), от функции Римана и ее производных. У R, и $A, \ldots, Q$ выписана только первая четверка аргументов, вторая есть всегда (x_{1234}). Воспользуемся (2.25) в качестве общего представления решений уравнения (2.21).

Подставляя в (2.25) аргументы точек (x_i) $(i_k \neq 0)$ и вписывая получаемые значения в (2.23), приходим к системе нагруженных интегральных уравнений, в которую будут входить функции φ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$, зависящие не только от аргументов (x_{123}), (x_{134}), (x_{234}), (x_{124}) но и от совпадающих аргументов, а также и при нулевых значениях одного, двух или трех аргументов. От указанной нагруженности при некоторых дополнительных условиях можно освободиться. Для этого введем векторы $\varphi(x_{123}) =: [\,\varphi_1(x_{123}), \varphi_2(x_{123}), \varphi_3(x_{123}), \varphi_4(x_{123})\,]$, $\psi(x_{1234}) =: [\,\psi_1(x_{1234}), \psi_2(x_{1234}), \psi_3(x_{1234}), \psi_4(x_{1234})\,]$ и будем использовать (2.23). Потребуем выполнения

$$\operatorname{rank}\left[A_1(x_1, 0) \;\; B_1(x_1, x_1)\right] = 10, \tag{2.26}$$

где $A_1 = \left\|\beta^1_{ij}\right\|$, $B_1 = \left\|\delta^1_{ij}\right\|$,

$$\beta^1_{s+4(k-1),1}(x_1, 0) = \sum_{\substack{i_{234}=\{0,1,2,3,4\}\setminus s \\ (s,i_{234})\neq P(1234)}} \alpha^k_{si_{234}}(x_{1000}),$$

$$\beta^1_{s+4(k-1),2}(0, x_1, 0, 0) = \sum_{\substack{i_{134}=\{0,1,2,3,4\}\setminus s \\ (s,i_{134})\neq P(1234)}} \alpha^k_{i_1 s i_3 i_4}(x_{0100}),$$

$$\beta^1_{s+4(k-1),3}(x_1, 0) = \sum_{\substack{i_{124}=\{0,1,2,3,4\}\setminus s \\ (s,i_{124})\neq P(1234)}} \alpha^k_{i_1 i_2 s i_4}(x_{0010}),$$

$$\beta^1_{s+4(k-1),4}(x_1, 0) == \sum_{\substack{i_{123}=\{0,1,2,3,4\}\setminus s \\ (s,i_{123})\neq P(1234)}} \alpha^k_{i_1 i_2 i_3 s}(x_{0001}),$$

$$\delta^1_{s+4(k-1),1}(x_1, x_1) = \sum_{i_{34}=\{0,1,2,3,4\}\setminus s} \alpha^k_{ssi_{34}}(x_{1100}),$$

$$\delta^1_{s+4(k-1),2}\,(x_1,x_1)=\sum_{i_{24}=\{0,1,2,3,4\}\setminus s}\alpha^k_{si_2si_4}\,(x_{1010}),$$

$$\delta^1_{s+4(k-1),3}\,(x_1,x_1)=\sum_{i_{23}=\{0,1,2,3,4\}\setminus s}\alpha^k_{si_{23}s}\,(x_{1001}),$$

$$\delta^1_{s+4(k-1),4}\,(x_1,x_1)=\sum_{i_{14}=\{0,1,2,3,4\}\setminus s}\alpha^k_{i_1ssi_4}\,(x_{0110}),$$

$$\delta^1_{s+4(k-1),5}\,(x_1,x_1)=\sum_{i_{13}=\{0,1,2,3,4\}\setminus s}\alpha^k_{i_1si_3s}\,(x_{0101}),$$

$$\delta^1_{s+4(k-1),6}\,(x_1,x_1)=\sum_{i_{12}=\{0,1,2,3,4\}\setminus s}\alpha^k_{i_{12}ss}\,(x_{0011})\ (k,s=\overline{1,4}).$$

Запись $(0,1,2,3,4)\setminus s$ означает множество $\{0,1,2,3,4\}$ за вычетом s. Тогда $\varphi\,(x_1,0)$, $\varphi\,(x_1,x_1)$ определяются по формулам Крамера из системы уравнений

$$A_1\varphi\,(x_1,0)+B_1\varphi\,(x_1,x_1)=\psi\,(x_1,0)\,.$$

Формула (2.26) есть первое из указанных выше условий. При этом $\varphi_k\,(x_{100})$, $\varphi_k\,(x_{110})$ определяются однозначно.

Введем векторы $r_1\,(x_{12})=\{\,u\,(x_{1200})\,,u\,(x_{1020})\,u\,(x_{1002})\,,u\,(x_{0102}),\ u\,(x_{0012})\,,u\,(x_{0120})\,\}$, $r_2\,(x_{112})=\{\,u\,(x_{1120}),\ u\,(x_{1102}),\ u\,(x_{1012}),\ u\,(x_{0112}),\ u\,(x_{1210}),\ u\,(x_{1201}),\ u\,(x_{1021}),\ u\,(x_{0121}),\ u\,(x_{2110}),\ u\,(x_{2101}),\ u\,(x_{2011}),\ u\,(x_{0211})\,\}$, $r_3\,(x_{12})=\{u\,(x_{1122}),\ u\,(x_{1212}),\ u\,(x_{1221})\,\}$. Опять воспользуемся (2.23) . Если

$$\operatorname{rank}\left[\ A_2\,(x_{12})\ \ A_3\,(x_{112})\ \ A_4\,(x_{12})\ \ A_2\,(x_{21})\ \ A_3\,(x_{221})\ \ A_4\,(x_{21})\ \right]=42 \quad (2.27)$$

$$A_t=\left\|\beta^t_{ij}\right\|,\ (t=\overline{2,4}),$$

$$\beta^2_{1+4(k-1),1}\,(x_{12})=\sum_{i_{34}=0,3,4}\alpha^k_{12i_{34}}\,(x_{1200})\,,$$

$$\beta^2_{1+4(k-1),2}\,(x_{12})=\sum_{i_{24}=0,3,4}\alpha^k_{1i_22i_4}\,(x_{1020})\,,$$

$$\beta^2_{1+4(k-1),3}\,(x_{12})=\sum_{i_{23}=0,3,4}\alpha^k_{1i_{23}2}\,(x_{1002})\,,$$

$$\beta^2_{1+4(k-1),4}\,(x_{12})=\sum_{i_{13}=0,3,4}\alpha^k_{i_11i_32}\,(x_{0102})\,,$$

$$\beta^2_{1+4(k-1),5}\,(x_{12})=\sum_{i_{12}=0,3,4}\alpha^k_{i_{12}12}\,(x_{0012})\,,$$

$$\beta^2_{1+4(k-1),6}\left(x_{12}\right) = \sum_{i_{14}=0,3,4} \alpha^k_{i_1 12 i_4}\left(x_{0120}\right).$$

Остальные элементы матрицы A_2 получаются аналогично, только если первый индекс s у $\beta^2_{s+4(k-1),j}$ равен 2, берем в наборе суммирования вместо $\{0{,}3{,}4\}$ — $\{0{,}1{,}2\}$, а фиксированные индексы у α соответственно $\{3{,}4\}$, если 3, берем в наборе суммирования вместо $\{0{,}3{,}4\}$ — $\{0{,}1{,}3\}$, у α соответственно $\{2{,}4\}$, если 4 — $\{0{,}1{,}4\}$, у α соответственно $\{2{,}3\}$, если 5 — $\{0{,}2{,}3\}$, у α — $\{1{,}4\}$, если 6 — $\{0{,}2{,}4\}$, у α — $\{1{,}3\}$. Здесь

$$\beta^3_{1+4(k-1),1}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_4=0,3,4} \alpha^k_{112 i_4}\left(x_{1120}\right),$$

$$\beta^3_{1+4(k-1),2}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_3=0,3,4} \alpha^k_{11 i_3 2}\left(x_{1102}\right),$$

$$\beta^3_{1+4(k-1),3}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_2=0,3,4} \alpha^k_{1 i_2 12}\left(x_{1012}\right),$$

$$\beta^3_{1+4(k-1),4}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_1=0,3,4} \alpha^k_{i_1 112}\left(x_{0112}\right),$$

$$\beta^3_{1+4(k-1),5}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_4=0,3,4} \alpha^k_{121 i_4}\left(x_{1210}\right),$$

$$\beta^3_{1+4(k-1),6}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_3=0,3,4} \alpha^k_{12 i_3 1}\left(x_{1201}\right),$$

$$\beta^3_{1+4(k-1),7}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_2=0,3,4} \alpha^k_{1 i_2 21}\left(x_{1021}\right),$$

$$\beta^3_{1+4(k-1),8}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_1=0,3,4} \alpha^k_{i_1 121}\left(x_{0121}\right),$$

$$\beta^3_{1+4(k-1),9}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_4=0,3,4} \alpha^k_{211 i_4}\left(x_{2110}\right),$$

$$\beta^3_{1+4(k-1),10}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_3=0,3,4} \alpha^k_{21 i_3 1}\left(x_{2101}\right),$$

$$\beta^3_{1+4(k-1),11}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_2=0,3,4} \alpha^k_{2 i_2 11}\left(x_{2011}\right),$$

$$\beta^3_{1+4(k-1),12}\left(x_{112}\right) = \sum_{i_1=0,3,4} \alpha^k_{i_1 211}\left(x_{0211}\right).$$

Прочие элементы заполняются аналогично:

$$\beta^4_{1+4(k-1),1}\left(x_{1122}\right)=\alpha^k_{1122}\left(x_{1122}\right), \quad \beta^4_{1+4(k-1),2}\left(x_{1122}\right)=\alpha^k_{1212}\left(x_{1212}\right),$$

$$\beta^4_{1+4(k-1),3}\left(x_{1122}\right)=\alpha^k_{1221}\left(x_{1221}\right).$$

Остальные элементы заполняются в соответствии с замечанием к предыдущей таблице, касающимися α. То есть, вместо 1 берем соответственно 3, а вместо 2 — 4 и так далее. Тогда $r_1\left(x_{12}\right)$, $r_2\left(x_{112}\right)$, $r_3\left(x_{12}\right)$ определяются по формулам Крамера из системы уравнений

$$A_2 r_1\left(x_{12}\right)+A_3 r_2\left(x_{112}\right)+A_4 r_3\left(x_{12}\right)+A_2 r_1\left(x_{21}\right)+$$

$$+A_3 r_2\left(x_{221}\right)+A_4 r_3\left(x_{21}\right)=\psi^0\left(x_{12}\right),$$

где правая часть полностью известна.

В силу $u\in C\left(\overline{D}\right)$ должны выполняться еще условия согласования на гранях D, которые для компонент φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 вектора φ имеют вид

$$\varphi_1\left(x_{034}\right)=\varphi_2\left(x_{034}\right),\ \varphi_1\left(x_{204}\right)=\varphi_3\left(x_{024}\right),\ \varphi_1\left(x_{230}\right)=\varphi_4\left(x_{023}\right),$$

$$\varphi_2\left(x_{104}\right)=\varphi_3\left(x_{104}\right),\ \varphi_2\left(x_{130}\right)=\varphi_4\left(x_{103}\right),\ \varphi_3\left(x_{120}\right)=\varphi_4\left(x_{120}\right).$$

Таким образом, для определения $u\left(x_{1230}\right)$ получается система уравнений

$$\sum_{I_0=P\{V\{\overline{1,4},3\},0\}}\alpha^k_{I_0}\left(x_{I_0}\right)u\left(x_{I_0}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\sum_{\substack{I=P\{V\{\overline{1,4},3\},j\}\\ I\neq P\{1234\}}}\alpha^k_{I_0}(x_I)u(x_I)=\psi^1_k(x_{1234}), \quad (2.28)$$

где $V\{\overline{1,4},3\}$ — выборка по возрастанию чисел из $\overline{1,4}$ по три, а $\psi^1_k\left(x_{1234}\right)$ зависит только от известных функций. Подставим вместо $u\left(x_I\right)$ их значения, определяемые через $u\left(x_{I_0}\right)$ из (2.28), при этом используем только те, у которых только один нуль в аргументах, поскольку остальные известны.

Перепишем (2.28) несколько в другом (операторном) виде и выделим слагаемые, зависящие от (x_{123}):

$$C^1_{123}\left(x_{123}\right)\varphi\left(x_{123}\right)+\sum_{I=P\{V\{\overline{1,4}\},3\}\setminus\{123\}}C^1_I\left(x_I\right)\varphi\left(x_I\right)+$$

$$+\sum_{I=P\{V\{\overline{1,4}\},3\}}\left(T_I\varphi\right)\left(x_I\right)=\psi^1\left(x_{1234}\right). \quad (2.29)$$

Здесь T получен из (2.25) отбрасыванием известных слагаемых (зависящих от аргументов с двумя и более нулями) и не содержащих знака интегрирования.

Выпишем только

$$C_{123}^1 = \left\| c_{ij}^1 \right\|_{123} \left(k = 1, \quad ij = \overline{1,4} \right),$$

$$c_{j1}^1 = \sum_{i=0}^{3} \alpha_{i123}^j \left(x_{i123} \right) R^{\eta(i)} \left(x_{0123} \right), \quad c_{j2}^1 = \sum_{i=0}^{3} \alpha_{1i23}^j \left(x_{1i23} \right) R^{\eta(i)} \left(x_{1023} \right),$$

$$c_{j3}^1 = \sum_{i=0}^{3} \alpha_{12i3}^j \left(x_{12i3} \right) R^{\eta(i)} \left(x_{120} \right), \quad c_{j4}^1 = \sum_{i=0}^{3} \alpha_{123i}^j \left(x_{123i} \right) R^{\eta(i)} \left(x_{1230} \right),$$

$\eta(i)$ — функция Хевисайда. Остальные $C_I^1(x_I)$ получаются аналогичным образом заменой соответствующих индексов.

Система (2.29) содержит не только искомый вектор $\varphi(x_{123})$, но и с переставленными коэффициентами, а также кратные интегралы с совпадающими верхними пределами. Насколько нам известно, подобные системы уравнений до сих пор никем не рассматривались. Интегральные уравнения обычно изучаются в виде, разрешенном относительно искомой функции. Для этого будем требовать, чтобы

$$\det C_{123}^1 \left(x_{123} \right) \neq 0. \tag{2.30}$$

То есть, речь идет о разрешимости системы

$$\varphi(x_{123}) + \sum_{i=P\{V\{\overline{1,4}\},3\} \backslash \{123\}} \left(C_{123}^1 \right)^{-1} (x_{123})\, C_i^1(x_i)\, \varphi(x_i) +$$

$$+ \sum_{i=P\{V\{\overline{1,4}\},3\}} \left(C_{123}^1 \right)^{-1} \left(T_{i,\overline{1,28}} \varphi \right)(x_i) = \left(C_{123}^1 \right)^{-1} \psi^1 (x_{1234}),$$

или, в операторном виде (введя понятное обозначение K),

$$\varphi - K\varphi = \left(C_{123}^1 \right)^{-1} \psi^1. \tag{2.31}$$

В записи $T_{I,\overline{1,28}}$, $\overline{1,28}$ означает количество указанных матриц. Воспользуемся нормой для матриц [20, с. 410]

$$\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Пусть выполняется оценка $\left\| \left(C_{123}^1 \right)^{-1} T_{i,\overline{1,28}} \right\| < M$, где $M > 0$ — некоторая постоянная. Покажем, что некоторая степень оператора K является сжимающим отображением. Проверим сначала, что оператор K непрерывен на множестве заданных на G непрерывных вектор-функций. Пусть θ_1, θ_2 — непрерывные вектор-функции. Тогда

$$\|K\theta_1 - K\theta_2\| < 4M\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right) \cdot 28 \left\|\theta_1 - \theta_2\right\| <$$

$$< 448M \left\|\theta_1 - \theta_2\right\|.$$

Очевидно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \varepsilon / \left(448M\right)$ такое, что из условия $\|\omega_1 - \omega_2\| < \delta$ следует $\|K\omega_1 - K\omega_2\| < \varepsilon$. Непрерывность оператора K доказана.

Покажем, что некоторая степень K является сжимающим отображением. Действительно,

$$\left\|K^2\theta_1 - K^2\theta_2\right\| < \left(112M\right)^2 \frac{4^2}{2!} \left\|\theta_1 - \theta_2\right\|, \ldots$$

$$\left\|K^n\theta_1 - K^n\theta_2\right\| < \left(112M\right)^n \frac{4^n}{n!} \left\|\theta_1 - \theta_2\right\|.$$

При некотором n

$$\frac{\left(1124M\right)^n}{n!} < 1,$$

следовательно, K^n является сжимающим. Известно [99, с. 82], если K — непрерывное отображение полного метрического пространства в себя, такое что некоторая степень является сжатием, то уравнение

$$\omega - K\omega = 0$$

имеет единственное решение (здесь — нулевое). Но тогда (2.31) имеет единственное решение в классе непрерывных векторных функций.

Таким образом, мы доказали существование однозначной редукции рассматриваемой задачи к задаче Гурса (2.21), (2.23), являющейся, в свою очередь, однозначно разрешимой. Поэтому справедлива

Теорема 2.7. *Рассматриваемая задача при условиях* (2.26), (2.27), (2.30) *имеет единственное решение.*

Смещения в уравнении. Имеется обширная литература по исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых аргумент искомой функции претерпевает определенное смещение. Подобные уравнения принято называть функционально-дифференциальными или уравнениями с отклоняющимся аргументом (см. библиографию в [131], [132], [1], [208], [130]).

Для уравнений с частными производными развитой теории не существует. Укажем лишь на некоторые результаты: см., например, [77], [2], [3].

Здесь предлагается вариант распространения указанной идеи смещения на случай уравнения с частными производными.

В области $D = \{0 < x, y < 1\}$ определим операторы

$$L_s\theta \equiv \alpha_s\theta_{xy} + \beta_s\theta_x + \gamma_s\theta_y + \delta_s\theta, \quad (s = 1, 2)$$

с непрерывными в $\overline{D}$ функциями δ_s, $\frac{\partial\beta_s}{\partial x}$, $\frac{\partial\gamma_s}{\partial y}$, $\frac{\partial^2\alpha_s}{\partial x\partial y}$.

Задача 2.8 (задача Г). Найти в D регулярное решение уравнения

$$L_1u + L_2v = f, \quad f \in C\left(\overline{D}\right), \tag{2.32}$$

непрерывно продолжимое на ∂D при $x \to 0$, $y \to 0$ и удовлетворяющее условиям

$$u\,(0, y) = \varphi\,(y)\,, \quad u\,(x, 0) = \psi\,(x)\,, \quad \varphi\,(0) = \psi\,(0)\,, \quad \varphi, \psi \in C\,[0, 1]\,. \tag{2.33}$$

При этом $v\,(x, y)$ определяется по $u\,(x, y)$ по формуле

$$v\,(x, y) \equiv u\,[\lambda\,(y)\,, \mu\,(x)]\,, \tag{2.34}$$

где каждая из функций $\lambda, \mu \in C^1\,[0, 1]$ отображает отрезок $[0, 1]$ на себя с сохранением направления движения, то есть, в частности,

$$\lambda\,(0) = \mu\,(0) = 0, \quad \lambda\,(1) = \mu\,(1) = 1, \tag{2.35}$$

а повторное применение преобразования (λ, μ) возвращает координаты (x, y) в исходное положение:

$$v\,[\lambda\,(y)\,, \mu\,(x)] \equiv u\,\{\lambda\,[\mu\,(x)]\,, \mu\,[\lambda\,(y)]\} \equiv u\,(x, y)\,. \tag{2.36}$$

Указанными свойствами обладают, например, пары $\lambda = y$, $\mu = x$ и $\lambda = (e^y - 1)\,/\,(e - 1)$, $\mu = \ln\,[1 + (e - 1)\,x]$, где e — основание натурального логарифма.

Понятно, что данная постановка включает в себя задачу Гурса для уравнения $L_1u = f$.

Положим в (2.32) $x = t$, $y = \tau$ и проинтегрируем рассматриваемое уравнение по t от 0 до x, а по τ от 0 до y. Учитывая при этом условия (2.33) и вытекающие из (2.34)–(2.35) соотношения

$$v\,(x, 0) = \varphi\,[\mu\,(x)]\,, \quad v\,(0, y) = \psi\,[\lambda\,(y)]\,,$$

получаем

$$\alpha_1\,(x, y)\,u\,(x, y) + \alpha_2\,(x, y)\,u\,[\lambda\,(y)\,, \mu\,(x)] =$$

$$= \int\limits_0^x \left\{ h_1 (t, y) \, u (t, y) + h_2 (t, y) \, u \left[\lambda (y) \, , \mu (t) \right] \right\} dt +$$

$$+ \int\limits_0^y \left\{ k_1 (x, \tau) \, u (x, \tau) + k_2 (x, \tau) \, u \left[\lambda (\tau) \, , \mu (x) \right] \right\} d\tau -$$

$$- \int\limits_0^x \int\limits_0^y \left\{ H_1 (t, \tau) \, u (t, \tau) + H_2 (t, \tau) \, u \left[\lambda (\tau) \, , \mu (t) \right] \right\} d\tau dt + \varpi (x, y) \, , \qquad (2.37)$$

где

$$h_s (t, y) = \frac{\partial \alpha_s (t, y)}{\partial t} - \gamma_s (t, y) \, , \quad k_s (x, t) = \frac{\partial \alpha_s (x, \tau)}{\partial \tau} - \beta_s (x, \tau) \, ,$$

$$H_s (t, \tau) = \frac{\partial^2 \alpha_s (t, \tau)}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial \beta_s (t, \tau)}{dt} - \frac{\partial \gamma_s (t, \tau)}{d\tau} + \delta_s (t, \tau) \, ,$$

$$\varpi (x, y) = \alpha_1 (x, 0) \, \psi (x) + \alpha_2 (x, 0) \, \varphi \left[\mu (x) \right] +$$

$$+ \alpha_1 (0, y) \, \varphi (y) + \alpha_2 (0, y) \, \psi \left[\lambda (y) \right] -$$

$$- \int\limits_0^x \left\{ h_{1t} (t, 0) \, \psi (t) + h_{2t} (t, 0) \, \varphi \left[\mu (t) \right] \right\} dt -$$

$$- \int\limits_0^y \left\{ k_1 (0, \tau) \, \varphi (\tau) + k_2 (0, \tau) \, \psi \left[\lambda (\tau) \right] \right\} d\tau -$$

$$- \left[\alpha_1 (0, 0) + \alpha_2 (0, 0) \right] \varphi (0) + f (x, y) \, .$$

Сформулированные перед постановкой задачи Г условия гладкости коэффициентов уравнения (2.32) обеспечивают законность проведенных при выводе (2.37) действий и непрерывность в $\overline{D}$ функций h_s, k_s, H_s $(s = 1, 2)$, $\varpi (x, y)$.

Обозначим всю правую часть (2.37) через $g (x, y)$, вследствие чего это соотношение принимает с учетом (2.34) вид

$$\alpha_1 (x, y) \, u (x, y) + \alpha_2 (x, y) \, v (x, y) = g (x, y) \, . \qquad (2.38)$$

Положив в (2.38) $x = \lambda (y)$, $y = \mu (x)$ и принимая во внимание свойство (2.36), имеем

$$\alpha_1 \left[\lambda (y) \, , \mu (x) \right] v (x, y) + \alpha_2 \left[\lambda (y) \, , \mu (x) \right] u (x, y) = g \left[\lambda (y) \, , \mu (x) \right] . \qquad (2.39)$$

Соотношения (2.38)–(2.39) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений для u, v, определитель которой равен

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} \alpha_1(x,y) & \alpha_2(x,y) \\ \alpha_2[\lambda(y),\mu(x)] & \alpha_1[\lambda(y),\mu(x)] \end{vmatrix}. \tag{2.40}$$

Если $\Delta(x,y) \neq 0$, то по формуле Крамера получаем

$$\Delta(x,y)\,u(x,y) = \alpha_1[\lambda(y),\mu(x)]\,g(x,y) - \alpha_2(x,y)\,g[\lambda(y),\mu(x)], \tag{2.41}$$

$$\Delta(x,y)\,v(x,y) = \alpha_1(x,y)\,g[\lambda(y),\mu(x)] - \alpha_2[\lambda(y),\mu(x)]\,g(x,y). \tag{2.42}$$

Из (2.40) на основании свойства (2.36) следует, что $\Delta(x,y) = \Delta[\lambda(y),\mu(x)]$. Поэтому, если в (2.42) положить $y = \mu(x)$, $x = \lambda(y)$, а также учесть то же самое свойство (2.36) и правило (2.34), то получится (2.41). Таким образом, обе формулы (2.41)–(2.42) дают одно и то же решение. Следовательно, уравнение (2.38) оказалось однозначно разрешимым в явном виде (2.41). Подставляя теперь в (2.41) значение $g(x,y)$, то есть правую часть (2.37), имеем

$$\begin{gathered} \Delta(x,y)\,u(x,y) = \\ = \alpha_1[\lambda(y),\mu(x)] \left(\int\limits_0^x \{h_1(t,y)\,u(t,y) + h_2(t,y)\,u[\lambda(y),\mu(x)]\}\,dt + \right. \\ + \int\limits_0^y \{k_1(x,\tau)\,u(x,\tau) + k_2(x,\tau)\,u[\lambda(\tau),\mu(x)]\}\,d\tau - \\ \left. - \int\limits_0^x \int\limits_0^y \{H_1(t,\tau)u(t,\tau) + H_2(t,\tau)u[\lambda(\tau),\mu(t)]\}\,d\tau dt \right) - \\ -\alpha_2(x,y) \left(\int\limits_0^{\lambda(y)} \{h_1[t,\mu(x)]\,u[t,\mu(x)] + h_2[t,\mu(x)]\,u[x,\mu(t)]\}\,dt + \right. \\ + \int\limits_0^{\mu(x)} \{k_1[\lambda(y),\tau]\,u[\lambda(y),\tau] + k_2[\lambda(y),\tau]\,u[\lambda(\tau),y]\}\,d\tau - \\ \left. - \int\limits_0^{\lambda(y)} \int\limits_0^{\mu(x)} \{H_1(t,\tau)\,u(t,\tau) + H_2(t,\tau)\,u[\lambda(\tau),\mu(t)]\}\,d\tau dt \right) + F(x,y), \end{gathered} \tag{2.43}$$

$$F(x,y) = \alpha_1 [\lambda(y), \mu(x)] \varpi(x,y) - \alpha_2(x,y) \varpi[\lambda(y), \mu(x)].$$

Поделив (2.43) на $\Delta(x,y)$, запишем это уравнение в операторной форме

$$u = Au + \Delta^{-1}(x,y) F(x,y). \tag{2.44}$$

При этом оператор

$$Au(x,y) = \frac{\alpha_1 [\lambda(y), \mu(x)]}{\Delta(x,y)} (Ku(x,y) + K_1 \Lambda u(x,y)) -$$

$$-\frac{\alpha_2 [x,y]}{\Delta(x,y)} (\Lambda K u(x,y) + \Lambda K_1 \Lambda u(x,y)),$$

где

$$Ku(x,y) = \int\limits_0^x (h_1 u)(t,y)\, dt + \int\limits_0^y (k_1 u)(x,\tau)\, d\tau - \int\limits_0^x \int\limits_0^y (H_1 u)(t,\tau)\, d\tau dt,$$

$$K_1 u(x,y) = \int\limits_0^x (h_2 u)(t,y)\, dt + \int\limits_0^y (k_2 u)(x,\tau)\, d\tau - \int\limits_0^x \int\limits_0^y (H_2 u)(t,\tau)\, d\tau dt,$$

$\Lambda u(x,y) = u(\lambda(y), \mu(x))$. Операторы K и K_1 — вольтерровы, а оператор Λ таков, что $\|\Lambda\| = 1$ и $\Lambda^2 = E$ — единичный.

Пусть $|\Delta(x,y)| \geqslant m > 0$, а модули $|\alpha_i h_j|$, $|\alpha_i k_j|$, $|\alpha_i H_j|$ ограничены при $i, j = 1, 2$ числом M. В силу непрерывности указанных модулей такое число существует и можно считать эти модули строго меньшими M. Предположим, что $u_1, u_2 \in C\left(\overline{D}\right)$.

Значения $\lambda(y), \mu(x) \in [0,1]$. Из (2.43)) можно получить оценку по норме пространства $C\left(\overline{D}\right)$:

$$|Au_1 - Au_2| < \frac{2M}{m} [x + y + xy + \lambda(y) + \mu(x) + \lambda(y) \mu(x)]. \tag{2.45}$$

Так как на $\overline{D}$ $\sigma(x,y) = x + y + xy \leqslant 3$ и $\sigma(\lambda(y), \mu(x)) = \lambda(y) + \mu(x) + \lambda(y) \mu(x) \leqslant 3$, то оператор A непрерывен. Непосредственной проверкой можно убедиться, что некоторая степень операторов $K_1 \Lambda$, ΛK и $\Lambda K_1 \Lambda$ является сжимающей. Затем — что сжимающей является некоторая степень операторов $K + K_1 \Lambda$ и $\Lambda K + \Lambda K_1 \Lambda$. После этого — что сжимающей является некоторая степень оператора A. Поэтому из [99, с. 82], следует, что уравнение (2.44) имеет одно и только одно решение.

Подстановка этого решения в (2.43) превращает его в тождество, влекущее за собой в силу способа своего получения обращение в тождество соотношения (2.45), полученного путем непосредственного интегрирования уравнения (2.32) с учетом условий (2.33). Поэтому оправдано применение к (2.45) обратной операции $\partial^2/\partial x \partial y$, которое приводит к тождественному выполнению (2.32). Таким образом, имеет место

Теорема 2.8. *Если определяемая с помощью* (2.32) *функция* $\Delta(x, y)$ *не обращается при* $\Delta(x, y) \in \overline{D}$ *в нуль, то решение задачи* Γ *существует и является единственным.*

2.2. Задачи с нормальными производными в граничных условиях. В данном разделе речь идет о задачах, которые играют в смысле их постановок ту же роль по отношению к задаче Гурса, что и задача Неймана в теории эллиптических уравнений по отношению к задаче Дирихле. А именно в п. 2.2.1 рассматриваются характеристические задачи для уравнения (1.1) (при $n = 3$ и общий случай), в которых хотя бы одно из условий Гурса заменяется значением нормальной производной более высокого порядка. При этом хотя бы на одной характеристике, на которой задаются граничные условия, наивысший порядок нормальной производной увеличивается на единицу. Поэтому задачи подобного типа мы обозначили Γ_1. Аналогичные Γ_1 задачи изучались ранее для уравнения

$$u_{xy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = 0$$

и его многомерных аналогов. Вероятно, впервые граничное условие такого рода встречается в работе Л. М. Невоструева [140], где речь идет о задаче для уравнения смешанного типа, а ситуация с обсуждаемым условием играет вспомогательную роль для основной задачи. В работах С. С. Харибегашвили [206], [207] изучены в характеристических и нехарактеристических областях для указанного уравнения задачи с граничными условиями вида

$$\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = f.$$

Очевидно, на характеристических участках при $\gamma = 0$ и либо $\alpha = 0$, $\beta = 1$, либо $\alpha = 1$, $\beta = 0$ полученные условия совпадают с условиями задач Γ_1. Но в общности данного условия как бы теряются некоторые специфические условия задач типа Γ_1. С. С. Харибегашвили применял, в основном, метод неподвижной точки. Он направлен, главным образом, на доказательство теорем существования и единственности. Следовательно, теряются задачи, в которых в решении получается неоднозначность. Другим путем при исследовании

Γ_1 для объявленного уравнения шел В. И. Жегалов [245]. Им были сформулированы условия на коэффициенты a, b, c, обеспечивающие определенный уровень их содержательности, поскольку, например, при $a \equiv b \equiv c \equiv 0$ нормальные условия на характеристиках могут принимать лишь постоянные значения, а это — тривиальная задача. Применявшийся при этом метод редукции задач типа Γ_1 к задаче Гурса позволил не только доказать существование решения, но и записать его либо в терминах резольвент интегральных уравнений (в общем случае), либо в явном виде (в частных случаях). В виде результатов сформулированы условия однозначной разрешимости, а также разрешимости с точностью до определенного количества произвольных констант или произвольных функций.

В п. 2.2.1 данного параграфа мы развиваем методику работы [245] для решения задачи Γ_1.

Во п. 2.2.2 с помощью указанного подхода рассматриваются задачи, в которых порядок нормальной производной увеличен до произвольного натурального N. Считаем порядок производной N выше наивысшего порядка граничного условия из задачи Гурса на данной характеристике больше чем на единицу. Такие задачи мы обозначили как Γ_N.

В формулировках предлагаемых ниже задач будем указывать только класс отыскиваемой функции u, подразумевая при этом, что из этого класса выбираются также коэффициенты уравнений.

2.2.1. Задача с повышением порядка нормальных производных на единицу (Γ_1).

Изучение случая, связанного с одной характеристикой. В этом пункте рассматриваются задачи для трехмерного случая, в которых порядок только одного граничного условия повышается на одну единицу и лишь на одной характеристике. А именно, подробно изучим случай $x_1 = x_{10}$. На этой характеристике заданы m_1 условий, поэтому, если последовательно заменять каждое из них, у нас получится m_1 задач. Естественно, все их выписывать нецелесообразно. Поэтому первоначально изучается случай, когда заменяется граничное условие при $i_1 = 0$, затем — при $i_1 = 1$, и, наконец, самый общий случай — произвольного $i_1 = j$ ($j \leqslant m_1 - 1$). Получающиеся задачи являются однозначно разрешимыми. Результаты этого пункта используются в следующих параграфах.

Приведем сначала формулировку задачи с самым общим условием на характеристике $\overline{X_1}$. Здесь $\overline{X_1}$ означает замыкание множества X_1.

Задача 2.9. *Найти функцию* $u \in C^{m_1+m_2+m_3}(D) \cap C^{m_1+0+0}\left(D \cup \overline{X_1}\right) \cap C^{0+(m_2-1)+0}\left(D \cup \overline{X_2}\right) \cap C^{0+0+(m_3-1)}\left(D \cup \overline{X_3}\right)$, *являющуюся в D решением* *уравнения*

$$L(u) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} a_{i_1 i_2 i_3}(x_1, x_2, x_3)\, D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_2} D_{x_3}^{i_3} u = 0, \tag{2.46}$$

m_1, m_2, m_3 — любые фиксированные целые неотрицательные числа, $a_{m_1 m_2 m_3} \equiv 1$, *удовлетворяющую всем условиям*

$$\begin{gathered}
D_{x_1}^{i_1}\left(u\left(x_{10}, x_2, x_3\right)\right) = \varphi_{i_1}\left(x_2, x_3\right), \left(0 \leqslant i_1 \leqslant m_1 - 1\right), \\
D_{x_2}^{i_2}\left(u\left(x_1, x_{20}, x_3\right)\right) = \psi_{i_2}\left(x_1, x_3\right), \left(0 \leqslant i_2 \leqslant m_2 - 1\right), \\
D_{x_3}^{i_3}\left(u\left(x_1, x_2, x_{30}\right)\right) = \theta_{i_3}\left(x_1, x_2\right), \left(0 \leqslant i_3 \leqslant m_3 - 1\right), \\
\varphi_{i_1} \in {}^{m_2+m_3}\left(\overline{X_1}\right), \quad \psi_{i_2} \in {}^{m_1+m_3}\left(\overline{X_2}\right), \quad \theta_{i_3} \in {}^{m_1+m_2}\left(\overline{X_3}\right).
\end{gathered} \tag{2.47}$$

кроме j-го при $i_1 = j$ (j принимает некоторое значение от 0 до $m_1 - 1$) и условию

$$D_{x_1}^{m_1}\left(u\left(x_{10}, x_2, x_3\right)\right) = \varphi_{m_1}\left(x_2, x_3\right), \qquad \varphi_{m_1} \in C^{m_2+m_3}\left(\overline{X_1}\right). \tag{2.48}$$

На ребрах предположим выполнение условий согласования

$$\begin{gathered}
D_{x_2}^{i_2}\varphi_{i_1}\left(x_{20}, x_3\right) = D_{x_1}^{i_1}\psi_{i_2}\left(x_{10}, x_3\right), \quad D_{x_3}^{i_3}\varphi_{i_1}\left(x_2, x_{30}\right) = D_{x_1}^{i_1}\theta_{i_3}\left(x_{10}, x_2\right) \\
D_{x_2}^{i_2}\theta_{i_3}\left(x_1, x_{20}\right) = D_{x_3}^{i_3}\psi_{i_2}\left(x_1, x_{30}\right).
\end{gathered} \tag{2.49}$$

Редукция к задаче Гурса. Первоначально, как и объявлено выше, будем считать, что $j = 0$. Данную задачу с помощью некоторого интегрального уравнения можно редуцировать к задаче Гурса. Для получения этого уравнения выполним следующие действия. Проинтегрируем (2.46) m_2 раз по x_2 в пределах от x_{2*} до x_2. Затем полученное уравнение проинтегрируем m_3 раз по x_3 в пределах от x_{3*} до x_3 $\left(\left(x_1, x_{2*}, x_{3*}\right), \left(x_1, x_2, x_3\right) \in D\right)$. После этого в полученном соотношении устремим x_{2*} к x_{20}, x_{3*} к x_{30}, и положим $x_1{=}x_{10}$. Сначала выполним первую операцию интегрирования:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} D_{x_2}^{-m_2}\left[a_{i_1 i_2 i_3}(x_1, x_2, x_3)\, D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_2} D_{x_3}^{i_3} u\right] = 0.$$

Для вычисления выражения в левой части используем формулу (интегральный аналог формулы дифференцирования по правилу Лейбница) (1.28).

Положим в равенстве (1.29) $x_1 = x_{10}$:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \sum_{i_{31}=0}^{i_3} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2}^{i_{21}} C_{i_3}^{i_{31}} D_{x_2}^{i_{21}} D_{x_3}^{i_{31}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right)\right) D_{x_1}^{i_1} u\left(x_{10}, x_2, x_3\right)] (-1)^{i_{21}+i_{31}} -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \sum_{i_{31}=0}^{i_3-1} \sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2}^{i_{21}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{21}} D_{x_3}^{i_{32}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_{10}, x_2, x_{30}\right)\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_{31}-i_{32}} u(x_{10}, x_2, x_{30})] (-1)^{i_{21}+i_{32}} -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2-1} \sum_{i_{22}=0}^{i_{21}} \sum_{i_{31}=0}^{i_3} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3}^{i_{31}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{31}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_{10}, x_{20}, x_3\right)\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}} u\left(x_{10}, x_{20}, x_3\right)] (-1)^{i_{22}+i_{31}} +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2-1} \sum_{i_{22}=0}^{i_{21}} \sum_{i_{31}=0}^{i_3-1} \sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{32}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_{10}, x_{20}, x_{30}\right)\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}} D_{x_3}^{i_{31}-i_{32}} u\left(x_{10}, x_{20}, x_{30}\right)] (-1)^{i_{22}+i_{32}} = 0. \tag{2.50}$$

Выделим из первой группы слагаемых те, у которых $i_1 = 0$, а все остальные перенесем в правую часть уравнения. Таким образом, интегральное уравнение для отыскания неизвестной функции $\varphi_0\left(x_2, x_3\right)$ с учетом обозначений (2.47) имеет вид:

$$\sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \sum_{i_{31}=0}^{i_3} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$\left[C_{i_2}^{i_{21}} C_{i_3}^{i_{31}} D_{x_2}^{i_{21}} D_{x_3}^{i_{31}} \left(a_{0 i_2 i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right)\right) \varphi_0\left(x_2, x_3\right)\right] (-1)^{i_{21}+i_{31}} = r\left(x_2, x_3\right),$$

$$r\left(x_2, x_3\right) = -\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \sum_{i_{31}=0}^{i_3} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$\left[C_{i_2}^{i_{21}} C_{i_3}^{i_{31}} D_{x_2}^{i_{21}} D_{x_3}^{i_{31}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right)\right) \varphi_{i_1}\left(x_2, x_3\right)\right] (-1)^{i_{21}+i_{31}} +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \sum_{i_{31}=0}^{i_3-1} \sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2}^{i_{21}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{21}} D_{x_3}^{i_{32}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_{10}, x_2, x_{30}\right)\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1} \theta_{i_{31}-i_{32}}\left(x_{10}, x_2\right)] (-1)^{i_{21}+i_{32}} +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}\sum_{i_{21}=0}^{i_2-1}\sum_{i_{22}=0}^{i_{21}}\sum_{i_{31}=0}^{i_3} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3}^{i_{31}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{31}} (a_{i_1 i_2 i_3}(x_{10}, x_{20}, x_3))$$

$$D_{x_1}^{i_1} \psi_{i_{21}-i_{22}}(x_{10}, x_3)] (-1)^{i_{22}+i_{31}} -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}\sum_{i_{21}=0}^{i_2-1}\sum_{i_{22}=0}^{i_{21}}\sum_{i_{31}=0}^{i_3-1}\sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{32}} (a_{i_1 i_2 i_3}(x_{10}, x_{20}, x_{30}))$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}} \theta_{i_{31}-i_{32}}(x_{10}, x_{20})] (-1)^{i_{22}+i_{32}}.$$

Переобозначим i_k через $-(m_k - i_k) - i_{k1}$ и введем

$$A_{i_1 i_2 i_3}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_{21}=0}^{i_2}\sum_{i_{31}=0}^{i_3} C_{m_2-(i_2-i_{21})}^{i_{21}} C_{m_3-(i_3-i_{31})}^{i_{31}} \times$$

$$\times D_{x_2}^{i_{21}} D_{x_3}^{i_{31}} \left(a_{i_1 m_2-(i_2-i_{21}) m_3-(i_3-i_{31})}(x_1, x_2, x_3)\right) (-1)^{i_{21}+i_{31}}.$$

В результате придем к уравнению для нахождения $\varphi_0(x_2, x_3)$:

$$\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3} D_{x_2}^{-i_2} D_{x_3}^{-i_3} [A_{0 i_2 i_3}(x_{10}, x_2, x_3)\varphi_0(x_2, x_3)] = r(x_2, x_3), \tag{2.51}$$

$$r(x_2, x_3) = -\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3} D_{x_2}^{-i_2} D_{x_3}^{-i_3} [A_{i_1 i_2 i_3}(x_{10}, x_2, x_3)\varphi_{i_1}(x_2, x_3)] +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}\sum_{i_{21}=0}^{i_2}\sum_{i_{31}=0}^{i_3-1}\sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2}^{i_{21}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{21}} D_{x_3}^{i_{32}} (a_{i_1 i_2 i_3}(x_{10}, x_2, x_{30}))$$

$$D_{x_1}^{i_1} \theta_{i_{31}-i_{32}}(x_{10}, x_2)] (-1)^{i_{21}+i_{32}} +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}\sum_{i_{21}=0}^{i_2-1}\sum_{i_{22}=0}^{i_{21}}\sum_{i_{31}=0}^{i_3} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3}^{i_{31}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{31}} (a_{i_1 i_2 i_3}(x_{10}, x_{20}, x_3))$$

$$D_{x_1}^{i_1} \psi_{i_{21}-i_{22}}(x_{10}, x_3)] (-1)^{i_{22}+i_{31}} -$$

$$
-\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}\sum_{i_{21}=0}^{i_2-1}\sum_{i_{22}=0}^{i_{21}}\sum_{i_{31}=0}^{i_3-1}\sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}
$$

$$
[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{32}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_{10}, x_{20}, x_{30}\right)\right)
$$

$$
D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}} \theta_{i_{31}-i_{32}}\left(x_{10}, x_{20}\right)] (-1)^{i_{22}+i_{32}},
$$

или

$$
A_{000}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \varphi_0\left(x_2, x_3\right)+
$$

$$
+\sum_{\substack{i_2=0 \\ i_2+i_3>0}}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} D_{x_2}^{-i_2} D_{x_3}^{-i_3}\left[A_{0 i_2 i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \varphi_0\left(x_2, x_3\right)\right]=r\left(x_2, x_3\right).
$$

Для принадлежности $\varphi_0\left(x_2, x_3\right)$ к классу $C^{m_2+m_3}\left(\overline{X_1}\right)$ достаточно при $a_{0 m_2 m_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \neq 0$ дополнительно к уже имеющимся условиям гладкости коэффициентов добавить $a_{i_1 i_2 i_3} \in C^{0+i_2+i_3}\left(D \cup \overline{X_1}\right)$. Решение уравнения (2.51) в общем случае записывается через резольвенту Γ:

$$
\varphi\left(x_2, x_3\right)=\frac{r\left(x_2, x_3\right)}{A_{000}\left(x_{10}, x_2, x_3\right)}-
$$

$$
-\frac{1}{A_{000}\left(x_{10}, x_2, x_3\right)} \int_{x_{20}}^{x_2} \int_{x_{30}}^{x_3} \Gamma\left(x_2, x_2^*, x_3, x_3^*, \lambda\right) \frac{r\left(x_2^*, x_3^*\right)}{A_{000}\left(x_{10}, x_2^*, x_3^*\right)} d x_3^* d x_2^*,
$$

где

$$
\Gamma\left(x_2, x_2^*, x_3, x_3^*, \lambda\right)=\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} H_n\left(x_2, x_2^*, x_3, x_3^*\right),
$$

$$
\lambda\left(x_2, x_3\right)=-\frac{1}{A_{000}\left(x_{10}, x_2, x_3\right)},
$$

$$
H_n\left(x_2, x_2^*, x_3, x_3^*\right)=\int_{x_2^*}^{x_2} \int_{x_3^*}^{x_3} H\left(x_2, x_2^{**}, x_3, x_3^{**}\right) H_{n-1}\left(x_2, x_2^{**}, x_3, x_3^{**}\right) d x_3^{**} d x_2^{**},
$$

$$
H_1\left(x_2, x_2^*, x_3, x_3^*\right)=H\left(x_2, x_2^*, x_3, x_3^*\right),
$$

причем

$$
H\left(x_2, x_2^*, x_3, x_3^*\right)=\sum_{\substack{i_2=0 \\ i_2+i_3>0}}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \frac{\left(x_2-x_2^*\right)^{i_2-1}}{\left(i_2-1\right)!} \frac{\left(x_3-x_3^*\right)^{i_3-1}}{\left(i_3-1\right)!} A_{0 i_2 i_3}
$$

и $A_{000}\left(x_{10},x_2,x_3\right)=a_{0m_2m_3}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\neq 0$. Если $i_2=0$ (или $i_3=0$), то соответствующий множитель отсутствует, то есть интегрирование производится только по другой переменной.

Случаи решения в явном виде. Перепишем (2.51) несколько иначе:

$$A_{000}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\varphi_0\left(x_2,x_3\right)+$$

$$+\sum_{i_3=1}^{m_3}D_{x_3}^{-i_3}\left[A_{00i_3}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\varphi_0\left(x_2,x_3\right)\right]+$$

$$+\sum_{i_2=1}^{m_2}D_{x_2}^{-i_2}\left[A_{0i_20}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\varphi_0\left(x_2,x_3\right)\right]+$$

$$+\sum_{i_2=1}^{m_2}\sum_{i_3=1}^{m_3}D_{x_2}^{-i_2}D_{x_3}^{-i_3}\left[A_{0i_2i_3}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\varphi_0\left(x_2,x_3\right)\right]=r\left(x_2,x_3\right).$$

Пусть, например, $A_{000}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\neq 0$ и $A_{001}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\neq 0$, а все остальные коэффициенты в левой части равны нулю. Тогда уравнение сведется к

$$A_{000}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\varphi_0\left(x_2,x_3\right)+D_{x_3}^{-1}\left[A_{001}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\varphi_0\left(x_2,x_3\right)\right]=r\left(x_2,x_3\right).$$

С помощью обозначения $\lambda\left(x_2,x_3\right)=D_{x_3}^{-1}\left[A_{001}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\varphi_0\left(x_2,x_3\right)\right]$ преобразуем данное уравнение в дифференциальное

$$D_{x_3}^{1}\lambda(x_2,x_3)\frac{A_{001}(x_{10},x_2,x_3}{A_{000}(x_{10},x_2,x_3}=r(x_2,x_3)\frac{A_{001}(x_{10},x_2,x_3}{A_{000}(x_{10},x_2,x_3}$$

с дополнительным условием $\lambda\left(x_{10},x_2,x_{30}\right)=0$. Решая его, получим

$$\exp\left[\int\limits_{x_{30}}^{x_3}\frac{A_{001}\left(x_{10},x_2,x_3^*\right)}{A_{000}\left(x_{10},x_2,x_3^*\right)}dx_3^*\right]\lambda\left(x_2,x_3\right)=$$

$$=\int\limits_{x_{30}}^{x_3}r\left(x_2,x_3^*\right)\frac{A_{001}\left(x_{10},x_2,x_3^*\right)}{A_{000}\left(x_{10},x_2,x_3^*\right)}\exp\left[\int\limits_{x_{30}}^{x_3^*}\frac{A_{001}\left(x_{10},x_2,x_3^{**}\right)}{A_{000}\left(x_{10},x_2,x_3^{**}\right)}dx_3^{**}\right]dx_3^*.$$

или

$$\lambda\left(x_2,x_3\right)=\int\limits_{x_{30}}^{x_3}r\left(x_2,x_3^*\right)\frac{A_{001}\left(x_{10},x_2,x_3^*\right)}{A_{000}\left(x_{10},x_2,x_3^*\right)}\exp\left[\int\limits_{x_3}^{x_3^*}\frac{A_{001}\left(x_{10},x_2,x_3^{**}\right)}{A_{000}\left(x_{10},x_2,x_3^{**}\right)}dx_3^{**}\right]dx_3^*.$$

Тогда

$$\varphi_0(x_2,x_3)=\frac{r(x_2,x_3)}{A_{000}(x_{10},x_2,x_3)}-\frac{1}{A_{000}(x_{10},x_2,x_3)}\times$$
$$\times\int\limits_{x_{30}}^{x_3} r(x_2,x_3^*)\frac{A_{001}(x_{10},x_2,x_3^*)}{A_{000}(x_{10},x_2,x_3^*)}\exp\left[\int\limits_{x_3}^{x_3^*}\frac{A_{001}(x_{10},x_2,x_3^{**})}{A_{000}(x_{10},x_2,x_3^{**})}dx_3^{**}\right]dx_3^*. \quad (2.52)$$

Вторая возможность определяется условием $A_{000}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0$, $A_{001}(x_{10},x_2,x_3)-x_3A_{002}(x_{10},x_2,x_3)=0$, остальные коэффициенты в правой части (2.51) равны нулю. Рассуждения, аналогичные проведенным в первом случае, приводят к решению (2.51) в виде

$$\varphi_0(x_2,x_3)=\frac{r(x_2,x_3)}{A_{000}(x_{10},x_2,x_3)}-\frac{x_3}{A_{000}(x_{10},x_2,x_3)}\times$$
$$\times\int\limits_{x_{30}}^{x_3} r(x_2,x_3^*)\frac{A_{001}(x_{10},x_2,x_3^*)}{A_{000}(x_{10},x_2,x_3^*)}\exp\left[\int\limits_{x_3}^{x_3^*}\frac{x_3^{**}A_{001}(x_{10},x_2,x_3^{**})}{A_{000}(x_{10},x_2,x_3^{**})}dx_3^{**}\right]dx_3^*. \quad (2.53)$$

Считаем теперь $A_{000}(x_{10},x_2,x_3)\equiv 0$, $A_{001}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0$, $A_{002}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0$ и все остальные коэффициенты в левой части (2.51) равными нулю, $a_{i_1i_2i_3}\in C^{0+i_2+(i_3+1)}\left(D\cup\overline{X_1}\right)$. Тогда

$$\varphi_0(x_2,x_3)=\frac{D^1_{x_3}r(x_2,x_3)}{A_{001}(x_{10},x_2,x_3)}-\frac{1}{A_{001}(x_{10},x_2,x_3)}\times$$
$$\times\int\limits_{x_{30}}^{x_3} D^1_{x_3}r(x_2,x_3^*)\frac{A_{002}(x_{10},x_2,x_3^*)}{A_{001}(x_{10},x_2,x_3^*)}\exp\left[\int\limits_{x_3}^{x_3^*}\frac{A_{002}(x_{10},x_2,x_3^{**})}{A_{001}(x_{10},x_2,x_3^{**})}dx_3^{**}\right]dx_3^*.$$

А при $A_{000}(x_{10},x_2,x_3)\equiv 0$, $A_{001}(x_{10},x_2,x_3)\equiv 0$, $A_{002}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0$ и всех остальных коэффициентах в левой части (2.51) равных нулю, $a_{i_1i_2i_3}\in C^{0+i_2+(i_3+2)}\left(D\cup\overline{X_1}\right)$, найдем

$$\varphi_0(x_2,x_3)=D^2_{x_3}r(x_2,x_3)\left[A_{002}(x_{10},x_2,x_3)\right]^{-1}. \quad (2.54)$$

Очевидно, что в каждом из перечисленных случаев из условий на коэффициенты $A_{i_1i_2i_3}$ можно восстановить условия на коэффициенты уравнения (2.46). Действительно, $A_{000}=a_{0m_2m_3}$, $A_{001}=D^0_{x_2}D^0_{x_3}a_{0m_2m_3-1}-m_3D^0_{x_2}D^1_{x_3}a_{0m_2m_3}$,

$$A_{002}=D^0_{x_2}D^0_{x_3}a_{0m_2m_3-2}-(m_3-1)\,D^0_{x_2}D^1_{x_3}a_{0m_2m_3-1}+$$

$$+\frac{m_3(m_3-1)}{2}D^0_{x_2}D^2_{x_3}a_{0m_2m_3}.$$

В случае, когда один из коэффициентов равен нулю, остальные могут упроститься. Так, если $a_{0m_2m_3}=0$, то $A_{001}=D^0_{x_2}D^0_{x_3}a_{0m_2m_3-1}$, $A_{002}=D^0_{x_2}D^0_{x_3}a_{0m_2m_3-2}-(m_3-1)\,D^0_{x_2}D^1_{x_3}a_{0m_2m_3-1}$.

Если выбрать ненулевыми коэффициенты $A_{001}(x_{10},x_2,x_3)$, $A_{002}(x_{10},x_2,x_3)$, $A_{003}(x_{10},x_2,x_3)$, считая остальные равными нулю, то с ними можно провести аналогичные рассуждения. Только при этом уравнение (2.50) нужно продифференцировать один раз по x_3:

$$A_{001}(x_{10},x_2,x_3)\,\varphi_0(x_2,x_3)+$$
$$+\sum_{i_3=1}^{2}D^{-i_3}_{x_3}\left[A_{00i_3}(x_{10},x_2,x_3)\,\varphi_0(x_2,x_3)\right]=D^1_{x_3}\left(r(x_2,x_3)\right).$$

При этом мы получим два случая разрешимости (2.51) в явном виде. Формулы записи $\varphi_0(x_2,x_3)$ будут аналогичны (2.52), (2.53), (2.54).

Из проведенных рассуждений следует

Теорема 2.9. *Задача* 2.9 *при* $i_1=0$ *однозначно разрешима, если выполняется неравенство* $A_{000}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0$. *В общем случае функция* $\varphi_0(x_2,x_3)$ *записывается через резольвенту уравнения* (2.51). *Запись* $\varphi_0(x_2,x_3)$ *в явном виде обеспечиваются любым из наборов условий:* 1) $A_{0i_2i_3}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0$ *и*

$$\left(A_{0i_2i_3+1}(x_{10},x_2,x_3)-x_3A_{0i_2i_3+2}(x_{10},x_2,x_3)\right)A_{0i_2i_3+2}(x_{10},x_2,x_3)=0$$
$$(i_3=0,\dots,m_3-2),\quad (i_2=0,\dots,m_2);$$

2) $A_{0i_2i_3}(x_{10},x_2,x_3)\equiv 0$, $A^2_{0i_2i_3+1}(x_{10},x_2,x_3)+A^2_{0i_2i_3+2}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0$

$$(i_3=0,\dots,m_3-2),\quad (i_2=0,\dots,m_2);$$

3) $A_{0i_2i_3}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0$ *и*

$$\left(A_{0i_2+1i_3}(x_{10},x_2,x_3)-x_2A_{0i_2+2i_3}(x_{10},x_2,x_3)\right)A_{0i_2+2i_3}(x_{10},x_2,x_3)=0$$
$$(i_2=0,\dots,m_2-2),\quad (i_3=0,\dots,m_3);$$

4) $A_{0i_2i_3}(x_{10},x_2,x_3)\equiv 0$, $A^2_{0i_2+1i_3}(x_{10},x_2,x_3)+A^2_{0i_2+2i_3}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0$

$$(i_2=0,\dots,m_2-2),\quad (i_3=0,\dots,m_3),$$

причем остальные коэффициенты $A_{0i_2i_3}$*в каждом случае считаем нулевыми.*

Рассмотрим далее задачу 2.9 при $i_1 = 1$. Рассуждения ведутся аналогично случаю $i_1 = 0$, только соотношение (2.50) следует записать как уравнение для определения $\varphi_1(x_{10}, x_2, x_3)$:

$$\sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} D_{x_2}^{-i_2} D_{x_3}^{-i_3} \left[A_{1 i_2 i_3}(x_{10}, x_2, x_3)\, \varphi_1(x_2, x_3)\right] = r_1(x_2, x_3), \tag{2.55}$$

$$r_1(x_2, x_3) =$$

$$= - \sum_{i_1=0, i_1 \neq 1}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} D_{x_2}^{-i_2} D_{x_3}^{-i_3} \left[A_{i_1 i_2 i_3}(x_{10}, x_2, x_3)\, \varphi_{i_1}(x_2, x_3)\right] +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \sum_{i_{31}=0}^{i_3-1} \sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2}^{i_{21}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{21}} D_{x_3}^{i_{31}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}(x_{10}, x_2, x_{30})\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1} \theta_{i_{31}-i_{32}}(x_{10}, x_2)] (-1)^{i_{21}+i_{32}} +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2-1} \sum_{i_{22}=0}^{i_{21}} \sum_{i_{31}=0}^{i_3} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3}^{i_{31}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{31}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}(x_{10}, x_{20}, x_3)\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3} \psi_{i_{21}-i_{22}}(x_{10}, x_3)] (-1)^{i_{22}+i_{31}} -$$

$$- \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2-1} \sum_{i_{22}=0}^{i_{21}} \sum_{i_{31}=0}^{i_3-1} \sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{32}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}(x_{10}, x_{20}, x_{30})\right)$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}} \theta_{i_{31}-i_{32}}(x_{10}, x_{20})] (-1)^{i_{22}+i_{32}}.$$

С помощью рассуждений, подобных проведенным для уравнения (2.51), только в применении к (2.55), может быть доказана

Теорема 2.10. *Задача* 2.9, *когда* $i_1 = 1$ *однозначно разрешима при выполнении неравенства* $A_{100}(x_{10}, x_2, x_3) \neq 0$. *В общем случае функция* $\varphi_1(x_2, x_3)$ *записывается через резольвенту уравнения* (2.55). *Условия построения* $\varphi_1(x_2, x_3)$ *в явном виде обеспечиваются любым из следующих наборов:*

1) $A_{1 i_2 i_3}(x_{10}, x_2, x_3) \neq 0$ *и*

$$\left(A_{1 i_2 i_3+1}(x_{10}, x_2, x_3) - x_3 A_{1 i_2 i_3+2}(x_{10}, x_2, x_3)\right) A_{1 i_2 i_3+2}(x_{10}, x_2, x_3) = 0$$

$$\left(i_3 = 0, \ldots, m_3 - 2\right), \quad \left(i_2 = 0, \ldots, m_2\right);$$

2) $A_{1i_2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \equiv 0$, $A^2_{1i_2i_3+1}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) + A^2_{1i_2i_3+2}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \neq 0$

$$\left(i_3 = 0, \ldots, m_3 - 2\right), \quad \left(i_2 = 0, \ldots, m_2\right);$$

3) $A_{1i_2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \neq 0$ *и*

$$\left(A_{1i_2+1i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) - x_2 A_{1i_2+2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right)\right) A_{1i_2+2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) = 0$$

$$\left(i_2 = 0, \ldots, m_2 - 2\right), \quad \left(i_3 = 0, \ldots, m_3\right);$$

4) $A_{1i_2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \equiv 0$, $A^2_{1i_2+1i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) + A^2_{1i_2+2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \neq 0$

$$\left(i_2 = 0, \ldots, m_2 - 2\right), \quad \left(i_3 = 0, \ldots, m_3\right),$$

причем остальные коэффициенты $A_{1i_2i_3}$*в каждом случае считаем нулевыми.*

Теперь перейдем к решению задачи 2.9 в общей постановке, поскольку в предыдущих частных случаях мы получили все необходимые формулы, а также пояснили саму схему рассуждений. Здесь соотношение (2.50) следует записать как уравнение для определения $\varphi_j\left(x_2, x_3\right)$:

$$\sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} D_{x_2}^{-i_2} D_{x_3}^{-i_3}\left[A_{ji_2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right)\varphi_j\left(x_2, x_3\right)\right] = r_2\left(x_2, x_3\right), \tag{2.56}$$

$$r_2\left(x_2, x_3\right) =$$

$$-\sum_{i_1=0, i_1\neq j}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} D_{x_2}^{-i_2} D_{x_3}^{-i_3}\left[A_{i_1i_2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right)\varphi_{i_1}\left(x_2, x_3\right)\right] +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \sum_{i_{31}=0}^{i_3-1} \sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$\left[C_{i_2}^{i_{21}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{21}} D_{x_3}^{i_{31}}\left(a_{i_1i_2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_{30}\right)\right)\right.$$

$$\left.D_{x_1}^{i_1}\theta_{i_{31}-i_{32}}\left(x_{10}, x_2\right)\right](-1)^{i_{21}+i_{32}} +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \sum_{i_{21}=0}^{i_2-1} \sum_{i_{22}=0}^{i_{21}} \sum_{i_{31}=0}^{i_3} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$

$$\left[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3}^{i_{31}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{31}}\left(a_{i_1i_2i_3}\left(x_{10}, x_{20}, x_3\right)\right)\right.$$

$$\left.D_{x_1}^{i_1} D_{x_3}^{i_3}\psi_{i_{21}-i_{22}}\left(x_{10}, x_3\right)\right](-1)^{i_{22}+i_{31}} -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}\sum_{i_{21}=0}^{i_2-1}\sum_{i_{22}=0}^{i_{21}}\sum_{i_{31}=0}^{i_3-1}\sum_{i_{32}=0}^{i_{31}} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-i_{21}} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-i_{31}}$$
$$[C_{i_2-(i_{21}-i_{22})}^{i_{22}} C_{i_3-(i_{31}-i_{32})}^{i_{32}} D_{x_2}^{i_{22}} D_{x_3}^{i_{32}} \left(a_{i_1 i_2 i_3}\left(x_{10}, x_{20}, x_{30}\right)\right)$$
$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_{21}-i_{22}} \theta_{i_{31}-i_{32}}\left(x_{10}, x_{20}\right)] \left(-1\right)^{i_{22}+i_{32}}.$$

Отсюда следует

Теорема 2.11. *Задача* 2.9 *при любом* j $(0 \leqslant j \leqslant m_1 - 1)$ *однозначно разрешима, когда выполнено неравенство* $A_{j00}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \neq 0$. *В общем случае функция* $\varphi_j\left(x_2, x_3\right)$ *определяется через резольвенту уравнения* (2.56). *Запись* $\varphi_j\left(x_2, x_3\right)$ *в явном виде обеспечиваются любым из наборов условий:*
1) $A_{ji_2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \neq 0$ *и*

$$\left(A_{ji_2i_3+1}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) - x_3 A_{ji_2i_3+2}\left(x_{10}, x_2, x_3\right)\right) A_{ji_2i_3+2}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) = 0$$
$$\left(i_3 = 0, \ldots, m_3 - 2\right), \quad \left(i_2 = 0, \ldots, m_2\right);$$

2) $A_{ji_2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \equiv 0$, $A^2_{ji_2i_3+1}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) + A^2_{ji_2i_3+2}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \neq 0$

$$\left(i_3 = 0, \ldots, m_3 - 2\right), \quad \left(i_2 = 0, \ldots, m_2\right);$$

3) $A_{ji_2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \neq 0$ *и*

$$\left(A_{ji_2+1i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) - x_2 A_{ji_2+2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right)\right) A_{ji_2+2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) = 0$$
$$\left(i_2 = 0, \ldots, m_2 - 2\right), \quad \left(i_3 = 0, \ldots, m_3\right);$$

4) $A_{ji_2i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \equiv 0$, $A^2_{ji_2+1\quad i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) + A^2_{ji_2+2\quad i_3}\left(x_{10}, x_2, x_3\right) \neq 0$

$$\left(i_2 = 0, \ldots, m_2 - 2\right), \quad \left(i_3 = 0, \ldots, m_3\right),$$

причем остальные коэффициенты $A_{ji_2i_3}$ *в каждом случае считаем нулевыми.*

Полученное утверждение подтверждается рассуждениями, подобными проведенным для теоремы 2.9.

Результаты для остающихся характеристик. Для оставшихся задач выпишем формулировки, а случаи разрешимости представим в виде теорем с соответствующими номерами далее. Их доказательство основывается на рассуждениях, подобных проведенным для теоремы 2.11. Ограничимся наиболее общими формулировками аналогов задачи 2.9, только граничные условия в них заменяются уже на второй и третьей характеристиках.

Задача 2.10. *Найти функцию* $u \in C^{m_1+m_2+m_3}(D) \cap C^{(m_1-1)+0+0}\left(D \cup \overline{X_1}\right) \cap C^{0+m_2+0}\left(D \cup \overline{X_2}\right) \cap C^{0+0+(m_3-1)}\left(D \cup \overline{X_3}\right)$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (2.46), *удовлетворяющую всем соотношениям* (2.47) *кроме второго при* $i_2 = j$ $(0 \leqslant j \leqslant m_2 - 1)$ — *его заменяем на*

$$D_{x_2}^{m_2}\left(u\left(x_1, x_{20}, x_3\right)\right) = \psi_{m_2}\left(x_1, x_3\right), \psi_{m_2} \in C^{m_1+m_3}\left(\overline{X_2}\right). \tag{2.57}$$

Задача 2.11. *Найти функцию* $u \in C^{m_1+m_2+m_3}(D) \cap C^{(m_1-1)+0+0}\left(D \cup \overline{X_1}\right) \cap C^{0+(m_2-1)+0}\left(D \cup \overline{X_2}\right) \cap C^{0+0+m_3}\left(D \cup \overline{X_3}\right)$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (2.46), *удовлетворяющую всем условиям* (2.47) *кроме третьего при* $i_3 = j$ $(0 \leqslant j \leqslant m_3 - 1)$, *вместо которого участвует*

$$D_{x_3}^{m_3}\left(u\left(x_1, x_2, x_{30}\right)\right) = \theta_{m_3}\left(x_1, x_2\right), \theta_{m_3} \in C^{m_1+m_2}\left(\overline{X_3}\right). \tag{2.58}$$

Поскольку в уравнение (2.46) все три независимые переменные x_1, x_2, x_3 входят равноправно, рассуждения мы приводить не будем и лишь сформулируем условия на коэффициенты, которые представим в виде теорем, номера которых отвечают номерам соответствующих задач.

Теорема 2.12. *Задача* 2.10 *однозначно разрешима, если выполнено неравенство* $B_{0j0}\left(x_1, x_{20}, x_3\right) \neq 0$. *В общем случае функция* $\psi_j\left(x_1, x_3\right)$ *выражается через резольвенту уравнения, аналогичного* (2.51). *Запись* $\psi_j\left(x_1, x_3\right)$ *в явном виде обеспечиваются любым из наборов условий:*
1) $B_{i_1 j i_3}\left(x_1, x_{20}, x_3\right) \neq 0$ *и*

$$\left(B_{i_1 j i_3+1}\left(x_1, x_{20}, x_3\right) - x_3 B_{i_1 j i_3+2}\left(x_1, x_{20}, x_3\right)\right) B_{i_1 j i_3+2}\left(x_1, x_{20}, x_3\right) = 0$$

$$\left(i_3 = 0, \ldots, m_3 - 2\right), \quad \left(i_1 = 0, \ldots, m_1\right);$$

2) $B_{i_1 j i_3}\left(x_1, x_{20}, x_3\right) \equiv 0$, $B_{i_1 j i_3+1}(x_1, x_{20}, x_3) + B_{i_1 j i_3+2}^2(x_1, x_{20}, x_3) \neq 0$

$$\left(i_3 = 0, \ldots, m_3 - 2\right), \quad \left(i_1 = 0, \ldots, m_1\right);$$

3) $B_{i_1 j i_3}\left(x_1, x_{20}, x_3\right) \neq 0$, *и*

$$\left(B_{i_1+1 j i_3}\left(x_1, x_{20}, x_3\right) - x_1 B_{i_1+2 j i_3}\left(x_1, x_{20}, x_3\right)\right) B_{i_1+2 j i_3}\left(x_1, x_{20}, x_3\right) = 0$$

$$\left(i_1 = 0, \ldots, m_1 - 2\right), \quad \left(i_3 = 0, \ldots, m_3\right);$$

4) $B_{i_1 j i_3}\left(x_1, x_{20}, x_3\right) \equiv 0$, $B_{i_1+1 j i_3}^2\left(x_1, x_{20}, , x_3\right) + B_{i_1+2 j i_3}^2\left(x_1 x_{20}, x_3\right) \neq 0$

$$\left(i_1 = 0, \ldots, m_1 - 2\right), \quad \left(i_3 = 0, \ldots, m_3\right),$$

причем остальные коэффициенты $B_{i_1 j i_3}$ *в каждом случае считаем нулевыми.*

Функции $B_{i_1 i_2 i_3}$ определяются соотношениями

$$B_{i_1 i_2 i_3}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_{11}=0}^{i_1} \sum_{i_{31}=0}^{i_3} C_{m_1-(i_1-i_{11})}^{i_{11}} C_{m_3-(i_3-i_{31})}^{i_{31}} \times$$

$$\times D_{x_1}^{i_{11}} D_{x_3}^{i_{31}} \left(a_{m_1-(i_1-i_{11}) i_2 m_3-(i_3-i_{31})}(x_1, x_2, x_3)\right) (-1)^{i_{11}+i_{31}}.$$

Теорема 2.13. *Задача* 2.11 *однозначно разрешима, когда* $C_{00j}(x_1, x_2, x_{30}) \neq 0$. *В общем случае функция* $\theta_j(x_1, x_2)$ *представляется через резольвенту уравнения, аналогичного* (2.51). *Запись* $\theta_j(x_1, x_2)$ *в явном виде обеспечивается любым из наборов условий:*

1) $C_{i_1 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) \neq 0$ *и*

$$\left(C_{i_1 i_2+1 j}(x_1, x_2, x_{30}) - x_2 C_{i_1 i_2+2 j}(x_1, x_2, x_{30})\right) C_{i_1 i_2+2 j}(x_1, x_2, x_{30}) = 0$$

$$(i_1 = 0, \ldots, m_1), \quad (i_2 = 0, \ldots, m_2 - 2);$$

2) $C_{i_1 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) \equiv 0$, $C_{i_1 i_2+1 j}^2(x_1, x_2, x_{30}) + C_{i_1 i_2+2 j}^2(x_1, x_2, x_{30}) \neq 0$

$$(i_1 = 0, \ldots, m_1), \quad (i_2 = 0, \ldots, m_2 - 2);$$

3) $C_{i_1 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) \neq 0$ *и*

$$\left(C_{i_1+1 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) - x_1 C_{i_1+2 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30})\right) C_{i_1+2 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) = 0$$

$$(i_1 = 0, \ldots, m_1 - 2), \quad (i_2 = 0, \ldots, m_2),$$

4) $C_{i_1 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) \equiv 0$, $C_{i_1+1 i_2 j}^2(x_1, x_2, x_{30}) + C_{i_1+2 i_2 j}^2(x_1, x_2, x_{30}) \neq 0$

$$(i_1 = 0, \ldots, m_1 - 2), \quad (i_2 = 0, \ldots, m_2),$$

причем остальные коэффициенты $C_{i_1 i_2 i_3}$*в каждом случае считаем нулевыми.*

Упомянутые в формулировке теоремы $C_{i_1 i_2 i_3}$ определяются соотношениями

$$C_{i_1 i_2 i_3}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_{11}=0}^{i_1} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} C_{m_1-(i_1-i_{11})}^{i_{11}} C_{m_2-(i_2-i_{21})}^{i_{21}} \times$$

$$\times D_{x_1}^{i_{11}} D_{x_2}^{i_{21}} \left(a_{m_1-(i_1-i_{11}) m_2-(i_2-i_{21}) i_2}(x_1, x_2, x_3)\right) (-1)^{i_{11}+i_{21}}.$$

Варианты с парами характеристик. Рассмотрим задачи, в которых заменены два условия Гурса на разных характеристиках. В указанных задачах, в отличие от представленных выше, разрешимость не всегда однозначна. При их анализе для определения условий на коэффициенты уравнения (2.46) приходится комбинировать условия разрешимости, сформулированные в соответствующих теоремах двух предыдущих пунктов.

Задача 2.12. *Найти функцию* $u \in C^{m_1+m_2+m_3}(D) \cap C^{m_1+0+0}\left(D \cup \overline{X_1}\right) \cap C^{0+m_2+0}\left(D \cup \overline{X_2}\right) \cap C^{0+0+(m_3-1)}\left(D \cup \overline{X_3}\right)$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (2.46), *удовлетворяющую всем условиям* (2.47) *кроме первого при* $i_1 = 0$, *второго при* $i_2 = 0$, *замененных на* (2.48), (2.57) *соответственно.*

Функции $\varphi_0(x_2, x_3)$, $\psi_0(x_1, x_3)$ определяются с помощью уравнений (2.51) и его аналога. В общем случае, если $a_{000}(x_{10}, x_{20}, x_3) = 0$, функцию одного переменного $\psi_0(x_{10}, x_3) = \varphi_0(x_{20}, x_3)$ следует рассматривать как произвольную. Если же коэффициент $a_{000}(x_{10}, x_{20}, x_3) \neq 0$, ее можно определить из уравнения

$$
\begin{gathered}
-a_{000}(x_{10}, x_{20}, x_3)\, u(x_{10}, x_{20}, x_3) = \\
= \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{\substack{i_3=0 \\ i_1+i_2+i_3>0}}^{m_3} a_{i_1 i_2 i_3}(x_{10}, x_{20}, x_3)\, D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_2} D_{x_3}^{i_3} u(x_{10}, x_{20}, x_3)
\end{gathered}
$$

или

$$
\begin{gathered}
-a_{000}(x_{10}, x_{20}, x_3)\, \varphi_0(x_{20}, x_3) = \\
= \sum_{i_1=0}^{0} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{\substack{i_3=0 \\ i_2+i_3>0}}^{m_3} a_{0 i_2 i_3}(x_{10}, x_{20}, x_3)\, D_{x_3}^{i_3} \psi_{i_2}(x_{10}, x_3) + \\
+ \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} a_{i_1 i_2 i_3}(x_{10}, x_{20}, x_3)\, D_{x_2}^{i_2} D_{x_3}^{i_3} \varphi_{i_1}(x_{20}, x_3).
\end{gathered}
$$

Для удобства записи условий редукции к задаче Гурса введем обозначения.

Пусть $A[0]$ — матрица-строка, состоящая из k элементов, $B[0]$ матрица-строка, состоящая из l элементов. Под записью $A[0] \times B[0]$ будем понимать матрицу-строку, элементы которой получаются следующим образом: первые l элементов есть объединение первого элемента $A[0]$ с каждым элементом $B[0]$, следующие l элементов — объединение второго элемента $A[0]$ с каждым элементом строки $B[0]$ и т. д.

Обозначим

$$
A[0] = \{a_{0 m_2 m_3}(x_{10}, x_2, x_3) \neq 0\}, \quad B[0] = \{a_{m_1 0 m_3}(x_1, x_{20}, x_3) \neq 0\}
$$

— матрицы, состоящие из одного элемента.

$$A\left[1\right]=\left\{\begin{array}{l}A_{0i_2i_3}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0\\ (A_{0i_2i_3+1}(x_{10},x_2,x_3)-x_3A_{0i_2i_3+2}(x_{10},x_2,x_3))\times\\ \times A_{0i_2i_3+2}(x_{10},x_2,x_3)=0,\\ (i_3=0,\ldots,m_3-2)\,,\ (i_2=0,\ldots,m_2)\end{array}\right.;$$

$$\begin{array}{l}A_{0i_2i_3}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\equiv 0\\ A^2_{0i_2i_3+1}\left(x_{10},x_2,x_3\right)+A^2_{0i_2i_3+2}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\neq 0,\ ;\\ (i_3=0,\ldots,m_3-2)\,,\ (i_2=0,\ldots,m_2)\end{array}$$

$$\begin{array}{l}A_{0i_2i_3}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\neq 0\\ \left(A_{0i_2+1i_3}\left(x_{10},x_2,x_3\right)-x_2A_{0i_2+2i_3}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\right)\times\\ \times A_{0i_2+2i_3}\left(x_{10},x_2,x_3\right)=0,\\ (i_2=0,\ldots,m_2-2)\,,\ (i_3=0,\ldots,m_3)\end{array};$$

$$\left.\begin{array}{l}A_{0i_2i_3}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\equiv 0\\ A^2_{0i_2+1i_3}\left(x_{10},x_2,x_3\right)+A^2_{0i_2+2i_3}\left(x_{10},x_2,x_3\right)\neq 0,\\ (i_2=0,\ldots,m_2-2)\,,\ (i_3=0,\ldots,m_3)\end{array}\right\},$$

$$B\left[1\right]=\left\{\begin{array}{l}B_{i_1ji_3}\left(x_1,x_{20},x_3\right)\neq 0\\ \left(B_{i_1ji_3+1}\left(x_1,x_{20},x_3\right)-x_3B_{i_1ji_3+2}\left(x_1,x_{20},x_3\right)\right)\times\\ \times B_{i_1ji_3+2}\left(x_1,x_{20},x_3\right)=0,\\ (i_3=0,\ldots,m_1-2)\,,\ (i_1=0,\ldots,m_1)\,,\end{array}\right.;$$

$$\begin{array}{l}B_{i_1ji_3}\left(x_1,x_{20},x_3\right)\equiv 0\\ B^2_{i_1ji_3+1}\left(x_1,x_{20},x_3\right)+B^2_{i_1ji_3+2}\left(x_1,x_{20},x_3\right)\neq 0,\ ;\\ (i_1=0,\ldots,m_1-2)\,,\ (i_1=0,\ldots,m_1)\end{array}$$

$$\begin{array}{l}B_{i_1ji_3}\left(x_1,x_{20},x_3\right)\neq 0\\ \left(B_{i_1+1ji_3}\left(x_1,x_{20},x_3\right)-x_1B_{i_1+2ji_3}\left(x_1,x_{20},x_3\right)\right)\times\\ \times B_{i_1+2ji_3}\left(x_1,x_{20},x_3\right)=0,\\ (i_1=0,\ldots,m_1-2)\,,\ (i_3=0,\ldots,m_3)\end{array};$$

$$\left.\begin{array}{l}B_{i_1ji_3}\left(x_1,x_{20},x_3\right)\equiv 0\\ B^2_{i_1+1ji_3}\left(x_1,x_{20},x_3\right)+B^2_{i_1+2ji_3}\left(x_1,x_{20},x_3\right)\neq 0,\\ (i_1=0,\ldots,m_1-2)\,,\ (i_3=0,\ldots,m_3)\end{array}\right\}$$

— матрицы, состоящие из четырех блоков-столбцов. Кроме того, в каждом из блоков $A\left[1\right]$, $B\left[1\right]$ остальные соответствующие коэффициенты равны нулю. Тогда имеет место

Теорема 2.14. *Каждый блок произведения* $A\left[0\right]\times B\left[0\right]$, $A\left[0\right]\times B\left[1\right]$, $A\left[1\right]\times B\left[0\right]$ *представляет собой достаточные условия редукции задачи* 2.12

к задаче Гурса в терминах резольвент интегральных уравнений, каждый блок произведения $A[1]\times B[1]$*обеспечивает запись условий Гурса в явном виде.*

При этом в общем случае решение носит неоднозначный характер. Оно находится с точностью до произвольной функции $\varphi_0(x_{20},x_3)$.

Поясним что представляет собой один из указанных блоков, например, первый из блоков произведения $A[0]\times B[1]$. Это группа условий

$$a_{0m_2m_3}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0,\quad B_{i_1ji_3}(x_1,x_{20},x_3)\neq 0,$$
$$\left(B_{i_1ji_3+1}(x_1,x_{20},x_3)-x_3B_{i_1ji_3+2}(x_1,x_{20},x_3)\right)B_{i_1ji_3+2}(x_1,x_{20},x_3)=0;$$
$$(i_3=0,\dots,m_3-2),\quad (i_1=0,\dots,m_1).$$

Несложно выписать и все остальные.

Задача 2.13. *Найти функцию* $u\in C^{m_1+m_2+m_3}(D)\cap C^{m_1+0+0}\left(D\cup\overline{X_1}\right)\cap C^{0+(m_2-1)+0}\left(D\cup\overline{X_2}\right)\cap C^{0+0+m_3}\left(D\cup\overline{X_3}\right)$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (2.46), *удовлетворяющую всем условиям* (2.47) *кроме первого при* $i_1=0$, *третьего при* $i_3=0$ *— вместо них использованы* (2.48), (2.58).

Рассуждения будем проводить аналогично задаче 2.12. Здесь неизвестными функциями являются $\varphi_0(x_2,x_3)$, $\theta_0(x_1,x_2)$, которые определяем с помощью уравнений (2.51) и аналогичного ему. При этом в общем случае функцию $\theta_0(x_{10},x_2)=\varphi_0(x_2,x_{30})$ следует рассматривать как произвольную. Считая коэффициент $a_{000}(x_{10},x_2,x_{30})\neq 0$, ее можно определить из уравнения

$$\begin{aligned}a_{000}&(x_{10},x_2,x_{30})\varphi_0(x_2,x_{30})=\\&=-\sum_{i_1=0}^{0}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}a_{0i_2i_3}(x_{10},x_2,x_{30})D_{x_2}^{i_2}\theta_{i_3}(x_{10},x_2)-\\&\qquad-\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}a_{i_1i_2i_3}(x_{10},x_2,x_{30})D_{x_2}^{i_2}D_{x_3}^{i_3}\varphi_{i_1}(x_2,x_{30}).\end{aligned}$$

Дополнительно к матрицам A,B введем

$$C[0]=\{a_{m_1m_20}(x_1,x_2,x_{30})\neq 0\}$$

— матрицу, которая состоит из одного элемента,

$$C[1]=\left\{\begin{array}{l}C_{i_1i_2j}(x_1,x_2,x_{30})\neq 0\\ \left(C_{i_1i_2+1j}(x_1,x_2,x_{30})-x_2C_{i_1i_2+2j}(x_1,x_2,x_{30})\right)\times\\ \times C_{i_1i_2+2j}(x_1,x_2,x_{30})=0,\\ (i_1=0,\dots,m_1),\ (i_2=0,\dots,m_2-2)\end{array}\right.;$$

$$\begin{array}{l} C_{i_1 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) \equiv 0 \\ C^2_{i_1 i_2+1 j}(x_1, x_2, x_{30}) + C^2_{i_1 i_2+2 j}(x_1, x_2, x_{30}) \neq 0, \; ; \\ (i_1 = 0, \ldots, m_1), \; (i_2 = 0, \ldots, m_2 - 2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C_{i_1 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) \neq 0 \\ (C_{i_1+1 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) - x_1 C_{i_1+2 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30})) \times \\ \times C_{i_1+2 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) = 0, \\ (i_1 = 0, \ldots, m_1 - 2), \; (i_2 = 0, \ldots, m_2) \end{array} ;$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{i_1 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) \equiv 0 \\ C^2_{i_1+1 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) + C^2_{i_1+2 i_2 j}(x_1, x_2, x_{30}) \neq 0, \\ (i_1 = 0, \ldots, m_1 - 2), \; (i_2 = 0, \ldots, m_2) \end{array} \right\}$$

— матрицу, состоящую из четырех блоков.

В каждом из блоков матрицы $C[1]$ остальные соответствующие коэффициенты считаем равными нулю. Тогда имеет место

Теорема 2.15. *Каждый блок произведения $A[0] \times C[0]$, $A[0] \times C[1]$, $A[1] \times C[0]$ представляет собой достаточные условия редукции задачи* 2.13 *к задаче Гурса в терминах резольвент интегральных уравнений, каждый блок произведения $A[1] \times C[1]$обеспечивает запись условий Гурса в явном виде.*

При этом в общем случае решение находится с точностью до произвольной функции $\varphi_0(x_2, x_{30})$.

Задача, когда заменяются $\psi_0(x_1, x_3)$, $\theta_0(x_1, x_2)$, рассматривается аналогично. Аналогично получаются задачи, когда заменяются два условия для произвольных $\varphi_{i_1}(x_2, x_3)$,$\psi_{i_2}(x_1, x_3)$, $\theta_{i_3}(x_1, x_2)$ $(0 \leqslant i_1 \leqslant m_1 - 1,\ 0 \leqslant i_2 \leqslant m_2 - 1,\ 0 \leqslant i_3 \leqslant m_3 - 1)$.

Одновременное участие трех характеристик. Естественным продолжением изученных выше задач является случай замены трех условий Гурса на каждой характеристике. Рассмотрим одну из них.

Задача 2.14. *Найти функцию $u \in C^{m_1+m_2+m_3}(D) \cap C^{m_1+0+0}\left(D \cup \overline{X_1}\right) \cap C^{0+m_2+0}\left(D \cup \overline{X_2}\right) \cap C^{0+0+m_3}\left(D \cup \overline{X_3}\right)$, являющуюся в D решением уравнения* (2.46)*, удовлетворяющую всем условиям* (2.47) *кроме первого при $i_1 = 0$, второго при $i_2 = 0$, третьего при $i_3 = 0$ вместо которых используются* (2.48)*,* (2.57)*,* (2.58) *соответственно.*

Здесь требуется определить $\varphi_0(x_2, x_3)$, $\psi_0(x_1, x_3)$, $\theta_0(x_1, x_2)$. Как и в случае замены условий на двух характеристиках, будем использовать таблицы A, B, C и комбинировать соответствующие условия. Решение, вообще говоря, будет зависеть от трех произвольных функций $\varphi_0(x_{20}, x_3)$,

$\psi_0(x_1, x_{30})$,$\theta_0(x_{10}, x_2)$ и произвольной постоянной $\varphi_0(x_{20}, x_{30})$. Результат представим в виде

Теорема 2.16. *Каждый блок произведения $A[0] \times B[0] \times C[0]$, $A[0] \times B[0] \times C[1]$, $A[0] \times B[1] \times C[0]$, $A[1] \times B[0] \times C[0]$, $A[0] \times B[1] \times C[1]$, $A[1] \times B[0] \times C[1]$, $A[1] \times B[1] \times C[0]$ представляет собой достаточные условия редукции задачи 2.16 к задаче Гурса в терминах резольвент интегральных уравнений, каждый блок произведения $A[1] \times B[1] \times C[1]$ обеспечивает запись условий Гурса в явном виде.*

Общий случай задачи. Далее речь пойдет о задачах Γ_1 для уравнения (1.1).

Задача 2.15. *Найти функцию $u \in C^{|m|}(D) \cap C^{m_1+0+\dots+0}\left(D \cup \overline{X_1}\right) \cap$ $\cap C^{0+(m_2-1)+0+\dots+0}\left(D \cup \overline{X_2}\right) \dots \cap C^{0+\dots+0+(m_n-1)}\left(D \cup \overline{X_n}\right)$, являющуюся в D решением уравнения* (1.1), *удовлетворяющую всем условиям* (1.2), *кроме первого при $i_1 = 0$, вместо которого берется*

$$D_{x_1}^{m_1}(x_{10}, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{1m_1}(x_2, \dots, x_n), \quad \varphi_{1m_1} \in C^{\sum\limits_{\alpha=2}^{n} m_\alpha}\left(\overline{X_1}\right). \qquad (2.59)$$

Считаем, что $F \equiv 0$ в правой части (1.1). Решение, как и в случае пространства трех измерений, будем осуществлять с помощью редукции условий задачи 2.15 к условиям задачи Гурса. Нам требуется определить φ_{10} через условия задачи. Для этого проинтегрируем (1.1) в пределах от x_{2*} до x_2, от x_{3*} до $x_3, \dots$, от x_{n*} до x_n соответственно m_2,$m_3, \dots, m_n$ раз ($(x_1, x_{2*}, \dots, x_{n*})$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$). Затем в полученном соотношении устремим x_{2*} к x_{20}, x_{3*} — к $x_{30}, \dots$, x_{n*} — к x_{n0}. Выполним сначала эту процедуру для переменной x_2, затем вычислим m_3 — кратный интеграл по x_3, и соответствующие интегралы по x_4, …, x_n, в результате получим формулу:

$$\sum_{(i)=(0)}^{(m)} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \cdots \sum_{i_{n1}=0}^{i_n} \prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-(m_\alpha - i_\alpha) - i_{\alpha 1}}$$

$$\left[\prod_{k=2}^{n} \left(C_{i_k}^{i_{k1}} D_{x_k}^{i_{k1}}\right) \left(a_{(i)}(x)\right) D_{x_1}^{i_1}(u(x))\right] (-1)^{i_{21}+i_{31}+\dots+i_{n1}} -$$

$$- \sum_{(i)=(0)}^{(m)} \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \cdots \sum_{i_{n-1,1}=0}^{i_{n-1}} \sum_{i_{n1}=0}^{i_n-1} \sum_{i_{n2}=0}^{i_{n1}} \prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-(m_\alpha - i_\alpha) - i_{\alpha 1}}$$

$$\left[\prod_{k=2}^{n-1} \left(C_{i_k}^{i_{k1}} D_{x_k}^{i_{k1}}\right) C_{i_n-(i_{n1}-i_{n2})}^{i_{n2}} D_{x_n}^{i_{n2}}(a_{i_1 \cdots n}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n0}))\right.$$

$$D_{x_1}^{i_1} D_{x_n}^{i_{n1}-i_{n2}} \left(u\left(x_1,\dots,x_{n-1},x_{n0}\right)\right)\Bigg] (-1)^{i_{21}+\dots+i_{n-1,1}+i_{n2}} - \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \sum_{(i)=(0)}^{(m)} \sum_{i_{21}=0}^{i_2-1} \dots \sum_{i_{n1}=0}^{i_n-1} \sum_{i_{22}=0}^{i_{21}} \dots \sum_{i_{n2}=0}^{i_{n1}} \prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-(m_\alpha-i_\alpha)-i_{\alpha 1}}$$

$$\left[\prod_{k=2}^{n-1} \left(C_{i_k-(i_{k1}-i_{k2})}^{i_{k2}} D_{x_k}^{i_{k2}}\right) \left(a_{i_1\cdots_n}\left(x_1, x_{20}\dots,x_{n0}\right)\right)\right.$$

$$\left. D_{x_1}^{i_1} \prod_{j=2}^{n} D_{x_j}^{i_{j1}-i_{j2}} (u(x_1, x_{20}\dots,x_{n0}))\right] (-1)^{i_{22}+\dots+i_{n2}} = 0. \tag{2.60}$$

Устремим x_1 к x_{10} и перепишем (2.60) следующим образом:

$$\sum_{(i)=(0)}^{(m)} \sum_{\delta_2=0}^{1} \dots \sum_{\delta_n=0}^{1} \sum_{i_{21}=0}^{i_2-(1-\delta_2)} \dots \sum_{i_{n1}=0}^{i_n-(1-\delta_n)} \sum_{i_{22}=0}^{i_{21}(1-\delta_2)} \dots \sum_{i_{n2}=0}^{i_{n1}(1-\delta_n)} \prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-(m_\alpha-i_\alpha)-i_{\alpha 1}} \times$$

$$\times \left[\prod_{k=2}^{n} \left(C_{i_k-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)}^{i_{k1}-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)} D_{x_k}^{i_{k1}-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)}\right) \left(a_{(i)}\left(x_{10}, x_{2\delta_2},\dots,x_{n\delta_n}\right)\right) \times\right.$$

$$\left.\times D_{x_1}^{i_1} \prod_{k=2}^{n} D_{x_k}^{(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)} \left(u\left(x_{10}, x_{2\delta_2},\dots,x_{n\delta_n}\right)\right)\right] \times$$

$$\times (-1)^{i_{21}+\dots+i_{n1}-(i_{21}-i_{22})(1-\delta_2)-\dots-(i_{n1}-i_{n2})(1-\delta_n)} = 0.$$

Из последней формулы выделим слагаемые, содержащие в качестве множителя $\varphi_{10}\left(x_2,\dots,x_n\right)$. Они получаются при $\delta_2 = \dots = \delta_n = 1$, $i_1 = 0$:

$$\sum_{i_2=0}^{m_2} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} D_{x_2}^{-i_2} \dots D_{x_n}^{-i_n} \left[A_{0 i_2 \dots i_n}\left(x_{10}, x_2,\dots,x_n\right) \varphi_{10}\left(x_2,\dots,x_n\right)\right] =$$

$$= p\left(x_2,\dots,x_n\right); \tag{2.61}$$

$$p\left(x_2,\dots,x_n\right) =$$

$$= -\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} D_{x_2}^{-i_2} \dots D_{x_n}^{-i_n} \left[A_{(i)}\left(x_{10}, x_2,\dots,x_n\right) \varphi_{1 i_1}\left(x_2,\dots,x_n\right)\right] -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} \sum_{\substack{\delta_2=0 \\ \delta_2..\delta_n\neq 1}}^{1} \dots \sum_{\delta_n=0}^{1} \sum_{i_{21}=0}^{i_2-(1-\delta_2)} \dots \sum_{i_{n1}=0}^{i_n-(1-\delta_n)} \sum_{i_{22}=0}^{i_{21}(1-\delta_2)} \dots \sum_{i_{n2}=0}^{i_{n1}(1-\delta_n)}$$

$$\prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-(m_\alpha-i_\alpha)-i_{\alpha 1}} \left[\prod_{k=2}^{n} \left(C_{i_k-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)}^{i_{k1}-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)} D_{x_k}^{i_{k1}-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)} \right) \right.$$

$$\left(a_{i_1 \dots i_n}\left(x_{10}, x_{2\delta_2}, \dots, x_{n\delta_n}\right)\right) \times$$

$$\left. \times D_{x_1}^{i_1} \prod_{k=2}^{n} D_{x_k}^{(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)} \left(u\left(x_{10}, x_{2\delta_2}, \dots, x_{n\delta_n}\right)\right) \right] \times$$

$$\times (-1)^{i_{21}+\dots+i_{n1}-(i_{21}-i_{22})(1-\delta_2)-\dots-(i_{n1}-i_{n2})(1-\delta_n)},$$

где

$$A_{(i)}\left(x_{10}, x_2, \dots, x_n\right) = \sum_{i_{21}=0}^{i_2} \cdots \sum_{i_{n1}=0}^{i_n} C_{m_2-(i_2-i_{21})}^{i_{21}} \dots C_{m_n-(i_n-i_{n1})}^{i_{n1}} \times$$
$$\times D_{x_2}^{i_{21}} \dots D_{x_n}^{i_{n1}} \left[a_{i_1, m_2-(i_2-i_{21}), \dots, m_n-(i_n-i_{n1})}\left(x_{10}, x_2, \dots, x_n\right)\right] (-1)^{i_{21}+\dots+i_{n1}}.$$

Будем считать, что $x_{21}, \ \dots, \ x_{n1}$ в данном случае совпадают с $x_2, \ \dots, \ x_n$ соответственно.

Перепишем левую часть (2.61) несколько иначе:

$$A_{00..0}\left(x_{10}, x_2, .., x_n\right) \varphi_{10}\left(x_2, .., x_n\right) +$$

$$+ \sum_{i_2=1}^{m_2} D_{x_2}^{-i_2} \left[A_{0i_2..0}\left(x_{10}, x_2, .., x_n\right) \varphi_{10}\left(x_2, \dots, x_n\right)\right] +$$

$$+ \sum_{i_3=1}^{m_3} D_{x_3}^{-i_3} \left[A_{00i_30\dots0}\left(x_{10}, x_2, \dots, x_n\right) \varphi_{10}\left(x_2, \dots, x_n\right)\right] + \dots +$$

$$+ \sum_{i_n=1}^{m_n} D_{x_n}^{-i_n} \left[A_{00..0i_n}\left(x_{10}, x_2, \dots, x_n\right) \varphi_{10}\left(x_2, \dots, x_n\right)\right] +$$

$$+ \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} D_{x_2}^{-i_2} \dots D_{x_n}^{-i_n} \left[A_{0i_2\dots i_n}\left(x_{10}, x_2, \dots, x_n\right) \varphi_{10}\left(x_2, \dots, x_n\right)\right] =$$

$$= p\left(x_2, \dots x_n\right).$$

Анализ уравнения (2.61) позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2.17. *Задача* 2.15 *однозначно разрешима при выполнении неравенства* $a_{0m_2..m_n}\left(x_{10}, x_2, \dots, x_n\right) \neq 0$. *В общем случае функция* $\varphi_{10}\left(x_2, .., x_n\right)$ *записывается через резольвенту уравнения* (2.61)*. Запись* $\varphi_{10}\left(x_2, .., x_n\right)$ *в явном виде обеспечиваются любым из наборов условий:*

1) $A_{0i_2i_3\dots i_n}(x_{10}, x_2, x_3, \dots, x_n) \neq 0$ *и*

$$(A_{0i_k+1i_3\dots i_n}(x_{10}, x_2, x_3, \dots, x_n)- \\ - x_k A_{0i_k+2i_3\dots i_n}(x_{10}, x_2, x_3, \dots, x_n))A_{0i_k+2i_3\dots i_n}(x_{10}, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$

$$(i_k = 0, \dots, m_k - 2)\ (i_3 = 0, \dots, m_3)\ \dots\ (i_n = 0, \dots, m_n)\ (k = 2, \dots, n);$$

2) $A_{0i_2i_3\dots i_n}(x_{10}, x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv 0,$

$$A^2_{0i_k+1i_3\dots i_n}(x_{10}, x_2, x_3, \dots, x_n) + A^2_{0i_k+2i_3\dots i_n}(x_{10}, x_2, x_3, \dots, x_n) \neq 0$$

$$(i_k = 0, \dots, m_2 - 2)\ (k = 2, \dots, n)\ \dots\ (i_3 = 0, \dots, m_3)\ \dots\ (i_n = 0, \dots, m_n),$$

причем остальные коэффициенты $A_{0i_2i_3\dots i_n}$ *в каждом случае считаем нулевыми.*

Для того, чтобы изучить случаи редукции задач, в которых заменяются два и более граничных условия, необходимо записать теоремы, аналогичные предыдущей на нужной характеристике, а затем комбинировать соответствующие пункты указанных теорем. Понятно, что в таких задачах будут появляться произвольные функции или константы.

2.3. Об аналогах уравнения Эйлера-Пуассона.

2.3.1. Уравнение типа Аллера. Общая методика построения каскада. Сначала остановимся на уравнении

$$L(u) = u_{xxy} + au_{xx} + bu_{xy} + cu_x + du_y + eu = 0. \tag{2.62}$$

Используем первое из обозначений

$$u_1 = u_y + au, \quad u_2 = u_x + bu, \tag{2.63}$$

(2.63). Тогда мы сможем преобразовать (2.62) к виду

$$L(u) = u_{1xx} + (bu_1)_x - h_{10}u_x - h_{01}u_y - h_{00}u = 0,$$

где

$$h_{10} = 2a_x + ab - c, \quad h_{01} = b_x - d, \quad h_{00} = a_{xx} + (ab)_x - e.$$

Используя второе из обозначений (2.63), получим

$$L(u) = u_{2xy} + (au_2)_x - k_{10}u_x - k_{01}u_y - k_{00}u = 0,$$

где

$$k_{10} = b_y + a_x + ab - c, \quad k_{01} = h_{01} = b_x - d,$$

$$k_{00} = b_{xy} + (ab)_x - e.$$

Если имеет место хотя бы одна из групп тождеств

$$h_{10} \equiv h_{01} \equiv h_{00} \equiv 0; \quad k_{10} \equiv k_{01} \equiv k_{00} \equiv 0, \tag{2.64}$$

то непосредственно можно убедиться, что (2.62) разрешимо в квадратурах. При этом в случае выполнения (2.64_1), решение представляется формулой:

$$u = e^{-\int a(x,y)dy}\left[\int e^{-\int b(x,y)dx}\left\{C_1(y)\int e^{b(x,y)dx}dx + \right.\right.$$
$$\left.\left. + C_2(y)\right\}e^{\int a(x,y)dy}dy + C_3(x)\right],$$

а при выполнении (2.64_2) —

$$u = e^{-\int b(x,y)dx}\left[\int e^{-\int a(x,y)dx}\left\{C_1(y)\,e^{a(x,y)dy}dy + C_2(x)\right\}dx + C_3(y)\right].$$

Пусть вместо (2.64_1) выполняются соотношения $h_{10} \equiv h_{01} \equiv 0$, $h_{00} \neq 0$. Тогда (2.62) преобразуется к виду

$$u_{1xx} + (bu_1)_x - h_{00}u = 0. \tag{2.65}$$

Отсюда находим

$$u = \frac{1}{h_{00}}\left[u_{1xx} + (bu_1)_x\right].$$

Продифференцируем (2.65) по y:

$$u_{1xxy} + (bu_1)_{xy} - h_{00y}u - h_{00}u_y = 0.$$

Подставив в полученное уравнение вычисленную из (2.63_1) производную $u_y = u_1 - au$, приходим к соотношению:

$$u_{1xxy} + (bu_1)_{xy} - h_{00y}u - h_{00}(u_1 - au) = 0.$$

Сгруппируем коэффициенты при u:

$$u_{1xxy} + (bu_1)_{xy} - (h_{00y} - h_{00}a)\,u - h_{00}u_1 = 0.$$

Подставим в последнее равенство выражение для u, полученное из (2.65):

$$u_{1xxy} + (bu_1)_{xy} + \left(a - \frac{h_{00y}}{h_{00}}\right)(u_{1xx} + (bu_1)_x) - h_{00}u_1 = 0.$$

Раскроем скобки и сгруппируем по производным u_1:

$$u_{1xxy} + u_{1xx}\left[a - \frac{h_{00y}}{h_{00}}\right] + u_{1xy}b + u_{1x}\left[b_y + ba - b\frac{h_{00y}}{h_{00}}\right] +$$

$$+u_{1y}b_x + +u_1\left[b_{xy} + b_x a - b_x\frac{h_{00y}}{h_{00}} - h_{00}\right] = 0.$$

Последнее уравнение содержит в качестве искомой новую функцию u_1. Обозначив

$$a^{(1)} = a - (\ln h_{00})_y\,,\quad b^{(1)} = b,\quad c^{(1)} = b_y + ba^{(1)},$$

$$d^{(1)} = b_x,\quad e^{(1)} = b_{xy} + b_x a^{(1)} - h_{00},$$

получаем, что оно преобразовалось к уравнению

$$u_{1xxy} + a^{(1)}u_{1xx} + b^{(1)}u_{1xy} + c^{(1)}u_{1x} + d^{(1)}u_{1y} + e^{(1)}u_1 = 0,$$

имеющему тот же вид, что и исходное.

В случае, когда вместо (2.64_2) выполняются соотношения $k_{10} \equiv k_{01} \equiv 0$, $k_{00} \neq 0$, (2.62) преобразуется уравнению того же вида, только здесь считаем, что

$$a^{(1)} = a,\quad b^{(1)} = b - (\ln k_{00})_x\,,\quad c^{(1)} = 2a_x + b^{(1)}a,$$

$$d^{(1)} = 0,\quad e^{(1)} = a_{xx} + a_x b^{(1)} - k_{00}.$$

Если хотя бы одно из полученных уравнений решается в квадратурах, то и исходное уравнение имеет явное решение. В противном случае процесс может быть продолжен.

2.3.2. Аналоги уравнения Эйлера-Пуассона. Рассмотрим теперь уравнения, являющиеся аналогами (2.62) в том смысле, что к ним можно применить указанный процесс решения:

$$L(u) \equiv u_{xxy} - \frac{\beta}{x-y}u_{xx} + \frac{\beta'}{x-y}u_{xy} + \frac{\beta(2-\beta')}{(x-y)^2}u_x - \frac{\beta'}{(x-y)^2}u_y = 0,$$

$$L(u) = u_{xxy} - \frac{\beta}{x-y}u_{xx} + \frac{\beta'}{x-y}u_{xy} + \\ + \frac{\beta+\beta'(1-\beta)}{(x-y)^2}u_x - \frac{\beta'}{(x-y)^2}u_y = 0. \quad (2.66)$$

Здесь

$$h_{00} = \frac{2\beta(\beta'-1)}{(x-y)^3},$$

относящееся к первому из (2.66),

$$k_{00} = \frac{2\beta'(\beta-1)}{(x-y)^3}$$

— ко второму. Очевидно, что в случаях
1) $\beta = 0$, или $\beta' = 1$,
2) $\beta' = 0$, или $\beta = 1$
уравнения (2.66) разрешимы в квадратурах. Пусть, например, $\beta' = 1$. Тогда

$$u = (x-y)^{-\beta} \times \\ \times \left[\int \frac{1}{x-y}\left(C_1(y)\left(\frac{x^2}{2} - xy\right) + C_2(y)\right)(x-y)^{\beta}\,dy + C_3(x)\right] \quad . \qquad (2.67)$$

Рассмотрим подробнее первое из уравнений (2.66).

Пусть $h_{00} \neq 0$, причем $h_{10} \equiv h_{01} \equiv 0$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$h_{00}^{(1)} = h_{00} + \frac{2\beta' - 2(\beta+3) + \beta'(\beta+3)}{(x-y)^3}.$$

При этом $h_{01}^{(1)} = b_x^{(1)} - d^{(1)} = 0$, $h_{10}^{(1)} = 2a_x - 2(\ln h_{00})_{xy} - b_y = \frac{2\beta-\beta'+6}{(x-y)^2}$. Полагаем дополнительно $h_{10}^{(1)} = 0$. Отметим, что из этого условия не следует, что $h_{00}^{(1)} = 0$, например, если $\beta' = 0$, а $\beta = -3$, $h_{10}^{(1)} = 0$, $h_{00}^{(1)} = \frac{6}{(x-y)^3}$. Понятно, что в случае равенства $h_{00}^{(1)}$ нулю получаем решение уравнения (2.66_1) в квадратурах. Продолжение процесса позволяет построить цепочку уравнений вида (2.66_1), для которых $h_{01}^{(n)} = b_x^{(n)} - d^{(n)} = b_x - b_x = 0$,

$$h_{10}^{(n)} = 2a_x^{(n)} + a^{(n)}b - c^{(n)} = 2a_x^{(n)} + a^{(n)}b - b_y - a^{(n)}b =$$

$$= 2a_x^{(n)} - b_y = 2a_x^{(n-1)} - 2\left(\ln h_{00}^{(n-1)}\right)_{xy} - b_y =$$

$$= 2a_x^{(n-2)} - 2\left(\ln h_{00}^{(n-2)}\right)_{xy} - b_y - 2\left(\ln h_{00}^{(n-1)}\right)_{xy} = h_{10}^{(n-1)} - 2\left(\ln h_{00}^{(n-1)}\right)_{xy}.$$

При этом $h_{00}^{(n)}$ определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$h_{00}^{(n)} - h_{00}^{(n-1)} = \frac{2\beta' - 2(\beta+3n) + \beta'(\beta+3n)}{(x-y)^3}.$$

Так как мы считаем, что $h_{10}^{(n-1)} = 0$, то $h_{10}^{(n)} = -2\left(\ln h_{00}^{(n-1)}\right)_{xy} = -\frac{6}{(x-y)^2}$. Значит, на некотором шаге процесс построения каскада остановится.

Для уравнения (2.66_2) на первом шаге имеем, что $k_{01} = k_{10} = 0$, $k_{00} = \frac{2\beta'(\beta-1)}{(x-y)^3}$. На втором — $k_{01}^{(1)} = b_x - (\ln k_{00})_{xx} = \frac{-\beta'-3}{(x-y)^2}$, $k_{10}^{(1)} = b_y - (\ln k_{00})_{xy} - a_x = \frac{\beta'+3-\beta}{(x-y)^2}$. При этом следующее значение k_{00}определяется из соотношения:

$$k_{00}^{(n)} - k_{00}^{(n-1)} = \frac{2\beta - 2(\beta+3n) + \beta'(\beta+3n)}{(x-y)^3}.$$

На третьем — $k_{01}^{(2)} = b_x^{(2)} - 0 = b_x^{(1)} - \left(\ln k_{00}^{(1)}\right)_{xx} = b_x - (\ln k_{00})_{xx} - \left(\ln k_{00}^{(1)}\right)_{xx} = k_{01}^{(1)} - \left(\ln k_{00}^{(1)}\right)_{xx}$. В силу требования, что $k_{01}^{(1)} = 0$, получаем $k_{01}^{(2)} = -\left(\ln k_{00}^{(1)}\right)_{xx} = -\frac{3}{(x-y)^2}$. Как и в предыдущем случае, это означает, что процесс построения каскада остановится.

Если при некотором шаге n $k_{00}^{(n)} = 0$ (или $h_{00}^{(n)} = 0$), то полученное уравнение, а значит и исходное, разрешимо в квадратурах. Так, если $n{=}2$, то β и β' связаны соотношением $4\beta'\beta - 6\beta + 13\beta' = 18$, получаемым из формулы для $h_{00}^{(2)}$. Оно имеет нетривиальные решения. Например, $\beta' = 0$, $\beta = -3$.

2.3.3. Уравнение типа Буссинеска-Лява. Общая методика построения каскада. Рассмотрим теперь уравнение более высокого порядка

$$\begin{aligned} L(u) \equiv u_{xxyy} - \frac{\beta'}{x-y}u_{xxy} + \frac{\beta}{x-y}u_{xyy} + \\ + \frac{2\beta+\beta'-\beta'\beta}{(x-y)^2}u_{xy} - \frac{\beta'}{(x-y)^2}u_{xx} - \frac{\beta}{(x-y)^2}u_{yy} - \\ - \frac{2(\beta+\beta'-\beta'\beta)}{(x-y)^3}u_x + \frac{2\beta(\beta'-2)}{(x-y)^3}u_y = 0, \end{aligned} \quad (2.68)$$

являющееся частным случаем

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}(x,y)\, D_x^i D_y^j u = 0, \quad a_{22} \equiv 1. \quad (2.69)$$

Для уравнения (2.69) конструкции (2.63) имеют вид

$$u_1 = u_x + a_{12}u, \quad u_2 = u_y + a_{21}u. \quad (2.70)$$

Так как в (2.69) переменные x и y являются независимыми и входят симметрично, рассмотрим подробно только первое из (2.70) (во втором достаточно потом заменить x на y и переставить индексы). В обозначениях (2.70) формула (2.69) примет вид:

$$u_{1xyy} + (a_{21}u_1)_{xy} - h_{11}u_{xy} - h_{20}u_{xx} - h_{02}u_{yy} - h_{10}u_x - h_{01}u_y - h_{00}u = 0,$$

где

$$h_{11} = 2a_{12y} + a_{21x} + a_{21}a_{12} - a_{11}, \quad h_{20} = a_{21y} - a_{20}, \quad h_{02} = a_{12x} - a_{02},$$

$$h_{10} = a_{12yy} + a_{21xy} + (a_{21}a_{12})_y - a_{10}, \quad h_{01} = 2a_{12xy} + (a_{21}a_{12})_x - a_{01},$$

$$h_{00} = a_{12xyy} + (a_{21}a_{12})_{xy} - a_{00}.$$

Если имеет место группа тождеств

$$h_{10} \equiv h_{01} \equiv h_{11} \equiv h_{20} \equiv h_{02} \equiv h_{00} \equiv 0, \tag{2.71}$$

то решение (2.69) представляется формулой:

$$u = e^{-\int a_{12}(x,y)dx} \int e^{\int a_{12}(x,y)dx} e^{-\int a_{21}(x,y)dy} \times$$

$$\times \left\{ \int e^{\int a_{21}(x,y)dy} \left\{ \int C_1(y)\,dy + C_2(x) \right\} dy + C_3(x) \right\} dx + C_4(y).$$

Пусть вместо (2.71) выполняются соотношения

$$h_{10} \equiv h_{01} \equiv h_{11} \equiv h_{20} \equiv h_{02} \equiv 0, \quad h_{00} \neq 0.$$

Тогда (2.69) преобразуется к виду

$$u_{1xyy} + (a_{21}u_1)_{xy} - h_{00}u = 0,$$

следовательно,

$$u = \frac{1}{h_{00}} \left[u_{1xyy} + (a_{21}u_1)_{xy} \right].$$

Применим далее методику п. 2.3.1 с целью получения уравнения, зависящего только от новой искомой функции u_1. Продифференцируем предпоследнее соотношение по x:

$$u_{1xxyy} + (a_{21}u_1)_{xxy} - h_{00x}u - h_{00}u_x = 0.$$

Раскроем скобки:

$$u_{1xxyy} + a_{21xxy}u_1 + a_{21xx}u_{1y} +$$

$$+ 2a_{21xy}u_{1x} + 2a_{21x}u_{1xy} + a_{21y}u_{1xx} + a_{21}u_{1xxy} -$$

$$- h_{00x}u - h_{00}(u_1 - a_{12}u) = 0.$$

Сгруппируем соответствующие слагаемые:

$$u_{1xxyy} + a_{21}u_{1xxy} + a_{21y}u_{1xx} + 2a_{21x}u_{1xy} + 2a_{21xy}u_{1x} + a_{21xx}u_{1y} +$$

$$+u_1\left(a_{21xxy}-h_{00}\right)+uh_{00}\left(-\frac{h_{00x}}{h_{00}}+a_{12}\right)=0.$$

Заменим u:

$$u_{1xxyy}+a_{21}u_{1xxy}+a_{21y}u_{1xx}+2a_{21x}u_{1xy}+2a_{21xy}u_{1x}+a_{21xx}u_{1y}+$$

$$+u_1\left(a_{21xxy}-h_{00}\right)+\left(u_{1xyy}+\left(a_{21}u_1\right)_{xy}\right)\left(-\left(\ln h_{00}\right)_x+a_{12}\right)=0.$$

Тогда (2.69) преобразуется к виду:

$$\sum_{i,j=0}^{2}a_{ij}^{(1)}\left(x,y\right)\frac{\partial^{i+j}u_1}{\partial x^i\partial y^j}=0\quad,a_{22}^{(1)}\equiv 1,$$

где

$$a_{21}^{(1)}=a_{21},\quad a_{12}^{(1)}=a_{12}-\left(\ln h_{00}\right)_x,\quad a_{20}^{(1)}=a_{21y},\quad a_{02}^{(1)}=0,$$
$$a_{11}^{(1)}=2a_{21x}+a_{21}a_{12}^{(1)},\quad a_{10}^{(1)}=2a_{21xy}+a_{21y}a_{12}^{(1)},$$
$$a_{01}^{(1)}=a_{21xx}+a_{21x}a_{12}^{(1)},\quad a_{00}^{(1)}=a_{21xxy}+a_{21xy}a_{12}^{(1)}-h_{00}.$$

Пусть полученное уравнение решается в квадратурах, тогда и исходное уравнение имеет явное решение. В противном случае процесс может быть продолжен.

Вернемся теперь к уравнению (2.68).

Здесь $h_{00}=\frac{6\beta(\beta'-1)}{(x-y)^4}$. Очевидно, что при $h_{00}=0$ (то есть при $\beta=0$ или $\beta'=1$) (2.68) разрешимо в квадратурах. Так, если $\beta=0$, уравнение (2.68) примет вид

$$L\left(u\right)\equiv u_{xxyy}-\frac{\beta'}{x-y}u_{xxy}+\frac{\beta'}{\left(x-y\right)^2}u_{xy}-\frac{\beta'}{\left(x-y\right)^2}u_{xx}-\frac{2\beta'}{\left(x-y\right)^3}u_x=0,$$

а его решение —

$$u=\int\left(x-y\right)^{\beta'}\times$$

$$\times\left\{\int\left(x-y\right)^{-\beta'}\left\{\int C_1\left(y\right)dy+C_2\left(x\right)\right\}dy+C_3\left(x\right)\right\}dx+C_4\left(y\right).$$

Пусть теперь $h_{00}\neq 0$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$h_{00}^{(1)}=\frac{-12\beta+22\beta'+10\beta'\beta-24}{\left(x-y\right)^4},$$

$$h_{11}^{(1)}=2a_{12y}-\left(\ln h_{00}\right)_{xy}-3a_{21x}=\frac{2\beta-3\beta'+4}{\left(x-y\right)^4},$$

$$h_{20}^{(1)} = a_{21y} - a_{21y} = 0, \quad h_{02}^{(1)} = a_{12} - (\ln h_{00})_x = \frac{\beta + 4}{x - y},$$

$$h_{10}^{(1)} = a_{12yy} - (\ln h_{00})_{xyy} + a_{21}\left(a_{12y} - (\ln h_{00})_{xy}\right) - a_{21xy} =$$

$$= \frac{2\beta + 8 - \beta\beta' - 2\beta'}{(x-y)^3}.$$

$$h_{01}^{(1)} = \frac{-4\beta + 3\beta\beta' + 8\beta' - 16}{(x-y)^3}.$$

Согласно результатам, полученным из общих рассуждений, требуем равенства нулю найденных $h_{ij}^{(1)}$, кроме $h_{00}^{(1)}$. В результате получаем противоречивую систему для нахождения β и β'. То есть, продолжение процесса в данном случае далее невозможно.

Отметим, что продолжение указанного процесса позволяет построить цепочку уравнений вида (2.68), для которых соответствующие $h_{00}^{(n)}$ определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$h_{00}^{(n)} - h_{00}^{(n-1)} = 2\frac{3\beta' - 2(\beta + 4n) + 2\beta'(\beta + 4n)}{(x-y)^4}.$$

Глава 2
Задача Коши

Данная глава посвящена методу Римана для уравнения (1) общего вида. Отметим, что метод Римана для задачи Коши в случае уравнения Бианки рядом авторов разрабатывался ранее (см. [50], предисловие и глава 1). В частности, в 1990 г. В. И. Жегаловым [38] было рассмотрено уравнение с переменными коэффициентами

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \tag{2.72}$$

Отправным пунктом рассуждений являлся результат И. Н. Векуа из [15], где было показано, что функция Римана для уравнения

$$L_1(u) \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(x,y) - \int\limits_{\tau}^{y} a(x,\eta)v(x,\eta)\,d\eta - \int\limits_{t}^{x} b(\xi,y)v(\xi,y)\,d\xi + \\ + \int\limits_{t}^{x}\int\limits_{\tau}^{y} c(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi = 1$$

и имеет место тождество

$$\frac{\partial^2(uR)}{\partial x \partial y} - RL_1(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial y} - aR\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial x} - bR\right)\right],$$

отличающееся от тождества, использованного Б. Риманом. Данная модификация метода Римана допускала возможность распространения на случай уравнения (2.72), что и было реализовано в [38].

Позднее, в ряде работ В. И. Жегалова, В. А. Севастьянова и Е. А. Уткиной этот модифицированный метод был распространен на класс уравнений с доминирующей частной производной [50], [41], [42], [44], [45], [47], [49], [51], [155], [156], [157], [172], [173], при этом для уравнений с кратным дифференцированием изучалась задача Гурса, а задача Коши исследовалась лишь для уравнения Бианки. Существенное значение имеет то, что функция Римана в этих работах определяется не как решение сопряженного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, число которых очень быстро увеличивается с ростом n, а как решение некоторого интегрального уравнения. Отметим еще, что при построении решений задач Коши В. А. Севастьянов использовал аппарат дифференциальных форм. Оба указанных изменения привели к существенному уменьшению сложности выкладок, и вывод окончательных формул решения стал более компактным.

В § 1 подробно изложен процесс построения решения задачи Коши в терминах функции Римана, то есть решена поставленная М. К. Фаге [201] задача: построить в терминах функции Римана решение задачи Коши для уравнения с доминирующей частной производной в общем случае.

Изложенная здесь схема рассуждений с очевидными изменениями может быть распространена на случай матричного уравнения (то есть системы), подобно тому, как это сделано в [8, с. 62–66] для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными.

§ 1. Построение решения задачи Коши методом Римана

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{\substack{0\leqslant q_i\leqslant m_i,\\ i=\overline{1,n}}} a_{q_1q_2\ldots q_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)u_{x_1^{q_1}x_2^{q_2}\ldots x_n^{q_n}} = f(x_1,x_2,\ldots,x_n), \qquad (1.1)$$

где $a_{q_1q_2\ldots q_n}$, f — заданные функции, $a_{m_1m_2\ldots m_n}\equiv 1$, u — искомая функция; порядок уравнения (1.1) равен $m=m_1+m_2+\cdots+m_n$.

1.1. Доказательство основного тождества. Считаем, что коэффициенты (1.1) удовлетворяют включениям $a_{q_1q_2\ldots q_n}\in C^{(q_1,q_2,\ldots,q_n)}$, $f\in C$ в замыкании рассматриваемой области G (областью всюду будем называть открытое связное множество). Класс $C^{(q_1,q_2,\ldots,q_n)}(\overline{G})$ означает существование и непрерывность всех производных $\partial^{l_1+l_2+\cdots+l_n}/\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}\ldots\partial x_n^{l_n}$, $l_i=\overline{0,q_i}$, $i=\overline{1,n}$, на множестве $\overline{G}$. Введем для (1.1) функцию Римана $R=R(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ как решение интегрального уравнения

$$R(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{Q_{k,n}}\int\limits_{\xi_{q_1}}^{x_{q_1}}\int\limits_{\xi_{q_2}}^{x_{q_2}}\ldots\int\limits_{\xi_{q_k}}^{x_{q_k}}F_{q_1q_2\ldots q_k}(x_1,x_2,\ldots,$$
$$x_n,\alpha_{q_1},\alpha_{q_2},\ldots,\alpha_{q_k})R(x_1,x_2,\ldots,x_{q_1-1},\alpha_{q_1},x_{q_1+1},\ldots,$$
$$x_{q_k-1},\alpha_{q_k},x_{q_k+1},\ldots,x_n)d\alpha_{q_k}\ldots d\alpha_{q_2}d\alpha_{q_1}=1, \quad (1.2)$$

где вторая сумма берется по множеству всех упорядоченных наборов индексов $Q_{k,n}=\{(q_1,q_2,\ldots,q_k)\,|\,1\leqslant q_1<q_2<\cdots<q_k\leqslant n\}$,

$$F_{q_1q_2\ldots q_k}(x_1,x_2,\ldots,x_n,\alpha_{q_1},\alpha_{q_2},\ldots,\alpha_{q_k})=$$
$$=\sum_{p_{q_1}=0}^{m_{q_1}-1}\sum_{p_{q_2}=0}^{m_{q_2}-1}\cdots\sum_{p_{q_k}=0}^{m_{q_k}-1}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k}(m_{q_i}-p_{q_i})}a_{p_1p_2\ldots p_n}(x_1,x_2,\ldots,$$
$$x_{q_1-1},\alpha_{q_1},x_{q_1+1},\ldots,x_{q_k-1},\alpha_{q_k},x_{q_k+1},\ldots,x_n)\prod_{j=1}^{k}\frac{(x_{q_j}-\alpha_{q_j})^{m_{q_j}-p_j-1}}{(m_{q_j}-p_j-1)!},$$

причем если $i\neq q_j$, то $p_i=0$. Здесь x_i, $\alpha_i\in[\xi_i,\eta_i]$, $i=\overline{1,n}$. Пусть $\Omega=[\xi_1,\eta_1]\times[\xi_2,\eta_2]\times\cdots\times[\xi_n,\eta_n]\subset\overline{G}$. Нетрудно показать, что решение (1.2) существует и единственно в классе $C(\Omega)$ [50, с. 46], [154], [156]. Как обычно (например [8, с. 63]), считаем R функцией как переменных $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, так и параметров $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, то есть $R=R(x_1,x_2,\ldots,x_n;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$. Из (1.2) следует, что $R(x_1,\ldots,x_n;x_1,\ldots,x_n)\equiv 1$.

Рассмотрим конструкции

$$A_{l_1l_2\ldots l_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=$$
$$=\sum_{s_1=0}^{l_1}\sum_{s_2=0}^{l_2}\cdots\sum_{s_n=0}^{l_n}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}s_i}(Ra_{m_1-s_1,m_2-s_2,\ldots,m_n-s_n})_{x_1^{l_1-s_1}x_2^{l_2-s_2}\ldots x_n^{l_n-s_n}}, \quad (1.3)$$

$$0\leqslant l_i\leqslant m_i,\ i=\overline{1,n}.$$

Всего имеется $(m_1+1)(m_2+1)\ldots(m_n+1)$ конструкций вида (1.3) (как и коэффициентов уравнения (1.1)), причем $A_{m_1m_2\ldots m_n}=0$ есть сопряженное к (1.1) уравнение $L^*(R)=0$, а $A_{00\ldots0}\equiv R$.

Из уравнения (1.2) вытекают тождества

$$A_{l_1l_2\ldots l_n}(x_1,x_2,\ldots,x_{q_1-1},\xi_{q_1},x_{q_1+1},\ldots,$$
$$x_{q_k-1},\xi_{q_k},x_{q_k+1},\ldots,x_n;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\equiv 0 \quad (1.4)$$

при $l_{q_1} \leqslant m_{q_1} - 1, \ldots, l_{q_k} \leqslant m_{q_k} - 1$, $l_r = m_r$, $r \neq q_i$, $i = \overline{1,k}$. Покажем это. Дифференцируем (1.2) l_1 раз по x_1, l_2 раз по x_2, …, l_n раз по x_n, после чего полагаем $x_{q_1} = \xi_{q_1}, x_{q_2} = \xi_{q_2}, \ldots, x_{q_k} = \xi_{q_k}$, где $l_{q_1} \leqslant m_{q_1} - 1$, $l_{q_2} \leqslant m_{q_2} - 1, \ldots$, $l_{q_k} \leqslant m_{q_k} - 1$, а $l_r = m_r$ при $r \neq q_i$, $i = \overline{1,k}$. Тогда

$$R_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}} + \sum_{p_1=m_1-l_1}^{m_1-1} \sum_{p_2=m_2-l_2}^{m_2-1} \cdots \sum_{p_n=m_n-l_n}^{m_n-1} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i - p_i} \times \\ \times \left(R a_{p_1 p_2 \ldots p_n}\right)_{x_1^{l_1+p_1-m_1} x_2^{l_2+p_2-m_2} \ldots x_n^{l_n+p_n-m_n}} = 0. \quad (1.5)$$

Ясно, что (1.5) есть равенство $A_{l_1 l_2 \ldots l_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{q_1-1}, \xi_{q_1}, x_{q_1+1}, \ldots, x_{q_k-1}, \xi_{q_k}, x_{q_k+1}, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0$ (достаточно положить $s_1 = m_1 - p_1$, $s_2 = m_2 - p_2, \ldots, s_n = m_n - p_n$).

Центральную роль в дальнейшем играет тождество

$$RL(u) \equiv \sum_{\substack{p_i \leqslant m_i, \\ \sum p_i < \sum m_i, \\ 0 \leqslant l_i \leqslant 1, \\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \left(A_{p_1 p_2 \ldots p_n} u_{x_1^{m_1-l_1-p_1} x_2^{m_2-l_2-p_2} \ldots x_n^{m_n-l_n-p_n}}\right)_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}}, \quad (1.6)$$

где p_i, m_i, l_i — целые неотрицательные числа, справедливое для любой функции класса $C^{(m_1,\ldots,m_n)}$. В сумме (1.6) каждое слагаемое встречается лишь один раз и определяется конструкцией $A_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ (точнее, набором $(p_1, p_2, \ldots p_n)$). Формула (1.6) строится по следующему правилу. Берется набор $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, затем определяем набор $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ так, чтобы $p_1 + l_1 \leqslant m_1$, $p_2 + l_2 \leqslant m_2$, …, $p_n + l_n \leqslant m_n$, при этом берутся наибольшие значения l_1, l_2, …, l_n (т. е. $l_i = 1$, если $p_i < m_i$, $l_i = 0$, если $p_i = m_i$). Эти наборы $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ однозначно определяют слагаемое из (1.6).

Отметим, что при построении решения задачи Гурса для уравнения с доминирующей частной производной [182] (частные случаи в [47], [49], [51], [172], [173]) использовалось тождество, структура которого существенно отличается от структуры тождества (1.6). В отличие от (1.6), использованные в этих работах тождества не имеют структуры аналогичного тождества для уравнения Бианки [41], [42], [50], [155], [156], [157], что делает их непригодными для построения решений задач Коши для уравнений с доминирующими производными с кратным дифференцированием.

Чтобы доказать тождество (1.6) достаточно показать, что правая часть (1.6) после раскрытия скобок, приведения подобных и добавления и вычитания выражения $Ra_{00\ldots0}u$ дает

$$RL(u)+(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i+1}L^*(R)u, \tag{1.7}$$

в результате из (1.6) получаем тождество, поскольку R является решением сопряженного уравнения (см. (1.4) при $l_i=m_i$, $i=\overline{1,n}$). Для этого рассмотрим те слагаемые (1.6), в которых встречается коэффициент $a_{r_1r_2\ldots r_n}$. Если мы покажем, что $a_{r_1r_2\ldots r_n}$ после приведения подобных в (1.6) дает

$$Ra_{r_1r_2\ldots r_n}u_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}}+(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(2m_i-r_i)+1}(Ra_{r_1r_2\ldots r_n})_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}}u, \tag{1.8}$$

то докажем требуемое (все слагаемые вида (1.8) и дадут $RL(u)+(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i+1}L^*(R)u$).

Коэффициент $a_{r_1r_2\ldots r_n}$ встречается в конструкциях $A_{p_1p_2\ldots p_n}$, в которых $m_1-p_1\leqslant r_1$, $m_2-p_2\leqslant r_2$, $\ldots$, $m_n-p_n\leqslant r_n$. В каждой такой конструкции $a_{r_1r_2\ldots r_n}$ встречается только один раз. Из (1.3) $s_1=m_1-r_1$, $s_2=m_2-r_2$, $\ldots$, $s_n=m_n-r_n$, следовательно, в соответствующей конструкции $A_{p_1p_2\ldots p_n}$ коэффициент $a_{r_1r_2\ldots r_n}$ присутствует в слагаемом

$$(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i)}(Ra_{r_1r_2\ldots r_n})_{x_1^{p_1+r_1-m_1}x_2^{p_2+r_2-m_2}\ldots x_n^{p_n+r_n-m_n}}. \tag{1.9}$$

Все такие слагаемые одного знака (поскольку m_i, r_i — фиксированные величины). Таким образом, суммируя все слагаемые (1.9) в правой части (1.6), получаем

$$\sum_{\substack{m_i-r_i\leqslant p_i,\\ 0\leqslant l_i\leqslant 1,\\ i=\overline{1,n}}}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i+p_i)}\big((Ra_{r_1r_2\ldots r_n})_{x_1^{p_1+r_1-m_1}x_2^{p_2+r_2-m_2}\ldots x_n^{p_n+r_n-m_n}}\times$$

$$\times\, u_{x_1^{m_1-l_1-p_1}x_2^{m_2-l_2-p_2}\ldots x_n^{m_n-l_n-p_n}}\big)_{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}}. \tag{1.10}$$

Отметим, что сумма порядков всех производных по x_i в каждом из слагаемых суммы (1.10) дает r_i.

Чтобы доказать, что (1.10) дает (1.8), используем следующее предложение.

Теорема 1.1. *Имеет место тождество*

$$\sum_{\substack{m_i-r_i\leqslant p_i,\\ 0\leqslant l_i\leqslant 1,\\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i+p_i)}\big(v_{x_1^{p_1+r_1-m_1}x_2^{p_2+r_2-m_2}\dots x_n^{p_n+r_n-m_n}}\times$$

$$\times\, u_{x_1^{m_1-l_1-p_1}x_2^{m_2-l_2-p_2}\dots x_n^{m_n-l_n-p_n}}\big)_{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}} =$$

$$= vu_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}} + (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(2m_i-r_i)+1} v_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}}u, \quad (1.11)$$

где сумма в левой части (1.11) *строится по тому же правилу, что и сумма* (1.6)*,* n*,* r_i*,* m_i *— фиксированные целые неотрицательные числа,* u *и* v *— функции класса* $C^{(r_1,r_2,\dots,r_n)}$*.*

Доказательство проведем методом математической индукции. Базис индукции: при $m_1 = 1, \dots, m_n = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0, \dots, r_n = 0$ формула (1.11) представляет собой очевидное равенство $(vu)_{x_1} = v_{x_1}u + vu_{x_1}$.

Пусть при фиксированных m_i, r_i, $i = \overline{1,n}$ тождество (1.11) выполняется. Пусть теперь добавляется еще одно дифференцирование по переменной x_n, т. е. от набора $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n)$ переходим к набору $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n + 1)$. Имеем

$$S = \sum_{\substack{m_i-r_i\leqslant p_i,\\ i=\overline{1,n-1},\\ m_n-r_n\leqslant p_n+1,\\ 0\leqslant l_j\leqslant 1}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i+p_i)-1}\big(v_{x_1^{p_1+r_1-m_1}\dots x_{n-1}^{p_{n-1}+r_{n-1}-m_{n-1}}x_n^{p_n+r_n-m_n+1}}\times$$

$$\times u_{x_1^{m_1-l_1-p_1}\dots x_{n-1}^{m_{n-1}-l_{n-1}-p_{n-1}}x_n^{m_n-l_n-p_n}}\big)_{x_1^{l_1}\dots x_{n-1}^{l_{n-1}}x_n^{l_n}} =$$

$$= (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i)-1} \sum_{\substack{m_i-r_i\leqslant p_i,\\ i=\overline{1,n},\\ 0\leqslant l_j\leqslant 1}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\big((v_{x_n})_{x_1^{p_1+r_1-m_1}x_2^{p_2+r_2-m_2}\dots x_n^{p_n+r_n-m_n}}\times$$

$$\times u_{x_1^{m_1-l_1-p_1}x_2^{m_2-l_2-p_2}\dots x_n^{m_n-l_n-p_n}}\big)_{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}} +$$

$$+(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i)-1} \sum_{\substack{m_i-r_i\leqslant p_i,\\ i=\overline{1,n-1},\\ m_n-r_n-1=p_n,\\ 0\leqslant l_j\leqslant 1}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}p_i+m_n-r_n-1}\times$$

$$\times(v_{x_1^{p_1+r_1-m_1}x_2^{p_2+r_2-m_2}\ldots x_{n-1}^{p_{n-1}+r_{n-1}-m_{n-1}}}\times$$

$$\times u_{x_1^{m_1-l_1-p_1}x_2^{m_2-l_2-p_2}\ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-l_{n-1}-p_{n-1}}x_n^{r_n}})_{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_{n-1}^{l_{n-1}}x_n}. \tag{1.12}$$

В правой части (1.12) первая сумма содержит внутри скобок все производные v по x_n, а вторая не содержит внутри скобок производных v по x_n. Применяя предположение индукции к первой сумме, получаем

$$-v_{x_n}u_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n}}-(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(2m_i-r_i)+1}v_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n+1}}u. \tag{1.13}$$

Вторая сумма дает (также используем предположение индукции)

$$(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i)-1}\sum_{\substack{m_i-r_i\leqslant p_i,\\ i=\overline{1,n-1},\\ m_n-r_n-1=p_n,\\ 0\leqslant l_j\leqslant 1}}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}p_i+m_n-r_n-1}\times$$

$$\times\,(v_{x_1^{p_1+r_1-m_1}x_2^{p_2+r_2-m_2}\ldots x_{n-1}^{p_{n-1}+r_{n-1}-m_{n-1}}}\times$$

$$\times\,u_{x_1^{m_1-l_1-p_1}x_2^{m_2-l_2-p_2}\ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-l_{n-1}-p_{n-1}}x_n^{r_n}})_{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_{n-1}^{l_{n-1}}x_n}=$$

$$=(vu_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n}}+(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(2m_i-r_i)+1}v_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_{n-1}^{r_{n-1}}}u_{x_n^{r_n}})_{x_n}+$$

$$+(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}r_i}(v_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_{n-1}^{r_{n-1}}}u_{x_n^{r_n}})_{x_n}=v_{x_n}u_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n}}+vu_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n+1}}. \tag{1.14}$$

Складывая (1.13) и (1.14), получаем, что (1.12) принимает вид

$$S=vu_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n+1}}+(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(2m_i-r_i)+2m_n-(r_n+1)+1}v_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n+1}}u.$$

Теорема доказана.

Чтобы убедиться, что (1.10) дает (1.8), достаточно теперь положить в (1.11) $v\equiv Ra_{r_1r_2\ldots r_n}$. Следовательно, формула (1.6) справедлива.

1.2. Задача Коши. Общая схема дальнейших рассуждений аналогична приведенной в [155], [156], [50, с. 79–88] для уравнения Бианки. В пространстве R^n рассмотрим поверхность S класса C^{m-1}, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-1}),\\ x_2 = x_2(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-1}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n = x_n(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-1}),\end{cases}\quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial\mu_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial\mu_1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\mu_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial\mu_{n-1}}\end{pmatrix}=n-1,$$

$(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) \in H$, где H — область пространства R^{n-1}. Считаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость не параллельную ни одной из координатных осей.

Выберем точку $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ так, чтобы плоскости $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots,$ $x_n = x_n^0$ вырезали из поверхности S ограниченный участок S^0. Обозначим через D^0 конечную область пространства R^n, ограниченную плоскостями $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots,$ $x_n = x_n^0$ и поверхностью S^0. Считаем ориентацию области D^0 положительной.

Регулярным в области D_0 решением уравнения (1.1) назовем решение, непрерывное в D_0 вместе со всеми входящими в это уравнение производными.

Задача. *Найти регулярное в области D^0 решение уравнения* (1.1), *удовлетворяющее условиям*

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \mathtt{l}^k}\right|_{S^0} = \psi_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{1.15}$$

$\psi_k \in C^{m-k}(\overline{S^0})$, *а $\vec{\mathtt{l}}$ — заданное на S некасательное к этой поверхности поле направлений.*

Пусть поле направлений $\vec{\mathtt{l}}$ задано вектором

$$\vec{\mathtt{l}}\Big(\mathtt{l}_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \ldots, \mathtt{l}_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})\Big), \quad |\,\vec{n}\,| \equiv 1.$$

Введем систему координат, связанную с поверхностью S:

$$x_i = x_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) + \mathtt{l}_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})\mu_n, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mu_n \in R. \tag{1.16}$$

Поле направлений $\vec{\mathtt{l}}$ не касательно к S, следовательно существует обратное преобразование координат $\mu_i = \mu_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ класса C^{m-1} в окрестности поверхности S [82, с. 495].

Отметим, что значения u и ее производных на S определяются по данным (1.15), поскольку частные производные решения u на поверхности S по $x_1, \ldots, x_n$ находятся дифференцированием $u = U(\mu_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mu_n(x_1, \ldots, x_n))$ как сложной функции. Нетрудно заметить, что в силу условий гладкости, налагаемых на поверхность S и данные смешанной задачи, все частные производные на S^0 до порядка $(m-1)$ включительно, входящие в уравнение (1.1), будут непрерывными функциями.

Решение задачи Коши существует и единственно, так как заменой

$$v = u_{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}}$$

задача Коши сводится к интегральному уравнению с частными интегралами относительно функции v, решение которого существует и единственно в классе непрерывных функций. Покажем это. Поверхность S может быть задана уравнениями $x_i = \sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Введем интегральные операторы

$$I_j\varphi(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{\sigma_j}^{x_j} \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, x_n) d\alpha_j.$$

Тогда

$$u_{x_1^{m_1-k_1} x_2^{m_2-k_2} \dots x_n^{m_n-k_n}} = g(x_1, \dots, x_n) + I_1^{k_1} I_2^{k_2} \dots I_n^{k_n} v(x_1, \dots, x_n), \tag{1.17}$$

где функция $g(x_1, \dots, x_n)$, очевидно, определяется по известным значениям частных производных функции u на поверхности S. Учтем, что

$$I_j^{k_j} v(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{x_j^1}^{x_j} \frac{(x_j - \alpha_j)^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} v(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, x_n) d\alpha_j.$$

Подставляя (1.17) в (1.1), получим интегральное уравнение относительно функции v

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{Q_{k,n}} \int\limits_{\sigma_{q_1}}^{x_{q_1}} \int\limits_{\sigma_{q_2}}^{x_{q_2}} \dots \int\limits_{\sigma_{q_k}}^{x_{q_k}} \Phi_{q_1 q_2 \dots q_k}(x_1, x_2, \dots, \\ x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \dots, \alpha_{q_k}) v(x_1, x_2, \dots, x_{q_1 - 1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1 + 1}, \dots, \\ x_{q_k - 1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k + 1}, \dots, x_n) d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_2} d\alpha_{q_1} = f_1(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{q_1 q_2 \dots q_k}(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \dots, \alpha_{q_k}) = \\ = \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{q_1}-1} \sum_{p_{q_2}=0}^{m_{q_2}-1} \cdots \sum_{p_{q_k}=0}^{m_{q_k}-1} a_{p_1 p_2 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^{k} \frac{(x_{q_j} - \alpha_{q_j})^{m_{q_j} - p_{q_j} - 1}}{(m_{q_j} - p_{q_j} - 1)!}, \end{aligned}$$

причем если $i \neq q_j$, то $p_i = m_i$. Очевидно f_1 — известная непрерывная функция.

Это уравнение Вольтерра с непрерывными ядрами и свободным членом (как и приведенное выше уравнение (1.2)). Доказательство существования и единственности решения этого уравнения можно провести стандартными для уравнений Вольтерра методами.

По известной функции v однозначно восстанавливаем функцию u в области D_0, используя известные значения u и ее производных на S^0. Ясно, что найденная таким образом функция u является регулярным решением уравнения (1.1).

Проведем через точку $M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in D^0$ плоскости $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \dots,$ $x_n = \xi_n$. Получим область $D \subset D^0$, граница которой образована указанными плоскостями и частью поверхности S^0, которую обозначим через S^1. Ясно, что для решения задачи Коши достаточно найти значение решения уравнения (1.1) в точке M. Это достигается путем интегрирования тождества (1.6) по области D с использованием общей формулы Стокса [83, с. 246]

$$\int\limits_D \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k =$$
$$= \int\limits_{\partial D} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} A_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_k, \quad (1.19)$$

где ∂D — граница D.

Введем обозначения

$$Q = \{1, 2, \dots, n\}, \quad Q_n^{l,l+k} = \{(q_1, q_2, \dots, q_n) \,|\, \{q_j | 1 \leqslant j \leqslant n\} =$$
$$= \{1, 2, \dots, n\},\, q_1 < \dots < q_l, q_{l+1} < \dots < q_{l+k},\, q_{l+k+1} < \dots < q_n\},$$

$$B_{q_1} = \sum_{\substack{0 \leqslant l_{q_i} \leqslant 1,\\ i=\overline{2,n},\, l_{q_1}=1,\\ p_r \leqslant m_r,\, r=\overline{1,n}}} \frac{(-1)^{\sum\limits_{i=1}^n p_i}}{\sum\limits_{i=1}^n l_{q_i}} \times$$
$$\times \left(A_{p_1 \dots p_n} u_{x_{q_1}^{m_{q_1}-p_{q_1}-1} x_{q_2}^{m_{q_2}-p_{q_2}-l_{q_2}} \dots x_{q_n}^{m_{q_n}-p_{q_n}-l_{q_n}}}\right)_{x_{q_2}^{l_{q_2}} \dots x_{q_n}^{l_{q_n}}}, \dots,$$

$$B_{q_1 \dots q_k} = \sum_{\substack{0 \leqslant l_{q_i} \leqslant 1,\\ i=\overline{k+1,n},\\ l_{q_j}=1,\, j=\overline{1,k},\\ p_r \leqslant m_r,\, r=\overline{1,n}}} \frac{(-1)^{\sum\limits_{i=1}^n p_i}}{\prod\limits_{j=1}^k \sum\limits_{i=j}^n l_{q_i}} \times$$
$$\times \left(A_{p_1 \dots p_n} u_{x_{q_1}^{m_{q_1}-p_{q_1}-1} x_{q_2}^{m_{q_2}-p_{q_2}-1} \dots x_{q_k}^{m_{q_k}-p_{q_k}-1} x_{q_{k+1}}^{m_{q_{k+1}}-p_{q_{k+1}}-l_{q_{k+1}}} \dots x_{q_n}^{m_{q_n}-p_{q_n}-l_{q_n}}}\right)_{x_{q_{k+1}}^{l_{q_{k+1}}} \dots x_{q_n}^{l_{q_n}}}.$$

Конструкции $B_{q_1 \dots q_k}$, получающиеся перестановкой индексов, совпадают.

Рассмотрим совокупность ориентированных многообразий, обозначаемых символами S^1, D и ∂D с индексами, являющимися комбинациями из 1, $2, \ldots, n-1$ различных цифр $1, 2, \ldots, n$ (каждая из которых соответствует номеру переменной). При этом S^1 и D-многообразия с индексами являются пересечениями соответственно S^1 и D с соответствующими плоскостями, а ∂D-многообразия с индексами — краями соответствующих D-многообразий. Например S^1_{12} — множество точек поверхности S^1, лежащих в плоскостях $x_1 = \xi_1$ и $x_2 = \xi_2$. Ясно, что геометрически S^1-многообразия содержатся в ∂D-многообразиях с теми же индексами, а D-многообразия — в ∂D-многообразиях с теми же индексами без последнего. Например S^1_2 — часть ∂D_2, D_{312} — часть ∂D_{31}. Ориентации ∂D-многообразий считаем согласованными с ориентациями соответствующих D-многообразий. В результате будут определены все введенные ориентированные многообразия. Два из рассмотренных как D, так и S^1-многообразия геометрически совпадают, если их индексы образованы одним и тем же неупорядоченным набором переменных. При этом, если индексы одного из них получаются четной перестановкой индексов другого, то ориентации этих многообразий совпадают, а в случае нечетной перестановки ориентации противоположны.

Запишем правую часть тождества (1.6) в дивергентной форме

$$RL(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial x_i}. \tag{1.20}$$

Пусть u — регулярное решение уравнения (1.1). Тогда, интегрируя (1.20) по области D и применяя общую формулу Стокса (1.19) при $k = n$, получим

$$\int_D Rf dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int_{\partial D} \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \cdots \wedge dx_{q_n}.$$

Заменим интеграл по множеству ∂D суммой интегралов по его составляющим

$$\int_{\partial D} \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \cdots \wedge dx_{q_n} = \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int_{D_{q_1}} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \cdots \wedge dx_{q_n} +$$
$$+ \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int_{S^1} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \cdots \wedge dx_{q_n}. \tag{1.21}$$

Учтем, что входящие в B_{q_1} слагаемые, соответствующие $l_{q_2} = l_{q_3} = \cdots = l_{q_n} = 0$, тождественно равны нулю на D_{q_1} в силу (1.4). Поэтому B_{q_1} на D_{q_1} можно снова записать в дивергентном виде

$$B_{q_1} = \sum_{i\in Q\setminus\{q_1\}} \frac{\partial B_{q_1 i}}{\partial x_i}. \tag{1.22}$$

Подставив (1.22) в первую сумму правой части (1.21), применяем формулу Стокса

$$\begin{aligned} I_1 = \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int\limits_{D_{q_1}} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n} = \\ = 2! \sum_{Q_n^{2,1}} \sigma(q_1, \dots, q_n) \int\limits_{D_{q_1 q_2}} B_{q_1 q_2} dx_{q_3} \wedge \dots \wedge dx_{q_n} + \\ + \sum_{Q_n^{1,2}} \sigma(q_1, \dots, q_n) \int\limits_{S^1_{q_1}} B_{q_1 q_2} dx_{q_3} \wedge \dots \wedge dx_{q_n}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

где $\sigma(q_1, \dots, q_n)$ — знак перестановки $\binom{1\,\dots n}{q_1 \dots q_n}$. При получении (1.23) мы перешли от интеграла по множеству D_{q_1} к интегралу по его границе ∂D_{q_1}, разбив затем множество ∂D_{q_1} на его составляющие. При этом учтено, что D_{ij} и D_{ji} совпадают как множества, но имеют противоположные ориентации. То есть в процессе вычислений появляются одинаковые интегралы (их количество равно 2) по одной области с точностью до ориентации. Нетрудно заметить, что с учетом знаков эти члены оказываются равными, поэтому мы оставляем интеграл с коэффициентом 2! по D-многообразию с упорядоченным набором индексов. Знак перед ним можно записать в виде $\sigma(q_1, \dots, q_n)$.

Далее мы будем продолжать этот процесс, то есть заменять интегралы по областям $\partial D_{q_1 \dots q_p}$ суммами интегралов по их составляющим, а затем представлять подынтегральные выражения интегралов по областям $D_{q_1 \dots q_p q_{p+1}}$ в дивергентном виде (что возможно в силу тождеств (1.4)). При этом, как уже было указано выше, будут появляться одинаковые интегралы. Например, при фиксированном множестве $\{q_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$ будет $k!$ интегралов от одного выражения по областям $D_{h_1 \dots h_k}$, где $(h_1, \dots, h_k)$ — всевозможные перестановки $(q_1, \dots, q_k)$. С учетом знаков все эти $k!$ интегралов равны между собой.

Итак, слагаемые в $B_{q_1 q_2}$ при $l_{q_3} = l_{q_4} = \dots = l_{q_n} = 0$ тождественно равны нулю на $D_{q_1 q_2}$ в силу (1.4), поэтому $B_{q_1 q_2}$ на $D_{q_1 q_2}$ можно записать в дивергентном виде

$$B_{q_1 q_2} = \sum_{i\in Q\setminus\{q_1, q_2\}} \frac{\partial B_{q_1 q_2 i}}{\partial x_i}.$$

Тогда

$$I_2 = 2!\sum_{Q_n^{2,1}} \sigma(q_1,\dots,q_n) \int\limits_{D_{q_1q_2}} B_{q_1q_2} dx_{q_3}\wedge\dots\wedge dx_{q_n} =$$

$$= 3!\sum_{Q_n^{3,1}} \sigma(q_1,\dots,q_n) \int\limits_{D_{q_1q_2q_3}} B_{q_1q_2q_3} dx_{q_4}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}+$$

$$+ 2!\sum_{Q_n^{2,2}} \sigma(q_1,\dots,q_n) \int\limits_{S^1_{q_1q_2}} B_{q_1q_2q_3} dx_{q_4}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}.$$

Дальнейший ход преобразований ясен из предыдущего. Для завершения процесса получения окончательной формулы надо определиться, каким будет последний шаг. Нетрудно усмотреть, что последним шагом будут одномерные интегралы. Очевидно, имеем

$$I_{n-2} = (n-1)!\sum_{Q_n^{n-1,1}} \sigma(q_1,\dots,q_n) \int\limits_{D_{q_1\cdots q_{n-1}}} B_{q_1\dots q_{n-1}} dx_{q_n}+$$

$$+(n-2)!\sum_{Q_n^{n-2,2}} \sigma(q_1,\dots,q_n) \int\limits_{S^1_{q_1\cdots q_{n-2}}} B_{q_1\dots q_{n-1}} dx_{q_n},$$

$$I_{n-1} = (n-1)!\sum_{Q_n^{n-1,1}} \sigma(q_1,\dots,q_n) \int\limits_{D_{q_1\cdots q_{n-1}}} \frac{\partial B_{q_1\dots q_n}}{\partial x_{q_n}} dx_{q_n} =$$

$$= (n-1)! n B_{1\dots n}(M) - (n-1)!\sum_{Q_n^{n-1,1}} B_{1\dots n}(S^1_{q_1q_2\dots q_{n-1}}) =$$

$$= \sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} (A_{p_1p_2\dots p_n} u_{x_1^{m_1-p_1-1}x_2^{m_2-p_2-1}\dots x_n^{m_n-p_n-1}})(M) -$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} (A_{p_1p_2\dots p_n} u_{x_1^{m_1-p_1-1}x_2^{m_2-p_2-1}\dots x_n^{m_n-p_n-1}})(S^1_{q_1q_2\dots q_{n-1}}) =$$

$$= u_{x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\dots x_n^{m_n-1}}(M) -$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} (A_{p_1p_2\dots p_n} u_{x_1^{m_1-p_1-1}x_2^{m_2-p_2-1}\dots x_n^{m_n-p_n-1}})(S^1_{q_1q_2\dots q_{n-1}}).$$

Здесь снова учтены тождества (1.4) при $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$.

Окончательно получаем

$$u_{x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\ldots x_n^{m_n-1}}(M) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}(A_{p_1p_2\ldots p_n}u_{x_1^{m_1-p_1-1}x_2^{m_2-p_2-1}\ldots x_n^{m_n-p_n-1}})(S^1_{q_1q_2\cdots q_{n-1}})-$$
$$-\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{Q_n^{k,2}}\sigma(q_1,q_2,\ldots,q_n)k!\int\limits_{S^1_{q_1q_2\cdots q_k}}B_{q_1q_2\ldots q_kq_{k+1}}dx_{q_{k+2}}\wedge\cdots\wedge dx_{q_n}+$$
$$+\int\limits_D Rf dx_1dx_2\ldots dx_n. \quad (1.24)$$

Формулу (1.24) можно переписать в виде

$$u_{x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\ldots x_n^{m_n-1}}(M) = \Phi(M), \quad (1.25)$$

где правая часть (1.24) $\Phi(M)$ содержит значения u и ее производных на S. Эти значения могут быть определены по данным Коши (1.15). Действительно, частные производные решения u на поверхности S по $x_1, \ldots, x_n$ находятся дифференцированием $u = U(\mu_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\mu_n(x_1,\ldots,x_n))$ как сложной функции.

Из приведенных рассуждений следует

Теорема 1.2. *Решение задачи Коши для уравнения* (1.1) *с граничными условиями* (1.15) *существует, единственно, и его можно вычислить, используя формулу* (1.25).

§ 2. Некоторые частные случаи задачи Коши

Ясно, что реализация схемы решения задачи Коши из § 1 даже в частных случаях требует определенной вычислительной работы. Вместе с тем, возможные приложения метода Римана связаны именно с конкретными уравнениями в пространствах невысокой размерности. Именно такие уравнения здесь и рассмотрены. Кроме того, разбор конкретных частных случаев позволяет лучше понять суть метода. В представленных в данном параграфе случаях могут использоваться обозначения, не согласованные с обозначениями из § 1.

Материал данного параграфа взят из работ [52], [113]–[115], в которых рассмотрены и другие уравнения.

2.1. Задача на плоскости. Сначала рассмотрим простейшие случаи, когда число независимых переменных равно двум.

2.1.1. Обобщение уравнения Аллера. Предложенную выше схему построения решения задачи Коши применим к уравнению

$$L(u) \equiv u_{xxy} + a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = f. \qquad (2.1)$$

Здесь и далее в данном параграфе для всех уравнений с двумя независимыми переменными в замыканиях рассматриваемых областей выполняются включения $a_{ij} \in C^{(i,j)}$, $f \in C$.

Частным случаем (2.1) является уравнение Аллера

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x.$$

Рассмотрим треугольную область D плоскости (ξ, η), ограниченную характеристиками $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, и отрезком кривой Σ: $\eta = \sigma(\xi)$, $\sigma'(\xi) < 0$, класса C^2.

Сформулируем задачу Коши: найти в D регулярное решение (2.1), удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{\Sigma} = u_0(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = u_1(\xi), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{\Sigma} = u_2(\xi). \qquad (2.2)$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали, $\vec{n} = (\sigma', -1)/\Delta$, $\Delta = \sqrt{1 + \sigma'^2(x)}$, $u_0 \in C^2[0, x_0]$, $u_1 \in C^1[0, x_0]$, $u_2 \in C[0, x_0]$.

Тождество (1.6) принимает вид

$$RL(u) \equiv (Ru_x)_{xy} - (A_{10}u)_{xy} - (A_{01}u_x)_x + (A_{11}u)_x + (A_{20}u)_y, \tag{2.3}$$

$$A_{10} = R_x - a_{11}R, \quad A_{01} = R_y - a_{20}R, \quad A_{11} = R_{xy} - (a_{20}R)_x - (a_{11}R)_y + a_{10}R,$$
$$A_{20} = R_{xx} - (a_{11}R)_x + a_{01}R,$$

где R зависит от (x, y, ξ, η), а коэффициенты уравнения — от (x, y); $u(x, y)$ — любая функция из $C^{(2,1)}$.

Функция Римана является решением уравнения

$$v(x,y) - \int_\eta^y a_{20}(x,\beta)v(x,\beta)d\beta - \int_\xi^x [a_{11}(\alpha,y) - (x-\alpha)a_{01}(\alpha,y)]v(\alpha,y)d\alpha +$$
$$+ \int_\xi^x \int_\eta^y [a_{10}(\alpha,\beta) - (x-\alpha)a_{00}(\alpha,\beta)]v(\alpha,\beta)d\beta d\alpha = 1. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что

$$\begin{gathered} A_{10}(x,y,x,y) \equiv A_{01}(x,y,x,\eta) \equiv A_{11}(x,y,x,\eta) \equiv A_{20}(x,y,\xi,y) \equiv 0, \\ R(x,y,x,y) \equiv 1. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Запишем (2.3) в дивергентной форме

$$RL(u) \equiv \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y}, \tag{2.6}$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(Ru_x)_y - \frac{1}{2}(A_{10}u)_y - A_{01}u_x + A_{11}u,$$
$$B_2 = \frac{1}{2}(Ru_x)_x - \frac{1}{2}(A_{10}u)_x + A_{20}u.$$

Рассмотрим точку (x, y) из D. Пусть $y_1 = \sigma(x)$, $y = \sigma(x_1)$; D_{xy} и Σ_{xy} — части области D и кривой Σ соответственно, лежащие между характеристиками $\xi = x$, $\eta = y$. Поменяв в (2.3) ролями переменные ξ с x, η с y, проинтегрируем (2.3) по (ξ, η) по области D_{xy}. Использовав формулу Грина [83, с. 236], получим

$$\iint_{D_{xy}} Rf dxdy = \int_{x_1}^x B_2\Big|_{\eta=y} d\xi + \int_{y_1}^y B_1\Big|_{\xi=x} d\eta + \int_{\Sigma_{xy}} B_1 d\eta - B_2 d\xi.$$

Учитывая тождества (2.5), после очевидных преобразований получим частный случай формулы (1.24)

$$u_\xi(x,y)=\frac{1}{2}Ru_x(x_1,y,x,y)+\\ +\frac{1}{2}Ru_x(x,y_1,x,y)-\frac{1}{2}A_{10}u(x_1,y,x,y)-\\ -\frac{1}{2}A_{10}u(x,y_1,x,y)-\int\limits_{\Sigma_{xy}}B_1d\eta-B_2d\xi+\iint\limits_{D_{xy}}Rfd\xi d\eta. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) содержит заданные на Σ значения u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}. В данном случае явный вид уравнений, из которых по данным Коши могут быть найдены эти значения, не является слишком громоздким. Запишем эти уравнения. Из (2.2) получаем

$$\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma'\frac{\partial u}{\partial y}=u_0',\\ \frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial y}=u_1,\\ \sigma''\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sigma'\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sigma'^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_0'',\\ \frac{\sigma''\Delta-\sigma'\Delta'}{\Delta^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\Delta'}{\Delta^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sigma'^2-1}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_1',\\ \frac{\sigma'^2}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2\sigma'}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_2,\end{array}$$

где все значения берутся на кривой S^0. Определитель этой системы

$$\frac{1}{\Delta^4}\begin{vmatrix} 1 & \sigma' & 0 & 0 & 0\\ \sigma' & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma'' & 1 & 2\sigma' & \sigma'^2\\ \dfrac{\sigma''\Delta-\sigma'\Delta'}{\Delta} & \dfrac{\Delta'}{\Delta} & \sigma' & \sigma'^2-1 & -\sigma'\\ 0 & 0 & \sigma'^2 & -2\sigma' & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{(1+\sigma'^2)^4}{\Delta^4}=(1+\sigma'^2)^2>0,$$

следовательно по условиям (2.2) определяются все требуемые для (2.7) функции.

2.1.2. Уравнения четвертого порядка. Рассмотрим уравнение

$$L(u)\equiv u_{xxyy}+a_{21}u_{xxy}+a_{12}u_{xyy}+a_{11}u_{xy}+a_{20}u_{xx}+a_{02}u_{yy}+\\ +a_{10}u_x+a_{01}u_y+a_{00}u=f. \quad (2.8)$$

К этому виду, в частности, относится уравнение Буссинеска-Лява

$$u_{ttxx} + u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

Определим функцию Римана $R = R(x, y, \xi, \eta)$ как решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned} v(x,y) - \int\limits_{\eta}^{y} [a_{21}(x,\beta) - (y-\beta)a_{20}(x,\beta)]v(x,\beta)d\beta - \\ - \int\limits_{\xi}^{x} [a_{12}(\alpha,y) - (x-\alpha)a_{02}(\alpha,y)]v(\alpha,y)d\alpha + \\ + \int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y} [a_{11}(\alpha,\beta) - (x-\alpha)a_{01}(\alpha,\beta) - (y-\beta)a_{10}(\alpha,\beta) + \\ + (x-\alpha)(y-\beta)a_{00}(\alpha,\beta)]v(\alpha,\beta)d\beta d\alpha = 1. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Справедливо тождество

$$\begin{aligned} RL(u) \equiv (Ru_{xy})_{xy} - (A_{10}u_y)_{xy} - (A_{01}u_x)_{xy} + (A_{20}u_y)_y + \\ + (A_{02}u_x)_x + (A_{11}u)_{xy} - (A_{21}u)_y - (A_{12}u)_x, \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} A_{10} = R_x - a_{12}R,\ A_{01} = R_y - a_{21}R,\ A_{20} = A_{10x} + a_{02}R, \\ A_{02} = A_{01y} + a_{20}R,\ A_{11} = R_{xy} - (a_{21}R)_x - (a_{12}R)_y + a_{11}R, \\ A_{21} = A_{11x} + (a_{02}R)_y - a_{01}R,\ A_{12} = A_{11y} + (a_{20}R)_x - a_{10}R. \end{gathered}$$

В тождестве (2.10) R зависит от (x, y, ξ, η), а коэффициенты a_{ij} — от (x, y). При этом $u(x, y)$ — любая функция из $C^{(2,2)}$.

Из (2.9) следуют тождества

$$\begin{gathered} A_{10}(x,y,x,y) \equiv A_{01}(x,y,x,y) \equiv A_{11}(x,y,x,y) \equiv A_{20}(x,y,\xi,y) \equiv \\ \equiv A_{02}(x,y,x,\eta) \equiv A_{21}(x,y,\xi,y) \equiv A_{12}(x,y,x,\eta) \equiv 0. \end{gathered} \quad (2.11)$$

Запишем (2.10) в дивергентной форме

$$RL(u) \equiv \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(Ru_{xy})_y - \frac{1}{2}(A_{10}u_y)_y - \frac{1}{2}(A_{01}u_x)_y + A_{02}u_x + \frac{1}{2}(A_{11}u)_y - A_{12}u,$$

$$B_2 = \frac{1}{2}(Ru_{xy})_x - \frac{1}{2}(A_{10}u_y)_x - \frac{1}{2}(A_{01}u_x)_x + A_{20}u_y + \frac{1}{2}(A_{11}u)_x - A_{21}u.$$

Рассмотрим ту же, что в пункте 2.1.1, треугольную область D плоскости (ξ, η), ограниченную характеристиками $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, и отрезком кривой Σ: $\eta = \sigma(\xi)$, $\sigma'(\xi) < 0$, класса C^3.

Сформулируем задачу Коши для уравнения (2.8): найти регулярное в D решение уравнения (2.8), удовлетворяющее граничным значениям

$$u\Big|_{\Sigma} = u_0(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = u_1(\xi), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{\Sigma} = u_2(\xi), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big|_{\Sigma} = u_3(\xi). \tag{2.13}$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали, $u_0 \in C^3[0, x_0]$, $u_1 \in C^2[0, x_0]$, $u_2 \in C^1[0, x_0]$, $u_3 \in C[0, x_0]$.

Рассмотрим точку (x, y) из D. Пусть $y_1 = \sigma(x)$, $y = \sigma(x_1)$; D_{xy} и Σ_{xy} — части области D и кривой Σ соответственно, лежащие между характеристиками $\xi = x$, $\eta = y$. Поменяв в (2.12) ролями переменные ξ с x, η с y, проинтегрируем (2.12) по (ξ, η) по области D_{xy}. Использовав формулу Грина [83, с. 236], получим

$$\iint\limits_{D_{xy}} Rf d\xi d\eta = \int\limits_{y_1}^{y} B_1\Big|_{\xi=x} d\eta + \int\limits_{x_1}^{x} B_2\Big|_{\eta=y} d\xi + \int\limits_{\Sigma_{xy}} B_1 d\eta - B_2 d\xi. \tag{2.14}$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (2.14):

$$\int\limits_{y_1}^{y} B_1\Big|_{\xi=x} d\eta = \left[\left(\frac{1}{2}Ru_{\xi\eta} - \frac{1}{2}A_{10}u_\eta - \frac{1}{2}A_{01}u_\xi + \frac{1}{2}A_{11}u\right)\Big|_{\xi=x}\right]_{\eta=y_1}^{\eta=y} +$$
$$+ \int\limits_{y_1}^{y} \Big(A_{02}u_\xi - A_{12}u\Big)\Big|_{\xi=x} d\eta. \tag{2.15}$$

В силу (2.11) имеем $A_{10}(x, y, x, y) \equiv A_{01}(x, y, x, y) \equiv A_{11}(x, y, x, y) \equiv A_{02}(x, \eta, x, y) \equiv A_{12}(x, \eta, x, y) \equiv 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{y_1}^{y} B_1\Big|_{\xi=x} d\eta = \frac{1}{2}Ru_{\xi\eta}(x, y, x, y) - \frac{1}{2}Ru_{\xi\eta}(x, y_1, x, y) +$$
$$+ \frac{1}{2}A_{10}u_\eta(x, y_1, x, y) + \frac{1}{2}A_{01}u_\xi(x, y_1, x, y) - \frac{1}{2}A_{11}u(x, y_1, x, y).$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_{x_1}^{x} B_2\Big|_{\eta=y} d\xi = \frac{1}{2} R u_{\xi\eta}(x,y,x,y) - \frac{1}{2} R u_{\xi\eta}(x_1,y,x,y) +$$
$$+ \frac{1}{2} A_{10} u_{\eta}(x_1,y,x,y) + \frac{1}{2} A_{01} u_{\xi}(x_1,y,x,y) - \frac{1}{2} A_{11} u(x_1,y,x,y).$$

Формула (2.14) принимает вид

$$\iint\limits_{D_{xy}} R f d\xi d\eta = u_{\xi\eta}(x,y) - \frac{1}{2} R u_{\xi\eta}(x,y_1,x,y) -$$
$$- \frac{1}{2} R u_{\xi\eta}(x_1,y,x,y) + \frac{1}{2} A_{10} u_{\eta}(x,y_1,x,y) + \frac{1}{2} A_{01} u_{\xi}(x,y_1,x,y) -$$
$$- \frac{1}{2} A_{11} u(x,y_1,x,y) + \frac{1}{2} A_{10} u_{\eta}(x_1,y,x,y) + \frac{1}{2} A_{01} u_{\xi}(x_1,y,x,y) -$$
$$- \frac{1}{2} A_{11} u(x_1,y,x,y) + \int\limits_{\Sigma_{xy}} B_1 d\eta - B_2 d\xi. \quad (2.16)$$

В (2.16) учтено, что $R(x,y,x,y) \equiv 1$.

Переписав (2.16) в виде

$$u_{xy}(x,y) = F(x,y) \quad (2.17)$$

и проинтегрировав (2.17) по x и y по области D_{xy}, получаем решение задачи Коши в терминах функции Римана

$$u(x,y) = u(x_1,y) + \int\limits_{x_1}^{x} u_x(\alpha,\sigma(\alpha)) d\alpha + \int\limits_{x_1}^{x} d\alpha \int\limits_{\sigma(\alpha)}^{y} F(\alpha,\beta) d\beta. \quad (2.18)$$

Формула (2.18) содержит заданные на Σ значения u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxy}, u_{xyy}. Определим их из (2.13). Найдем u_0', u_1, u_0'', u_1', u_2, u_0''', u_1'', u_2', u_3, выраженные через значения производных функции u до третьего порядка включительно u_x, u_y, $u_{xy}, \ldots, u_{yyy}$ на кривой Σ

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial u}{\partial x}+\sigma'\tfrac{\partial u}{\partial y}=u_0',\\
&\tfrac{\sigma'}{\Delta}\tfrac{\partial u}{\partial x}-\tfrac{1}{\Delta}\tfrac{\partial u}{\partial y}=u_1,\\
&\sigma''\tfrac{\partial u}{\partial y}+\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sigma'\tfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sigma'^2\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_0'',\\
&\tfrac{\sigma''\Delta-\sigma'\Delta'}{\Delta^2}\tfrac{\partial u}{\partial x}+\tfrac{\Delta'}{\Delta^2}\tfrac{\partial u}{\partial y}+\tfrac{\sigma'}{\Delta}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\tfrac{\sigma'^2-1}{\Delta}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\tfrac{\sigma'}{\Delta}\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_1',\\
&\tfrac{\sigma'^2}{\Delta^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\tfrac{2\sigma'}{\Delta^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\tfrac{1}{\Delta^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_2,\\
&\sigma'''\tfrac{\partial u}{\partial y}+3\sigma''\tfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\sigma'\sigma''\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\tfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+3\sigma'\tfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\\
&+3\sigma'^2\tfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\sigma'^3\tfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}=u_0''',\\
&\tfrac{(\sigma''\Delta-\sigma'\Delta')'\Delta-2\Delta'(\sigma''\Delta-\sigma'\Delta')}{\Delta^3}\tfrac{\partial u}{\partial x}+\tfrac{\Delta\Delta''-2\Delta'^2}{\Delta^3}\tfrac{\partial u}{\partial y}+\\
&+2\tfrac{(\sigma''\Delta-\sigma'\Delta')'}{\Delta^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\tfrac{3\sigma'\sigma''\Delta+2\Delta'(1-\sigma'^2)}{\Delta^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\\
&+\tfrac{\sigma'(2\Delta'-\sigma''\Delta)}{\Delta^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\tfrac{\sigma'}{\Delta}\tfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\tfrac{2\sigma'^2-1}{\Delta}\tfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\\
&+\tfrac{\sigma'(\sigma'^2-2)}{\Delta}\tfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}-\tfrac{\sigma'^2}{\Delta}\tfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}=u_1'',\\
&\tfrac{2\sigma'(\sigma''\Delta-\sigma'\Delta')}{\Delta^3}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\tfrac{2(\sigma''\Delta-2\sigma'\Delta')}{\Delta^3}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\\
&-\tfrac{2\Delta'}{\Delta^3}\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\tfrac{\sigma'^2}{\Delta^2}\tfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\tfrac{\sigma'^3-2\sigma'}{\Delta^2}\tfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-\\
&-\tfrac{2\sigma'^2-1}{\Delta^2}\tfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\tfrac{\sigma'}{\Delta^2}\tfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}=u_2',\\
&\tfrac{\sigma'^3}{\Delta^3}\tfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}-3\tfrac{\sigma'^2}{\Delta^3}\tfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+3\tfrac{\sigma'}{\Delta^3}\tfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}-\tfrac{1}{\Delta^3}\tfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}=u_3.
\end{aligned}\tag{2.19}$$

Определитель данной системы равен $(1+\sigma'^2)^5>0$, поэтому по условиям (2.13) определяются все требуемые для (2.18) функции.

Рассмотрим еще одно уравнение четвертого порядка, которое можно считать некоторым аналогом обобщенного уравнения Аллера:

$$\begin{aligned}
L(u)\equiv u_{xxxy}+a_{30}u_{xxx}+a_{21}u_{xxy}+a_{20}u_{xx}+&\\
+a_{11}u_{xy}+a_{10}u_x+a_{01}u_y+a_{00}u=f.&
\end{aligned}\tag{2.20}$$

Функция Римана $R = R(x,y,\xi,\eta)$ является решением интегрального уравнения

$$v(x,y) - \int\limits_{\eta}^{y} a_{30}(x,\beta)v(x,\beta)d\beta -$$
$$- \int\limits_{\xi}^{x} \left[a_{21}(\alpha,y) - (x-\alpha)a_{11}(\alpha,y) + \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 a_{01}\right] v(\alpha,y)d\alpha +$$
$$+ \int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y} \left[a_{20}(\alpha,\beta) - (x-\alpha)a_{10}(\alpha,\beta) + \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 a_{00}\right] v(\alpha,\beta)d\beta d\alpha = 1. \quad (2.21)$$

Введем обозначения

$$A_{10} = R_x - a_{21}R, \quad A_{01} = R_y - a_{30}R, \quad A_{20} = R_{xx} - (a_{21}R)_x + a_{11}R,$$
$$A_{11} = R_{xy} - (a_{30}R)_x - (a_{21}R)_y + a_{20}R,$$
$$A_{21} = R_{xxy} - (a_{30}R)_{xx} - (a_{21}R)_{xy} + (a_{20}R)_x + (a_{11}R)_y - a_{10}R,$$
$$A_{30} = R_{xxx} - (a_{21}R)_{xx} + (a_{11}R)_x - a_{01}R,$$

где функция Римана R зависит от (x,y,ξ,η), а коэффициенты a_{30}, $a_{21}, \ldots,$ a_{10}, a_{01} — от (x,y). Дифференцируя (2.21), получим

$$\begin{aligned} &A_{10}(x,y,x,y) \equiv A_{01}(x,y,x,\eta) \equiv A_{20}(x,y,x,y) \equiv A_{11}(x,y,x,\eta) \equiv \\ &\equiv A_{21}(x,y,x,\eta) \equiv A_{30}(x,y,\xi,y), \quad R(x,y,x,y) \equiv 1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Справедливо тождество

$$RL(u) \equiv \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y}, \quad (2.23)$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(Ru_{xx})_y - \frac{1}{2}(A_{10}u_x)_y - A_{01}u_{xx} + \frac{1}{2}(A_{20}u)_y + A_{11}u_x - A_{21}u,$$
$$B_2 = \frac{1}{2}(Ru_{xx})_x - \frac{1}{2}(A_{10}u_x)_x + \frac{1}{2}(A_{20}u)_x - A_{30}u.$$

Пусть D — треугольная область плоскости (ξ,η), определенная выше.

Сформулируем задачу Коши для уравнения (2.20): найти регулярное решение (2.20), удовлетворяющее граничным значениям

$$u\big|_{\Sigma} = u_0(\xi),\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = u_1(\xi),\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{\Sigma} = u_2(\xi),\ \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big|_{\Sigma} = u_3(\xi); \quad (2.24)$$

$u_0 \in C^3$, $u_1 \in C^2$, $u_2 \in C^1$, $u_3 \in C$.

Рассмотрим точку (x, y) из D. Пусть $y_1 = \sigma(x)$, $y = \sigma(x_1)$; D_{xy} и Σ_{xy} — части области D и кривой Σ соответственно, лежащие между характеристиками $\xi = x$, $\eta = y$. Поменяв в (2.23) ролями переменные ξ с x, η с y, проинтегрируем (2.23) по (ξ, η) по области D_{xy}. Использовав формулу Грина [83, с. 236], получим

$$\iint\limits_{D_{xy}} Rf d\xi d\eta = \int\limits_{x_1}^{x} B_2\Big|_{\eta=y} d\xi + \int\limits_{y_1}^{y} B_1\Big|_{\xi=x} d\eta + \int\limits_{\Sigma_{xy}} B_1 d\eta - B_2 d\xi. \tag{2.25}$$

Учитывая тождества (2.22), после очевидных преобразований приведем (2.25) к виду

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{xy}} Rf d\xi d\eta = u_{\xi\xi}(x, y) - \frac{1}{2}(Ru)_{\xi\xi}(x_1, y, x, y) - \\ - \frac{1}{2}(Ru)_{\xi\xi}(x, y_1, x, y) + \frac{1}{2}A_{10}u_\xi(x_1, y, x, y) + \\ + \frac{1}{2}A_{10}u_\xi(x, y_1, x, y) - \frac{1}{2}A_{20}u(x_1, y, x, y) - \\ - \frac{1}{2}A_{20}u(x, y_1, x, y) + \int\limits_{\Sigma_{xy}} B_1 d\eta - B_2 d\xi.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Переписав (2.26) в виде

$$u_{xx}(x, y) = \Phi(x, y) \tag{2.27}$$

и дважды проинтегрировав (2.27) по x, получаем решение задачи Коши в терминах функции Римана.

Формула (2.27) содержит заданные на Σ значения функции u и ее производных. Эти значения определяются через данные Коши точно так же, как при решении предыдущей задачи.

2.2. Задача в трехмерном пространстве. Перейдем к реализации алгоритма решения задачи Коши в случае уравнений с тремя независимыми переменными.

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{k,l=0}^{2} \sum_{m=0}^{1} a_{klm}(x, y, z) \frac{\partial^{k+l+m} u}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m} = f, \quad a_{221} \equiv 1. \tag{2.28}$$

Здесь и далее в данном параграфе для всех уравнений с тремя независимыми переменными в замыканиях рассматриваемых областей выполняются включения $a_{klm} \in C^{(k,l,m)}$, $f \in C$.

Функцией Римана для (2.28) $R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ является решение интегрального уравнения

$$
\begin{aligned}
v(x,y,z) &- \int\limits_{\xi}^{x} \{[a_{121} - (x-\alpha)a_{021}]v\}(\alpha,y,z)d\alpha - \\
&- \int\limits_{\eta}^{y} \{[a_{211} - (y-\beta)a_{201}]v\}(x,\beta,z)d\beta - \int\limits_{\zeta}^{z} [a_{220}v](x,y,\gamma)d\gamma + \\
&+ \int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y} \{[a_{111} - (y-\beta)a_{101} - (x-\alpha)a_{011} + \\
&+ (x-\alpha)(y-\beta)a_{001}]v\}(\alpha,\beta,z)d\beta d\alpha + \\
&+ \int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\zeta}^{z} \{[a_{120} - (x-\alpha)a_{020}]v\}(\alpha,y,\gamma)d\gamma d\alpha + \\
&+ \int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\zeta}^{z} \{[a_{210} - (y-\beta)a_{200}]v\}(x,\beta,\gamma)d\gamma d\beta - \\
&- \int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\beta}^{y}\int\limits_{\zeta}^{z} \{[a_{110} - (y-\beta)a_{100} - (x-\alpha)a_{010} + \\
&+ (x-\alpha)(y-\beta)a_{000}]v\}(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha = 1. \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

Далее используются конструкции

$$A_{100} = R_x - a_{121}R, \quad A_{010} = R_y - a_{211}R, \quad A_{001} = R_z - a_{220}R,$$

$$A_{200} = (A_{100})_x + a_{021}R, \quad A_{110} = (A_{100})_y - (a_{211}R)_x + a_{111}R,$$

$$A_{101} = (A_{100})_z - (a_{220}R)_x + a_{120}R, \quad A_{020} = (A_{010})_y - (a_{211}R)_z + a_{201}R,$$

$$A_{011} = (A_{010})_z - (a_{220}R)_y + a_{210}R, \quad A_{210} = (A_{110})_x + (a_{021}R)_y - a_{011}R,$$

$$A_{201} = (A_{101})_x + (a_{021}R)_z - a_{020}R, \quad A_{120} = (A_{110})_y + (a_{201}R)_x - a_{101}R,$$

$$A_{111} = (A_{110})_z - (a_{220}R)_{xy} + (a_{210}R)_x + (a_{120}R)_y - a_{110}R,$$

$$A_{021} = (A_{011})_y + (a_{201}R)_z - a_{200}R,$$

$$A_{220} = (A_{210})_y + (a_{201}R)_{xx} - (a_{101}R)_x + a_{001}R,$$

$$A_{211} = (A_{111})_x + (a_{021}R)_{yz} - (a_{011}R)_z - (a_{020}R)_y + a_{010}R,$$

$$A_{121} = (A_{111})_y + (a_{201}R)_{xz} - (a_{101}R)_z - (a_{200}R)_x + a_{100}R.$$

Из интегрального уравнения (2.29) получаем тождества:

$$\begin{gathered} A_{100}(x,y,z,x,y,z) \equiv A_{010}(x,y,z,x,y,z) \equiv A_{001}(x,y,\zeta,x,y,z) \equiv \\ \equiv A_{200}(\xi,y,z,x,y,z) \equiv A_{110}(x,y,z,x,y,z) \equiv A_{101}(x,y,\zeta,x,y,z) \equiv \\ \equiv A_{020}(x,\eta,z,x,y,z) \equiv A_{011}(x,y,\zeta,x,y,z) \equiv A_{210}(\xi,y,z,x,y,z) \equiv \\ \equiv A_{201}(\xi,y,\zeta,x,y,z) \equiv A_{120}(x,\eta,z,x,y,z) \equiv A_{111}(x,y,\zeta,x,y,z) \equiv \\ \equiv A_{021}(x,\eta,\zeta,x,y,z) \equiv A_{220}(\xi,\eta,z,x,y,z) \equiv A_{211}(\xi,y,\zeta,x,y,z) \equiv \\ \equiv A_{121}(x,\eta,\zeta,x,y,z) \equiv 0, \quad R(x,y,z,x,y,z) \equiv 1. \end{gathered} \tag{2.30}$$

Кроме того, из (2.29) следует, что R удовлетворяет сопряженному с (2.28) уравнению

$$\sum_{k,l=0}^{2}\sum_{m=0}^{1}(-1)^{k+l+m+1}\frac{\partial^{k+l+m}(a_{klm}v)}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m} = 0.$$

Справедливо тождество

$$RL(u) \equiv \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}, \tag{2.31}$$

$$B_1 = \frac{\partial B_{12}}{\partial y} + \frac{\partial B_{13}}{\partial z} - A_{021}u_x + A_{121}u,$$

$$B_2 = \frac{\partial B_{12}}{\partial x} + \frac{\partial B_{23}}{\partial z} - A_{201}u_y + A_{211}u,$$

$$B_3 = \frac{\partial B_{13}}{\partial x} + \frac{\partial B_{23}}{\partial y} + A_{220}u,$$

$$B_{12} = \frac{1}{6}B_{123z} - \frac{1}{2}A_{001}u_{xy} + \frac{1}{2}A_{101}u_y + \frac{1}{2}A_{011}u_x - \frac{1}{2}A_{111}u,$$

$$B_{13} = \frac{1}{6}B_{123y} + \frac{1}{2}A_{020}u_x - \frac{1}{2}A_{120}u,$$

$$B_{23} = \frac{1}{6}B_{123x} + \frac{1}{2}A_{200}u_y - \frac{1}{2}A_{210}u,$$

$$B_{123} = Ru_{xy} - A_{100}u_y - A_{010}u_x + A_{110}u.$$

В тождестве (2.31) R зависит от (x,y,z,ξ,η,ζ), а коэффициенты a_{klm} — от (x,y,z).

Пусть S: $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ — поверхность в пространстве (ξ, η, ζ) класса C^4. Потребуем, чтобы эта поверхность в каждой своей точке имела касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей. Для определенности можно положить $\zeta'_\xi < 0$, $\zeta'_\eta < 0$.

Выберем точку $P(x_0, y_0, z_0)$ так, чтобы плоскости $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, $\zeta = z_0$ вырезали из поверхности S ограниченный участок S^0. Обозначим через D^0 конечную область трехмерного пространства, ограниченную плоскостями $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, $\zeta = z_0$ и поверхностью S^0. Считаем ориентацию области D^0 положительной (ориентацию в пространстве можно связать с направлением внешней нормали к границе области).

Проведем через точку $M(x, y, z)$ плоскости $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$. Пусть указанные плоскости пересекают поверхность S по кривым BC, CA и AB соответственно. Плоскости $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ и поверхность S определяют область D, граница которой состоит из двумерных многообразий AMC, BCM, BMA и ACB (рис. 2.1).

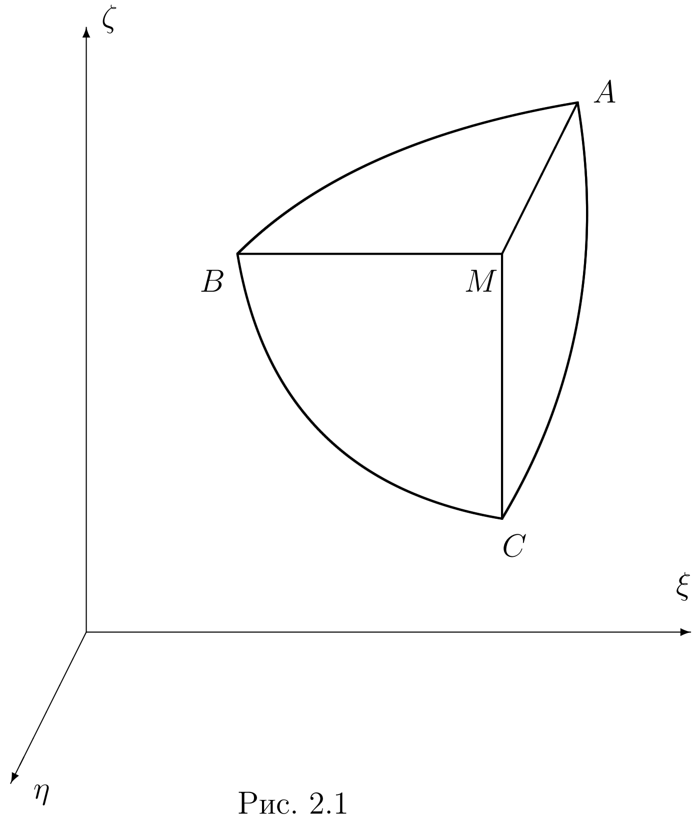

Рис. 2.1

Задача Коши: найти регулярное решение уравнения (2.28), удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{S^0} = u_0(\xi,\eta), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S^0} = u_1(\xi,\eta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{S^0} = u_2(\xi,\eta),$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big|_{S^0} = u_3(\xi,\eta), \quad \frac{\partial^4 u}{\partial n^4}\Big|_{S^0} = u_4(\xi,\eta). \quad (2.32)$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, $u_0 \in C^4(\overline{S^0})$, $u_1 \in C^3(\overline{S^0})$, $u_2 \in C^2(\overline{S^0})$, $u_3 \in C^1(\overline{S^0})$, $u_4 \in C(\overline{S^0})$.

Поменяв в (2.31) ролями переменные ξ и x, η и y, ζ и z, интегрируем (2.31) по ξ, η, ζ по области D. Применяя формулу Гаусса-Остроградского [83, с. 241], получим

$$\iiint\limits_D Rf\, d\xi d\eta d\zeta = \iint\limits_{\partial D} B_1\, d\eta\wedge d\zeta + B_2\, d\zeta\wedge d\xi + B_3\, d\xi\wedge d\eta. \quad (2.33)$$

Обозначим правую часть (2.33) через I. Заменим интеграл по ∂D суммой интегралов по ее составляющим ACB, AMC, BCM и ABM. При этом учтем тождества (2.30). Получим

$$I = \iint\limits_{BCM} \left(\frac{\partial B_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial B_{13}}{\partial \zeta}\right) d\eta\wedge d\zeta + \iint\limits_{AMC} \left(\frac{\partial B_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial B_{23}}{\partial \zeta}\right) d\zeta\wedge d\xi +$$
$$+ \iint\limits_{ABM} \left(\frac{\partial B_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial B_{23}}{\partial \eta}\right) d\xi\wedge d\eta + \iint\limits_{ACB} B_1\, d\eta\wedge d\zeta + B_2\, d\zeta\wedge d\xi + B_3\, d\xi\wedge d\eta.$$

По формуле Грина [83, с. 236] интегралы по плоским областям AMC, BCM и ABM сводятся к однократным интегралам по замкнутым контурам:

$$I = \int\limits_{BCM} B_{12} d\zeta - B_{13} d\eta + \int\limits_{AMC} B_{23} d\xi - B_{12} d\zeta +$$
$$+ \int\limits_{ABM} B_{13} d\eta - B_{23} d\xi + \iint\limits_{ACB} B_1\, d\eta\wedge d\zeta + B_2\, d\zeta\wedge d\xi + B_3\, d\xi\wedge d\eta.$$

Вычисляя в полученной формуле криволинейные интегралы по отрезкам прямых, запишем (2.33) в виде

$$\iiint\limits_{D} Rf\,d\xi d\eta d\zeta = u_{\xi\eta}\big|_{M} - \frac{1}{3}B_{123}\big|_{A} - \frac{1}{3}B_{123}\big|_{B} - \frac{1}{3}B_{123}\big|_{C} +$$
$$+ \int\limits_{BC} B_{12}d\zeta - B_{13}d\eta + \int\limits_{CA} B_{23}d\xi - B_{12}d\zeta +$$
$$+ \int\limits_{AB} B_{13}d\eta - B_{23}d\xi + \iint\limits_{ACB} B_1\,d\eta\wedge d\zeta + B_2\,d\zeta\wedge d\xi + B_3\,d\xi\wedge d\eta. \quad (2.34)$$

При получении (2.34) учтены тождества (2.30).

Запишем (2.34) в виде

$$u_{xy}(x,y,z) = F(x,y,z), \quad (2.35)$$

а затем проинтегрируем (2.35) по x, y по проекции области D на плоскость (x,y). В результате получим функцию u, являющуюся решением задачи Коши.

Формула (2.35) содержит значения частных производных решения u по x, y, z до четвертого порядка включительно, вычисленные на ABC. Эти производные надо определить через функции u_i, $i = \overline{1,4}$, входящие в (2.32). Рассуждаем как в статье [157]. Для удобства переобозначим $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$. Пусть поле направлений задано вектором $\vec{n}(n_1(\mu_1,\mu_2), n_2(\mu_1,\mu_2), n_3(\mu_1,\mu_2))$. Введем систему координат, связанную с поверхностью ABC $x_i = x_i(\mu_1,\mu_2) + n_i(\mu_1,\mu_2)\mu_3$, где $i = \overline{1,3}$. Поле направлений по условию не касательно к ABC, следовательно, существует обратное преобразование $\mu_i = \mu_i(x_1,x_2,x_3)$ класса C^4 в окрестности поверхности ABC [82, с. 495]. Последовательно находим производные решения $u = U(\mu_1(x_1,x_2,x_3), \mu_2(x_1,x_2,x_3), \mu_3(x_1,x_2,x_3))$ по x_i на поверхности ABC. Подставляя эти производные в (2.35), получим решение задачи Коши.

2.3. Уравнение пятого порядка в четырехмерном пространстве. Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{i=0}^{2}\sum_{j,k,l=0}^{1} a_{ijkl}(x,y,z,t)\frac{\partial^{i+j+k+l}u}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k \partial x^l} = f, \quad a_{2111} \equiv 1, \quad (2.36)$$

где в замыкании рассматриваемой области выполняются включения $a_{ijkl} \in C^{(i,j,k,l)}$, $f \in C$.

Функцией Римана $R(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)$ для (2.36) является решение интегрального уравнения

$$v(x,y,z,t)-\int\limits_{\xi}^{x}\{[a_{1111}-(x-\alpha)a_{0111}]v\}(\alpha,y,z,t)d\alpha-$$

$$-\int\limits_{\eta}^{y}a_{2011}v(x,\beta,z,t)d\beta-\int\limits_{\zeta}^{z}a_{2101}v(x,y,\gamma,t)d\gamma-$$

$$-\int\limits_{\tau}^{t}a_{2110}v(x,y,z,\delta)d\delta+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}\{[a_{1011}-(x-\alpha)a_{0011}]v\}(\alpha,\beta,z,t)d\beta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\zeta}^{z}\{[a_{1101}-(x-\alpha)a_{0101}]v\}(\alpha,y,\gamma,t)d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\tau}^{t}\{[a_{1110}-(x-\alpha)a_{0110}]v\}(\alpha,y,z,\delta)d\delta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\zeta}^{z}a_{2001}v(x,\beta,\gamma,t)d\gamma d\beta+\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\tau}^{t}a_{2010}v(x,\beta,z,\delta)d\delta d\beta+$$

$$+\int\limits_{\zeta}^{z}\int\limits_{\tau}^{t}a_{2100}v(x,y,\gamma,\delta)d\delta d\gamma-$$

$$-\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\zeta}^{z}\{[a_{1001}-(x-\alpha)a_{0001}]v\}(\alpha,\beta,\gamma,t)d\gamma d\beta d\alpha-$$

$$-\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\tau}^{t}\{[a_{1010}-(x-\alpha)a_{0010}]v\}(\alpha,\beta,z,\delta)d\delta d\beta d\alpha-$$

$$-\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\zeta}^{z}\int\limits_{\tau}^{t}\{[a_{1100}-(x-\alpha)a_{0100}]v\}(\alpha,y,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\alpha-$$

$$-\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\zeta}^{z}\int\limits_{\tau}^{t}a_{2000}v(x,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\zeta}^{z}\int\limits_{\tau}^{t}\{[a_{1000}-(x-\alpha)a_{0000}]v\}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta d\alpha=1. \qquad (2.37)$$

Введем конструкции

$$A_{1000}=R_x-a_{1111}R, \quad A_{0100}=R_y-a_{2011}R,$$

$$A_{0010}=R_z-a_{2101}R, \quad A_{0001}=R_t-a_{2110}R,$$

$$A_{2000}=(A_{1000})_x+a_{0111}R, \quad A_{1100}=(A_{1000})_y-(a_{2011}R)_x+a_{1011}R,$$

$$A_{1010}=(A_{1000})_z-(a_{2101})_x+a_{1101}R, \quad A_{1001}=(A_{1000})_t-(a_{2110}R)_x+a_{1110}R,$$

$$A_{0110}=(A_{0100})_z-(a_{2101}R)_y+a_{2001}R, \quad A_{0101}=(A_{0100})_t-(a_{2110}R)_y+a_{2010}R,$$

$$A_{0011}=(A_{0010})_t-(a_{2110})_z+a_{2100}R, \quad A_{2100}=(A_{1100})_x+(a_{0111}R)_y-a_{0011}R,$$

$$A_{2010}=(A_{1010})_x+(a_{0111}R)_z-a_{0101}R, \quad A_{2001}=(A_{1001})_x+(a_{0111}R)_t-a_{0110}R,$$

$$A_{1110}=(A_{0110})_x-(a_{1111}R)_{yz}+(a_{1101}R)_y+(a_{1011}R)_z-a_{1001}R,$$

$$A_{1101}=(A_{0101})_x-(a_{1111}R)_{yt}+(a_{1110}R)_y+(a_{1011}R)_t-a_{1010}R,$$

$$A_{1011}=(A_{0011})_x-(a_{1111}R)_{zt}+(a_{1110}R)_y+(a_{1011}R)_t-a_{1100}R,$$

$$A_{0111}=(A_{0011})_y-(a_{2011}R)_{zt}+(a_{2010}R)_z+(a_{2001}R)_t-a_{2000}R,$$

$$A_{1111}=(A_{0111})_x-(a_{1111}R)_{yzt}+(a_{1110}R)_{yz}+(a_{1101}R)_{yt}+$$

$$+(a_{1011}R)_{zt}-(a_{1100}R)_y-(a_{1010}R)_z-(a_{1001}R)_t+a_{1000}R,$$

$$A_{2110}=(A_{1110})_x+(a_{0111}R)_{yz}-(a_{0101}R)_y-(a_{0011}R)_z+a_{0001}R,$$

$$A_{2101}=(A_{1101})_x+(a_{0111}R)_{yt}-(a_{0110}R)_y-(a_{0011}R)_t+a_{0010}R,$$

$$A_{2011}=(A_{1101})_x+(a_{0111}R)_{zt}-(a_{0110}R)_z-(a_{0101}R)_t+a_{0100}R.$$

Здесь $R=R(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)$, а коэффициенты a_{ijkl} зависят от (x,y,z,t).

Из интегрального уравнения (2.37) следуют тождества:

$$\begin{gathered}
A_{2110}(x,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv A_{2101}(x,y,\zeta,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv \\
\equiv A_{2011}(x,\eta,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv A_{2100}(x,y,\zeta,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv \\
\equiv A_{2010}(x,\eta,z,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv A_{2001}(x,\eta,\zeta,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv \\
\equiv A_{1111}(\xi,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv A_{1110}(\xi,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv \\
\equiv A_{1101}(\xi,y,\zeta,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv A_{1011}(\xi,\eta,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv \\
\equiv A_{0111}(\xi,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv A_{0110}(\xi,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv \\
\equiv A_{0101}(\xi,y,\zeta,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv A_{1001}(\xi,\eta,\zeta,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv \\
\equiv A_{0011}(\xi,\eta,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv A_{1100}(\xi,y,\zeta,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv \\
\equiv A_{1010}(\xi,\eta,z,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv A_{2000}(x,\eta,\zeta,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv \\
\equiv A_{1000}(\xi,\eta,\zeta,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv A_{0100}(\xi,y,\zeta,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv \\
\equiv A_{0010}(\xi,\eta,z,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv A_{0001}(\xi,\eta,\zeta,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv 0, \\
R(\xi,\eta,\zeta,\tau,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv 1.
\end{gathered} \tag{2.38}$$

Из (2.37) также следует, что R удовлетворяет сопряженному с (2.36) уравнению

$$\begin{aligned}
v_{xxyzt} &- (a_{2110}v)_{xxyz} - (a_{2101}v)_{xxyt} - (a_{2011}v)_{xxzt} - (a_{1111}v)_{xyzt} + \\
&+ (a_{2100}v)_{xxy} + (a_{2010}v)_{xxz} + (a_{2001}v)_{xxt} + (a_{1110}v)_{xyz} + (a_{1101}v)_{xyt} + \\
&+ (a_{1011}v)_{xzt} + (a_{0111}v)_{yzt} - (a_{2000}v)_{xx} - (a_{1100}v)_{xy} - (a_{1010}v)_{xz} - \\
&- (a_{1001}v)_{xt} - (a_{0110}v)_{yz} - (a_{0101}v)_{yt} - (a_{0011}v)_{zt} + (a_{1000}v)_{x} + \\
&+ (a_{0100}v)_{y} + (a_{0010}v)_{z} + (a_{0001}v)_{t} - a_{0000}v = 0.
\end{aligned}$$

Имеет место тождество

$$RL(u) \equiv \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} + \frac{\partial B_4}{\partial t}, \tag{2.39}$$

$$B_1 = \frac{\partial B_{12}}{\partial y} + \frac{\partial B_{13}}{\partial z} + \frac{\partial B_{14}}{\partial t} + A_{1111}u,$$

$$B_2 = \frac{\partial B_{12}}{\partial x} + \frac{\partial B_{23}}{\partial z} + \frac{\partial B_{24}}{\partial t} + A_{2011}u,$$

$$B_3 = \frac{\partial B_{13}}{\partial x} + \frac{\partial B_{23}}{\partial y} + \frac{\partial B_{34}}{\partial t} + A_{2101}u,$$

$$B_4 = \frac{\partial B_{14}}{\partial x} + \frac{\partial B_{24}}{\partial y} + \frac{\partial B_{34}}{\partial z} + A_{2110}u,$$

$$B_{12} = \frac{\partial B_{123}}{\partial z} + \frac{\partial B_{124}}{\partial t} + \frac{1}{2}A_{0011}u_x - \frac{1}{2}A_{1011}u,$$

$$B_{13} = \frac{\partial B_{123}}{\partial y} + \frac{\partial B_{134}}{\partial t} + \frac{1}{2}A_{0101}u_x - \frac{1}{2}A_{1101}u,$$

$$B_{14} = \frac{\partial B_{124}}{\partial y} + \frac{\partial B_{134}}{\partial z} + \frac{1}{2}A_{0110}u_x - \frac{1}{2}A_{1110}u,$$

$$B_{23} = \frac{\partial B_{123}}{\partial x} + \frac{\partial B_{234}}{\partial t} - \frac{1}{2}A_{2001}u, \ B_{24} = \frac{\partial B_{124}}{\partial x} + \frac{\partial B_{234}}{\partial z} - \frac{1}{2}A_{2010}u,$$

$$B_{34} = \frac{\partial B_{134}}{\partial x} + \frac{\partial B_{234}}{\partial y} - \frac{1}{2}A_{2100}u, \ B_{123} = \frac{\partial K}{\partial t} - \frac{1}{6}A_{0001}u_x + \frac{1}{6}A_{1001}u,$$

$$B_{124} = \frac{\partial K}{\partial z} - \frac{1}{6}A_{0010}u_x + \frac{1}{6}A_{1010}u, \ B_{134} = \frac{\partial K}{\partial y} - \frac{1}{6}A_{0100}u_x + \frac{1}{6}A_{1100}u,$$

$$B_{234} = \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{1}{6}A_{2000}u, \quad B_{1234} = \frac{1}{24}(Ru_x - A_{1000}u).$$

В ориентированном системой координат (x, y, z, t) пространстве R^4 рассмотрим поверхность S класса C^4, заданную уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \\ y &=& y(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \\ z &=& z(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \\ t &=& t(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \end{array} \right. \qquad \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial z}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial t}{\partial \mu_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu_2} & \dfrac{\partial y}{\partial \mu_2} & \dfrac{\partial z}{\partial \mu_2} & \dfrac{\partial t}{\partial \mu_2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu_3} & \dfrac{\partial y}{\partial \mu_3} & \dfrac{\partial z}{\partial \mu_3} & \dfrac{\partial t}{\partial \mu_3} \end{pmatrix} = 3,$$

где $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in R^3$. Предполагаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей. Пусть для определенности $x_y < 0$, $y_z < 0$, $z_t < 0$. Проведем через точку $M(x_0, y_0, z_0, t_0)$ плоскости $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $t = t_0$. Обозначим через S^0 участок поверхности S, вырезанный этими плоскостями, через Ω — конечную область пространства R^4, ограниченную плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $t = t_0$ и S^0, $\partial\Omega$ — край Ω. Считаем ориентацию области Ω положительной. Рассмотрим совокупность ориентированных многообразий, обозначаемых символами S^0, Ω и $\partial\Omega$ с индексами из 1, 2 или 3 различных переменных x, y, z, t. S^0 и Ω-многообразия определим как пересечения соответственно S^0 и Ω с соответствующими плоскостями, а $\partial\Omega$-многообразия — как края соответствующих Ω-многообразий. Например S^0_{xy} — множество точек поверхности S^0, лежащих в плоскостях $x = x_0$ и $y = y_0$. Ясно, что геометрически S^0-многообразия содержатся в $\partial\Omega$-многообразиях с теми же индексами, а Ω-многообразия — в $\partial\Omega$-многообразиях с теми же индексами без последней переменной. Например S_y^0 — часть $\partial\Omega_y$, Ω_{zxy} — часть $\partial\Omega_{zx}$. Будем считать, что названные многообразия — не только подмножества $\partial\Omega$-многообразий, но и имеют одинаковую с ними ориентацию. Ориентации $\partial\Omega$-многообразий будем считать согласованными с ориентациями соответствующих Ω-многообразий.

В результате индуктивно определены все введенные ориентированные многообразия.

Видим, что два из рассмотренных как Ω-многообразий, так и S^0-многообразий совпадают геометрически, если их индексы образованы одним и тем же набором переменных. Причем, если индексы одного из них получаются четной перестановкой индексов другого, то ориентации этих многообразий совпадают, в случае нечетной перестановки ориентации противоположны.

Задача Коши: найти регулярное в Ω решение уравнения (2.36) которое удовлеворяет условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_{S^0} = \psi_k,\ \ k = \overline{0,4}, \tag{2.40}$$

где $\vec{n}$ — направление внешней нормали к поверхности S. Здесь $\psi_k \in C^{4-k}(\overline{S^0})$.

Поменяв в (2.39) ролями переменные ξ и x, η и y, ζ и z, τ и t, интегрируем (2.39) по ξ, η, ζ, τ по области Ω

$$\int\limits_{\Omega} Rf\, d\xi d\eta d\zeta d\tau = \int\limits_{\partial\Omega} B_1\, d\eta\wedge d\zeta\wedge d\tau - \\ - B_2\, d\xi\wedge d\zeta\wedge d\tau + B_3\, d\xi\wedge d\eta\wedge d\tau - B_4\, d\xi\wedge d\eta\wedge d\zeta. \tag{2.41}$$

Здесь применена формула Стокса для дифференциальной 3-формы в R^4 [83, с. 246]. Рассмотрим последний интеграл в правой части (2.41).

$$\int\limits_{\partial\Omega} B_4\, d\xi\wedge d\eta\wedge d\zeta = \int\limits_{S^0} B_4\, d\xi\wedge d\eta\wedge d\zeta + \int\limits_{\Omega_t} B_4\, d\xi\wedge d\eta\wedge d\zeta. \tag{2.42}$$

Применяя к (2.42) формулу Гаусса-Остроградского, с учетом того, что в соответствии с (2.38) $A_{2110}(\xi,\eta,\zeta,t,x,y,z,t) \equiv 0$, получим

$$\int\limits_{\partial\Omega} B_4\, d\xi\wedge d\eta\wedge d\zeta = \int\limits_{S^0} B_4\, d\xi\wedge d\eta\wedge d\zeta + \int\limits_{\Omega_{tx}} B_{14}\, d\eta\wedge d\zeta + \int\limits_{\Omega_{ty}} B_{24}\, d\zeta\wedge d\xi + \\ + \int\limits_{\Omega_{tz}} B_{34}\, d\xi\wedge d\eta + \int\limits_{S_t^0} B_{14}\, d\eta\wedge d\zeta + B_{24}\, d\zeta\wedge d\xi + B_{34}\, d\xi\wedge d\eta. \tag{2.43}$$

Распишем интегралы по многообразиям Ω_{tx}, Ω_{ty}, Ω_{tz} (которые являются интегралами по плоским областям), используя формулу Грина. При этом снова учитываем тождества (2.38):

$$\int\limits_{\Omega_{tx}} B_{14}\, d\eta\wedge d\zeta + \int\limits_{\Omega_{ty}} B_{24}\, d\zeta\wedge d\xi + \int\limits_{\Omega_{tz}} B_{34}\, d\xi\wedge d\eta =$$
$$= \int\limits_{\Omega_{tx}} \Big(\frac{\partial B_{124}}{\partial y} + \frac{\partial B_{134}}{\partial z}\Big)\, d\eta\wedge d\zeta + \int\limits_{\Omega_{ty}} \Big(\frac{\partial B_{124}}{\partial x} + \frac{\partial B_{234}}{\partial z}\Big)\, d\zeta\wedge d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_{tz}} \Big(\frac{\partial B_{134}}{\partial x} + \frac{\partial B_{234}}{\partial y}\Big)\, d\xi\wedge d\eta = \int\limits_{S^0_{tx}} B_{124} d\zeta - B_{134} d\eta + \int\limits_{S^0_{ty}} B_{234} d\xi - B_{124} d\zeta +$$
$$+ \int\limits_{S^0_{tz}} B_{134} d\eta - B_{234} d\xi - \frac{1}{4}(Ru_x)(M) + \frac{1}{4}(A_{1000}u)(M) +$$
$$+ \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{xyt}) - \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{xyt}) + \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{xzt}) - \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{xzt}) +$$
$$+ \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{yzt}) - \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{yzt}).$$

Окончательно из (2.43) получаем

$$\int\limits_{\partial\Omega} B_4\, d\xi\wedge d\eta\wedge d\zeta = \int\limits_{S^0} B_4\, d\xi\wedge d\eta\wedge d\zeta +$$
$$+ \int\limits_{S^0_t} B_{14}\, d\eta\wedge d\zeta + B_{24}\, d\zeta\wedge d\xi + B_{34}\, d\xi\wedge d\eta +$$
$$+ \int\limits_{S^0_{tx}} B_{124} d\zeta - B_{134} d\eta + \int\limits_{S^0_{ty}} B_{234} d\xi - B_{124} d\zeta +$$
$$+ \int\limits_{S^0_{tz}} B_{134} d\eta - B_{234} d\xi - \frac{1}{4}(Ru_x)(M) + \frac{1}{4}(A_{1000}u)(M) +$$
$$+ \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{xyt}) - \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{xyt}) + \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{xzt}) - \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{xzt}) +$$
$$+ \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{yzt}) - \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{yzt}). \quad (2.44)$$

Для оставшихся интегралов в правой части (2.41) справедливы формулы, аналогичные (2.44):

$$\int\limits_{\partial\Omega} B_1\, d\eta\wedge d\zeta\wedge d\tau = \int\limits_{S^0} B_1\, d\eta\wedge d\zeta\wedge d\tau +$$
$$+ \int\limits_{S^0_x} B_{12}\, d\zeta\wedge d\tau + B_{13}\, d\tau\wedge d\eta + B_{14}\, d\eta\wedge d\zeta +$$
$$+ \int\limits_{S^0_{xy}} B_{123} d\tau - B_{124} d\zeta + \int\limits_{S^0_{xz}} B_{134} d\eta - B_{123} d\tau +$$
$$+ \int\limits_{S^0_{xt}} B_{124} d\zeta - B_{134} d\eta + \frac{1}{4}(Ru_x)(M) - \frac{1}{4}(A_{1000}u)(M) -$$
$$- \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{xyz}) + \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{xyz}) -$$
$$- \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{xyt}) + \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{xyt}) - \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{xzt}) + \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{xzt});$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} B_2\, d\xi\wedge d\zeta\wedge d\tau = \int\limits_{S^0} B_2\, d\xi\wedge d\zeta\wedge d\tau +$$
$$+ \int\limits_{S^0_y} B_{12}\, d\zeta\wedge d\tau + B_{23}\, d\tau\wedge d\xi + B_{24}\, d\xi\wedge d\zeta +$$
$$+ \int\limits_{S^0_{yx}} B_{123} d\tau - B_{124} d\zeta + \int\limits_{S^0_{yz}} B_{234} d\xi - B_{123} d\tau +$$
$$+ \int\limits_{S^0_{yt}} B_{124} d\zeta - B_{234} d\xi - \frac{1}{4}(Ru_x)(M) + \frac{1}{4}(A_{1000}u)(M) +$$
$$+ \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{xyz}) - \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{xyz}) + \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{xyt}) - \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{xyt}) +$$
$$+ \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{yzt}) - \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{yzt});$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} B_3\, d\xi\wedge d\eta \wedge d\tau = \int\limits_{S^0} B_3\, d\xi\wedge d\eta\wedge d\tau +$$

$$+ \int\limits_{S_z^0} B_{13}\, d\eta\wedge d\tau + B_{23}\, d\tau\wedge d\xi + B_{34}\, d\xi\wedge d\eta +$$

$$+ \int\limits_{S_{zx}^0} B_{123} d\tau - B_{134} d\eta + \int\limits_{S_{zy}^0} B_{234} d\tau - B_{123} d\xi +$$

$$+ \int\limits_{S_{zt}^0} B_{134} d\eta - B_{234} d\xi + \frac{1}{4}(Ru_x)(M) - \frac{1}{4}(A_{1000}u)(M) -$$

$$- \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{xyz}) + \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{xyz}) - \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{xzt}) + \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{xzt}) -$$
$$- \frac{1}{12}(Ru_x)(S^0_{yzt}) + \frac{1}{12}(A_{1000}u)(S^0_{yzt}).$$

Объединяя все полученные выражения, запишем

$$\int\limits_{\Omega} Rf\, d\xi d\eta d\zeta d\tau = \int\limits_{S^0} B_1\, d\eta \wedge d\zeta \wedge d\tau -$$

$$-B_2\, d\xi \wedge d\zeta \wedge d\tau + B_3\, d\xi \wedge d\eta \wedge d\tau - B_4\, d\xi \wedge d\eta \wedge d\zeta +$$

$$+ \int\limits_{S_x^0} B_{12}\, d\zeta\wedge d\tau + B_{13}\, d\tau\wedge d\eta + B_{14}\, d\eta\wedge d\zeta +$$

$$+ \int\limits_{S_y^0} B_{12}\, d\zeta\wedge d\tau + B_{23}\, d\tau\wedge d\xi + B_{24}\, d\xi\wedge d\zeta +$$

$$+ \int\limits_{S_z^0} B_{13}\, d\eta\wedge d\tau + B_{23}\, d\tau\wedge d\xi + B_{34}\, d\xi\wedge d\eta +$$

$$+ \int\limits_{S_t^0} B_{14}\, d\eta\wedge d\zeta + B_{24}\, d\zeta\wedge d\xi + B_{34}\, d\xi\wedge d\eta +$$

$$+2 \int\limits_{S_{xy}^0} B_{123} d\tau - B_{124} d\zeta + 2 \int\limits_{S_{xz}^0} B_{134} d\eta - B_{123} d\tau + 2 \int\limits_{S_{xt}^0} B_{124} d\zeta - B_{134} d\eta +$$

$$+2 \int\limits_{S_{yz}^0} B_{123} d\tau - B_{234} d\xi + 2 \int\limits_{S_{yt}^0} B_{234} d\xi - B_{124} d\zeta + 2 \int\limits_{S_{zt}^0} B_{134} d\eta - B_{234} d\xi -$$

$$-6B_{1234}(S^0_{xyz}) - 6B_{1234}(S^0_{xyt}) - 6B_{1234}(S^0_{xzt}) - 6B_{1234}(S^0_{yzt}) + u_x(M). \quad (2.45)$$

В (2.45) учтено, что $R(x, y, z, t, x, y, z, t) \equiv 1$.

Запишем (2.45) в виде

$$u_x(x_0, y_0, z_0, t_0) = F(x_0, y_0, z_0, t_0). \quad (2.46)$$

Формула (2.46) содержит значения частных производных решения u по x, y, z, t до четвертого порядка включительно, вычисленные на S^0. Эти производные определяются через функции ψ_i, $i = \overline{0,3}$, входящие в (2.40).

Будем рассуждать как в случае задачи Коши в трехмерном пространстве. Для удобства переобозначим $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $t = x_4$. Пусть поле направлений задано единичным вектором $\vec{n}(n_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3), n_2(\mu_1, \mu_2, \mu_3), n_3(\mu_1, \mu_2, \mu_3), n_4(\mu_1, \mu_2, \mu_3))$. Введем систему координат, связанную с поверхностью S^0 $x_i = x_i(\mu_1, \mu_2, \mu_3) + n_i(\mu_1, \mu_2, \mu_3)\mu_4$, где $i = \overline{1,4}$. Поле направлений по условию не касательно к S^0, следовательно, существует обратное преобразование $\mu_i = \mu_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ класса C^4 в окрестности поверхности S^0 [82, с. 495]. Последовательно находим производные решения $u = U(\mu_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \mu_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \mu_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \mu_4(x_1, x_2, x_3, x_4))$ по x_i на поверхности S^0. Подставим эти производные в (2.46), а затем проинтегрируем (2.46) по первой переменной по проекции области Ω на ось Ox. В результате получим функцию u, являющуюся решением задачи Коши в точке $M(x_0, y_0, z_0, t_0)$. Ясно, что из полученной формулы легко получить решение задачи Коши в произвольной точке области Ω.

Глава 3
Понижение порядка и решение в квадратурах

Данное направление в теории обыкновенных дифференциальных уравнений изучено с большой основательностью: имеются солидные справочники Э. Камке [91], В. Ф. Зайцева и А. Д. Полянина [75], [76]. В значительно более обширной теории уравнений с частными производными разработка таких вопросов не менее важна, но результатов здесь получено меньше: они носят достаточно эпизодический характер, нам известны лишь два небольших обзора [19], [222], посвященных этой теме. Некоторые сведения можно также найти в монографии [50].

Нами избраны три подхода к проблеме: понижение порядка путём факторизации оператора в левой части уравнения, дальнейшая разработка изложенного в [50] метода построения функций Римана, расширение области применения метода каскадного интегрирования Лапласа, в том числе путем его распространения с плоскости в трехмерное пространство.

§ 1. Факторизация

Для проводимых рассуждений оказывается удобным ввести обозначения

$$u_{(i_1\ldots i_n)} = \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n}u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}},$$

$$\left[\sum\right] = \sum_{\substack{i_k=0,1,\,k=\overline{1,n}\\ i_1+\ldots+i_n<n}},$$

$$(i_1,\ldots,k,\ldots,i_n) = (i_1,\ldots,i_{j-1},k,i_{j+1},\ldots,i_n).$$

При этом не будем ещё указывать зависимость коэффициентов уравнений от независимых переменных. Уравнение рассматривается в некоторой области D евклидова пространства R^n.

1.1. Уравнения Бианки. В только что введенных обозначениях они имеют вид

$$u_{(1\ldots1)} + \left[\sum\right] a^{(i_1\ldots i_n)}\, u_{(i_1\ldots i_n)} = f. \tag{1.1}$$

Начнем с понижения порядка на единицу.

Теорема 1.1. *Если при некотором* $j \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* $\frac{\partial^{i_j} a^{(i_1\ldots i_n)}}{\partial x_j^{i_j}}(x),\ f(x) \in C(D)$ *и выполняются тождества*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\, a^{(i_1\ldots1\ldots i_n)} - a^{(i_1\ldots0\ldots i_n)} + a^{(1\ldots0\ldots1)}\, a^{(i_1\ldots1\ldots i_n)} \equiv 0, \tag{1.2}$$

$i_l = \overline{0,1},\ l = \overline{1,n},\ l \neq j,\ i_1 + \ldots + i_{j-1} + i_{j+1} + \ldots + i_n < n-1,$ *то* (1.1) *эквивалентно уравнению*

$$u_{(1\ldots0\ldots1)} + \left[\sum\right] a^{(i_1\ldots1\ldots i_n)}\, u_{(i_1\ldots0\ldots i_n)} = u_1, \tag{1.3}$$

где $u_1 = \exp\left[-\int\limits_{x_j{}^0}^{x_j} a^{(1\ldots0\ldots1)}(x_1,\ldots,\xi,\ldots,x_n)\,d\xi\right]\left(\int\limits_{x_j{}^0}^{x_j} f(x_1,\ldots,\xi,\ldots,x_n)\,\times\right.$ $\left.\times\,\exp\left[\int\limits_{x_j{}^0}^{\xi} a^{(1\ldots0\ldots1)}(x_1,\ldots,\eta,\ldots,x_n)\,d\eta\right]d\xi + \omega(x_1,\ldots,x_{j-1},\,x_{j+1},\ldots,x_n)\right),$ *а* $\omega(x_1,\ldots,x_{j-1},\,x_{j+1},\ldots,x_n)$ — *произвольная функция.*

Доказательство. Запишем (1.1) в иной форме. Для этого сделаем преобразование

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{(1\ldots0\ldots1)} + \left[\sum\right] a^{(i_1\ldots1\ldots i_n)} u_{(i_1\ldots0\ldots i_n)}\right) - \\ - \left[\sum\right] \frac{\partial}{\partial x_j} a^{(i_1\ldots\,1\,\ldots i_n)}\, u_{(i_1\ldots0\ldots i_n)} + \sum a^{(i_1\ldots0\ldots i_n)}\, u_{(i_1\ldots0\ldots i_n)} = f.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Введём функцию

$$u_1 = u_{(1\ldots0\ldots1)} + \left[\sum\right] a^{(i_1\ldots1\ldots i_n)} u_{(i_1\ldots0\,\ldots i_n)}. \tag{1.5}$$

Подставляя это значение функции u_1 в (1.4), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u_1 + \left[\sum\right]\left(a^{(i_1\ldots0\ldots i_n)} - \frac{\partial}{\partial x_j}\, a^{(i_1\ldots1\ldots i_n)}\right) u_{(i_1\ldots0\ldots i_n)} + a^{(1\ldots0\ldots1)}\, u_{(1\ldots0\ldots1)} = f. \tag{1.6}$$

Из (1.5) следует, что

$$u_{(1\dots0\dots1)} = u_1 - \Big[\sum\Big]\, a^{(i_1\dots1\dots i_n)}\, u_{(i_1\dots0\dots i_n)}.$$

Подставляя это выражение в (1.6), придём к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_j}u_1 + \Big[\sum\Big]\left(a^{(i_1\dots0\dots i_n)} - \frac{\partial}{\partial x_j}a^{(i_1\dots1\dots i_n)}\right)u_{(i_1\dots0\dots i_n)}+$$
$$+a^{(1\dots0\dots1)}u_1 - a^{(1\dots0\dots1)}\,\Big[\sum\Big]\, a^{(i_1\dots1\dots i_n)}\, u_{(i_1\dots0\dots i_n)} = f.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}u_1 + a^{(1\dots0\dots1)}\,u_1 =$$
$$= \Big[\sum\Big]\left(\frac{\partial}{\partial x_j}a^{(i_1\dots1\dots i_n)} - a^{(i_1\dots0\dots i_n)} + a^{(1\dots0\dots1)}a^{(i_1\dots1\dots i_n)}\right)\, u_{(i_1\dots0\dots i_n)} + f. \quad (1.7)$$

Очевидно, если выполнены тождества (1.2), то уравнение (1.7) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_j}u_1 + a^{(1\dots0\dots1)}\,u_1 = f. \quad (1.8)$$

Оно легко интегрируется:

$$u_1 = u_1(x_1,\dots,x_n) = \exp\left(-\int\limits_{x_j{}^0}^{x_j} a^{(1\dots0\dots1)}(x_1,\dots,\xi,\dots,x_n)\,d\xi\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{x_j{}^0}^{x_j} f(x_1,\dots,\xi,\dots,x_n)\exp\left(\int\limits_{x_j{}^0}^{\xi} a^{(1\dots0\dots1)}(x_1,\dots,\eta,\dots,x_n)\,d\eta\right)d\xi+\right.$$
$$\left.+\omega(x_1,\dots,x_{j-1},\,x_{j+1},\dots,x_n)\right).$$

Здесь $\omega(x_1,\dots,x_{j-1},\,x_{j+1},\dots,x_n)$ — произвольная функция, а x_j^0 — любая точка из рассматриваемой области. Подставляя это значение u_1 в (1.5), получаем для u уравнение порядка $(n-1)$ вида (1.1). Таким образом, порядок уравнения (1.1), при выполнении условий (1.2), понижен на единицу. Теорема доказана.

Условия (1.2) состоят из $2^{n-1} - 1$ тождеств, которым должны удовлетворять $2^n - 1$ коэффициентов уравнения. Приведённая процедура может быть осуществлена для любого j, то есть имеется n вариантов условий (1.2).

К уравнению (1.3), в свою очередь, тоже может быть применена указанная процедура. Для того, чтобы порядок уравнения (1.3) понизить на единицу, достаточно выполнения ещё $2^{n-2}-1$ тождества. Повторяя конечное число раз указанные действия, придём к уравнению вида: $\frac{\partial}{\partial x_j}u + a^{(1\ldots 0\ldots 1)}\,u = v$, которое решается в квадратурах. При этом должны выполняться

$$N=\sum_{l=1}^{n}(2^{\,l-1}-1)=2^n-n-1$$

тождеств. Понятно, что имеется $n!$ различных вариантов наборов тождеств, выполнение которых обеспечивает полную факторизацию уравнения (1.1).

Изложенное выше доказательство теоремы 1.1 может быть продолжено [167, с. 19–28]. Из проведенных там рассуждений следует

Теорема 1.2. *Если при некотором* $k\in\mathbb{N}$, $(1<k<n)$, *коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* $f(x)$, $\frac{\partial^{i_r} a^{(i_1\ldots i_n)}}{\partial x_r^{i_r}}(x)\in C(D)$ $(r\leqslant k)$ *и выполняются тождества*

$$a^{(i_1\ldots i_n)}-\sum_{\substack{i'_j=\overline{i_j,1}\\ j=\overline{1,k}}} a^{(1\ldots 1 i_{k+1}\ldots i_n)}_{(i'_1-i_1\ldots i'_k-i_k 0\ldots 0)}a^{(i'_1\ldots i'_k 1\ldots 1)}\equiv 0, \tag{1.9}$$

$$i_l=0,1,\ l=\overline{1,n},\ i_1+\ldots+i_k<k,\ i_{k+1}+\ldots+i_n<n-k,$$

то оно равносильно системе двух уравнений

$$u_{k(\underbrace{1\ldots 1}_{k}0\ldots 0)}+\left[\sum\right]a^{(i_1\ldots i_k 1\ldots 1)}\,u_{k(i_1\ldots i_k 0\ldots 0)}=f \tag{1.10}$$

и

$$u_{(\underbrace{0\ldots 0}_{k}1\ldots 1)}+\left[\sum\right]a^{(1\ldots 1 i_{k+1}\ldots i_n)}u_{(0\ldots 0 i_{k+1}\ldots i_n)}=u_k \tag{1.11}$$

порядков k *и* $n-k$ *соответственно.*

Очевидно, меняя набор переменных, по которым ведётся дифференцирование в уравнении (1.10), для каждого $k\,(1\leqslant k\leqslant n-1)$ можно сформулировать ещё C_n^k-1 условий, аналогичных (1.9). В свою очередь, для уравнений (1.10) и (1.11) также могут быть записаны условия, играющие роль (1.9). Общее количество условий, достаточных для факторизации уравнения (1.1) равно $N_1=(2^k-1)(2^{n-k}-1)$. Покажем, что количество тождеств, выполнение которых приводит к полной факторизации уравнения, как и в п. 1.1 равно $N=2^n-n-1$. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции. Для $n=3$ факторизацию уравнения можно провести двумя возможными способами — взяв $k=1$ и $k=2$. При $k=1$ количество тождеств, обеспечивающих полную факторизацию, равно $N = 2^3 - 3 - 1 = 4$. При $k = 2$ для факторизации уравнения на два уравнения 2-го и 1-го порядков требуется количество тождеств, равное $N_1 = (2^2 - 1)(2^1 - 1) = 3$. Для разрешимости получаемого уравнения второго порядка требуется выполнение ещё одного тождества, то есть общее количество условий при $k = 2$ также равно $N = N_1 + 1 = 3 + 1 = 4$. Предположим, что формула, определяющая N, верна для любого $k_1 \in \mathbb{N}$ $(3 \leqslant k_1 < n)$. Пусть к уравнению (1.1) применена теорема 1.2 при $k = k_1$. Количество тождеств, необходимых для выполнения условий теоремы, равно $N_1 = (2^{k_1} - 1)(2^{n-k_1} - 1)$. Для разрешимости получаемых при этом уравнений, в силу предположения, достаточно выполнения условий в количестве $2^{k_1} - k_1 - 1$ и $2^{n-k_1} - (n-k_1) - 1$. Суммируя эти величины, получаем, что $N = N_1 + 2^{k_1} - k_1 - 1 + 2^{n-k_1} - (n - k_1) - 1 = 2^n - n - 1$.

Количество вариантов наборов тождеств, выполнение которых приведёт к полной факторизации уравнения, определяется по формуле $N_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} C_n^k N_k N_{n-k}$, где $N_1 = 1$, а остальные значения N_i вычисляются по рекуррентной формуле. Приведем количества таких вариантов для уравнений до 10 порядка включительно (N_k для $k = 2, \ldots, 10$): 2, 12, 120, 1 680, 30 240, 665 280, 17 297 280, 518 918 400, 17 643 225 600.

1.2. Уравнения с кратным дифференцированием. Введём обозначение

$$\left[\sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n}\right] = \sum_{\substack{i_k=\overline{0,m_k},k=\overline{1,n} \\ i_1+\ldots+i_n<m_1+\ldots+m_n}}.$$

Рассматриваемое уравнение запишется тогда в виде

$$u_{(m_1\ldots m_n)} + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n}\right] a^{(i_1\ldots i_n)}\, u_{(i_1\ldots i_n)} = f,\ m_1 + \ldots + m_n = r. \tag{1.12}$$

Как и в п. 1.1, рассмотрим сначала понижение порядка на единицу.

Теорема 1.3. *Если при некотором* $j \in \mathbb{N}\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ *коэффициенты уравнения* (1.12) *удовлетворяют условиям* $\frac{\partial^{i_j} a^{(i_1\ldots i_n)}}{\partial x_j^{i_j}}(x), f(x) \in C(D)$ *и выполняются тождества*

$$\sum_{k=0}^{m_j}(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial {x_j}^k}\, a^{(i_1\ldots i_{j-1} k\, i_{j+1}\ldots i_n)} \equiv 0,\ \sum_{k=0}^{m_j-1}(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial {x_j}^k}\, a^{(m_1\ldots m_{j-1} k\, m_{j+1}\ldots m_n)} \equiv 0, \tag{1.13}$$

$i_l = \overline{0, m_l}, l = \overline{1, n}, l \neq j, i_1 + \ldots + i_{j-1} + i_{j+1} + \ldots + i_n < r - m_j$, то (1.12) эквивалентно уравнению

$$
\begin{gathered}
u_{(m_1 \ldots m_{j-1} m_j - 1 m_{j+1} \ldots m_n)} + \\
+ \sum_{k=0}^{m_j - 1} \left[\sum_{i_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{i_j=0}^{m_j - k - 1} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} \right] (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial {x_j}^k} a^{(i_1 \ldots i_{j-1} i_j + k + 1 i_{j+1} \ldots i_n)} u_{(i_1 \ldots i_n)} = \\
= \int\limits_{x_j^0}^{x_j} f \, dx_j + c(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n), \quad (1.14)
\end{gathered}
$$

где $c(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ — произвольная функция.

Доказательство. Преобразуем левую часть уравнения (1.12), а именно объединим слагаемые, содержащие производную по переменной x_j, и применим формулу дифференцирования произведения:

$$
\begin{gathered}
u_{(m_1 \ldots m_n)} + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} \right] a^{(i_1 \ldots i_n)} u_{(i_1 \ldots i_n)} = \\
= \left(u_{(m_1 \ldots m_j - 1 \ldots m_n)} + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{i_j=0}^{m_j - 1} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} \right] a^{(i_1 \ldots i_{j-1} i_j + 1 i_{j+1} \ldots i_n)} u_{(i_1 \ldots i_n)} \right)_{x_j} - \\
- \left[\sum_{i_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{i_j=0}^{m_j - 1} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} \right] a_{x_j}^{(i_1 \ldots i_{j-1} i_j + 1 i_{j+1} \ldots i_n)} u_{(i_1 \ldots i_n)} + \\
+ \sum_{i_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} a^{(i_1 \ldots i_{j-1} 0 i_{j+1} \ldots i_n)} u_{(i_1 \ldots i_{j-1} 0 i_{j+1} \ldots i_n)}.
\end{gathered}
$$

К сумме $-\left[\sum\limits_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum\limits_{i_j=0}^{m_j-1}\dots\sum\limits_{i_n=0}^{m_n}\right] a_{x_j}^{(i_1\dots i_{j-1}i_j+1 i_{j+1}\dots i_n)} u_{(i_1\dots i_n)}$ применим аналогичную процедуру:

$$u_{(m_1\dots m_n)} + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right] a^{(i_1\dots i_n)}\, u_{(i_1\dots i_n)} =$$

$$= \Bigg(u_{(m_1\dots m_{j-1}m_j-1m_{j+1}\dots m_n)} + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right] a^{(i_1\dots i_{j-1}i_j+1 i_{j+1}\dots i_n)} u_{(i_1\dots i_n)} -$$

$$- \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_j=0}^{m_j-2}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right] a_{x_j}^{(i_1\dots i_{j-1}i_j+2\, i_{j+1}\dots i_n)} u_{(i_1\dots i_n)}\Bigg)_{x_j} +$$

$$+ \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_j=0}^{m_j-2}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right] \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\, a^{(i_1\dots i_{j-1}i_j+2\, i_{j+1}\dots i_n)} u_{(i_1\dots i_n)} +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big(-a_{x_j}^{(i_1\dots i_{j-1}1 i_{j+1}\dots i_n)} +$$

$$+ a^{(i_1\dots i_{j-1}0 i_{j+1}\dots i_n)}\Big) u_{(i_1\dots i_{j-1}0 i_{j+1}\dots i_n)}.$$

Продолжая эти рассуждения, на $m_j - 1$-м шаге придём к равенству:

$$u_{(m_1\dots m_n)} + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right] a^{(i_1\dots i_n)}\, u_{(i_1\dots i_n)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\Bigg(u_{(m_1\dots m_j-1\dots m_n)} + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right] a^{(i_1\dots i_j+1\dots i_n)} u_{(i_1\dots i_n)} + \dots +$$

$$+ \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_j=0}^{m_j-k}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right] (-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_j^{k-1}}\, a^{(i_1\dots i_j+k\dots i_n)} u_{(i_1\dots i_n)} + \dots +$$

$$+\left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_j=0}^{1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right](-1)^{m_j-2}\frac{\partial^{m_j-2}}{\partial x_j^{m_j-2}}\,a^{(i_1\ldots i_j+m_j-1\ldots i_n)}u_{(i_1\ldots i_n)}+$$

$$+\left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right](-1)^{m_j-1}\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}\,a^{(i_1\ldots m_j\ldots i_n)}u_{(i_1\ldots 0\ldots i_n)}\Bigg)+$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Bigg((-1)^{m_j-1}\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}\,a^{(i_1\ldots m_j-1\ldots i_n)}+\ldots+$$

$$+(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}\,a^{(i_1\ldots k\ldots i_n)}+\ldots+(-1)\frac{\partial}{\partial x_j}\,a^{(i_1\ldots 1\ldots i_n)}+a^{(i_1\ldots 0\ldots i_n)}\Bigg)u_{(i_1\ldots 0\ldots i_n)}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\Bigg(u_{(m_1\ldots m_j-1\ldots m_n)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m_j}\left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_j=0}^{m_j-k}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right](-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial {x_j}^{k-1}}a^{(i_1\ldots i_j+k\ldots i_n)}u_{(i_1\ldots i_n)}\Bigg)+$$

$$+\left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right]\sum_{k=0}^{m_j}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(i_1\ldots k\ldots i_n)}u_{(i_1\ldots 0\ldots i_n)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m_j-1}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1\ldots k\ldots m_n)}u_{(m_1\ldots 0\ldots m_n)}.$$

Если два последних слагаемых в полученном выражении тождественно равны нулю, то порядок уравнения может быть понижен на единицу. Очевидно, это имеет место при условиях (1.13). Интегрируя обе части уравнения, получаем

$$u_{(m_1\ldots m_j-1\ldots m_n)}+\sum_{k=1}^{m_j}\left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_j=1}^{m_j-k}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right](-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial {x_j}^{k-1}}a^{(i_1\ldots i_j+k\ldots i_n)}\,u_{(i_1\ldots i_n)}=$$

$$=\int\limits_{x_j^0}^{x_j} f\,dx_j+c(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n),$$

где $c(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)$ — произвольная функция.

Сделав замену индекса суммирования “k” на “$k+1$”, получим уравнение (1.14). Теорема доказана.

Уравнение (1.14) — того же вида, что и исходное уравнение, но порядок его на единицу меньше. Таким образом, для того, чтобы понизить порядок уравнения (1.12) на единицу по переменной x_j, достаточно выполнения

$$k = (m_1 + 1) \dots (m_{j-1} + 1)(m_{j+1} + 1) \dots (m_n + 1)$$

тождеств вида (1.13).

Перейдем теперь к понижению на величину порядка дифференцирования по одной из переменных.

Теорема 1.4. *Пусть при некотором* j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям* $\frac{\partial^{i_j} a^{(i_1 \dots i_n)}}{\partial x_j^{i_j}}(x)$, $f(x) \in C(D)$. *Тогда, если выполнены тождества*

$$a^{(i_1 \dots i_n)} - C_{m_j}^{i_j} \frac{\partial^{m_j - i_j}}{\partial x_j^{m_j - i_j}} a^{(i_1 \dots m_j \dots i_n)} - \sum_{i=i_j}^{m_j - 1} a^{(m_1 \dots i \dots m_n)} C_i^{i_j} \frac{\partial^{i - i_j}}{\partial x_j^{i - i_j}} a^{(i_1 \dots m_j \dots i_n)} \equiv 0, \tag{1.15}$$

$i_l = \overline{0, m_l}$, $l \neq j$, $i_j = \overline{0, m_j - 1}$, $i_1 + \ldots + i_{j-1} + i_{j+1} + \ldots + i_n < r - m_j$, *то уравнение принимает вид*

$$u_{(m_1 \dots 0 \dots m_n)} + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} \right] a^{(i_1 \dots m_j \dots i_n)} u_{(i_1 \dots 0 \dots i_n)} = v, \tag{1.16}$$

где функция v *является решением уравнения*

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}} v + \sum_{i_j=0}^{m_j - 1} a^{(m_1 \dots i_j \dots m_n)} \frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}} v = f. \tag{1.17}$$

Доказательство. Используя формулу Лейбница, преобразуем (1.12):

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}} \left(u_{(m_1 \dots 0 \dots m_n)} + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} \right] a^{(i_1 \dots m_j \dots i_n)} u_{(i_1 \dots 0 \dots i_n)} \right) +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_j=0}^{m_j - 1} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} a^{(i_1 \dots i_n)} u_{(i_1 \dots i_n)} -$$

$$- \left[\sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} \right] \sum_{i_j=0}^{m_j - 1} C_{m_j}^{i_j} \frac{\partial^{m_j - i_j}}{\partial x_j^{m_j - i_j}} a^{(i_1 \dots m_j \dots i_n)} u_{(i_1 \dots i_n)} = f.$$

Введём функцию

$$v = u_{(m_1\ldots 0\ldots m_n)} + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right] a^{(i_1\ldots m_j\ldots i_n)}\, u_{(i_1\ldots 0\ldots i_n)}, \qquad (1.18)$$

тогда (1.12) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}\, v + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right]\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\Bigg(a^{(i_1\ldots i_n)} -$$

$$- C_{m_j}^{i_j}\,\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}\, a^{(i_1\ldots m_j\ldots i_n)}\Bigg) u_{(i_1\ldots i_n)} + \sum_{i_j=0}^{m_j-1} a^{(m_1\ldots i_j\ldots m_n)}\, u_{(m_1\ldots i_j\ldots m_n)} = f. \quad (1.19)$$

Из (1.18) находим

$$u_{(m_1\ldots i_j\ldots m_n)} = \frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}\left(v - \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right] a^{(i_1\ldots m_j\ldots i_n)}\, u_{(i_1\ldots 0\ldots i_n)}\right) =$$

$$= \frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}\, v - \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right]\sum_{i=0}^{i_j} C_{i_j}^{i}\,\frac{\partial^{i_j-i}}{\partial x_j^{i_j-i}}\, a^{(i_1\ldots m_j\ldots i_n)}\, u_{(i_1\ldots i\ldots i_n)}.$$

Подставив это выражение в (1.19), получим

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}\, v + \sum_{i_j=0}^{m_j-1} a^{(m_1\ldots i_j\ldots m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}\, v +$$

$$+ \left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right]\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\Big(a^{(i_1\ldots i_n)} -$$

$$-C_{m_j}^{i_j}\,\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}\, a^{(i_1\ldots m_j\ldots i_n)}\Bigg)\, u_{(i_1\ldots i_n)} -$$

$$-\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\sum_{i=0}^{i_j}\left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right] a^{(m_1\ldots i_j\ldots m_n)}\times$$

$$\times C_{i_j}^{i}\,\frac{\partial^{i_j-i}}{\partial x_j^{i_j-i}} a^{(i_1\ldots m_j\ldots i_n)} u_{(i_1\ldots i\ldots i_n)} = f.$$

В последней сумме поменяем порядок суммирования и переобозначим индексы суммирования:

$$\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\sum_{i=0}^{i_j} a_{i_j,\,i}=\sum_{i=0}^{m_j-1}\sum_{i_j=i}^{m_j-1} a_{i_j,\,i}=\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\sum_{i=i_j}^{m_j-1} a_{i,\,i_j}.$$

Тогда уравнение запишется так:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}\,v+\sum_{i_j=0}^{m_j-1} a^{(m_1\ldots i_j\ldots m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}\,v+\\
+\left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\ \sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right]\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\Bigg(a^{(i_1\ldots i_n)}-C_{m_j}^{i_j}\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}\,a^{(i_1\ldots m_j\ldots i_n)}-\\
-\sum_{i=i_j}^{m_j-1} a^{(m_1\ldots i\ldots m_n)}C_i^{i_j}\frac{\partial^{i-i_j}}{\partial x_j^{i-i_j}}\,a^{(i_1\ldots m_j\ldots i_n)}\Bigg)u_{(i_1\ldots i_j\ldots i_n)}=f.
\end{gathered}$$

Из этого соотношения видно, что если выполняются условия (1.15), то для функции v получим уравнение (1.17). Если (1.17) можно решить в квадратурах, для функции u получим уравнение (1.16), в котором отсутствует дифференцирование по переменной x_j, то есть порядок уравнения будет понижен на m_j. Теорема доказана.

1.3. Уравнения с дифференцированием по одной переменной. Остановимся на частных случаях разрешимости в квадратурах уравнений вида (1.17) при условиях

$$\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}\,a^{(m_1\ldots i_j\ldots m_n)}\in C(D),\ i_j=\overline{0,m_j-1}. \tag{1.20}$$

Теорема 1.5. *Если коэффициенты в* (1.17) *удовлетворяют условиям* (1.20) *и выполняются тождества*

$$a^{(m_1\ldots i_j\ldots m_n)}=C_{m_j}^{i_j}\frac{\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}k}{k},\ i_j=\overline{0,m_j-2}, \tag{1.21}$$

где $k = k(x_1,\ldots,x_n) = c(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)\exp\Big(\int\limits_{x_j^0}^{x_j}\frac{a^{(m_1\ldots m_{j-1}\ldots m_n)}}{m_j}\,dx_j\Big)$, $c(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)$ *— произвольная функция, тогда*

$$v=\frac{\frac{1}{(m_j-1)!}\int\limits_{x_j^0}^{x_j}(x_j-\tau)^{m_j-1}(k\,f)(x_1,\ldots,x_{k-1},\tau,x_{k+1},\ldots,x_n)\,d\tau+\sum\limits_{s=0}^{m_j-1}x_j^s\,A_s}{k},\tag{1.22}$$

где $A_s\equiv A_s(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)$, $s=\overline{0,m_j-1}$ *— произвольные функции.*

Доказательство. Умножим обе части уравнения (1.17) на функцию $k=k(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$:

$$k\,\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}\,v+\sum_{i_j=0}^{m_j-1}k\,a^{(m_1\ldots i_j\ldots m_n)}\,\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}\,v=k\,f.\tag{1.23}$$

При условиях

$$k\,a^{(m_1\ldots i_j\ldots m_n)}\equiv C_{m_j}^{i_j}\,\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}k,\quad i_j=\overline{0,m_j-1}$$

выражение, стоящее в левой части уравнения, является точной производной порядка m_j по переменной x_j от функции $k\,v$. Если $i_j=m_j-1$, это тождество примет вид $k\,a^{(m_1\ldots m_j-1\ldots m_n)}\equiv m_j\frac{\partial}{\partial x_j}k$. Для функции k имеем уравнение

$$\frac{a^{(m_1\ldots m_j-1\ldots m_n)}}{m_j}=\frac{\frac{\partial}{\partial x_j}k}{k}.$$

Проинтегрируем это равенство по переменной x_j:

$$\int\limits_{x_j^0}^{x_j}\frac{a^{(m_1\ldots m_j-1\ldots m_n)}}{m_j}\,dx_j=\ln|k|+c_1^{-1}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n).$$

Отсюда получаем

$$k=c(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)\exp\Big(\int\limits_{x_j^0}^{x_j}\frac{a^{(m_1\ldots m_{j-1}\ldots m_n)}}{m_j}\,dx_j\Big),$$

где $c(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)$ — произвольная функция. Таким образом, уравнение (1.23) при условиях (1.21) принимает вид $\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}(k\,v)=k\,f$ решение, которого, по формуле Коши, записывается в виде (1.22). Теорема доказана.

Теорема 1.6. *Если коэффициенты уравнения* (1.17) *удовлетворяют условиям* (1.20) *и выполняются тождества*

$$a^{(m_1\dots i_j\dots m_n)} \equiv C_{m_j-1}^{i_j} \frac{\partial^{m_j-1-i_j}}{\partial x_j^{m_j-1-i_j}} a^{(m_1\dots m_j-1\dots m_n)}, \quad i_j = \overline{0, m_j-2}, \tag{1.24}$$

то решение (1.17) *является решением уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} v + a^{(m_1\dots m_j-1\dots m_n)} v =$$
$$= \frac{1}{(m_j-2)!} \int\limits_{x_j^0}^{x_j} (x_j-\tau)^{m_j-2} f(x_1,\dots,x_{j-1},\tau,x_{j+1},\dots,x_n)\,d\tau + \sum_{s=0}^{m_j-2} x_j^s\, A_s, \tag{1.25}$$

где $A_s \equiv A_s(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)$, $s = \overline{0, m_j-2}$ *— произвольные функции.*

Доказательство. Воспользуемся тождествами

$$\sum_{i_j=0}^{m_j-1} a^{(m_1\dots i_j\dots m_n)} \frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}} v \equiv \frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}} \left(a^{(m_1\dots m_j-1\dots m_n)} v\right),$$

выполняющимися при условиях (1.24). Это следует из соотношений

$$\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}} \left(a^{(m_1\dots m_j-1\dots m_n)} v\right) = \sum_{i_j=0}^{m_j-1} C_{m_j-1}^{i_j} \frac{\partial^{m_j-1-i_j}}{\partial x_j^{m_j-1-i_j}} a^{(m_1\dots m_j-1\dots m_n)} \frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}} v.$$

При выполнении условий (1.24) уравнение (1.17) примет вид.

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}} v + \frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}} \left(a^{(m_1\dots m_j-1\dots m_n)} v\right) = f$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v + a^{(m_1\dots m_j-1\dots m_n)} v\right) = f.$$

Проинтегрировав это уравнение m_j-1 раз по переменной x_j, получим линейное дифференциальное уравнение (1.25), решение которого находится аналогично тому, как это сделано для уравнения (1.8). Терема доказана

Теорема 1.7. *Если коэффициенты в* (1.17) *удовлетворяют условиям* (1.20) *и выполняются тождества*

$$\sum_{k=0}^{m_j-t-1}(-1)^k C_{k+t}^{t}\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1\ldots k+t\ldots m_n)}\equiv 0,\quad t=\overline{0,m_j-2},$$

то решение для (1.17) *находится из уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}v+a^{(m_1\ldots m_j-1\ldots m_n)}\,v=$$
$$=\frac{1}{(m_j-2)!}\int\limits_{x_j^0}^{x_j}(x_j-\tau)^{m_j-2}f(x_1,\ldots,x_{j-1},\tau,x_{j+1},\ldots,x_n)\,d\tau+\sum_{s=0}^{m_j-2}x_j^s\,A_s,$$

где $A_s\equiv A_s(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)$, $s=\overline{0,m_j-2}$ *— произвольные функции.*

Доказательство имеется в [167, с. 42–48].

1.4. Полная факторизация общего уравнения с оператором Буссинеска-Лява и решение задачи Гурса. В принятых выше обозначениях рассмотрим уравнение

$$u_{(2\,2)}+a^{(2\,1)}u_{(2\,1)}+a^{(2\,0)}u_{(2\,0)}+a^{(1\,2)}u_{(1\,2)}+a^{(0\,2)}u_{(0\,2)}+a^{(1\,1)}u_{(1\,1)}+a^{(1\,0)}u_{(1\,0)}+$$
$$+a^{(0\,1)}u_{(0\,1)}+a^{(0\,0)}u_{(0\,0)}=f.\quad(1.26)$$

Частным случаем этого уравнения является уравнение Буссинеска-Лява $u_{ttxx}+u_{xx}-u_{tt}=0$, встречающееся в задачах теории колебаний. Порядок уравнения (1.26) можно понижать при помощи комбинации изложенных выше теорем. Отметим, что применение теорем 1.6 и 1.7 при $m_j=2$ даёт одинаковый результат.

Под комбинацией понимается определенная очередность применения различных теорем, приводящая к построению решения исходного уравнения. Каждый шаг в этой очередности обеспечивается соответствующими тождествами, связывающими коэффициенты исходного уравнения и уравнений, получающихся в процессе проводимых преобразований. Для рассматриваемого уравнения получено 8 наборов, каждый из которых состоит из шести тождерств. Выпишем эти наборы:

$$1)\quad \begin{aligned}
&\tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,a^{(2\,1)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\,a^{(1\,1)}+a^{(0\,1)}\equiv 0,\\
&\tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,a^{(2\,0)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(1\,0)}+a^{(0\,0)}\equiv 0,\\
&-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(1\,2)}+a^{(0\,2)}\equiv 0,\\
&\tfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}a^{(12)}-\tfrac{\partial}{\partial x_2}a^{(11)}+\tfrac{\partial^2}{\partial x_1x_2}a^{(21)}+a^{(10)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(20)}\equiv 0,\\
&-\tfrac{\partial}{\partial x_2}\,a^{(2\,1)}+a^{(2\,0)}\equiv 0,\\
&2\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(2\,1)}-a^{(1\,1)}+\tfrac{\partial}{\partial x_2}a^{(1\,2)}+a^{(1\,2)}a^{(2\,1)}\equiv 0,
\end{aligned}$$

$$2)\quad \begin{aligned}
&\tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,a^{(2\,1)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\,a^{(1\,1)}+a^{(0\,1)}\equiv 0,\\
&\tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,a^{(2\,0)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(1\,0)}+a^{(0\,0)}\equiv 0,\\
&-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(1\,2)}+a^{(0\,2)}\equiv 0,\\
&\tfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}a^{(12)}-\tfrac{\partial}{\partial x_2}a^{(11)}+\tfrac{\partial^2}{\partial x_1x_2}a^{(21)}+a^{(10)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(20)}\equiv 0,\\
&-\tfrac{\partial}{\partial x_2}\,a^{(2\,1)}+a^{(2\,0)}\equiv 0,\\
&2\tfrac{\partial}{\partial x_2}a^{(1\,2)}-a^{(1\,1)}+\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(2\,1)}+a^{(2\,1)}a^{(1\,2)}\equiv 0,
\end{aligned}$$

$$3)\quad \begin{aligned}
&\tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,a^{(2\,1)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\,a^{(1\,1)}+a^{(0\,1)}\equiv 0,\\
&\tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,a^{(2\,0)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(1\,0)}+a^{(0\,0)}\equiv 0,\\
&-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(1\,2)}+a^{(0\,2)}\equiv 0,\\
&a^{(1\,1)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(2\,1)}-2\tfrac{\partial}{\partial x_2}a^{(1\,2)}-a^{(2\,1)}a^{(1\,2)}\equiv 0,\\
&a^{(1\,0)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\,a^{(2\,0)}-\tfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}a^{(1\,2)}-a^{(2\,0)}a^{(1\,2)}-a^{(2\,1)}\tfrac{\partial}{\partial x_2}a^{(1\,2)}\equiv 0,\\
&a^{(2\,0)}\equiv \tfrac{1}{4}\left(2\,\tfrac{\partial}{\partial x_2}\,a^{(2\,1)}+\left(a^{(2\,1)}\right)^2\right),
\end{aligned}$$

$$4)\quad \begin{aligned}
&\tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,a^{(2\,1)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\,a^{(1\,1)}+a^{(0\,1)}\equiv 0,\\
&\tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,a^{(2\,0)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(1\,0)}+a^{(0\,0)}\equiv 0,\\
&-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(1\,2)}+a^{(0\,2)}\equiv 0,\\
&a^{(1\,1)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}a^{(2\,1)}-2\tfrac{\partial}{\partial x_2}a^{(1\,2)}-a^{(2\,1)}a^{(1\,2)}\equiv 0,\\
&a^{(1\,0)}-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\,a^{(2\,0)}-\tfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}a^{(1\,2)}-a^{(2\,0)}a^{(1\,2)}-a^{(2\,1)}\tfrac{\partial}{\partial x_2}a^{(1\,2)}\equiv 0,\\
&a^{(2\,0)}\equiv \tfrac{\partial}{\partial x_1}\,a^{(2\,1)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
5)\quad & a^{(1\,1)} - 2\frac{\partial}{\partial x_1} a^{(2\,1)} - a^{(2\,1)}a^{(1\,2)} \equiv 0,\\
& a^{(1\,0)} - 2\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,0)} - a^{(1\,2)}a^{(2\,0)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,1)} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\, a^{(2\,1)} - a^{(0\,2)}a^{(2\,1)} - a^{(1\,2)}\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,1)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,0)} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\, a^{(2\,0)} - a^{(0\,2)}a^{(2\,0)} - a^{(1\,2)}\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,0)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,2)} \equiv \tfrac{1}{4}\left(2\,\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(1\,2)} + \left(a^{(1\,2)}\right)^2\right),\\
& a^{(2\,0)} \equiv \tfrac{1}{4}\left(2\,\frac{\partial}{\partial x_2}\, a^{(2\,1)} + \left(a^{(2\,1)}\right)^2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6)\quad & a^{(1\,1)} - 2\frac{\partial}{\partial x_1} a^{(2\,1)} - a^{(2\,1)}a^{(1\,2)} \equiv 0,\\
& a^{(1\,0)} - 2\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,0)} - a^{(1\,2)}a^{(2\,0)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,1)} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\, a^{(2\,1)} - a^{(0\,2)}a^{(2\,1)} - a^{(1\,2)}\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,1)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,0)} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\, a^{(2\,0)} - a^{(0\,2)}a^{(2\,0)} - a^{(1\,2)}\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,0)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,2)} \equiv \tfrac{1}{4}\left(2\,\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(1\,2)} + \left(a^{(1\,2)}\right)^2\right),\\
& a^{(2\,0)} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,1)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7)\quad & a^{(1\,1)} - 2\frac{\partial}{\partial x_1} a^{(2\,1)} - a^{(2\,1)}a^{(1\,2)} \equiv 0,\\
& a^{(1\,0)} - 2\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,0)} - a^{(1\,2)}a^{(2\,0)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,1)} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\, a^{(2\,1)} - a^{(0\,2)}a^{(2\,1)} - a^{(1\,2)}\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,1)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,0)} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\, a^{(2\,0)} - a^{(0\,2)}a^{(2\,0)} - a^{(1\,2)}\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,0)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,2)} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(1\,2)},\\
& a^{(2\,0)} \equiv \tfrac{1}{4}\left(2\,\frac{\partial}{\partial x_2}\, a^{(2\,1)} + \left(a^{(2\,1)}\right)^2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8)\quad & a^{(1\,1)} - 2\frac{\partial}{\partial x_1} a^{(2\,1)} - a^{(2\,1)}a^{(1\,2)} \equiv 0,\\
& a^{(1\,0)} - 2\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,0)} - a^{(1\,2)}a^{(2\,0)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,1)} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\, a^{(2\,1)} - a^{(0\,2)}a^{(2\,1)} - a^{(1\,2)}\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,1)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,0)} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\, a^{(2\,0)} - a^{(0\,2)}a^{(2\,0)} - a^{(1\,2)}\frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,0)} \equiv 0,\\
& a^{(0\,2)} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(1\,2)},\\
& a^{(2\,0)} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\, a^{(2\,1)}.
\end{aligned}
$$

Имеет место

Теорема 1.8. *Каждый из наборов тождеств* 1)–8) *обеспечивает разрешимость уравнения в квадратурах.*

Запишем еще в той же последовательности общие представления решений, соответствующие 1)–8):

$$
\begin{gathered}
u(x_1,x_2) = \exp\left[-\int\limits_{x_2^0}^{x_2} a^{(21)}(x_1,\eta)d\eta\right] \times \\
\times \left(\int\limits_{x_2^0}^{x_2} v(x_1,\eta)\exp\left[\int\limits_{x_2^0}^{\eta} a^{(21)}(x_1,\zeta)d\zeta\right]d\eta + \omega_1(x_1)\right), \\
v(x_1,x_2) = \exp\left[-\int\limits_{x_1^0}^{x_1} a^{(12)}(\xi,x_2)d\xi\right] \times \\
\times \left(\int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_2(\xi,x_2)\exp\left[\int\limits_{x_1^0}^{\xi} a^{(12)}(\zeta,x_2)d\zeta\right]d\xi + \omega_2(x_2)\right), \\
f_2(x_1,x_2) = \int\limits_{x_1^0}^{x_1}\int\limits_{x_2^0}^{x_2} f(\xi,\eta)\,d\eta d\xi + \omega_3(x_1) + \omega_4(x_2),
\end{gathered}
\tag{1.27}
$$

$$
\begin{gathered}
u(x_1,x_2) = \exp\left[-\int\limits_{x_1^0}^{x_1} a^{(12)}(\xi,x_2)d\xi\right] \times \\
\times \left(\int\limits_{x_1^0}^{x_1} v(\xi,x_2)\exp\left[\int\limits_{x_1^0}^{\xi} a^{(12)}(\zeta,x_2)d\zeta\right]d\xi + \omega_1(x_2)\right), \\
v(x_1,x_2) = \exp\left[-\int\limits_{x_2^0}^{x_2} a^{(21)}(x_1,\eta)d\eta\right] \times \\
\times \left(\int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2(x_1,\eta)\exp\left[\int\limits_{x_2^0}^{\eta} a^{(21)}(x_1,\zeta)d\zeta\right]d\eta + \omega_2(x_1)\right), \\
f_2(x_1,x_2) = \int\limits_{x_1^0}^{x_1}\int\limits_{x_2^0}^{x_2} f(\xi,\eta)\,d\eta d\xi + \omega_3(x_1) + \omega_4(x_2),
\end{gathered}
\tag{1.28}
$$

$$
\begin{gathered}
u(x_1,x_2) = \exp\left[-\int\limits_{x_1^0}^{x_1} a^{(12)}(\xi,x_2)d\xi\right] \times \\
\times \left(\int\limits_{x_1^0}^{x_1} v(\xi,x_2)\exp\left[\int\limits_{x_1^0}^{\xi} a^{(12)}(\zeta,x_2)d\zeta\right]d\xi + \omega_1(x_2)\right), \\
v(x_1,x_2) = \frac{\int\limits_{x_2^0}^{x_2}(x_2-\eta)\exp[\int\limits_{x_2^0}^{\eta}\frac{1}{2}a^{(2\,1)}(x_1,\eta_1)\,d\eta_1]f_1(x_1,\eta)\,d\eta + \omega_2(x_1)x_2 + \omega_3(x_1)}{\exp[\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\frac{1}{2}a^{(2\,1)}(x_1,\eta)\,d\eta]}, \\
f_1(x_1,x_2) = \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f(\xi,x_2)\,d\xi + \omega_4(x_2)
\end{gathered}
\tag{1.29}
$$

$$
\begin{gathered}
u(x_1,x_2)=\exp\left[-\int\limits_{x_2^0}^{x_2} a^{(21)}(x_1,\eta)d\eta\right]\times\\
\times\left(\int\limits_{x_2^0}^{x_2} v(x_1,\eta)\exp\left[\int\limits_{x_2^0}^{\eta} a^{(21)}(x_1,\zeta)d\zeta\right]d\eta+\omega_1(x_1)\right),\\
v(x_1,x_2)=\exp\left[-\int\limits_{x_1^0}^{x_1} a^{(12)}(\xi,x_2)d\xi\right]\times\\
\times\left(\int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_2(\xi,x_2)\exp\left[\int\limits_{x_1^0}^{\xi} a^{(12)}(\zeta,x_2)d\zeta\right]d\xi+\omega_2(x_2)\right),\\
f_2(x_1,x_2)=\int\limits_{x_1^0}^{x_1}\int\limits_{x_2^0}^{x_2} f(\xi,\eta)\,d\eta d\xi+\omega_3(x_1)+\omega_4(x_2),
\end{gathered}
\tag{1.30}
$$

$$
\begin{gathered}
u(x_1,x_2)=\frac{\int\limits_{x_2^0}^{x_2}(x_2-\eta)v(x_1,\eta)\exp[\int\limits_{x_2^0}^{\eta}\frac{1}{2}a^{(2\,1)}(x_1,\eta_1)\,d\eta_1]\,d\eta+\omega_1(x_1)x_2+\omega_2(x_1)}{\exp[\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\frac{1}{2}a^{(2\,1)}(x_1,\eta)\,d\eta]},\\
v(x_1,x_2)=\frac{\int\limits_{x_1^0}^{x_1}(x_1-\xi)f(\xi,x_2)\exp[\int\limits_{x_1^0}^{\xi}\frac{1}{2}a^{(1\,2)}(\xi_1,x_2)\,d\xi_1]\,d\xi+\omega_3(x_2)x_1+\omega_4(x_2)}{\exp[\int\limits_{x_1^0}^{x_1}\frac{1}{2}a^{(1\,2)}(\xi,x_2)\,d\xi]},
\end{gathered}
\tag{1.31}
$$

$$
\begin{gathered}
u(x_1,x_2)=\frac{\int\limits_{x_2^0}^{x_2}(x_2-\eta)v(x_1,\eta)\exp[\int\limits_{x_2^0}^{\eta}\frac{1}{2}a^{(2\,1)}(x_1,\eta_1)\,d\eta_1]\,d\eta+\omega_1(x_1)x_2+\omega_2(x_1)}{\exp[\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\frac{1}{2}a^{(2\,1)}(x_1,\eta)\,d\eta]},\\
v(x_1,x_2)=\exp\left[-\int\limits_{x_1^0}^{x_1} a^{(12)}(\xi,x_2)d\xi\right]\times\\
\times\left(\int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1(\xi,x_2)\exp\left[\int\limits_{x_1^0}^{\xi} a^{(12)}(\zeta,x_2)d\zeta\right]d\xi+\omega_3(x_2)\right),\\
f_1(x_1,x_2)=\int\limits_{x_1^0}^{x_1} f(\xi,x_2)\,d\xi+\omega_4(x_2),
\end{gathered}
\tag{1.32}
$$

$$u(x_1,x_2)=\exp\left[-\int\limits_{x_2^0}^{x_2} a^{(21)}(x_1,\eta)d\eta\right]\times$$
$$\times\left(\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\left(\int\limits_{x_2^0}^{\eta} v(x_1,\eta_1)\,d\eta_1+\omega_1(x_1)\right)\exp\left[\int\limits_{x_2^0}^{\eta} a^{(21)}(x_1,\zeta)d\zeta\right]d\eta+\omega_2(x_1)\right),$$
$$v(x_1,x_2)=\frac{\int\limits_{x_1^0}^{x_1}(x_1-\xi)f(\xi,x_2)\exp[\int\limits_{x_1^0}^{\xi}\frac{1}{2}a^{(12)}(\xi_1,x_2)\,d\xi_1]\,d\xi+\omega_3(x_2)x_1+\omega_4(x_2)}{\exp[\int\limits_{x_1^0}^{x_1}\frac{1}{2}a^{(12)}(\xi,x_2)\,d\xi]},\tag{1.33}$$

$$u(x_1,x_2)=\exp\left[-\int\limits_{x_2^0}^{x_2} a^{(21)}(x_1,\eta)d\eta\right]\times$$
$$\times\left(\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\left(\int\limits_{x_2^0}^{\eta} v(x_1,\eta_1)\,d\eta_1+\omega_1(x_1)\right)\exp\left[\int\limits_{x_2^0}^{\eta} a^{(21)}(x_1,\zeta)d\zeta\right]d\eta+\omega_2(x_1)\right),$$
$$v(x_1,x_2)=\exp\left[-\int\limits_{x_1^0}^{x_1} a^{(12)}(\xi,x_2)d\xi\right]\times$$
$$\times\left(\int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1(\xi,x_2)\exp\left[\int\limits_{x_1^0}^{\xi} a^{(12)}(\zeta,x_2)d\zeta\right]d\xi+\omega_3(x_2)\right),$$
$$f_1(x_1,x_2)=\int\limits_{x_1^0}^{x_1} f(\xi,x_2)\,d\xi+\omega_4(x_2),\tag{1.34}$$

где $\omega_i(x_j)$ $(i=\overline{1,4},\ j=1,2)$ — произвольные функции.

Перейдем теперь к формулам решения задачи Гурса. Если обозначить $p=[x_1^0,x_1^1]$, $q=[x_2^0,x_2^1]$, то она заключается в следующем: построить в $D=\{x_1\in p, x_2\in q\}$ решение уравнения (1.26) класса $C^{(2,2)}(D)\cap C^{(1,0)}(D\cup p)\cup C^{(0,1)}(D\cup q)$ по граничным значениям

$$\begin{aligned} u(x_1^0,x_2)=\varphi_1(x_2),\ \ u_{x_1}(x_1^0,x_2)=\varphi_2(x_2),\quad x_2\in p,\varphi_1,\varphi_2\in C^2(p),\\ u(x_1,x_2^0)=\psi_1(x_1),\ \ u_{x_2}(x_1,x_2^0)=\psi_2(x_1),\quad x_1\in q,\psi_1,\psi_2\in C^2(q),\end{aligned}\tag{1.35}$$

удовлетворяющим условиям согласования

$$\begin{aligned}\varphi_1'(x_2^0)=\psi_2(x_1^0),\ \ \varphi_1(x_2^0)=\psi_1(x_1^0),\\ \psi_1'(x_1^0)=\varphi_2(x_2^0),\ \ \psi_2(x_1^0)=\varphi_2(x_2^0).\end{aligned}$$

Понятно, что речь идет об отыскании функций $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ в формулах (1.27)–(1.34) через граничные условия (1.35).

Подстановка формул (1.27)–(1.34) в (1.35) позволяет в каждом случае вычислить ω_k $(k=\overline{1,4})$, или (что все равно) в соответствии с последовательностью 1)-8) с пропуском 4), поскольку в этом варианте набор ω_k совпадает со случаем 1). Итак, получаем:

$$
\begin{aligned}
1)\quad & \omega_1(x_1)=\psi_1(x_1),\\
& \omega_2(x_2)=\varphi_1'(x_2)+a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2),\\
& \omega_3(x_1)=\psi_2'(x_1)+a^{(21)}_{x_1}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1)+a^{(21)}(x_1,x_2^0)\psi_1'(x_1)+\\
& \qquad +a^{(12)}(x_1,x_2^0)\left(\psi_2(x_1)+a^{(21)}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1)\right),\\
& \omega_4(x_2)=\varphi_2'(x_2)+a^{(21)}_{x_1}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2)+a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_2(x_2)+\\
& \qquad +a^{(12)}(x_1^0,x_2)(\varphi_1'(x_2)+a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2))-\omega_3(x_1^0),
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\quad & \omega_1(x_2)=\varphi_1(x_2),\\
& \omega_2(x_1)=\psi_1'(x_1)+a^{(12)}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1),\\
& \omega_3(x_1)=\psi_2'(x_1)+a^{(12)}_{x_2}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1)+a^{(12)}(x_1,x_2^0)\psi_2(x_1)+\\
& \qquad +a^{(21)}(x_1,x_2^0)(\psi_1'(x_1)+a^{(12)}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1))-\omega_3(x_2^0)),\\
& \omega_4(x_2)=\varphi_2'(x_2)+a^{(12)}_{x_2}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2)+a^{(12)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2)+\\
& \qquad +a^{(21)}(x_1^0,x_2)(\varphi_2(x_2)+a^{(12)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2)),
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\quad & \omega_1(x_2)=\varphi_1(x_2),\\
& \omega_2(x_1)=\psi_2'(x_1)+a^{(12)}_{x_2}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1)+a^{(12)}(x_1,x_2^0)\psi_2(x_1)+\\
& \qquad +\tfrac{1}{2}a^{(21)}(x_1,x_2^0)(\psi_1'(x_1)+a^{(12)}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1)),\\
& \omega_3(x_1)=\psi_1'(x_1)+a^{(12)}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1)-x_2^0(\psi_2'(x_1)+\\
& \qquad +a^{(12)}_{x_2}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1)+a^{(12)}(x_1,x_2^0)\psi_2(x_1)+\\
& \qquad +\tfrac{1}{2}a^{(21)}(x_1,x_2^0)(\psi_1'(x_1)+a^{(12)}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1))),\\
& \omega_4(x_2)=\varphi_2''(x_2)+a^{(12)}_{x_2x_2}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2)+2a^{(12)}_{x_2}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2)+\\
& \qquad +a^{(12)}(x_1^0,x_2)\varphi_1''(x_2)+a^{(21)}(x_1^0,x_2)(\varphi_2'(x_2)+\\
& \qquad +a^{(12)}_{x_2}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2)+a^{(12)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2))+\\
& \qquad +a^{(20)}(x_1^0,x_2)(\varphi_2(x_2)+a^{(12)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2)),
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

$$
\begin{aligned}
5)\quad & \omega_1(x_1) = \psi_2(x_1) + \tfrac{1}{2}a^{(21)}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1),\\
& \omega_2(x_1) = \psi(x_1) - x_2^0(\psi_2(x_1) + \tfrac{1}{2}a^{(21)}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1)),\\
& \omega_3(x_2) = \varphi_2''(x_2) + a_{x_1}^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2) + a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_2'(x_2)+\\
& \qquad +a_{x_1}^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2) + a^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_2(x_2)+\\
& \qquad +\tfrac{1}{2}a^{(21)}(x_1^0,x_2)(\varphi_1''(x_2) + a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2)+\\
& \qquad +a^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2)),\\
& \omega_4(x_2) = \varphi_1''(x_2) + +a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2) + a^{(20)}\varphi_1(x_2)-\\
& \qquad -(\varphi_2''(x_2) + a_{x_1}^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2) + a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_2'(x_2)+\\
& \qquad +a_{x_1}^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2) + a^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_2(x_2)+\\
& \qquad +\tfrac{1}{2}a^{(21)}(x_1^0,x_2)(\varphi_1''(x_2) + a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2)+\\
& \qquad +a^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2)))x_1^0,
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

$$
\begin{aligned}
6)\quad & \omega_1(x_1) = \psi_2(x_1) + \tfrac{1}{2}a^{(21)}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1),\\
& \omega_2(x_1) = \psi(x_1) - x_2^0(\psi_2(x_1) + \tfrac{1}{2}a^{(21)}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1)),\\
& \omega_3(x_2) = \varphi_1''(x_2) + a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2) + a^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2),\\
& \omega_4(x_2) = \varphi_2''(x_2) + a_{x_1}^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2) + a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_2'(x_2)+\\
& \qquad +a_{x_1}^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2) + a^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_2(x_2)+\\
& \qquad +a^{(12)}(x_1^0,x_2)(\varphi_1''(x_2) + a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2)+\\
& \qquad +a^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2)),
\end{aligned}
\tag{1.40}
$$

$$
\begin{aligned}
7)\quad & \omega_1(x_1) = \psi_2(x_1) + a^{(21)}(x_1,x_2^0)\psi_1(x_1),\\
& \omega_2(x_1) = \psi_1(x_1),\\
& \omega_3(x_2) = \varphi_2''(x_2) + a_{x_1}^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2) + a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_2'(x_2)+\\
& \qquad +a_{x_1}^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2) + a^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_2(x_2)+\\
& \qquad +\tfrac{1}{2}a^{(21)}(x_1^0,x_2)(\varphi_1''(x_2) + a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2)+\\
& \qquad +a^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2)),\\
& \omega_4(x_2) = \varphi_1''(x_2) + +a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2) + a^{(20)}\varphi_1(x_2)-\\
& \qquad -(\varphi_2''(x_2) + a_{x_1}^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2) + a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_2'(x_2)+\\
& \qquad +a_{x_1}^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2) + a^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_2(x_2)+\\
& \qquad +\tfrac{1}{2}a^{(21)}(x_1^0,x_2)(\varphi_1''(x_2) + a^{(21)}(x_1^0,x_2)\varphi_1'(x_2)+\\
& \qquad +a^{(20)}(x_1^0,x_2)\varphi_1(x_2)))x_1^0,
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

$$
\begin{aligned}
8)\quad & \omega_1(x_1) = \psi_2(x_1) + a^{(21)}(x_1, x_2^0)\psi_1(x_1),\\
& \omega_2(x_1) = \psi_1(x_1),\\
& \omega_3(x_2) = \varphi_1''(x_2) + a^{(21)}(x_1^0, x_2)\varphi_1'(x_2) + a^{(20)}(x_1^0, x_2)\varphi_1(x_2),\\
& \omega_4(x_2) = \varphi_2''(x_2) + a^{(21)}_{x_1}(x_1^0, x_2)\varphi_1'(x_2) + a^{(21)}(x_1^0, x_2)\varphi_2'(x_2)+\\
& \qquad +a^{(20)}_{x_1}(x_1^0, x_2)\varphi_1(x_2) + a^{(20)}(x_1^0, x_2)\varphi_2(x_2)+\\
& \qquad +a^{(12)}(x_1^0, x_2)(\varphi_1''(x_2) + a^{(21)}(x_1^0, x_2)\varphi_1'(x_2)+\\
& \qquad +a^{(20)}(x_1^0, x_2)\varphi_1(x_2)).
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

Таким образом, во всех перечисленных случаях решение задачи Гурса записывается в явном виде.

На основе вышеизложенного может быть также построено в квадратурах решение задачи Коши [167, с. 65-67].

Источниками для результатов данного параграфа послужили работы [57], [101], [167].

§ 2. Условия эффективного построения функций Римана

Так как для рассматриваемых уравнений известны в терминах функций Римана формулы решения задач Гурса, то знание этих функций означает разрешимость обсуждаемых уравнений в квадратурах.

2.1. Уравнения Бианки.

2.1.1. Случаи двух и трех независимых переменных. Указанные уравнения даются тогда соотношениями

$$\begin{gathered} u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0, \\ u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

При этом у каждого коэффициента любого из уравнений (2.1) существует та частная производная, которая берется в соответствующем слагаемом от u. А именно, в первом из них a_x, b_y, $c \in C(\overline{D})$, а во втором a_{xy}, $b_{yz}, \ldots, g \in C(\overline{D})$, где D — область рассмотрения уравнения.

В статье [53] показано, что при условиях

$$a_x \equiv b_y,\ a_x + ab - c \equiv p(x)q(y) \tag{2.2}$$

функция Римана первого уравнения (2.1) имеет вид

$$v(x, y; t, \tau) = J_0\left(\omega_2^{\frac{1}{2}}\right) \exp\left(\int\limits_\tau^y a(t, \eta)\, d\eta + \int\limits_t^x b(\xi, y)\, d\xi\right),$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а

$$\omega_2 = 2\int\limits_t^x p(\xi)\, d\xi \int\limits_\tau^y q(\eta)\, d\eta.$$

В той же работе [53] выяснено, что для второго уравнения (2.1) роль (2.2) играют условия

$$\begin{gathered} b_y \equiv c_x,\ b_z \equiv a_x,\ c_z \equiv a_y,\ a_x + ab - e \equiv 0,\ c_x + bc - f \equiv 0, \\ a_y + ac - d \equiv 0,\ d_x + bd - g \equiv \varphi(x)\psi(y)\theta(z), \end{gathered} \tag{2.3}$$

а функция Римана дается формулой

$$v = {}_0F_2\,(1, 1; \omega_3) \exp\left(\int\limits_t^x b(\xi, y, z)\, d\xi + \int\limits_\tau^y c(t, \eta, z)\, d\eta + \int\limits_\sigma^z a(t, \tau, \zeta)\, d\zeta\right),$$

$$\omega = \int\limits_t^x \varphi(\xi)\,d\xi \int\limits_\tau^y \psi(\eta)\,d\eta \int\limits_\sigma^z \theta(\zeta)\,d\zeta,$$

где ${}_0F_2(1,1;\omega_3)$ есть обобщённая гипергеометрическая функция ([6, с. 183]).

Тождество $a_x \equiv b_y$ в (2.2) обеспечивает [165, с. 95] свойство выражения $b\,dx + a\,dy$ быть полным дифференциалом функции

$$g(x,y) = \int\limits_{x_0}^x b(\xi,y)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^y a(x_0,\eta)\,d\eta + C,$$

а первые три тождества в (2.3) обеспечивают то же свойство [165, с. 367] для формы $b\,dx + c\,dy + a\,dz$: она представляет собой полный дифференциал функции

$$G(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^x b(\alpha,y,z)\,d\alpha + \int\limits_{y_0}^y c(x_0,\beta,z)\,d\beta + \int\limits_{z_0}^z a(x_0,y_0,\gamma)\,d\gamma + C.$$

В обоих случаях C — произвольная постоянная, а (x_0,y_0,z_0) — произвольная точка области D.

Указанные выше функции Римана приобретают тогда вид

$$\begin{gathered} v(x,y;t,\tau) = J_0(\sqrt{\omega_2})\exp\left[g(x,y) - g(t,\tau)\right], \\ v(x,y,z;t,\tau,\sigma) = {}_0F_2(1,1;\omega_3)\exp\left[G(x,y,z) - G(t,\tau,\sigma)\right]. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Займемся теперь распространением формул (2.4) на случаи числа независимых переменных $n > 3$.

2.1.2. Четырехмерный вариант. Здесь уравнение имеет вид

$$\begin{multline} u_{xyzt} + au_{xyz} + bu_{xyt} + cu_{xzt} + du_{yzt} + eu_{xy} + fu_{xz} + gu_{xt} + \\ + hu_{yz} + ku_{yt} + su_{zt} + mu_x + nu_y + pu_z + qu_t + ru = 0, \end{multline} \tag{2.5}$$

где a_{xyz}, $b_{xyt}, \ldots, q_t, r \in C(\overline{D})$.

В данном случае роль условий (2.2), (2.3) играют тождества

$$h_{1,4} \equiv h_{2,4} \equiv h_{3,4} \equiv h_{1,3} \equiv h_{2,3} \equiv h_{1,2} \equiv h_{12,4} \equiv h_{13,4} \equiv h_{23,4} \equiv h_{12,3} \equiv 0, \tag{2.6}$$

$$h_{123,4} \equiv q_t + aq - r = \theta_1(x)\theta_2(y)\theta_3(z)\theta_4(t), \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned} &h_{1,4} \equiv d_t + ad - h, && h_{2,4} \equiv c_t + ac - f, \\ &h_{3,4} \equiv b_t + ab - e, && h_{1,3} \equiv d_z + bd - k, \\ &h_{2,3} \equiv c_z + bc - g, && h_{1,2} \equiv d_y + cd - s, \\ &h_{12,4} \equiv s_t + as - p, && h_{13,4} \equiv k_t + ak - n, \\ &h_{23,4} \equiv g_t + ag - m, && h_{12,3} \equiv s_z + bs - q. \end{aligned}$$

Основным результатом данного пункта является

Теорема 2.1. *Пусть для уравнения* (2.5) *выполнены условия* (2.6), (2.7) *и существует непрерывно дифференцируемая по всем переменным в* $\overline{D}$ *функция* $G(x,y,z,t)$, *такая имеют место представления*

$$a(x,y,z,t) = \tfrac{\partial G}{\partial t},\ b(x,y,z,t) = \tfrac{\partial G}{\partial z},\ c(x,y,z,t) = \tfrac{\partial G}{\partial y},\ d(x,y,z,t) = \tfrac{\partial G}{\partial x}. \quad (2.8)$$

Тогда функция Римана для уравнения (2.5) *строится в явном виде.*

Доказательство. При выполнении условий (2.6) функция Римана удовлетворяет интегральному уравнению [50, формула 3.38]

$$v(x,y,z,t) = R(x_0,y_0,z_0,t_0,x,y,z,t)v(x_0,y_0,z_0,t_0)+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{t_0}^{t} R(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y,z,t)h_{123,4}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)v(\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta d\alpha, \quad (2.9)$$

где

$$R = R_{1234}(x_0,y_0,z_0,t_0,x,y,z,t) = \exp\Bigg(\int\limits_{t_0}^{t} a(x,y,z,\delta)d\delta+$$
$$+\int\limits_{z_0}^{z} b(x,y,\gamma,t_0)d\gamma + \int\limits_{y_0}^{y} c(x,\beta,z_0,t_0)d\beta + \int\limits_{x_0}^{x} d(\alpha,y_0,z_0,t_0)d\alpha\Bigg).$$

Покажем, что при выполнении условий (2.8) интегральное уравнение (2.9) для функции Римана можно записать в виде

$$v(x,y,z,t) = A_1(x,y,z,t)A_2(x_0,y_0,z_0,t_0)v(x_0,y_0,z_0,t_0)+$$
$$+A_1(x,y,z,t)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{t_0}^{t} A_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)h_{123,4}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)v(\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta d\alpha,$$
$$(2.10)$$

где $A_1(x,y,z,t) = \exp(G(x,y,z,t))$, $A_2(x,y,z,y) = \exp(-G(x,y,z,t))$. Для этого перепишем R, подставив туда значения a,b,c,d из (2.8). Имеем

$$R(x_0,y_0,z_0,t_0,x,y,z,t) = \exp\Bigg(\int\limits_{t_0}^{t} a(x,y,z,\delta)d\delta + \int\limits_{z_0}^{z} b(x,y,\gamma,t_0)d\gamma +$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y} c(x,\beta,z_0,t_0)d\beta + \int\limits_{x_0}^{x} d(\alpha,y_0,z_0,t_0)d\alpha\Bigg) = \exp\Bigg(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial G(x,y,z,\delta)}{\partial\delta}\,d\delta +$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial G(x,y,\gamma,t_0)}{\partial\gamma}\,d\gamma + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial G(x,\beta,z_0,t_0)}{\partial\beta}\,d\beta + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial G(\alpha,y_0,z_0,t_0)}{\partial\alpha}\,d\alpha\Bigg) =$$

$$= \exp(G(x,y,z,t) - G(x_0,y_0,z_0,t_0)) =$$

$$= \exp(G(x,y,z,t))\exp(-G(x_0,y_0,z_0,t_0)).$$

С помощью замены $v_1(x,y,z,t) = A_2(x,y,z,t)v(x,y,z,t)$ уравнение (2.10) редуцируется к виду

$$v_1(x,y,z,t) = A_2(x_0,y_0,z_0,t_0)+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{t_0}^{t} h_{123,4}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)v_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta d\alpha. \quad (2.11)$$

Очевидно, уравнение (2.11) эквивалентно задаче Гурса для уравнения

$$v_{1xyzt} - h_{123,4}(x,y,z,t)v_1 = 0 \quad (2.12)$$

с граничными условиями

$$v_1|_{x=x_0} = v_1|_{y=y_0} = v_1|_{z=z_0} = v_1|_{t=t_0} = A_2(x_0,y_0,z_0,t_0). \quad (2.13)$$

В предположении (2.7) функция Римана для уравнения (2.12) известна [19, с. 10–12]. Это есть обобщённая гипергеометрическая функция ${}_0F_3(1,1,1;\omega_4)$ от аргумента

$$\omega_4 = \int\limits_{x_0}^{x} \theta_1(\alpha)\,d\alpha \int\limits_{y_0}^{y} \theta_2(\beta)\,d\beta \int\limits_{z_0}^{z} \theta_3(\gamma)\,d\gamma \int\limits_{t_0}^{t} \theta_4(\delta)\,d\delta.$$

В соответствии с формулой (3.9) из [50] получаем решение задачи (2.12), (2.13):

$$v_1 = {}_0F_3(1,1,1;\omega_4)A_2(x_0,y_0,z_0,t_0).$$

Учитывая связь между v и v_1, находим функцию Римана в форме

$$v(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0) = {}_0F_3\,(1,1,1;\omega_4)\exp(G(x,y,z,t) - G(x_0,y_0,z_0,t_0)). \tag{2.14}$$

На основании представлений (2.8) и вытекающих из них тождеств

$$\frac{\partial a}{\partial z} \equiv \frac{\partial b}{\partial t},\ \ \frac{\partial a}{\partial y} \equiv \frac{\partial c}{\partial t},\ \ \frac{\partial a}{\partial x} \equiv \frac{\partial d}{\partial t},\ \ \frac{\partial b}{\partial y} \equiv \frac{\partial c}{\partial z},\ \ \frac{\partial b}{\partial x} \equiv \frac{\partial d}{\partial z},\ \ \frac{\partial c}{\partial x} \equiv \frac{\partial d}{\partial y}, \tag{2.15}$$

функцию $G(x,y,z,t)$ можно выразить через коэффициенты a, b, c, d.

При условиях (2.15) $d\,dx + c\,dy + b\,dz + a\,dt$ является полным дифференциалом функции $G(x,y,z,t)$. Поэтому имеют место условия (2.8).

Из системы (2.8) имеем:

$$G(x,y,z,t) = \int\limits_{t_1}^{t} a(x,y,z,\delta)\,d\delta + G(x,y,z,t_1), \tag{2.16}$$

$$G(x,y,z,t) = \int\limits_{z_1}^{z} b(x,y,\gamma,t)\,d\gamma + G(x,y,z_1,t), \tag{2.17}$$

$$G(x,y,z,t) = \int\limits_{y_1}^{y} c(x,\beta,z,t)\,d\beta + G(x,y_1,z,t), \tag{2.18}$$

$$G(x,y,z,t) = \int\limits_{x_1}^{x} d(\alpha,y,z,t)\,d\alpha + G(x_1,y,z,t). \tag{2.19}$$

Полагая в (2.18) $x = x_1$, найдем $G(x_1,y,z,t)$ и подставим в (2.19). Тогда

$$G(x,y,z,t) = \int\limits_{x_1}^{x} d(\alpha,y,z,t)\,d\alpha + \int\limits_{y_1}^{y} c(x_1,\beta,z,t)\,d\beta + G(x_1,y_1,z,t) \tag{2.20}$$

Далее из (2.17) найдем $G(x_1,y_1,z,t)$ и подставим в (2.20):

$$\begin{aligned} G(x,y,z,t) = \int\limits_{x_1}^{x} d(\alpha,y,z,t)d\alpha + \int\limits_{y_1}^{y} c(x_1,\beta,z,t)d\beta + \\ + \int\limits_{z_1}^{z} b(x_1,y_1,\gamma,t)d\gamma + G(x_1,y_1,z_1,t). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Теперь из (2.16) вычислим $G(x_1, y_1, z_1, t)$ и подставим в (2.21). Тогда найдем окончательный вид функции

$$G(x,y,z,t) = \int_{t_1}^{t} a(x_1,y_1,z_1,\delta)\,d\delta + \int_{z_1}^{z} b(x_1,y_1,\gamma,t)\,d\gamma + \\ + \int_{y_1}^{y} c(x_1,\beta,z,t)\,d\beta + \int_{x_1}^{x} d(\alpha,y,z,t)\,d\alpha + C,$$

где $C = G(x_1, y_1, z_1, t_1)$, а (x_1, y_1, z_1, t_1) — любая фиксированная точка области D. Очевидно, (2.14) есть четырёхмерный аналог формул (2.4). Теорема доказана.

2.1.3. Пространство любого конечного числа измерений n. В принятых в [50, с. 75] обозначениях запишем уравнение в виде

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{(q_1,\ldots,q_n)} a_{q_1\ldots q_k}(x) \frac{\partial^{n-k} u}{\partial x_{r_1} \ldots \partial x_{r_{n-k}}} + a(x)u = 0, \tag{2.22}$$

где n — произвольное натуральное число, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, внутренняя сумма берётся по всем наборам $(q_1, \ldots, q_k)$, удовлетворяющим неравенствам $1 \leqslant q_1 < \ldots < q_k \leqslant n$. Условия гладкости коэффициентов аналогичны указанным для уравнения (2.5): каждый коэффициент непрерывен в $\overline{D}$ вместе с той частной производной, которая берётся в соответствующем слагаемом.

В дальнейшем будем использовать конструкции

$$h_{q_1\ldots q_{k-1},q_k} = \left(a_{q_1\ldots q_{k-1}}\right)_{x_{q_k}} + a_{q_1\ldots q_{k-1}} a_{q_k} - a_{q_1\ldots q_k},$$

взятые по всем упорядоченным наборам $(q_1, \ldots, q_k)$, причём считаем, что $a_{q_1\ldots q_k} = a_{p_1\ldots p_k}$, если $\{q_i | 1 \leqslant i \leqslant k\} = \{p_j | 1 \leqslant j \leqslant k\}$. При обозначении $Q_{k,n} = \{(q_1, \ldots, q_k) | 1 \leqslant q_1 < \ldots < q_k \leqslant n\}$ справедлива

Теорема 2.2. *Пусть для уравнения* (2.22) *выполнены условия*

$$h_{q_1\ldots q_{k-1},q_k} \equiv 0,\ (q_1, \ldots, q_k) \in Q_{k,n},\ k = \overline{2, n-1}, \tag{2.23}$$

$$h_{1\ldots n-1,n}(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^n \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \theta_j(x_j) \tag{2.24}$$

и существует функция $G(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывно дифференцируемая в $\overline{D}$ по всем переменным $x_1, \ldots, x_n$, такая что имеют место представления

$$a_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial G}{\partial x_i},\ i = \overline{1, n}. \tag{2.25}$$

Тогда функция Римана для уравнения (2.22) *записывается в явном виде.*

Доказательство. Действительно, если выполнены условия (2.23), то функция Римана для (2.22) удовлетворяет [50, с. 98] интегральному уравнению

$$v(x_1,\dots,x_n,x_1^0,\dots,x_n^0)=R(x_1^0,\dots,x_n^0,x_1,\dots,x_n)+ \\ +(-1)^n\int\limits_{x_1^0}^{x_1}\dots\int\limits_{x_n^0}^{x_n}R(\alpha_1,\dots,\alpha_n,x_1,\dots,x_n)\times \\ \times h_{1\dots n-1,n}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)v(\alpha_1,\dots,\alpha_n,x_1^0,\dots,x_n^0)d\alpha_n\dots d\alpha_1, \quad (2.26)$$

где

$$R(x_1^0,\dots,x_n^0,x_1,\dots,x_n)=\exp\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_i^0}^{x_i}a_i(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,\alpha_i,x_{i+1},\dots,x_n)\,d\alpha_i. \quad (2.27)$$

Подставив в (2.27) представления (2.25), имеем

$$R(x_1^0,\dots,x_n^0,x_1,\dots,x_n)= \\ =\exp\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_i^0}^{x_i}\frac{\partial G}{\partial x_i}(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,\alpha_i,x_{i+1},\dots,x_n)\,d\alpha_i= \\ =\exp\big(G(x_1,\dots,x_n)-G(x_1^0,\dots,x_n^0)\big)=A_1(x_1,\dots,x_n)A_2(x_1^0,\dots,x_n^0),$$

где $A_1=\exp G(x_1,\dots,x_n)$, $A_2=1/A_1$. Тогда интегральное уравнение (2.26) запишется так

$$v(x_1,\dots,x_n,x_1^0,\dots,x_n^0)=A_1(x_1,\dots,x_n)A_2(x_1^0,\dots,x_n^0)+ \\ +(-1)^n\int\limits_{x_1^0}^{x_1}\dots\int\limits_{x_n^0}^{x_n}A_1(x_1,\dots,x_n)A_2(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\times \\ \times h_{1\dots n-1,n}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)v(\alpha_1,\dots,\alpha_n,x_1^0,\dots,x_n^0)d\alpha_n\dots d\alpha_1.$$

С помощью замены $v_1(x_1,\dots,x_n)=A_2(x_1,\dots,x_n)\,v(x_1,\dots,x_n,x_1^0,\dots,x_n^0)$ оно сводится к уравнению

$$v_1(x_1,\dots,x_n)=A_2(x_1^0,\dots,x_n^0)+ \\ +(-1)^n\int\limits_{x_1^0}^{x_1}\dots\int\limits_{x_n^0}^{x_n}v_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n)h_{1\dots n-1,n}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)d\alpha_n\dots d\alpha_1,$$

эквивалентному задаче Гурса

$$v_{1x_1\ldots x_n} - (-1)^n h_{1\ldots n-1,n}\, v_1 = 0 \tag{2.28}$$

с граничными значениями

$$v_1\Big|_{x_1=x_1^0} = \ldots = v_1\Big|_{x_n=x_n^0} = A_2(x_1^0,\ldots,x_n^0).$$

При условии (2.24) функция Римана Ω для (2.28) даётся формулой [19, с. 10–12]

$$\Omega = {}_0F_{n-1}(1,\ldots,1;\omega),\ \omega = \prod_{1\leqslant j\leqslant n}\int\limits_{x_j^0}^{x_j}\theta_j(\alpha_j)\,d\alpha_j.$$

Вычислив v_1 по формуле (3.54) из [50], находим

$$v_1 = {}_0F_{n-1}\left(1,\ldots,1;\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\int\limits_{x_j^0}^{x_j}\theta_j(\alpha_j)\,d\alpha_j\right)A_2(x_1^0,\ldots,x_n^0).$$

Возвращаясь снова к функции v, окончательно получаем

$$v = {}_0F_{n-1}\left(1,\ldots,1;\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\int\limits_{x_j^0}^{x_j}\theta_j(\alpha_j)\,d\alpha_j\right)\times$$
$$\times\exp(G(x_1,\ldots,x_n) - G(x_1^0,\ldots,x_n^0)),$$

$$G(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_i^0}^{x_i} a_i(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,\alpha_i,x_{i+1},\ldots,x_n)\,d\alpha_i + C, \tag{2.29}$$

где $C = G(x_1^0,\ldots,x_n^0)$. Покажем справедливость равенства (2.29), которое уже использовалось в случае $n = 4$. Для этого запишем аналог формулы Ньютона-Лейбница в R^n

$$G(x_1,\ldots,x_n) - G(x_1^0,\ldots,x_n^0) = \int\limits_{(x_1^0,\ldots,x_n^0)}^{(x_1,\ldots,x_n)}\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1(\alpha),\ldots,x_n(\alpha))\,dx_i(\alpha),$$
$$0\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

причём интегрирование ведётся по кусочно-гладкому пути, соединяющему точки $(x_1^0,\ldots,x_n^0) = (x_1(0),\ldots,x_n(0))$ и $(x_1,\ldots,x_n) = (x_1(1),\ldots,x_n(1))$. Если за этот путь принять ломаную линию, звенья которой параллельны осям координат, то есть являются отрезками $[(x_1^0,\dots,x_{n-1}^0,x_n^0),\ (x_1^0,\dots,x_{n-1}^0,x_n)]$, $\dots,[(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i^0,x_{i+1},\dots,x_n),(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1},\dots,x_n)],\dots,$ $[(x_1^0,x_2,\dots,x_n),(x_1,x_2,\dots,x_n)]$, а $x_i(\alpha)=\alpha_i$, то получим формулу (2.29). Теорема доказана.

2.2. Об уравнениях с кратным дифференцированием. Для этих уравнений функции Римана построены лишь в еще более частных случаях, чем в п. 2.1. Так в [118] для уравнения

$$u_{xxy}+au_{xx}+bu_{xy}+cu_x+du_y+eu=f \tag{2.30}$$

при условиях

$$a\equiv a(y),\quad e=e(y),\quad b=c=d\equiv 0 \tag{2.31}$$

функция Римана дается формулой

$$v(x,y,x_0,y_0)=\exp\left(\int\limits_{y_0}^{y}a(\beta)d\beta\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\int\limits_{y}^{y_0}e(\beta)d\beta\right)^k\frac{(x-x_0)^{2k}}{(2k)!}.$$

Там же построена функция Римана для уравнения

$$u_{xxyz}+B(z)u_{xxy}+A(y)u_{xxz}+A(y)B(z)u_{xx}+\varphi(y)\psi(z)u=f(x,y,z), \tag{2.32}$$

которая имеет вид

$$v(x,y,z,x_0,y_0,z_0)=\exp\left(\int\limits_{y_0}^{y}A(\beta)d\beta+\int\limits_{z_0}^{z}B(\gamma)d\gamma\right)\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\int\limits_{y}^{y_0}\varphi(\beta)d\beta\right)^k\left(\int\limits_{z}^{z_0}\psi(\gamma)d\gamma\right)^k\frac{(x-x_0)^{2k}}{(2k)!}.$$

Отметим, что в работе [4] построена матрица Римана для системы вида (2.30) с матричными коэффициентами, при этом $a=b=c=d\equiv 0$, e — постоянная матрица.

В работе [121] построена функция Римана для четырехмерного аналога уравнений (2.30)–(2.31), (2.32), а в [120] эти результаты обобщены на случай уравнения в n-мерном пространстве. А именно, для уравнения

$$\begin{aligned}u_{x_1x_1x_2\dots x_n}&+A_n(x_n)u_{x_1x_1x_2\dots x_{n-1}}+\dots+\\&+A_2(x_2)u_{x_1x_1x_3\dots x_n}+A_{n-1}(x_{n-1})A_n(x_n)u_{x_1x_1x_2\dots x_{n-2}}+\dots+\\&+A_2(x_2)A_3(x_3)u_{x_1x_1x_4\dots x_n}+\dots+A_2(x_2)\dots A_n(x_n)u_{x_1x_1}+\\&+\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n)u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{aligned}$$

функция Римана имеет вид

$$R(x_1,\dots,x_n;\xi_1,\dots,\xi_n)=\exp\Bigg(\sum_{i=2}^{n}\int\limits_{\xi_i}^{x_i}A_i(\alpha_i)d\alpha_i\Bigg)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^{n-1}}\prod_{i=2}^{n}\Bigg(\int\limits_{x_i}^{\xi_i}\varphi_i(\alpha_i)d\alpha_i\Bigg)^k\frac{(x_1-\xi_1)^{2k}}{(2k)!}.$$

§ 3. Развитие метода каскадного интегрирования

3.1. Случай двух независимых переменных. Рассматриваемое уравнение имеет вид
$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f. \tag{3.1}$$

Каскадный метод был предложен в 1773 г. Лапласом [231] именно для этого уравнения. Процесс построения каскада для (3.1) при $f \equiv 0$ изложен в [168, с. 177–181]. Рассуждения из [168] проходят и для $f \not\equiv 0$, только несколько усложняются формулы. Приведем здесь эти формулы (они нужны в дальнейшем), а также укажем некоторые новые условия разрешимости (3.1) в явном виде.

Если $h = a_x + ab - c \equiv 0$, то общее представление решений (3.1) дается формулой

$$\begin{aligned} u(x,y) = P(x) \exp \int\limits_y^{y_0} a(x,\eta)\,d\eta + \\ + \int\limits_{y_0}^{y} Q(\eta) \exp\left(t \int\limits_{x_0}^{x} b(\xi,\eta)\,d\xi + \int\limits_y^{\eta} a(x,\eta_1)\,d\eta_1 \right) d\eta + \\ + \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{y_0}^{y} f(\xi,\eta) \exp\left(\int\limits_x^{\xi} b(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 + \int\limits_y^{\eta} a(x,\eta_1)\,d\eta_1 \right) d\eta\,d\xi. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Аналогично при $k = b_y + ab - c \equiv 0$

$$\begin{aligned} u(x,y) = M(y) \exp \int\limits_x^{x_0} b(\xi,y)\,d\xi + \\ + \int\limits_{x_0}^{x} N(\xi) \exp\left(\int\limits_{y_0}^{y} a(\xi,\eta)\,d\eta + \int\limits_x^{\xi} b(\xi_1,y)\,d\xi_1 \right) d\xi + \\ + \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{y_0}^{y} f(\xi,\eta) \exp\left(\int\limits_y^{\eta} a(\xi,\eta_1)\,d\eta_1 + \int\limits_x^{\xi} b(\xi_1,y)\,d\xi_1 \right) d\eta\,d\xi. \end{aligned}$$

Необходимое для регулярности решения уравнения (3.1) включение $u \in C^{(1,1)}$ обеспечивается условиями $a \in C(1,0)$, $b \in C^{(0,1)}$; $c, f \in C^{(0,0)}$. При этом $P, M \in C^1; Q, N \in C$ — произвольные функции. В качестве (x_0, y_0) можно взять любую точку рассматриваемой области. Если $h \neq 0$, то, записывая (3.1) в виде системы

$$u_1 = u_y + au,\; u_{1x} + bu_1 - f = hu, \tag{3.3}$$

а затем исключая из нее u, опять придем к уравнению вида (3.1):

$$u_{1xy} + a_1 u_{1x} + b_1 u_{1y} + c_1 u_1 = f_1, \tag{3.4}$$

где $a_1 = a - (\ln h)_y$, $b_1 = b$, $c_1 = c - a_x + b_y - b(\ln h)_y$, $f_1 = [a - (\ln h)_y]\, f - f_y$. Роль h, k для (3.4) играют

$$h_1 = 2h - k - (\ln h)_{xy},\; k_1 = h. \tag{3.5}$$

Очевидно, при этом от коэффициентов a, b, c, f требуется дополнительная гладкость: $a \in C^{(2,1)}$; $b, c \in C^{(1,1)}$; $f \in C^{(0,1)}$. В случае $k \neq 0$ вместо (3.3) следует взять систему

$$u_{-1} = u_x + bu,\; u_{-1y} + au_{-1} - f = ku, \tag{3.6}$$

а для u_{-1} получится уравнение

$$u_{-1xy} + a_{-1} u_{-1x} + b_{-1} u_{-1y} + c_{-1} u_{-1} = f_{-1}, \tag{3.7}$$

$a_{-1} = a$, $b_{-1} = b - (\ln k)_x$, $c_{-1} = c - b_y + a_x - a(\ln k)_x$, $f_{-1} = [b - (\ln k)_x]\, f - f_x$. В роли h, k для (3.7) будут

$$h_{-1} = k,\; k_{-1} = 2k - h - (\ln k)_{xy}. \tag{3.8}$$

При этом $b \in C^{(1,2)}$; $a, c \in C^{(1,1)}$; $f \in C^{(1,0)}$. Очевидно, к уравнениям (3.4) и (3.7) можно применить вышеизложенные рассуждения. Многократное повторение указанной процедуры как раз и приводит к появлению целого каскада уравнений вида (3.1) с удвоением их числа на каждом шаге. Если окажется, что хотя бы для одного уравнения хоть одна из конструкций, играющих роль h, k, равна нулю, то это уравнение решается в квадратурах. В силу обратимости преобразований типа (3.3), (3.6), это ведет к решению в квадратурах исходного уравнения (3.1). Выясняется еще, что не все уравнения каскада с точки зрения решения исходного уравнения существенно отличаются друг от друга. Исключение "несущественных" уравнений приводит к двусторонней последовательности уравнений

$$\ldots, (E_{-3}), (E_{-2}), (E_{-1}), (E), (E_1), (E_2), \ldots \tag{3.9}$$

Если конструкции, играющие для уравнений (3.9) роли h, k, обозначить

$$\dots, h_{-2}, h_{-1}, h = h_0, h_1, h_2, \dots,$$

$$\dots, k_{-2}, k_{-1}, k = k_0, k_1, k_2, \dots,$$

то они вычисляются посредством рекуррентных формул

$$h_{n+1} = 2h_n - h_{n-1} - (\ln h_n)_{xy}, \quad k_n = h_{n-1}, h_0 = h, \tag{3.10}$$

где n может быть положительным, отрицательным и нулем.

Заметим, что формулы (3.10) удалось эффективно применить к исследованию уравнения Эйлера-Пуассона [168, с. 181–186], формально относящегося к виду (3.1), но имеющего сингулярные коэффициенты a и b (см. также главу 1 данной книги). Однако, при $n = \pm 1$ и для достаточно гладких коэффициентов тоже можно указать [55] условия разрешимости в квадратурах. Эти условия удобно формулировать в терминах обозначений

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} (2a_t - b_\tau + ab - c)\, d\tau\, dt, \\ \beta(x,y) &= \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} (2b_\tau - a_t + ab - c)\, d\tau\, dt, \end{aligned} \tag{3.11}$$

и тождеств

$$ma_x - b_y + (m-1)(ab - c) = 0, \tag{3.12}$$

$$mb_y - a_x + (m-1)(ab - c) = 0. \tag{3.13}$$

В (3.11) a, b, c зависят от t, τ, а в (3.12), (3.13) — от x, y; в качестве m может служить любая функция из C^1, зависящая либо лишь от x, либо лишь от y. Кроме того, предполагается, что $m \neq 2$.

Теорема 3.1. *Общее представление решений уравнения* (3.1) *может быть записано в квадратурах, если выполняется любой из следующих четырех вариантов условий:*

a) *h имеет структуру*

$$h = \varphi(x)\psi(y)\exp\alpha(x,y),\ \varphi\psi \neq 0,\ \varphi, \psi \in C^1;$$

b) *k имеет тот же вид, что и h в предыдущей формуле, но с заменой $\alpha(x,y)$ на $\beta(x,y)$ из* (3.11)*;*

c) *h записывается в форме*

$$h=\frac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{(2-m)[\varphi(x)+\psi(y)]^2},\ \varphi\in C^2,\ \psi\in C^1,\ \varphi'\psi'\neq 0,\ \varphi+\psi\neq 0, \qquad (3.14)$$

и выполняется тождество (3.12);

d) *k также записывается в виде* (3.14), *но вместо* (3.12) *выполняется тождество* (3.13), *при этом $\varphi\in C^1$, $\psi\in C^2$, и как в* (3.14), $\varphi'\psi'\neq 0,\ \varphi+\psi\neq 0$.

Здесь φ,ψ — любые функции из указанного класса.

Доказательство. Для подтверждения первого варианта этой теоремы достаточно заметить, что из структуры h в условии a) и первой формулы (3.11) следует $(\ln h)_{xy}=\alpha_{xy}=2a_x-b_y+ab-c$. Последнее же выражение равно $2h-k$ (проверяется непосредственно). Поэтому (см. (3.5)) $h_1\equiv 0$, что обеспечивает разрешимость (3.4) в квадратурах по формуле (3.2), где нужно только заменить a,f соответственно на a_1,f_1. Подставляя затем u_1 во вторую формулу (3.3), найдем ($h\neq 0$) представление всех решений уравнения (3.1). Подобным же образом устанавливается достаточность условия b) для разрешимости (3.1) в квадратурах, при этом роль (3.3)–(3.5) играют (3.6)–(3.8). В условиях варианта c) из (3.14) следует [10, с. 321–322, формулы (159), (164)], что $h_0=(2-m)h$ удовлетворяет уравнению $(\ln h_0)_{xy}=h_0$. Так как $(\ln h_0)_{xy}\equiv(\ln h)_{xy}$, то имеем $(\ln h)_{xy}\equiv(2-m)h$. Поскольку (3.38) эквивалентно тождеству $mh\equiv k$ (вновь непосредственная проверка), то $(\ln h)_{xy}\equiv 2h-k$. Следовательно, (см. (3.5)), $h_1\equiv 0$. Таким образом, и в этом случае уравнение (3.4), а значит, и (3.1), решается в квадратурах. Аналогичное рассуждение имеет место и для варианта d). Гладкость φ,ψ, указанная в a)–d), следует из условий, наложенных ранее на коэффициенты уравнения (3.1) для обеспечения принадлежности решения классу $C^{(1,1)}$. Теорема доказана.

Пусть теперь λ, μ, ν — произвольные функции, каждая из которых зависит либо лишь от x, либо лишь от y. Непосредственной подстановкой в варианты a)–d) с учетом формул (3.11)–(3.13) нетрудно убедиться, что условия теоремы будут выполнены, если коэффициенты уравнения имеют один из следующих восьми наборов структурных представлений:

$$\begin{gathered}a=\lambda(y),\quad b=\mu(x)\nu(y),\quad c=\lambda(y)\mu(x)\nu(y)-\mu(x)\nu'(y),\\ \nu'\mu\neq 0,\quad \lambda\in C,\quad \mu\in C^1,\quad \nu\in C^2;\end{gathered}\qquad (3.15)$$

$$\begin{gathered}a=\mu(x)\nu(y),\quad b=\lambda(x),\quad c=2\mu'(x)\nu(y)+\lambda(x)\mu(x)\nu(y),\\ \mu'\nu\neq 0,\quad \lambda\in C,\quad \mu\in C^2,\quad \nu\in C^1;\end{gathered}\qquad (3.16)$$

$$a = \lambda(x)\mu(y), \quad b = \nu(x), \quad c = \lambda(x)\mu(y)\nu(x) - \mu(y)\lambda'(x),$$
$$\lambda'\mu \neq 0, \quad \lambda \in C^2, \quad \mu \in C^1, \quad \nu \in C; \tag{3.17}$$

$$a = \lambda(y), \quad b = \mu(y)\nu(x), \quad c = 2\mu'(y)\nu(x) + \lambda(y)\mu(y)\nu(x),$$
$$\mu'\nu \neq 0, \quad \lambda \in C, \quad \mu \in C^2, \quad \nu \in C^1; \tag{3.18}$$

$$a = \lambda(y), \quad b = \tfrac{\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad c = \tfrac{\lambda(y)\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)} - \tfrac{\mu'(x)\nu'(y)}{[\mu(x)+\nu(y)]^2},$$
$$\mu'\nu' \neq 0, \quad \mu+\nu \neq 0, \quad \lambda \in C, \quad \mu \in C^2, \quad \nu \in C^1; \tag{3.19}$$

$$a = \tfrac{\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad b = \lambda(x), \quad c = \tfrac{\lambda(x)\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)} - \tfrac{\mu'(x)\nu'(y)}{[\mu(x)+\nu(y)]^2},$$
$$\mu'\nu' \neq 0, \quad \mu+\nu \neq 0, \quad \lambda \in C, \quad \mu \in C^1, \quad \nu \in C^2; \tag{3.20}$$

$$a = \tfrac{\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad b = \tfrac{\lambda(x)\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad c = [2\lambda(x)-4]\tfrac{\mu'(x)\nu'(y)}{[\mu(x)+\nu(y)]^2},$$
$$\lambda \neq 3, \quad \mu'\nu' \neq 0, \quad \mu+\nu \neq 0, \quad \lambda, \nu \in C^1, \quad \mu \in C^2; \tag{3.21}$$

$$a = \tfrac{\lambda(y)\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad b = \tfrac{\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad c = [2\lambda(y)-4]\tfrac{\mu'(x)\nu'(y)}{[\mu(x)+\nu(y)]^2},$$
$$\lambda \neq 3, \quad \mu'\nu' \neq 0, \quad \mu+\nu \neq 0, \quad \lambda, \mu \in C^1, \quad \nu \in C^2. \tag{3.22}$$

При этом для (3.15)–(3.18) следует проверять варианты a) и b), а для (3.19)–(3.22) — c) и d). В случаях (3.19), (3.20) $m \equiv 0$, а в (3.21) и (3.22) $m = \frac{4-2\lambda}{3-\lambda}$ с $\lambda = \lambda(x)$ и $\lambda = \lambda(y)$ соответственно.

Следствие 3.1. *Для разрешимости уравнения* (3.1) *в квадратурах достаточно выполнения любого набора из представлений* (3.15)–(3.22).

В работе [66, с. 26–28] получено еще одно следствие теоремы 3.1.

Следствие 3.2. *Пусть* $\omega(x)$ *— произвольная функция, а* φ, ψ *принадлежат указанным в теореме* 3.1 *классам. Если выполнен хотя бы один из четырех вариантов условий*

a)

$$b = \int\limits_{y_0}^{y} \left(a_x(x,\tau) + \varphi(x)\psi(\tau)\right) d\tau + \omega(x),$$
$$c = a_x + a\left(\int\limits_{y_0}^{y} \left(a_x(x,\tau) + \varphi(x)\psi(\tau)\right) d\tau + \omega(x)\right) - \varphi(x)\psi(y), \tag{3.23}$$

b)

$$b = \int\limits_{y_0}^{y} \left(a_x(x,\tau) - \varphi(x)\psi(\tau)\right) d\tau + \omega(x),$$
$$c = a_x + a\left(\int\limits_{y_0}^{y} \left(a_x(x,\tau) - \varphi(x)\psi(\tau)\right) d\tau + \omega(x)\right) - 2\varphi(x)\psi(y), \tag{3.24}$$

c)

$$b = \int\limits_{y_0}^{y} \left(a_x(x,\tau) + (m-1)\tfrac{2\varphi'(x)\psi'(\tau)}{(2-m)[\varphi(x)+\psi(\tau)]^2} \right) d\tau + \omega(x),$$
$$c = a_x + a\left(\int\limits_{y_0}^{y} \left(a_x(x,\tau) + (m-1)\tfrac{2\varphi'(x)\psi'(\tau)}{(2-m)[\varphi(x)+\psi(\tau)]^2} \right) d\tau + \omega(x) \right) - \qquad (3.25)$$
$$- \tfrac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{(2-m)[\varphi(x)+\psi(y)]^2}$$

d)

$$b = \int\limits_{y_0}^{y} \left(a_x(x,\tau) - (m-1)\tfrac{2\varphi'(x)\psi'(\tau)}{(2-m)[\varphi(x)+\psi(\tau)]^2} \right) d\tau + \omega(x),$$
$$c = a_x + a\left(\int\limits_{y_0}^{y} \left(a_x(x,\tau) - (m-1)\tfrac{2\varphi'(x)\psi'(\tau)}{(2-m)[\varphi(x)+\psi(\tau)]^2} \right) d\tau + \omega(x) \right) - \qquad (3.26)$$
$$- \tfrac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{(2-m)[\varphi(x)+\psi(y)]^2},$$

то решение уравнения (3.1) *записывается в квадратурах.*

Доказательство следствия состоит в непосредственной проверке условий теоремы 3.1. Действительно, если выполнены условия (эквивалентные (3.23))

$$a_x \equiv b_y - \varphi(x)\psi(y),$$
$$a_x + ab - c = \varphi(x)\psi(y),$$

то верно тождество

$$\alpha(x,y) = 2a_x - b_y + ab - c \equiv 0,$$

вследствие чего $h = \varphi(x)\psi(y)$, $\varphi\psi \neq 0$. Здесь условие $\varphi\psi \neq 0$ потому, что теорема 3.1 изначально возникла в связи с изучением случаев $h \neq 0$, $k \neq 0$. Следовательно, условия (3.23) обеспечивают выполнение требований пункта a) теоремы 3.1.

Аналогичным образом, меняя ролями переменные x и y, убеждаемся в справедливости пункта b) следствия 3.2.

Далее, запишем тождество (3.12) в форме: $a_x - b_y + (m-1)h = 0$, подставим сюда выражение для h из (3.14) и выразим b. Найдя с помощью соотношения $c = a_x + ab - h$ значение c, придем к выводу о справедливости пункта c) следствия 3.2.

Аналогичным образом показывается справедливость пункта d). Следствие доказано.

Соотношения (3.23)–(3.26) хороши тем, что при заданной функции $a(x, y)$ позволяют вычислить коэффициенты b и c таким образом, что получаемые при этом уравнения (3.1) оказываются разрешимыми в квадратурах. Благодаря наличию в правых частях произвольных функций φ, ψ, ω получается, что данные соотношения описывают обширное множество M уравнений вида (3.1), разрешимых в квадратурах.

С другой стороны, если все коэффициенты уравнения (3.1) уже известны, то для проверки его принадлежности множеству M придется вычислять интегралы, что, конечно, затрудняет такую проверку. Поэтому есть смысл преобразовать (3.23)–(3.26) к не содержащей интегралов форме. Этого можно добиться [67] с помощью дифференцирования, к тому же соотношения приобретают еще и более компактный вид:

$$b_y - a_x = a_x + ab - c = \varphi(x)\psi(y), \tag{3.27}$$

$$2(a_x - b_y) = a_x + ab - c = 2\varphi(x)\psi(y), \tag{3.28}$$

$$b_y - a_x + \frac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x) + \psi(y)]^2} = a_x + ab - c = \frac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{(2-m)[\varphi(x) + \psi(y)]^2}, \tag{3.29}$$

$$a_x - b_y + \frac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x) + \psi(y)]^2} = a_x + ab - c = \frac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{(2-m)[\varphi(x) + \psi(y)]^2}, \tag{3.30}$$

В каждой из этих пар набор произвольных функций свой, то есть, например, $\varphi(x)$ из (3.27) не обязана совпадать с $\varphi(x)$ из (3.28) и т. д. При этом в парах (3.27) и (3.28) $\varphi, \psi \in C^1$, а в (3.29) и (3.30) следует еще предполагать $\varphi + \psi \neq 0$, повысив гладкость φ, ψ до класса C^2. Функция же m должна быть из C^1, не принимать значение "2" и зависеть либо только от x, либо только от y. Из [55] следует, что для обоснования рассуждений, проводимых при получении (3.27)-(3.30), достаточно требовать, чтобы $a, b \in C^{(2,2)}$, $c, f \in C^{(1,1)}$.

3.2. Уравнение Бианки третьего порядка. В области $D = \{x_1^1 < x_1 < x_1^2, x_2^1 < x_2 < x_2^2, x_3^1 < x_3 < x_3^2\}$ евклидова пространства рассмотрим уравнение

$$\sum_{\substack{i_k=\overline{0,1}\\ k=\overline{1,3}}} a^{(i_1 i_2 i_3)}(x)\, u_{(i_1 i_2 i_3)}(x) = f,\ x = (x_1, x_2, x_3), \tag{3.31}$$

$a^{(111)}(x) \equiv 1$, $u_{(i_1 i_2 i_3)} = \frac{\partial^{i_1+i_2+i_3}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \partial x_3^{i_3}} u$, $a^{(i_1,i_2,i_3)}(x) \in C^{(i_1,i_2,i_3)}(\overline{D})$. Принадлежность к классу $C^{(k,l,m)}(\overline{D})$ означает существование непрерывных производных $\frac{\partial^{r_1+r_2+r_3}}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \partial x_3^{r_3}}$ для всех $r_1 \leqslant k$, $r_2 \leqslant l$, $r_3 \leqslant m$ в замкнутой области $\overline{D}$. Для краткости записи в дальнейшем не будем указывать зависимость коэффициентов уравнения и искомой функции от x.

Как в классическом случае, каждый шаг разрабатываемого здесь процесса мы начинаем с попытки понизить порядок уравнения на единицу за счет факторизации левой части (3.31) двумя операторами, один из которых имеет первый порядок дифференцирования. Понятно, что другой фактор-оператор имеет тогда второй порядок. Таким образом, мы изначально стремимся лишь к редукции рассматриваемой ситуации к классическому варианту, что оказывается при определенных (получаемых нами) условиях возможным. В противном же случае наша попытка завершается построением очередного уравнения каскада. При этом имеет значение место, занимаемое фактор-оператором первого порядка: слева или справа от оператора второго порядка. Будем называть соответствующее рассуждение лево-, или правосторонним.

3.2.1. Левосторонний способ. Введем конструкции

$$\begin{aligned}
h_1 &= a^{(110)}_{x_1} + a^{(110)}a^{(011)} - a^{(010)},\\
h_2 &= a^{(110)}_{x_2} + a^{(110)}a^{(101)} - a^{(100)},\\
h_3 &= a^{(011)}_{x_2} + a^{(011)}a^{(101)} - a^{(001)},\\
h_4 &= a^{(011)}_{x_3} + a^{(110)}a^{(011)} - a^{(010)},\\
h_5 &= a^{(101)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(101)} - a^{(001)},\\
h_6 &= a^{(101)}_{x_3} + a^{(110)}a^{(101)} - a^{(100)},\\
h_7 &= a^{(100)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(100)} - a^{(000)},\\
h_8 &= a^{(010)}_{x_2} + a^{(101)}a^{(010)} - a^{(000)},\\
h_9 &= a^{(001)}_{x_3} + a^{(110)}a^{(001)} - a^{(000)},\\
h_{10} &= a^{(110)}_{x_1x_2} + a^{(101)}a^{(110)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(110)}_{x_2} + a^{(001)}a^{(110)} - a^{(000)},\\
h_{11} &= a^{(101)}_{x_1x_3} + a^{(110)}a^{(101)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(101)}_{x_3} + a^{(010)}a^{(101)} - a^{(000)},\\
h_{12} &= a^{(011)}_{x_2x_3} + a^{(110)}a^{(011)}_{x_2} + a^{(101)}a^{(011)}_{x_3} + a^{(100)}a^{(011)} - a^{(000)}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Если выполнены условия

$$h_1 \equiv 0, h_5 \equiv 0, \tag{3.33}$$

то (3.31) равносильно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_1}v + a^{(011)}v - h_7 u = f, \tag{3.34}$$

где

$$v = \sum_{i_k=\overline{0,1}} a^{(1i_2i_3)}u_{(0i_2i_3)}. \tag{3.35}$$

Подобно тому, как в каскадном методе для гиперболического уравнения второго порядка, если $h_7 \equiv 0$, то из (3.34) определяется v, вследствие чего (3.31) сводится к уравнению (3.35), порядок которого на единицу ниже исходного.

Если же во всех точках области D функция $h_7 \neq 0$, то из равенства (3.34) выразим функцию u:

$$u = \left(v_{(100)} + a^{(011)} v - f\right) \frac{1}{h_7}.$$

Подставим это значение в правую часть (3.35):

$$v = \sum_{i_k=\overline{0,1}} a^{(1\,i_2 i_3)} \sum_{i'_k=\overline{0,i_k}} \left[\left(v_{(1\,i'_2 i'_3)} + \left(a^{(011)} v\right)_{(0\,i'_2 i'_3)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - f_{(0\,i'_2 i'_3)} \right) \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{i_k - i'_k}}{\partial x_k^{i_k - i'_k}} \right) \left(\frac{1}{h_7} \right) \right].$$

Вычислим $\left(a^{(011)} v\right)_{(0\,i'_2 i'_3)}$ и подставим в последнее равенство:

$$\sum_{i_k=\overline{0,1}} a^{(1\,i_2 i_3)} \sum_{i'_k=\overline{0,i_k}} \left[\left(v_{(1\,i'_2 i'_3)} + \sum_{i''_k=\overline{0,i'_k}} a^{(011)}_{(0\,i'_2 - i''_2\,i'_3 - i''_3)} v_{(0\,i''_2 i''_3)} - f_{(0\,i'_2 i'_3)} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{i_k - i'_k}}{\partial x_k^{i_k - i'_k}} \right) \left(\frac{1}{h_7} \right) \right] - v = 0.$$

Внесем $a^{(1\,i_2 i_3)}$ под знак суммы и раскроем скобки:

$$\sum_{i_k=\overline{0,1}} \sum_{i'_k=\overline{0,i_k}} \left[a^{(1\,i_2 i_3)} \left(v_{(1\,i'_2 i'_3)} + \sum_{i''_k=\overline{0,i'_k}} a^{(011)}_{(0\,i'_2 - i''_2\,i'_3 - i''_3)} v_{(0\,i''_2 i''_3)} - f_{(0\,i'_2 i'_3)} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{i_k - i'_k}}{\partial x_k^{i_k - i'_k}} \right) \left(\frac{1}{h_7} \right) \right] - v = 0,$$

$$\sum_{i_k=\overline{0,1}}\sum_{i'_k=\overline{0,i_k}} a^{(1\,i_2 i_3)} v_{(1\,i'_2 i'_3)} \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{i_k-i'_k}}{\partial x_k^{i_k-i'_k}}\right)\left(\frac{1}{h_7}\right)+$$

$$+\sum_{i_k=\overline{0,1}}\sum_{i'_k=\overline{0,i_k}}\sum_{i''_k=\overline{0,i'_k}} a^{(1\,i_2 i_3)} a^{(011)}_{(0\,i'_2-i''_2\,i'_3-i''_3)} v_{(0\,i''_2 i''_3)} \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{i_k-i'_k}}{\partial x_k^{i_k-i'_k}}\right)\left(\frac{1}{h_7}\right)-$$

$$-\sum_{i_k=\overline{0,1}}\sum_{i'_k=\overline{0,i_k}} a^{(1\,i_2 i_3)} f_{(0\,i'_2 i'_3)} \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{i_k-i'_k}}{\partial x_k^{i_k-i'_k}}\right)\left(\frac{1}{h_7}\right)-v=0. \quad (3.36)$$

Сделаем здесь замену пределов суммирования

$$\sum_{i_k=\overline{0,1}}\sum_{i'_k=\overline{0,i_k}} = \sum_{i'_k=\overline{0,1}}\sum_{i_k=\overline{i'_k,1}},$$

$$\sum_{i_k=\overline{0,1}}\sum_{i'_k=\overline{0,i_k}}\sum_{i''_k=\overline{0,i'_k}} = \sum_{i_k=\overline{0,1}}\sum_{i''_k=\overline{0,i_k}}\sum_{i'_k=\overline{i''_k,i_k}} = \sum_{i''_k=\overline{0,1}}\sum_{i_k=\overline{i''_k,1}}\sum_{i'_k=\overline{i''_k,i_k}}$$

и переобозначим индексы: в первой сумме индекс суммирования i'_k обозначим l_k, а индекс i_k обозначим l'_k; во второй сумме — $i''_k = l_k$, $i_k = l'_k$, $i'_k = l''_k$; в третьей — $i_k = l_k$, $i'_k = l'_k$. Тогда (3.36) приобретает вид

$$\sum_{l_k=\overline{0,1}}\sum_{l'_k=\overline{l_k,1}} a^{(1\,l'_2 l'_3)} v_{(1\,l_2 l_3)} \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{l'_k-l_k}}{\partial x_k^{l'_k-l_k}}\right)\left(\frac{1}{h_7}\right)+$$

$$+\sum_{l_k=\overline{0,1}}\sum_{l'_k=\overline{l_k,1}}\sum_{l''_k=\overline{l_k,l'_k}} a^{(1\,l'_2 l'_3)} a^{(011)}_{(0\,l''_2-l_2\,l''_3-l_3)} v_{(0\,l_2 l_3)} \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{l'_k-l''_k}}{\partial x_k^{l'_k-l''_k}}\right)\left(\frac{1}{h_7}\right)-v=$$

$$=\sum_{l_k=\overline{0,1}}\sum_{l'_k=\overline{0,l_k}} a^{(1\,l_2 l_3)} f_{(0\,l'_2 l'_3)} \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{l_k-l'_k}}{\partial x_k^{l_k-l'_k}}\right)\left(\frac{1}{h_7}\right). \quad (3.37)$$

Соотношение (3.37) является уравнением относительно новой искомой функции v. После умножения обеих частей (3.37) на h_7, оно будет принадлежать к тому же типу, что и исходное уравнение (3.31). Выпишем коэффициенты полученного уравнения:

$$a^{(111),1} = a^{(111)}\,\frac{1}{h}\,h \equiv 1,$$

$$a^{(1\,i_2 i_3),1} = \sum_{i'_k=\overline{i_k,1}} a^{(1\,i'_2 i'_3)} \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{i'_k - i_k}}{\partial x_k^{i'_k - i_k}}\right) \left(\frac{1}{h_7}\right) h_7,$$

$$a^{(0\,i_2 i_3),1} = \sum_{i'_k=\overline{i_k,1}} \sum_{i''_k=\overline{i_k,i'_k}} a^{(1\,i'_2 i'_3)} a^{(011)}_{(0\,i''_2 - i_2\,i''_3 - i_3)} \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{i'_k - i''_k}}{\partial x_k^{i'_k - i''_k}}\right) \left(\frac{1}{h_7}\right) h_7,$$

$$a^{(000),1} = \left(\sum_{i'_k=\overline{0,1}} \sum_{i''_k=\overline{0,i'_k}} a^{(1\,i'_2 i'_3)} a^{(011)}_{(0\,i''_2 i''_3)} \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{i'_k - i''_k}}{\partial x_k^{i'_k - i''_k}}\right) \left(\frac{1}{h_7}\right) - 1\right) h_7.$$

Выразим коэффициенты $a^{(0\,i_2 i_3),1}$ через $a^{(1\,i_2 i_3),1}$:

$$a^{(0\,i_2, i_3),1} = \sum_{i'_k=\overline{i_k,1}} \sum_{i''_k=\overline{i_k,i'_k}} a^{(1\,i'_2 i'_3)} a^{(011)}_{(0\,i''_2 - i_2\,i''_3 - i_3)} \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{i'_k - i''_k}}{\partial x_k^{i'_k - i''_k}}\right) \left(\frac{1}{h_7}\right) h =$$

$$= \sum_{i''_k=\overline{i_k,1}} \sum_{i'_k=\overline{i''_k,1}} a^{(1\,i'_2 i'_3)} a^{(011)}_{(0\,i''_2 - i_2\,i''_3 - i_3)} \left(\prod_{k=\overline{2,3}} \frac{\partial^{i'_k - i''_k}}{\partial x_k^{i'_k - i''_k}}\right) \left(\frac{1}{h_7}\right) h_7 =$$

$$= \sum_{i''_k=\overline{i_k,1}} a^{(1\,i''_2 i''_3),1} a^{(011)}_{(0\,i''_2 - i_2\,i''_3 - i_3)} = \sum_{i'_k=\overline{i_k,1}} a^{(1\,i'_2 i'_3),1} a^{(011)}_{(0\,i'_2 - i_2\,i'_3 - i_3)},$$

$$a^{(000),1} = \sum_{i'_k=\overline{0,1}} a^{(1\,i'_2 i'_3),1} a^{(011)}_{(0\,i'_2 i'_3)} - h_7.$$

Меняя ролями переменные, аналогичным образом получим еще два варианта преобразований. А именно, если выполнены условия (см. обозначения (3.32)) $h_2 \equiv 0, h_3 \equiv 0, h_8 \neq 0$, или $h_6 \equiv 0, h_4 \equiv 0, h_9 \neq 0$, то уравнение (3.31) в первом случае приводится к уравнению такого же вида с коэффициентами

$$
\begin{aligned}
&a^{(111),1} \equiv 1,\\
&a^{(i_1\,1\,i_3),1} = \sum_{i'_k=\overline{i_k,1}} a^{(i'_1\,1\,i'_3)} \left(\prod_{k=1,3} \frac{\partial^{i'_k-i_k}}{\partial x_k^{i'_k-i_k}}\right) \left(\frac{1}{h_8}\right) h_8,\\
&a^{(i_1\,0\,i_3),1} = \sum_{i'_k=\overline{i_k,1}} \sum_{i''_k=\overline{i_k,i'_k}} a^{(i'_1\,1\,i'_3)} a^{(101)}_{(i''_1-i_1\,0\,i''_3-i_3)} \left(\prod_{k=1,3} \frac{\partial^{i'_k-i''_k}}{\partial x_k^{i'_k-i''_k}}\right) \left(\frac{1}{h_8}\right) h_8,\\
&a^{(000),1} = \sum_{i'_k=\overline{0,1}} a^{(i'_1\,1\,i'_3),1} a^{(101)}_{(i'_1\,0\,i'_3)} - h_8
\end{aligned}
$$

или (во втором случае) — к подобному же уравнению, где

$$
\begin{aligned}
&a^{(111),1} \equiv 1,\\
&a^{(i_1\,i_2\,1),1} = \sum_{i'_k=\overline{i_k,1}} a^{(i'_1\,i'_2\,1)} \left(\prod_{k=\overline{1,2}} \frac{\partial^{i'_k-i_k}}{\partial x_k^{i'_k-i_k}}\right) \left(\frac{1}{h_9}\right) h_9,\\
&a^{(i_1\,i_2\,0),1} = \sum_{i'_k=\overline{i_k,1}} \sum_{i''_k=\overline{i_k,i'_k}} a^{(i'_1\,i'_2\,1)} a^{(110)}_{(i''_1-i_1\,i''_2-i_2\,0)} \left(\prod_{k=\overline{1,2}} \frac{\partial^{i'_k-i''_k}}{\partial x_k^{i'_k-i''_k}}\right) \left(\frac{1}{h_9}\right) h_9,\\
&a^{(000),1} = \sum_{i'_k=\overline{0,1}} a^{(i'_1\,i'_2\,1),1} a^{(110)}_{(i'_1\,i'_2\,0)} - h_9.
\end{aligned}
$$

3.2.2. Правосторонний вариант. Представим уравнение (3.31) в форме, отличной от (3.34)–(3.35):

$$
\begin{gathered}
v_{1x_1x_2} + a^{(101)} v_{1x_1} + a^{(011)} v_{1x_2} + a^{(001)} v_1 +\\
+ \left(a^{(100)} - a^{(110)}_{x_2} - a^{(101)} a^{(110)}\right) u_{x_1} +\\
\\
+ \left(a^{(010)} - a^{(110)}_{x_1} - a^{(011)} a^{(110)}\right) u_{x_2} +\\
+ \left(-a^{(110)}_{x_1x_2} - a^{(101)} a^{(110)}_{x_1} - a^{(011)} a^{(110)}_{x_2} + a^{(000)} - a^{(001)} a^{(110)}\right) u = f.
\end{gathered}
$$

Если

$$h_1 \equiv 0,\ h_2 \equiv 0,$$

то (3.31) можно записать так:

$$v_{1x_1x_2} + a^{(101)} v_{1x_1} + a^{(011)} v_{1x_2} + a^{(001)} v_1 - h_{10} u = f, \qquad (3.38)$$

где

$$v_1 = u_{x_3} + a^{(110)}u. \tag{3.39}$$

В случае $h_{10} \equiv 0$ исходное уравнение сводится к уравнению второго порядка (см. (3.38)) относительно функции v_1, решив которое, из (3.39) найдем искомую функцию u. Предположим, что $h_{10} \neq 0$ во всех точках области D. Из (3.38) выразим функцию u и подставим в уравнение (3.39). После умножения обеих частей уравнения на h_{10} полученное уравнение относительно функции v_1 примет вид:

$$\begin{gathered}
v_{1x_1x_2x_3} + \left(a^{(110)} - (\ln h_{10})_{x_3}\right) v_{1x_1x_2} + a^{(101)}v_{1x_1x_3} + a^{(011)}v_{1x_2x_3} + \\
+ \left(a^{(101)}_{x_3} - a^{(101)}(\ln h_{10})_{x_3} + a^{(110)}a^{(101)}\right) v_{1x_1} + \\
+ \left(a^{(011)}_{x_3} - a^{(011)}(\ln h_{10})_{x_3} + a^{(110)}a^{(011)}\right) v_{1x_2} + \\
+ a^{(001)}v_{1x_3} + \left(a^{(001)}_{x_3} - a^{(001)}(\ln h_{10})_{x_3} + a^{(110)}a^{(001)} - h_{10}\right) v_1 = \\
= f_{x_3} - \tfrac{fh_{10x_3}}{h_{10}} + a^{(110)}f.
\end{gathered} \tag{3.40}$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению такого же вида с коэффициентами $a^{(i_1i_2i_3),1}$, где

$$\begin{gathered}
a^{(110),1} = a^{(110)} - (\ln h_{10})_{x_3},\ a^{(101),1} = a^{(101)},\ a^{(011),1} = a^{(011)}, \\
a^{(100),1} = a^{(101)}_{x_3} - a^{(101)}(\ln h_{10})_{x_3} + a^{(110)}a^{(101)}, \\
a^{(010),1} = a^{(011)}_{x_3} - a^{(011)}(\ln h_{10})_{x_3} + a^{(110)}a^{(011)}, \\
a^{(001),1} = a^{(001)},\ a^{(000),1} = a^{(001)}_{x_3} - a^{(001)}(\ln h_{10})_{x_3} + a^{(110)}a^{(001)} - h_{10}, \\
f_1 = f_{x_3} - \frac{fh_{10x_3}}{h_{10}} + a^{(110)}f.
\end{gathered}$$

Аналогичным образом, меняя ролями переменные, можно показать, что если выполнены условия $h_6 \equiv 0, h_5 \equiv 0, h_{11} \neq 0$, или $h_3 \equiv 0, h_4 \equiv 0, h_{12} \neq 0$, то исходное уравнение переходит в

$$\begin{gathered}
v_{2x_1x_2x_3} + a^{(110)}v_{2x_1x_2} + \left(a^{(101)} - (\ln h_{11})_{x_2}\right) v_{2x_1x_3} + a^{(011)}v_{2x_2x_3} + \\
+ \left(a^{(110)}_{x_2} - a^{(110)}(\ln h_{11})_{x_2} + a^{(101)}a^{(110)}\right) v_{2x_1} + \\
+ \left(a^{(011)}_{x_2} - a^{(011)}(\ln h_{11})_{x_2} + a^{(101)}a^{(011)}\right) v_{2x_3} + \\
+ a^{(010)}v_{2x_2} + \left(a^{(010)}_{x_2} - a^{(010)}(\ln h_{11})_{x_2} + a^{(101)}a^{(010)} - h_{11}\right) v_2 = \\
= f_{x_2} - \frac{fh_{11x_2}}{h_{11}} + a^{(101)}f,
\end{gathered}$$

или в уравнение

$$v_{3x_1x_2x_3}+a^{(110)}v_{3x_1x_2}+\left(a^{(011)}-(\ln h_{12})_{x_1}\right)v_{3x_2x_3}+a^{(101)}v_{3x_1x_3}+$$
$$+\left(a^{(110)}_{x_1}-a^{(110)}(\ln h_{12})_{x_1}+a^{(011)}a^{(110)}\right)v_{3x_2}+$$
$$+\left(a^{(101)}_{x_1}-a^{(101)}(\ln h_{12})_{x_1}+a^{(011)}a^{(101)}\right)v_{3x_3}+$$
$$+a^{(100)}v_{3x_1}+\left(a^{(100)}_{x_1}-a^{(100)}(\ln h_{12})_{x_1}+a^{(011)}a^{(100)}-h_{12}\right)v_3=$$
$$=f_{x_1}-\frac{fh_{12x_1}}{h_{12}}+a^{(011)}f$$

соответственно.

Таким образом, из вышеизложенных рассуждений усматривается возможность получения шести новых уравнений каскада. Это и есть результат первого шага разрабатываемого процесса. Для каждого из шести полученных уравнений описанную процедуру можно повторить, и получить уже 36 уравнений "второго поколения". Понятно, что процесс можно продолжить. "Размножение" уравнений каскада проиллюстрировано схемой рис. 3.1, на котором подробно изображены два поколения.

В наших рассуждениях мы следовали правилу из классического варианта: включали в каскад лишь уравнения того же вида, что и исходное уравнение (3.31). Общее число уравнений в каскаде растет с каждым шагом в геометрической прогрессии, знаменателем которой является число 6. Этот каскад далее будем называть основным.

Однако, в п. 1.1 было указано, что если к (3.33) добавить требование $h_7\equiv 0$, то уравнение (3.31) оказывается редуцированным к уравнению второго порядка. Аналогичной является ситуация и в остальных вариантах из пп. 1.1–1.2. Как нетрудно видеть, каждая из шести групп тождеств

$$\begin{gathered}h_1\equiv h_5\equiv h_7\equiv 0,\ h_2\equiv h_3\equiv h_8\equiv 0,\ h_4\equiv h_6\equiv h_9\equiv 0,\\ h_1\equiv h_2\equiv h_{10}\equiv 0,\ h_5\equiv h_6\equiv h_{11}\equiv 0,\ h_3\equiv h_4\equiv h_{12},\end{gathered}\tag{3.41}$$

влечет за собой возможность понижения порядка исходного уравнения на единицу. Аналогичным образом, любое уравнение основного каскада на каждом шаге порождает шесть новых уравнений второго порядка. Общее число возникающих после определенного числа шагов уравнений второго порядка лишь на единицу меньше, чем число уравнений основного каскада. Таким образом, здесь появляется еще целый каскад уравнений второго порядка, который далее будем называть сопутствующим.

3.2.3. Рекуррентные соотношения. Как отмечено выше, в классической схеме метода была выделена двусторонняя последовательность уравнений (3.9), которую можно рассматривать также как две односторонние последовательности, исходящие из общего центра (E). Для нашего уравнения (3.31) в случаях лево- и правосторонних преобразований можно выделить по три односторонних цепочки, играющих аналогичную роль. Мы назовем их соответственно левыми и правыми и будем отмечать буквами "Л" и "П". Конструкции h_k из (3.32) для n-го поколения уравнений каскада будем обозначать, используя верхний индекс, h_k^n.

а) Л-последовательности. Непосредственным вычислением можно убедиться, что $a^{(011),1} = a^{(011)}$. Учитывая это, запишем условия возможности приведения нового уравнения к виду (3.34):

$$h_1^1 = \frac{\partial}{\partial x_1} a^{(1\,10),1} + a^{(011),1} a^{(1\,10),1} - a^{(0\,10),1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a^{(110)}\frac{1}{h_7}h_7\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a^{(111)}\left(\frac{1}{h_7}\right)_{x_3} h_7\right) + a^{(011)}a^{(110),1} -$$
$$- a^{(110),1}a^{(011)} - a^{(111),1}a^{(011)}_{(001)} =$$
$$= a^{(110)}_{x_1} - (\ln h_7)_{x_1x_3} - a^{(011)}_{x_3} = -(\ln h_7)_{x_1x_3} - h_4 \equiv 0,$$

$$h_5^1 = \frac{\partial}{\partial x_1} a^{(1\,01),1} + a^{(011),1} a^{(1\,01),1} - a^{(0\,01),1} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a^{(101)}\frac{1}{h_7}h_7\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a^{(111)}\left(\frac{1}{h_7}\right)_{x_2} h_7\right) + a^{(011)}a^{(101),1} -$$
$$- a^{(101),1}a^{(011)} - a^{(111),1}a^{(011)}_{(010)} = a^{(101)}_{x_1} - (\ln h_7)_{x_1x_2} - a^{(011)}_{x_2} =$$
$$= -(\ln h_7)_{x_1x_2} - h_3 \equiv 0.$$

Вычислим величину, соответствующую конструкции h_7 исходного уравнения:

$$h_7^1 = \frac{\partial}{\partial x_1} a^{(100),1} + a^{(100),1} a^{(011),1} - a^{(000),1}.$$

Запишем $a^{(100),1}$ через конструкции, связанные с новым уравнением

$$a^{(100),1} = a^{(110),1}_{x_2} + a^{(101),1}a^{(110),1} - h_2^1 =$$
$$= \left(a^{(110)} - (\ln h_7)_{x_3}\right)_{x_2} + \left(a^{(101)} - (\ln h_7)_{x_2}\right)\left(a^{(110)} - (\ln h_7)_{x_3}\right) - h_2^1$$

и подставим в выражение для h_7^1:

$$h_7^1 = a^{(110)}_{x_1x_2} - (\ln h_7)_{x_1x_2x_3} + a^{(101)}_{x_1}a^{(110)} + a^{(101)}a^{(110)}_{x_1} -$$
$$- (\ln h_7)_{x_1x_2} a^{(110)} - a^{(110)}_{x_1} (\ln h_7)_{x_2} -$$
$$-a^{(101)}_{x_1} (\ln h_7)_{x_3} - a^{(101)} (\ln h_7)_{x_1x_3} + \left((\ln h_7)_{x_2} (\ln h_7)_{x_3}\right)_{x_1} -$$
$$- \left(h_2^1\right)_{x_1} + a^{(011)}a^{(100),1} - a^{(011)}a^{(100),1} - a^{(101),1}a^{(011)}_{x_3} - a^{(110),1}a^{(011)}_{x_2} -$$
$$-a^{(111),1}a^{(011)}_{x_2x_3} + h_7 =$$

$$= a^{(110)}_{x_1x_2} + \left((\ln h_7)_{x_2} (\ln h_7)_{x_3} - (\ln h_7)_{x_2x_3}\right)_{x_1} + a^{(101)}_{x_1}a^{(110)} +$$
$$+a^{(101)}a^{(110)}_{x_1} - a^{(110)} (\ln h_7)_{x_1x_2} - a^{(110)}_{x_1} (\ln h_7)_{x_2} - a^{(101)}_{x_1} (\ln h_7)_{x_3} -$$
$$-a^{(101)} (\ln h_7)_{x_1x_3} - \left(h_2^1\right)_{x_1} - a^{(101)}a^{(011)}_{x_3} +$$
$$+a^{(011)}_{x_3} (\ln h_7)_{x_2} - a^{(110)}a^{(011)}_{x_2} + a^{(011)}_{x_2} (\ln h_7)_{x_3} - a^{(110)}_{x_2x_3} + h_7.$$

Выразим h_2^1 через коэффициенты и соответствующие конструкции уравнения (3.31):

$$h_2^1 = a^{(110),1}_{x_2} + a^{(110),1}a^{(101),1} - a^{(100),1} = \left(a^{(110)} - (\ln h_7)_{x_3}\right)_{x_2} +$$
$$+ \left(a^{(110)} - (\ln h_7)_{x_3}\right) \left(a^{(101)} - (\ln h_7)_{x_2}\right) - a^{(100)} +$$
$$+a^{(110)} (\ln h_7)_{x_2} + a^{(101)} (\ln h_7)_{x_3} - \left(\frac{1}{h_7}\right)_{x_2x_3} h_7 =$$
$$= a^{(110)}_{x_2} - (\ln h_7)_{x_2x_3} + a^{(110)}a^{(101)} - a^{(101)} (\ln h_7)_{x_3} - a^{(110)} (\ln h)_{x_2} +$$
$$+ (\ln h_7)_{x_2} (\ln h_7)_{x_3} - a^{(100)} + a^{(110)} (\ln h_7)_{x_2} + a^{(101)} (\ln h_7)_{x_3} -$$
$$- \left(\frac{1}{h_7}\right)_{x_2x_3} h_7 = a^{(110)}_{x_2} + a^{(110)}a^{(101)} - a^{(100)} = h_2.$$

Преобразуем h_7^1 и воспользуемся полученным выше равенством:

$$h_7^1 = \left(a^{(110)}_{x_1} - a^{(011)}_{x_3} - (\ln h_7)_{x_1x_3}\right)_{x_2} + \left((\ln h_7)_{x_2} (\ln h_7)_{x_3}\right)_{x_1} +$$
$$+a^{(110)} \left(a^{(101)}_{x_1} - a^{(011)}_{x_2} - (\ln h_7)_{x_1x_2}\right) +$$
$$+a^{(101)} \left(a^{(110)}_{x_1} - a^{(011)}_{x_3} - (\ln h_7)_{x_1x_3}\right) + \left(a^{(011)}_{x_3} - a^{(110)}_{x_1}\right) (\ln h_7)_{x_2} +$$
$$+ \left(a^{(011)}_{x_2} - a^{(101)}_{x_1}\right) (\ln h_7)_{x_3} - (h_2)_{x_1} + h_7.$$

Учитывая, что $h_1 \equiv h_5 \equiv 0$, получим

$$h_7^1 = \left(h_1^1\right)_{x_2} + \left((\ln h_7)_{x_2} (\ln h_7)_{x_3}\right)_{x_1} + a^{(110)} h_5^1 + a^{(101)} h_1^1 -$$
$$- (\ln h_7)_{x_2} \left((\ln h_1)_{x_1 x_3} + h_1^1\right) - (\ln h_7)_{x_3} \left((\ln h_7)_{x_2 x_1} + h_5^1\right) - (h_2)_{x_1} +$$
$$+ h_7 = (\ln h_7)_{x_1 x_2} (\ln h_7)_{x_3} + (\ln h_7)_{x_2} (\ln h_7)_{x_1 x_3} -$$
$$- (\ln h_7)_{x_2} (\ln h_7)_{x_1 x_3} - (\ln h_7)_{x_3} (\ln h_7)_{x_1 x_2} - (h_2)_{x_1} + h_7 = h_7 - (h_2)_{x_1}.$$

Для нового уравнения найдем вид остальных конструкций h_i^1, $i \leqslant 9$, которые содержат производные по переменным x_2 и x_3:

$$h_3^1 = a_{x_2}^{(011),1} + a^{(011),1} a^{(101),1} - a^{(001),1} = a_{x_2}^{(011)} + a^{(011)} a^{(101),1} -$$
$$- a^{(101),1} a^{(011)} - a^{(111),1} a_{x_2}^{(011)} \equiv 0,$$
$$h_8^1 = a_{x_2}^{(010),1} + a^{(010),1} a^{(101),1} - a^{(000),1} =$$
$$= \left(a^{(110),1} a^{(011)} + a^{(111),1} a_{x_3}^{(011)}\right)_{x_2} +$$
$$+ \left(a^{(110),1} a^{(011)} + a^{(111),1} a_{x_3}^{(011)}\right) a^{(101),1} - a^{(100),1} a^{(011)} - a^{(110),1} a_{x_2}^{(011)} -$$
$$- a^{(101),1} a_{x_3}^{(011)} - a^{(111),1} a_{x_2 x_3}^{(011)} + h_7 =$$
$$= a_{x_2}^{(110),1} a^{(011)} + a^{(110),1} a_{x_2}^{(011)} + a_{x_2 x_3}^{(011)} + a^{(110),1} a^{(011)} a^{(101),1} +$$
$$+ a^{(101),1} a_{x_3}^{(011)} -$$
$$- a^{(100),1} a^{(011)} - a^{(110),1} a_{x_2}^{(011)} - a^{(101),1} a_{x_3}^{(011)} - a_{x_2 x_3}^{(011)} + h_7 =$$

$$= a^{(011)} \left(a_{x_2}^{(110),1} + a^{(110),1} a^{(101),1} - a^{(100),1}\right) + h_7 = a^{(011)} h_2^1 + h_7 =$$
$$= a^{(011)} h_2 + h_7,$$

$$h_6^1 = a_{x_3}^{(101),1} + a^{(101),1} a^{(110),1} - a^{(100),1} = a_{x_3}^{(101)} - \left(a^{(111),1} (\ln h_7)_{x_2}\right)_{x_3} +$$
$$+ \left(a^{(101)} - a^{(111)} (\ln h_7)_{x_2}\right) \left(a^{(110)} - a^{(111)} (\ln h_7)_{x_3}\right) - a^{(100)} +$$
$$+ a^{(110)} (\ln h_7)_{x_2} + a^{(101)} (\ln h_7)_{x_3} - a^{(111)} \left(\frac{1}{h_7}\right)_{x_2 x_3} h_7 =$$
$$= a_{x_3}^{(101)} - (\ln h_7)_{x_2 x_3} + a^{(101)} a^{(110)} - a^{(110)} (\ln h_7)_{x_2} - a^{(101)} (\ln h_7)_{x_3} +$$
$$+ (\ln h_7)_{x_2} (\ln h_7)_{x_3} - a^{(100)} + a^{(110)} (\ln h_7)_{x_2} + a^{(101)} (\ln h_7)_{x_3} -$$
$$- \left(\frac{1}{h_7}\right)_{x_2 x_3} h_7 = a_{x_3}^{(101)} + a^{(101)} a^{(110)} - a^{(100)} = h_6,$$

$$h_4^1 = a_{x_3}^{(011),1} + a^{(011),1}a^{(110),1} - a^{(010),1} =$$
$$= a_{x_3}^{(011)} + a^{(011)}a^{(110),1} - a^{(110),1}a^{(011)} - a^{(111),1}a_{x_3}^{(011)} \equiv 0,$$

$$h_9^1 = a_{x_3}^{(001),1} + a^{(001),1}a^{(110),1} - a^{(000),1} =$$
$$= \left(a^{(101),1}a^{(011)} + a^{(111),1}a_{x_2}^{(011)}\right)_{x_3} +$$
$$+ \left(a^{(101),1}a^{(011)} + a^{(111),1}a_{x_2}^{(011)}\right) a^{(110),1} - a^{(100),1}a^{(011)} - a^{(110),1}a_{x_2}^{(011)} -$$
$$-a^{(101),1}a_{x_3}^{(011)} - a^{(111),1}a_{x_2x_3}^{(011)} =$$
$$= a_{x_3}^{(101),1}a^{(011)} + a^{(101),1}a_{x_3}^{(011)} + a_{x_2x_3}^{(011)} + a^{(101),1}a^{(011)}a^{(110),1} +$$
$$+a^{(110),1}a_{x_2}^{(011)} -$$
$$-a^{(100),1}a^{(011)} - a^{(110),1}a_{x_2}^{(011)} - a^{(101),1}a_{x_3}^{(011)} - a_{x_2x_3}^{(011)} =$$
$$= a^{(011)}\left(a_{x_3}^{(101),1} + a^{(101),1}a^{(110),1} - a^{(100),1}\right) = a^{(011)}h_6 + h_7.$$

Применяя к уравнению с коэффициентами $a^{(i_1 i_2 i_3),1}$ те же рассуждения, что и к уравнению (3.31), получим, что если

$$\begin{aligned} h_1^1 &= -\left(\ln h_7\right)_{x_1x_3} - h_4 \equiv 0, \\ h_5^1 &= -\left(\ln h_7\right)_{x_1x_2} - h_3 \equiv 0, \\ h_7^1 &= h_7 - \left(h_2\right)_{x_1} \equiv 0, \end{aligned} \tag{3.42}$$

то уравнение (3.37), умноженное на h_7, может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_1}v_1 + a^{(011)}v_1 = f_1. \tag{3.43}$$

Отсюда функцию v_1 можно найти, решив линейное дифференциальное уравнение первого порядка (3.43). Найденная таким образом функция будет правой частью уравнения второго порядка вида (3.35), решив которое, найдем функцию v. Решение исходного уравнения найдем по формуле

$$u = \frac{v_{x_1} + a^{(011)}v - f}{h_7}. \tag{3.44}$$

В случае, когда вместо тождества (3.42), напротив, выполняется условие $h_7^1 = h_7 - \left(h_2\right)_{x_1} \neq 0$, к уравнению (3.37) можно применить только что изложенную процедуру. В дальнейшем, для того чтобы можно было делать подобные преобразования на n-ом шаге $(n > 1)$ необходимо предполагать выполнение условий

$$
\begin{aligned}
&h_1^n \equiv -\left(\ln h_7^{n-1}\right)_{x_1x_3} \equiv -\left(\ln\left(h_7-(n-1)\left(h_2\right)_{x_1}\right)\right)_{x_1x_3}=0,\\
&h_5^n \equiv -\left(\ln h_7^{n-1}\right)_{x_1x_2} \equiv -\left(\ln\left(h_7-(n-1)\left(h_2\right)_{x_1}\right)\right)_{x_1x_2}=0,\\
&h_7^n \equiv h_7^{n-1}-\left(h_2^{n-1}\right)_{x_1} \equiv h_7-n\left(h_2\right)_{x_1} \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

Если на некотором шаге вместо неравенства из (3.45) будет выполнено равенство $h_7 - n\left(h_2\right)_{x_1} \equiv 0$, то задача решения уравнения (3.31) сведется к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка типа (3.35) и дальнейшим алгебраическим преобразованиям, аналогичным (3.44).

Выполнение условий (3.45) возможно, например, если конструкции h_7 и h_2 не зависят от переменных x_2 и x_3 и при этом h_7 имеет вид $n(h_2)_{x_1}$.

Анализируя вышеизложенное, можно выделить случай, когда порядок исходного уравнения (3.31) может быть понижен на единицу, то есть имеет место

Теорема 3.2. *Если при некотором* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия*

$$
\begin{aligned}
&a^{(110)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(110)} - a^{(010)} \equiv 0,\\
&a^{(101)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(101)} - a^{(001)} \equiv 0,\\
&a^{(101)}_{x_1} \equiv a^{(011)}_{x_2},\\
&a^{(110)}_{x_1} \equiv a^{(011)}_{x_3},\\
&a^{(100)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(100)} - a^{(000)} \equiv k\varphi'(x_1)\psi_1(x_2,x_3) \neq 0,\\
&a^{(110)}_{x_2} + a^{(110)}a^{(101)} - a^{(100)} \equiv \varphi(x_1)\psi_1(x_2,x_3) + \psi_2(x_2,x_3),
\end{aligned}
$$

где $\varphi(x_1), \psi_1(x_2,x_3), \psi_2(x_2,x_3)$ *— произвольные функции, то решение уравнения* (3.31) *сводится к решению уравнения второго порядка вида* (3.35).

Равенства $a^{(110)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(110)} - a^{(010)} \equiv 0$ и $a^{(101)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(101)} - a^{(001)} \equiv 0$ обеспечивают возможность представления уравнения в виде (3.34)–(3.35), и, следовательно, возможность применения первого шага преобразований. Тождества $a^{(101)}_{x_1} \equiv a^{(011)}_{x_2}$ и $a^{(110)}_{x_1} \equiv a^{(011)}_{x_3}$, соответствующие условиям $h_4 \equiv 0$ и $h_3 \equiv 0$, обеспечивают совпадение рекуррентных соотношений на первом и последующих шагах (т. е. условия (3.42) совпадают с (3.45) при $n = 1$). Последние два условия теоремы гарантируют выполнение равенств из (3.45), неравенства из этого же набора при $n \neq k$, а также выполнение тождества $h_7^k \equiv 0$.

Меняя ролями переменные x_1 с x_2 и x_3, можно сформулировать еще две теоремы, аналогичных теореме 1.1.

Теорема 3.3. *Если при некотором* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия*

$$\begin{aligned}
&a^{(110)}_{x_2} + a^{(101)}a^{(110)} - a^{(100)} \equiv 0,\\
&a^{(011)}_{x_2} + a^{(101)}a^{(011)} - a^{(001)} \equiv 0,\\
&a^{(011)}_{x_2} \equiv a^{(101)}_{x_1},\\
&a^{(110)}_{x_2} \equiv a^{(101)}_{x_3},\\
&a^{(010)}_{x_2} + a^{(101)}a^{(010)} - a^{(000)} \equiv k\varphi'(x_2)\psi_1(x_1,x_3) \neq 0,\\
&a^{(110)}_{x_1} + a^{(110)}a^{(011)} - a^{(010)} \equiv \varphi(x_2)\psi_1(x_1,x_3) + \psi_2(x_1,x_3),
\end{aligned}$$

где $\varphi(x_2), \psi_1(x_1,x_3), \psi_2(x_1,x_3)$ *— произвольные функции, то решение уравнения* (3.31) *сводится к решению уравнения второго порядка вида* (3.35).

Теорема 3.4. *Если при некотором* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия*

$$\begin{aligned}
&a^{(101)}_{x_3} + a^{(110)}a^{(101)} - a^{(100)} \equiv 0,\\
&a^{(011)}_{x_3} + a^{(110)}a^{(011)} - a^{(010)} \equiv 0,\\
&a^{(011)}_{x_3} \equiv a^{(110)}_{x_1},\\
&a^{(101)}_{x_3} \equiv a^{(110)}_{x_2},\\
&a^{(001)}_{x_3} + a^{(110)}a^{(001)} - a^{(000)} \equiv k\varphi'(x_3)\psi_1(x_1,x_2) \neq 0,\\
&a^{(101)}_{x_1} + a^{(101)}a^{(011)} - a^{(001)} \equiv \varphi(x_3)\psi_1(x_1,x_2) + \psi_2(x_1,x_2),
\end{aligned}$$

где $\varphi(x_3), \psi_1(x_1,x_2), \psi_2(x_1,x_2)$ *— произвольные функции, то решение уравнения* (3.31) *сводится к решению уравнения второго порядка вида* (3.35).

b) П-последовательности. Для уравнения (3.40) найдем конструкции, соответствующие конструкциям h_1, h_2, h_{10} исходного уравнения:

$$\begin{gathered}
h^1_2 = a^{(110),1}_{x_2} + a^{(110),1}a^{(101),1} - a^{(100),1} =\\
= a^{(110)}_{x_2} - (\ln h_{10})_{x_2x_3} + a^{(110)}a^{(101)} - a^{(101)}(\ln h_{10})_{x_3} -\\
- a^{(101)}_{x_3} + a^{(101)}(\ln h_{10})_{x_3} - a^{(110)}a^{(101)} =\\
= a^{(110)}_{x_2} - a^{(101)}_{x_3} - (\ln h_{10})_{x_2x_3} = h_2 - h_6 - (\ln h_{10})_{x_2x_3} =\\
= -h_6 - (\ln h_{10})_{x_2x_3},
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
h_1^1 = a_{x_1}^{(110),1} + a^{(011),1}a^{(110),1} - a^{(010),1} = \\
= a_{x_1}^{(110)} - (\ln h_{10})_{x_1x_3} + a^{(011)}a^{(110)} - a^{(011)}(\ln h_{10})_{x_3} - \\
- a_{x_3}^{(011)} + a^{(011)}(\ln h_{10})_{x_3} - a^{(110)}a^{(011)} = \\
= a_{x_1}^{(110)} - a^{(011)} - (\ln h_{10})_{x_1x_3} = h_1 - h_4 - (\ln h_{10})_{x_1x_3} = \\
= -h_4 - (\ln h_{10})_{x_1x_3}, \\
h_{10}^1 = a_{x_1x_2}^{(110),1} + a^{(101),1}a_{x_1}^{(110),1} + a^{(011),1}a_{x_2}^{(110),2} + a^{(001),1}a^{(110),1} - \\
- a^{(000),1} = a_{x_1x_2}^{(110)} - (\ln h_{10})_{x_1x_2x_3} + a^{(101)}a_{x_1}^{(110)} - a^{(101)}(\ln h_{10})_{x_1x_3} + \\
+ a^{(011)}a_{x_2}^{(110)} - a^{(011)}(\ln h_{10})_{x_2x_3} + a^{(001)}a^{(110)} - \\
- a^{(001)}(\ln h_{10})_{x_3} - a_{x_3}^{(001)} + a^{(001)}(\ln h_{10})_{x_3} - a^{(110)}a^{(001)} + h_{10} = \\
= (h_2 - h_6)_{x_1} - (\ln h_{10})_{x_1x_2x_3} + a^{(101)}h_1^1 + a^{(011)}h_2^1 - (h_5)_{x_3} + h_{10}.
\end{gathered}
$$

Если выполняются тождества $h_2^1 \equiv h_1^1 \equiv 0$, то $h_{10}^1 = -(h_6)_{x_1} - (\ln h_{10})_{x_1x_2x_3} - (h_5)_{x_3} + h_{10} \equiv -(h_5)_{x_3} + h_{10}$. Учитывая, что

$$
\begin{gathered}
h_6^1 \equiv a_{x_3}^{(101,1)} + a^{(110,1)}a^{(101,1)} - a^{(100,1)} = a_{x_3}^{(101)} - a^{(101)}(\ln h_{10})_{x_3} + \\
+ a^{(110)}a^{(101)} - a_{x_3}^{(101)} - a^{(110)}a^{(101)} + (\ln h_{10})_{x_3}a^{(101)} \equiv 0, \\
h_4^1 \equiv a_{x_3}^{(011,1)} + a^{(110,1)}a^{(011,1)} - a^{(010,1)} = a_{x_3}^{(011)} - a^{(011)}(\ln h_{10})_{x_3} + \\
+ a^{(110)}a^{(011)} - a_{x_3}^{(011)} - a^{(110)}a^{(011)} + (\ln h_{10})_{x_3}a^{(011)} \equiv 0,
\end{gathered}
$$

как и в предыдущем случае, можно записать условия перехода к следующему шагу преобразований

$$
\begin{aligned}
& h_2^1 = -h_6 - (\ln h_{10})_{x_2x_3} \equiv 0, \\
& h_1^1 = -h_4 - (\ln h_{10})_{x_1x_3} \equiv 0, \\
& h_{10}^1 = -(h_5)_{x_3} + h_{10} \neq 0,
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

а также соответствующие рекуррентные соотношения

$$
\begin{aligned}
& h_2^n \equiv -(\ln (h_{10} - (n-1)(h_5)_{x_3}))_{x_2x_3} = 0, \\
& h_1^n \equiv -(\ln (h_{10} - (n-1)(h_5)_{x_3}))_{x_1x_3} = 0, \\
& h_{10}^n \equiv h_{10} - n(h_5)_{x_3} \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

Отсюда следует, что верна

Теорема 3.5. *Если при некотором* $k \in \mathbb{N}$ *коэффициенты уравнения* (3.31) *удовлетворяют условиям*

$$
\begin{aligned}
&a^{(110)}_{x_2} + a^{(101)}a^{(110)} - a^{(100)} \equiv 0,\\
&a^{(110)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(110)} - a^{(010)} \equiv 0,\\
&a^{(101)}_{x_3} \equiv a^{(110)}_{x_2},\\
&a^{(011)}_{x_3} \equiv a^{(110)}_{x_1},\\
&a^{(110)}_{x_1x_2} + a^{(101)}a^{(110)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(110)}_{x_2} + a^{(001)}a^{(110)} - a^{(000)} \equiv\\
&\ \equiv k\varphi'(x_3)\psi_1(x_1,x_2) \neq 0,\\
&a^{(101)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(101)} - a^{(001)} \equiv \varphi(x_3)\psi_1(x_1,x_2) + \psi_2(x_1,x_2),,
\end{aligned}
$$

где $\varphi(x_3), \psi_1(x_1,x_2), \psi_2(x_1,x_2)$ *— произвольные функции, то решение уравнения* (3.31) *сводится к решению уравнения второго порядка.*

Здесь равенства $a^{(110)}_{x_2} + a^{(101)}a^{(110)} - a^{(100)} \equiv 0$ и $a^{(110)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(110)} - a^{(010)} \equiv 0$ обеспечивают возможность представления уравнения в виде (3.38)–(3.39), и, следовательно, возможность реализации первого шага преобразований. Тождества $a^{(101)}_{x_3} \equiv a^{(110)}_{x_2}$ и $a^{(011)}_{x_3} \equiv a^{(110)}_{x_1}$, соответствующие условиям $h_6 \equiv 0$ и $h_4 \equiv 0$, обеспечивают совпадение рекуррентных соотношений на первом и последующих шагах (то есть условия (3.46) совпадают с (3.47) при $n = 1$). Последние два условия теоремы гарантируют выполнение равенств из (3.47), неравенства из набора условий (3.47) при $n \neq k$, а также выполнение тождества $h^k_{10} \equiv 0$.

Меняя ролями переменные x_1 с x_2 и x_3, можно сформулировать еще две теоремы, аналогичных теореме 2.1.

Теорема 3.6. *Если при некотором* $k \in \mathbb{N}$ *коэффициенты уравнения* (3.31) *удовлетворяют условиям*

$$
\begin{aligned}
&a^{(101)}_{x_3} + a^{(110)}a^{(101)} - a^{(100)} \equiv 0,\\
&a^{(101)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(101)} - a^{(001)} \equiv 0,\\
&a^{(110)}_{x_2} \equiv a^{(101)}_{x_3},\\
&a^{(011)}_{x_2} \equiv a^{(101)}_{x_1},\\
&a^{(101)}_{x_1x_3} + a^{(110)}a^{(101)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(101)}_{x_3} + a^{(010)}a^{(101)} - a^{(000)} \equiv\\
&\ \equiv k\varphi'(x_2)\psi_1(x_1,x_3) \neq 0,\\
&a^{(110)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(110)} - a^{(010)} \equiv \varphi(x_2)\psi_1(x_1,x_3) + \psi_2(x_1,x_3),
\end{aligned}
$$

где $\varphi(x_2), \psi_1(x_1,x_3), \psi_2(x_1,x_3)$ *— произвольные функции, то решение уравнения* (3.31) *сводится к решению уравнения второго порядка.*

Теорема 3.7. *Если при некотором $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты уравнения* (3.31) *удовлетворяют условиям*

$$
\begin{aligned}
&a^{(011)}_{x_3} + a^{(110)}a^{(011)} - a^{(010)} \equiv 0,\\
&a^{(011)}_{x_2} + a^{(101)}a^{(011)} - a^{(001)} \equiv 0,\\
&a^{(110)}_{x_1} \equiv a^{(011)}_{x_3},\\
&a^{(101)}_{x_1} \equiv a^{(011)}_{x_2},\\
&a^{(011)}_{x_2x_3} + a^{(110)}a^{(011)}_{x_2} + a^{(101)}a^{(011)}_{x_3} + a^{(100)}a^{(011)} - a^{(000)} \equiv\\
&\equiv k\varphi'(x_1)\psi_1(x_2,x_3) \neq 0,\\
&a^{(110)}_{x_2} + a^{(101)}a^{(110)} - a^{(100)} \equiv \varphi(x_1)\psi_1(x_2,x_3) + \psi_2(x_2,x_3),
\end{aligned}
$$

где $\varphi(x_1), \psi_1(x_2,x_3), \psi_2(x_2,x_3)$ — произвольные функции, то решение уравнения (3.31) *сводится к решению уравнения второго порядка.*

3.2.4. Сопутствующий каскад. Разрешимость в квадратурах на основе структурных формул для коэффициентов уравнения. Заметим, что доказанные в теоремы 3.2–3.7 не гарантируют, что обеспечивающее понижение порядка число $k \in \mathbb{N}$ найдется. Это согласуется с классическими рассуждениями Лапласа, относящимися к уравнению (3.1). Но у нас есть еще сопутствующий каскад, состоящий как раз из уравнений вида (3.1). При этом разрешимость в квадратурах любого уравнения сопутствующего каскада влечет за собой возможность решить в квадратурах и исходное уравнение (3.31).

Запишем соответствующие условия. Для этого мы просто будем выписывать уравнения второго порядка, отвечающие каждой из групп тождеств (3.41) и применять к ним сформулированное следствие 3.2. Те переменные, по которым в уравнениях отсутствует дифференцирование, считаются параметрами. Комбинируя формулы (3.23)–(3.26) с тождествами из (3.41), мы определим условия, обеспечивающие разрешимость уравнения (3.31) в квадратурах. Понятно, что совокупность получаемых таким способом результатов мы можем рассматривать как таблицу указанной разрешимости.

Пусть выполнены тождества $h_1 \equiv h_5 \equiv h_7 \equiv 0$, тогда (3.31) сводится к уравнению $u_{x_2x_3} + a^{(110)}u_{x_2} + a^{(101)}u_{x_3} + a^{(100)}u = v_1$. Функции φ, ψ, ω будут зависеть от двух переменных.

Используя результаты пункта а) следствия 3.2 из теоремы 3.1, получим формулы:

$$a^{(101)} = \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a^{(110)}_{x_2}(x_1,x_2,\tau) + \varphi(x_1,x_2)\psi(x_1,\tau)\Big)\, d\tau + \omega(x_1,x_2), \tag{3.48}$$

$$a^{(100)} = a^{(110)}_{x_2} + a^{(110)}\Bigg(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a^{(110)}_{x_2}(x_1,x_2,\tau) + \varphi(x_1,x_2)\psi(x_1,\tau)\Big)\, d\tau +$$

$$+\omega(x_1,x_2)\Bigg) - \varphi(x_1,x_2)\psi(x_1,x_3). \tag{3.49}$$

Из тождеств $h_1 \equiv h_5 \equiv h_7 \equiv 0$ выразим коэффициенты $a^{(010)}$, $a^{(001)}$, $a^{(000)}$:

$$a^{(010)} = a^{(110)}_{x_1} + a^{(110)}a^{(011)}, \tag{3.50}$$

$$a^{(001)} = \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Bigg(a^{(110)}_{x_1x_2}(x_1,x_2,\tau) +$$

$$+(\varphi(x_1,x_2)\psi(x_1,\tau))_{x_1}\Bigg) d\tau + \omega_{x_1}(x_1,x_2) +$$

$$+a^{(011)}\left(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a^{(110)}_{x_2}(x_1,x_2,\tau) + \varphi(x_1,x_2)\psi(x_1,\tau)\Big)\, d\tau + \omega(x_1,x_2)\right), \tag{3.51}$$

$$a^{(000)} = a^{(110)}_{x_1x_2} + \Bigg(a^{(110)}\Big(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a^{(110)}_{x_2}(x_1,x_2,\tau) + \varphi(x_1,x_2)\psi(\tau)\Big)\, d\tau +$$

$$+\omega(x_1,x_2)\Big)\Bigg)_{x_1} - (\varphi(x_1,x_2)\psi(x_1,x_3))_{x_1} +$$

$$+a^{(011)}\Bigg(a^{(110)}_{x_2} + a^{(110)}\Big(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a^{(110)}_{x_2}(x_1,x_2,\tau) + \varphi(x_1,x_2)\psi(\tau)\Big)\, d\tau +$$

$$+\omega(x_1,x_2)\Big) - \varphi(x_1,x_2)\psi(x_1,x_3)\Bigg). \tag{3.52}$$

Итак, имеем пять соотношений (3.48)–(3.52), связывающих семь коэффициентов уравнения (3.31). Это есть первый набор набор условий, обеспечивающих разрешимость данного уравнения в квадратурах. Далее подобные наборы будем называть структурными формулами. Непосредственно видно, что эти формулы фактически есть представления через произвольные функции φ, ψ, ω и коэффициенты $a^{(110)}, a^{(011)}$ всех остальных коэффициентов рассматриваемого уравнения. Аналогичным образом, используя результаты пунктов b)–d) следствия 3.2, получим еще 3 варианта формул, играющих роль (3.48)–(3.49):

$$a^{(101)} = \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a^{(110)}_{x_2}(x_1, x_2, \tau) - \varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, \tau) \Big)\, d\tau + \omega(x_1, x_2), \tag{3.53}$$

$$a^{(100)} = a^{(110)}_{x_2} + a^{(110)} \Big(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a^{(110)}_{x_2}(x_1, x_2, \tau) - \varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, \tau) \Big)\, d\tau +$$

$$+\omega(x_1, x_2) \Big) - 2\varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, x_3), \tag{3.54}$$

$$a^{(101)}(x_1, x_2, x_3) = \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a^{(110)}_{x_2}(x_1, x_2, \tau) +$$

$$+(m-1)\frac{2\varphi_{x_2}(x_1, x_2)\psi_\tau(x_1, \tau)}{(2-m)\,[\varphi(x_1, x_2) + \psi(x_1, \tau)]^{\,2}} \Big)\, d\tau + \omega(x_1, x_2), \tag{3.55}$$

$$a^{(100)} = a^{(110)}_{x_2} + a^{(110)} \Big(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a^{(110)}_{x_2}(x_1, x_2, \tau) +$$

$$+(m-1)\frac{2\varphi_{x_2}(x_1, x_2)\psi_\tau(x_1, \tau)}{(2-m)\,[\varphi(x_1, x_2) + \psi(x_1, \tau)]^{\,2}} \Big)\, d\tau + \omega(x_1, x_2) \Big) -$$

$$-\frac{2\varphi_{x_2}(x_1, x_2)\psi_{x_3}(x_1, x_3)}{(2-m)\,[\varphi(x_1, x_2) + \psi(x_1, x_3)]^{\,2}}, \tag{3.56}$$

$$a^{(101)}(x_1, x_2, x_3) = \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a^{(110)}_{x_2}(x_1, x_2, \tau) -$$

$$-(m-1)\frac{2\varphi_{x_2}(x_1, x_2)\psi_\tau(x_1, \tau)}{(2-m)\,[\varphi(x_1, x_2) + \psi(x_1, \tau)]^{\,2}} \Big)\, d\tau + \omega(x_1, x_2), \tag{3.57}$$

$$
\begin{gathered}
a^{(100)} = a^{(110)}_{x_2}(x_2,x_3) - (m-1)\frac{2\varphi_{x_2}(x_1,x_2)\psi_{x_3}(x_1,x_3)}{(2-m)\,[\varphi(x_1,x_2)+\psi(x_1,x_3)]^{\,2}}+\\
+a^{(110)}\Biggl(\int\limits_{x_3^0}^{x_3}\Bigl(a^{(110)}_{x_2}(x_1,x_2,\tau)-\\
-(m-1)\frac{2\varphi_{x_2}(x_1,x_2)\psi_{\tau}(x_1,\tau)}{(2-m)\,[\varphi(x_1,x_2)+\psi(x_1,\tau)]^{\,2}}\Bigr)d\,\tau+\omega(x_1,x_2)\Biggr)-\\
-\frac{2\varphi_{x_2}(x_1,x_2)\psi_{x_3}(x_1,x_3)}{(2-m)\,[\varphi(x_1,x_2)+\psi(x_1,x_3)]^{\,2}}.
\end{gathered}
\tag{3.58}
$$

Конечно, при этом должна иметь место первая группа тождеств из (3.41), которую мы запишем здесь тоже в исходных данных:

$$
\begin{gathered}
a^{(010)} = a^{(110)}_{x_1} + a^{(110)}a^{(011)},\ a^{(001)} = a^{(101)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(101)},\\
a^{(000)} = a^{(100)}_{x_1} + a^{(011)}a^{(100)}.
\end{gathered}
\tag{3.59}
$$

Ее следует присоединять к каждой из пар (3.53)–(3.54), (3.55)–(3.56), (3.57)–(3.58).

Заметим, что в (3.59) тождества из (3.41) заменены равенствами: они потом в совокупности с другими структурными формулами в условиях разрешимости все равно должны рассматриваться как тождественные. С помощью (3.14) для каждой из только что указанных пар можно записать формулы, играющие роль (3.50)–(3.52). Мы здесь (и далее в аналогичных ситуациях) делать этого не будем: при желании читатель легко может сделать это сам. Таким образом, для первого набора тождеств (3.41) мы получаем 4 варианта структурных формул, обеспечивающих разрешимость уравнения (3.31) в квадратурах:

1) (3.48)–(3.52); **2)** (3.53), (3.54),(3.59); **3)** (3.55), (3.56), (3.59); **4)** (3.57), (3.58),(3.59).

Возьмем теперь вторую группу тождеств (3.41), которая в исходных данных имеет вид:

$$
\begin{gathered}
a^{(100)} = a^{(110)}_{x_2} + a^{(110)}a^{(101)},\ a^{(001)} = a^{(011)}_{x_2} + a^{(011)}a^{(101)},\\
a^{(000)} = a^{(010)}_{x_2} + a^{(101)}a^{(010)}.
\end{gathered}
\tag{3.60}
$$

Этой группе тождеств отвечает уравнение $u_{x_1x_3} + a^{(110)}u_{x_1} + a^{(011)}u_{x_3} + a^{(010)}u = v_2$. Применяя к нему к нему следствие 3.2, получим следующие аналоги формул (3.48)–(3.49), (3.53)–(3.54) и т. д.:

$$a^{(011)} = \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_1}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) + \varphi(x_1, x_2)\psi(x_2, \tau) \Big)\, d\tau + \omega(x_1, x_2), \tag{3.61}$$

$$a^{(010)} = a_{x_1}^{(110)} +$$
$$+a^{(110)} \left(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_1}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) + \varphi(x_1, x_2)\psi(x_2, \tau) \Big)\, d\tau + \omega(x_1, x_2) \right) -$$
$$-\varphi(x_1, x_2)\psi(x_2, x_3), \tag{3.62}$$

$$a^{(011)} = \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_1}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) - \varphi(x_1, x_2)\psi(x_2, \tau) \Big)\, d\tau + \omega(x_1, x_2), \tag{3.63}$$

$$a^{(010)} = a_{x_1}^{(110)} + a^{(110)} \Big(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_1}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) - \varphi(x_1, x_2)\psi(x_2, \tau) \Big)\, d\tau +$$
$$+\omega(x_1, x_2) \Big) - 2\varphi(x_1, x_2)\psi(x_2, x_3), \tag{3.64}$$

$$a^{(011)}(x_1, x_2, x_3) = \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_1}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) +$$
$$+(m-1)\frac{2\varphi_{x_1}(x_1, x_2)\psi_\tau(x_2, \tau)}{(2-m)\left[\varphi(x_1, x_2) + \psi(x_2, \tau)\right]^2} \Big) d\tau + \omega(x_1, x_2), \tag{3.65}$$

$$a^{(010)} = a_{x_2}^{(110)} + a^{(110)} \left(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_1}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) + \right.$$
$$\left. +(m-1)\frac{2\varphi_{x_1}(x_1, x_2)\psi_\tau(x_2, \tau)}{(2-m)\left[\varphi(x_1, x_2) + \psi(x_2, \tau)\right]^2} \Big) d\tau + \omega(x_1, x_2) \right) -$$
$$-\frac{2\varphi_{x_1}(x_1, x_2)\psi_{x_3}(x_2, x_3)}{(2-m)\left[\varphi(x_1, x_2) + \psi(x_2, x_3)\right]^2}, \tag{3.66}$$

$$a^{(011)}(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_{x_3^0}^{x_3}\Big(a^{(110)}_{x_1}(x_1,x_2,\tau)-$$

$$-(m-1)\frac{2\varphi_{x_1}(x_1,x_2)\psi_\tau(x_2,\tau)}{(2-m)\,[\varphi(x_1,x_2)+\psi(x_2,\tau)]^{\,2}}\Big)d\,\tau+\omega(x_1,x_2), \tag{3.67}$$

$$a^{(010)}=a^{(110)}_{x_1}(x_1,x_3)-(m-1)\frac{2\varphi_{x_1}(x_1,x_2)\psi_{x_3}(x_2,x_3)}{(2-m)\,[\varphi(x_1,x_2)+\psi(x_2,x_3)]^{\,2}}+$$

$$+a^{(110)}\Bigg(\int\limits_{x_3^0}^{x_3}\Big(a^{(110)}_{x_1}(x_1,x_2,\tau)-$$

$$-(m-1)\frac{2\varphi_{x_1}(x_1,x_2)\psi_\tau(x_2,\tau)}{(2-m)\,[\varphi(x_1,x_2)+\psi(x_2,\tau)]^{\,2}}\Big)d\,\tau+\omega(x_1,x_2)\Bigg)-$$

$$-\frac{2\varphi_{x_1}(x_1,x_2)\psi_{x_3}(x_2,x_3)}{(2-m)\,[\varphi(x_1,x_2)+\psi(x_2,x_3)]^{\,2}}. \tag{3.68}$$

Варианты разрешимости (3.31) в квадратурах даются здесь наборами структурных формул:

5) (3.60), (3.61), (3.62); **6)** (3.60), (3.63), (3.64); **7)** (3.60), (3.65), (3.66); **8)** (3.60), (3.67), (3.68).

Следующая группа тождеств, записывающаяся в форме

$$\begin{gathered} a^{(100)}=a^{(101)}_{x_3}+a^{(110)}a^{(101)},\ a^{(010)}=a^{(011)}_{x_3}+a^{(011)}a^{(110)},\\ a^{(000)}=a^{(001)}_{x_3}+a^{(110)}a^{(001)}, \end{gathered} \tag{3.69}$$

обеспечивает редукцию (3.31) к уравнению $u_{x_1x_2}+a^{(101)}u_{x_1}+a^{(011)}u_{x_2}+a^{(001)}u=v_3$. Поэтому получаются формулы:

$$a^{(011)}=\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\Big(a^{(101)}_{x_1}(x_1,\tau,x_3)+\varphi(x_1,x_3)\psi(\tau,x_3)\Big)\,d\,\tau+\omega(x_1,x_3), \tag{3.70}$$

$$a^{(001)}=a^{(101)}_{x_1}+a^{(101)}\Big(\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\Big(a^{(101)}_{x_1}(x_1,\tau,x_3)+\varphi(x_1,x_3)\psi(\tau,x_3)\Big)\,d\,\tau+$$

$$+\omega(x_1,x_3)\Big)-\varphi(x_1,x_3)\psi(x_2,x_3), \tag{3.71}$$

$$a^{(011)} = \int\limits_{x_2^0}^{x_2} \Big(a_{x_1}^{(101)}(x_1,\tau,x_3) - \varphi(x_1,x_3)\psi(\tau,x_3)\Big)\, d\tau + \omega(x_1,x_3), \tag{3.72}$$

$$a^{(001)} = a_{x_1}^{(101)} + a^{(101)}\Big(\int\limits_{x_2^0}^{x_2} \Big(a_{x_1}^{(101)}(x_1,\tau,x_3) - \varphi(x_1,x_3)\psi(\tau,x_3)\Big)\, d\tau +$$

$$+\omega(x_1,x_3)\Big) - 2\varphi(x_1,x_3)\psi(x_2,x_3), \tag{3.73}$$

$$a^{(011)}(x_1,x_2,x_3) = \int\limits_{x_2^0}^{x_2} \Big(a_{x_1}^{(101)}(x_1,\tau,x_3) +$$

$$+(m-1)\frac{2\varphi_{x_1}(x_1,x_3)\psi_\tau(\tau,x_3)}{(2-m)\left[\varphi(x_1,x_3)+\psi(\tau,x_3)\right]^2}\Big) d\tau + \omega(x_1,x_3), \tag{3.74}$$

$$a^{(001)} = a_{x_2}^{(101)} +$$

$$+a^{(101)}\left(\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\Big(a_{x_1}^{(101)}(x_1,\tau,x_3) +\right.$$

$$\left.+(m-1)\frac{2\varphi_{x_1}(x_1,x_3)\psi_\tau(\tau,x_3)}{(2-m)\left[\varphi(x_1,x_3)+\psi(\tau,x_3)\right]^2}\Big) d\tau + \omega(x_1,x_3)\right) -$$

$$-\frac{2\varphi_{x_1}(x_1,x_3)\psi_{x_2}(x_2,x_3)}{(2-m)\left[\varphi(x_1,x_3)+\psi(x_2,x_3)\right]^2}, \tag{3.75}$$

$$a^{(011)}(x_1,x_2,x_3) = \int\limits_{x_2^0}^{x_2} \Big(a_{x_1}^{(101)}(x_1,\tau,x_3) -$$

$$-(m-1)\frac{2\varphi_{x_1}(x_1,x_3)\psi_\tau(\tau,x_3)}{(2-m)\left[\varphi(x_1,x_3)+\psi(\tau,x_3)\right]^2}\Big) d\tau + \omega(x_1,x_3), \tag{3.76}$$

$$a^{(001)} = a_{x_1}^{(101)}(x_1,x_2) - (m-1)\frac{2\varphi_{x_1}(x_1,x_3)\psi_{x_2}(x_2,x_3)}{(2-m)\left[\varphi(x_1,x_3)+\psi(x_2,x_3)\right]^2} +$$

$$+a^{(101)}\left(\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\Big(a_{x_1}^{(101)}(x_1,\tau,x_3) -\right.$$

$$-(m-1)\frac{2\varphi_{x_1}(x_1,x_3)\psi_\tau(\tau,x_3)}{(2-m)\left[\varphi(x_1,x_3)+\psi(\tau,x_3)\right]^2}\Big)d\,\tau+\omega(x_1,x_3)\Bigg)-$$

$$-\frac{2\varphi_{x_1}(x_1,x_3)\psi_{x_2}(x_2,x_3)}{(2-m)\left[\varphi(x_1,x_3)+\psi(x_2,x_3)\right]^2}. \tag{3.77}$$

Наборы структурных формул, гарантирующих разрешимость (3.31) в квадратурах даются соотношениями:

9) (3.69), (3.70), (3.71); **10)** (3.69), (3.72), (3.73); **11)** (3.69), (3.74), (3.75); **12)** (3.69), (3.76), (3.77).

На этом мы закончили случаи, связанные с левосторонним способом понижения порядка и переходим к правосторонним возможностям. Обращаем внимание на то, что получаемые уравнения второго порядка отличаются при этом только своими правыми частями от уравнений, уже встречавшихся выше. Это обстоятельство освобождает нас от записи формул, играющих роли (3.48)–(3.49).

Первый набор этой серии $h_1\equiv h_2\equiv h_{10}\equiv 0$, эквивалентный соотношениям

$$\begin{gathered} a^{(010)}=a^{(110)}_{x_1}+a^{(110)}a^{(011)},\ a^{(100)}=a^{(110)}_{x_2}+a^{(110)}a^{(101)},\\ a^{(000)}=a^{(110)}_{x_1x_2}+a^{(101)}a^{(110)}_{x_1}+a^{(011)}a^{(110)}_{x_2}+a^{(001)}a^{(110)}. \end{gathered} \tag{3.78}$$

приводит к уравнению $v_{4x_1x_2}+a^{(101)}v_{4x_1}+a^{(011)}v_{4x_2}+a^{(001)}v_4=f$. Поэтому формулы типа (3.48)–(3.49) совпадают с (3.70)–(3.71) и т. д. Следовательно, структурные формулы определяются соотношениями

13) (3.78), (3.70), (3.71); **14)** (3.78), (3.72), (3.73); **15)** (3.78), (3.74), (3.75); **16)** (3.78), (3.76), (3.77).

Для предпоследнего набора из (3.41) имеем вместо (3.78) равенства —

$$\begin{aligned} a^{(001)}&=a^{(101)}_{x_1}+a^{(011)}a^{(101)},\\ a^{(100)}&=a^{(110)}_{x_3}+a^{(110)}a^{(101)},\\ a^{(000)}&=a^{(101)}_{x_1x_3}+a^{(110)}a^{(101)}_{x_1}+a^{(011)}a^{(101)}_{x_3}+a^{(010)}a^{(101)}, \end{aligned} \tag{3.79}$$

а для последнего —

$$\begin{aligned} a^{(001)}&=a^{(011)}_{x_2}+a^{(011)}a^{(101)},\\ a^{(010)}&=a^{(011)}_{x_3}+a^{(110)}a^{(011)},\\ a^{(000)}&=a^{(011)}_{x_2x_3}+a^{(110)}a^{(011)}_{x_2}+a^{(101)}a^{(011)}_{x_3}+a^{(100)}a^{(011)}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Соответствующие уравнения имеют вид

$$v_{5x_1x_3}+a^{(110)}v_{5x_1}+a^{(011)}v_{5x_3}+a^{(010)}v_5=f,$$

$$v_{6x_2x_3}+a^{(110)}v_{6x_2}+a^{(101)}v_{6x_3}+a^{(100)}v_6=f.$$

Поэтому последние восемь наборов структурных формул даются перечислениями:

17) (3.79), (3.61), (3.62); **18)** (3.79), (3.63), (3.64); **19)** (3.79), (3.65), (3.66); **20)** (3.79), (3.67), (3.68);

21) (3.80), (3.48), (3.49); **22)** (3.80), (3.53), (3.54); **23)** (3.80), (3.55), (3.56); **24)** (3.80), (3.57), (3.58).

Из вышеизложенного следует

Теорема 3.8. *Каждый из наборов формул* 1)–24) *обеспечивает возможность решения рассматриваемого уравнения* (3.31) *в квадратурах.*

3.2.5. Применение к системе уравнений первого порядка. Речь идет о системе уравнений

$$u_x=\alpha u+\beta v+f_1,\ v_y=\gamma u+\delta v+f_2,\ \beta\gamma\neq 0, \tag{3.81}$$

изучавшейся ранее с различных точек зрения в работах [50], [9], [146], [212]. При этом в [50], [212] был выделен ряд случаев построения решения в квадратурах. Здесь указываются новые варианты такой разрешимости. Рассуждения основаны на редукции (3.81) к уравнениям вида

$$\omega_{xy}+a\omega_x+b\omega_y+c\omega=f, \tag{3.82}$$

где ω совпадает либо с u, либо с v, а f зависит от f_1, f_2.

При этом для $\omega=u$ имеем

$$-a=\delta+(\ln\beta)_y,\ -b=\alpha,\ -c=\alpha_y+\beta\gamma-\alpha[\delta+(\ln\beta)_y], \tag{3.83}$$

а для $\omega=v$

$$-a=\delta,\ -b=\alpha+(\ln\gamma)_x,\ -c=\delta_x+\beta\gamma-\delta[\alpha+(\ln\gamma)_x]. \tag{3.84}$$

Указанная редукция возможна, если в $\overline{D}$ $\alpha,\beta,f_1\in C^{(0,1)},\ \delta,f_2\in C^{(1,0)}$.

Сопоставляя формулы (3.82)–(3.84) с (3.15)–(3.22), нетрудно получить следующие тождества, обеспечивающие разрешимость системы (3.81) в квадратурах:

1) $\beta\gamma\equiv 0$.

2) $\beta\exp(M-N)\equiv\mu(x)\nu(y),\ M=\int\limits_{y_0}^{y}\delta(x,\eta)d\eta,\ N=\int\limits_{x_0}^{x}\alpha(\xi,y)d\xi,\ \mu,\nu\in C^1$, где (x_0,y_0) — любая точка рассматриваемой области.

3) $\delta+(\ln\beta)_y\equiv\lambda(y),\ \alpha\equiv\mu(x)\nu(y),\ \beta\gamma\equiv 2\mu(x)[\lambda(y)\nu(y)-\nu'(y)]$; $\nu'\mu\neq 0,\ \lambda\in C,\ \mu\in C^1,\ \nu\in C^2$.

4) $\delta+(\ln\beta)_y\equiv\mu(x)\nu(y),\ \alpha\equiv\lambda(x),\ \beta\gamma\equiv 2\nu(y)[\lambda(x)\mu(x)+\mu'(x)];$ $\mu'\nu\neq 0,\ \lambda\in C,\ \mu\in C^2,\ \nu\in C^1.$

5) $\delta+(\ln\beta)_y\equiv\lambda(x)\mu(y),\ \alpha\equiv\nu(x),\ \beta\gamma\equiv\mu(y)[2\lambda(x)\nu(x)-\lambda'(x)];$ $\lambda'\mu\neq 0,\ \lambda\in C^2,\ \mu\in C^1,\ \nu\in C.$

6) $\delta+(\ln\beta)_y\equiv\lambda(y),\ \alpha\equiv\mu(y)\nu(x),\ \beta\gamma\equiv\nu(x)[2\lambda(y)\mu(y)+\mu'(y)];$ $\mu'\nu\neq 0,\ \lambda\in C,\ \mu\in C^2,\ \nu\in C^1.$

7) $\delta+(\ln\beta)_y\equiv\lambda(y),\ \alpha\equiv\frac{\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)},\ \beta\gamma\equiv\frac{2\mu'(x)\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)}.$
$\mu'\nu'\neq 0,\ \mu+\nu\neq 0\ \lambda\in C,\ \mu\in C^2,\ \nu\in C^1.$

8) $\delta+(\ln\beta)_y\equiv\frac{\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)},\ \alpha\equiv\lambda(x),\ \beta\gamma\equiv\frac{\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)}\left[2\lambda(x)-\frac{\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)}\right];$
$\mu'\nu'\neq 0,\ \mu+\nu\neq 0\ \lambda\in C,\ \mu\in C^2,\ \nu\in C^1.$

9) $\delta+(\ln\beta)_y\equiv\frac{\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)},\ \alpha\equiv\frac{\lambda(x)\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)},\ \beta\gamma\equiv\frac{3\mu'(x)\nu'(y)[\lambda(x)-1]}{[\mu(x)+\nu(y)]^2}.$
$\lambda\neq 3,\ \mu'\nu'\neq 0,\ \mu+\nu\neq 0\ \lambda,\nu\in C^1,\ \mu\in C^2.$

10) $\delta+(\ln\beta)_y\equiv\frac{\lambda(y)\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)},\ \alpha\equiv\frac{\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)},\ \beta\gamma\equiv\frac{3\mu'(x)\nu'(y)[\lambda(y)-1]}{[\mu(x)+\nu(y)]^2}.$
$\lambda\neq 3,\ \mu'\nu'\neq 0,\ \mu+\nu\neq 0\ \lambda,\mu\in C^1,\ \nu\in C^2.$

При этом в 2)–10) предполагается еще, что $\beta\neq 0$. Если же $\gamma\neq 0$, то к условиям $n)$ =2)–10) добавляются еще тождества n_0), получаемые заменами: в 2) β на γ, $M-N$ на $N-M$; в первых двух тождествах 3)–10) вместо $\delta+(\ln\beta)_y,\ \alpha$ нужно взять соответственно $\alpha,\ \alpha+(\ln\gamma)_x$; причем для 5)–8) записать $\beta\gamma$ (тоже соответственно) в видах

$$2\mu(y)[\lambda(x)\nu(x)-\lambda'(x)],\ 2\nu(x)[\lambda(y)\mu(y)+\mu'(y)],$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)}\left[\lambda(y)+\frac{\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)}\right],\ \frac{2\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)}.$$

Таким образом, всего имеем 19 наборов условий: 1), n), n_0) при $n,\ n_0$ =2–10.

Теорема 3.9. *При выполнении любого из перечисленных* 19 *наборов условий система* (3.81) *разрешима в квадратурах.*

Тождества 1), 2), 2_0) соответствуют случаям когда инварианты Лапласа $h=a_x+ab-c$, или $k=b_y+ab-c$ для уравнения (3.82) тождественно равны нулю, что обеспечивает его непосредственную разрешимость в квадратурах. Тождества же из n), n_0) для $n,\ n_0=3-10$ получены на основе статьи [55], где предполагается, что h, k отличны от нуля. Это означает, что указанные тождества не сразу приводят к явным формулам решения системы (3.81). Например, в случае 3) в квадратурах решается сначала уравнение $\omega_{1xy}+a_1\omega_{1x}+b_1\omega_{1y}+c_1\omega_1=f_1$, где $a_1=a-(\ln h)_y$, $b_1=b$, $c_1=c-a_x-b_y-b(\ln h)_y$, $f_1=[a-(\ln h)_y]f-f_y$. После этого для отыскания $\omega=u$

следует воспользоваться формулой

$$u = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + b\omega_1\right)$$

из книги [168].

Замечание. Следует также иметь в виду, что каждый вариант 2)–10) дает возможность найти $u(x,y)$, после чего указанное требование $\beta \neq 0$ позволяет вычислить $v(x,y)$, а $\gamma \neq 0$ дает после этого возможность определения $u(x,y)$ из второго уравнения рассматриваемой системы.

Аналогично, сопоставляя те же формулы (3.82)–(3.84) с соотношениями (3.27)–(3.30), получаем еще один набор достаточных условий разрешимости системы (3.81) в квадратурах:

$$2[\delta_x - \alpha_y + (\ln\beta)_{xy}] = \beta\gamma = 2\varphi(x)\psi(y), \tag{3.85}$$

$$\alpha_y - \delta_x - (\ln\beta)_{xy} = \beta\gamma = \varphi(x)\psi(y), \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned} \delta_x - \alpha_y + (\ln\beta)_{xy} + \tfrac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x)+\psi(y)]^2} &= \alpha_y - \delta_x + \beta\gamma - (\ln\beta)_{xy} = \\ &= \tfrac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{(2-m)[\varphi(x)+\psi(y)]^2}, \end{aligned} \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned} \alpha_y - \delta_x - (\ln\beta)_{xy} + \tfrac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x)+\psi(y)]^2} &= \alpha_y - \delta_x + \beta\gamma - (\ln\beta)_{xy} = \\ &= \tfrac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{(2-m)[\varphi(x)+\psi(y)]^2}, \end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\delta_x - \alpha_y - (\ln\gamma)_{xy} = \beta\gamma = p(x)q(y), \tag{3.89}$$

$$2[\alpha_y - \delta_x + (\ln\gamma)_{xy}] = \beta\gamma = 2p(x)q(y), \tag{3.90}$$

$$\delta_x - \alpha_y - (\ln\gamma)_{xy} + \frac{2p'(x)q'(y)}{[p(x)+q(y)]^2} = \beta\gamma = \frac{2p'(x)q'(y)}{(2-n)[p(x)+q(y)]^2}, \tag{3.91}$$

$$\alpha_y - \delta_x + (\ln\gamma)_{xy} + \frac{2p'(x)q'(y)}{[p(x)+q(y)]^2} = \beta\gamma = \frac{2p'(x)q'(y)}{(2-n)[p(x)+q(y)]^2}. \tag{3.92}$$

В (3.89)–(3.92) функции φ, ψ, m переобозначены как p, q, n, чтобы не было путаницы с (3.85)–(3.88). Понятно, что условия построения в квадратурах пары (u, v) обеспечиваются комбинированием любой из пар (3.85)–(3.88) с любой из пар (3.89)–(3.92). Каждая комбинация представляет собой набор из четырех формул, а общее количество наборов равно 16. Назовем их наборами, порождаемыми соотношениями (3.85)–(3.88) и (3.89)–(3.92).

Из вышеизложенного следует

Теорема 3.10. *Если известны такие функции $\varphi, \psi, m, p, q, n$ из указанных выше классов, что для коэффициентов системы* (3.81) *имеет место хотя бы один из* 16 *наборов, порождаемых соотношениями* (3.85)–(3.88) *и* (3.89)–(3.92)*, то система* (3.81) *разрешима в квадратурах.*

Глава 4
Применение к факторизованным дифференциальным уравнениям и интегральным уравнениям Вольтерра

§ 1. Модельное факторизованное уравнение с двумя независимыми переменными в треугольной характеристической области

Здесь рассматривается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_{yy}) = 0, \tag{1.1}$$

изучавшееся ранее в [31], [32], [28] в области, образованной его характеристиками $y = 0$ и $y \pm x = 1$. При этом пока речь не идет об указанных в названии главы применениях: данный параграф скорее играет роль некоторого предисловия, раскрывающщенго определенное своеобразие подобных уравнений.

Наше внимание в процитированных выше источниках [31], [32] привлек факт участия в постановках задач значений искомой функции, задаваемых внутри области, причем никакого объяснения по поводу необходимости такого задания не приводилось. К тому же было непонятно, почему не рассматривалась задача Дирихле. Попытаемся разобраться в этих обстоятельствах, начиная с последнего момента.

1.1. Задача Дирихле, ее некорректность. Пусть $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$. Очевидно, отрезки $AB : y = x+1$, $x \in [-1, 0]$; $BC : y = 1-x$, $x \in [0, 1]$ и $AC : y = 0$, $x \in [-1, 1]$ лежат на характеристиках уравнения (1.1) и образуют треугольник $G = ABC$.

Как и в [31], [32], решение будем отыскивать в классе функций, имеющих представление

$$u(x, y) = f_1(x + y) + f_2(x - y) + \varphi(y), \quad f_1,\ f_2,\ \varphi \in C^2. \tag{1.2}$$

Заметим, что (1.2) определяет несколько более общее множество функций, чем содержащееся в классе регулярных решений (в данном случае это $C^{(3,2)}(G)$).

Задача D (Дирихле). *Найти в G решение класса* (1.2) *уравнения* (1.1), *непрерывно продолжимое на границу G и удовлетворяющее условиям*

$$\begin{gathered} u|_{AB} = \mu(x),\, x \in [-1,0]; \quad u|_{BC} = \nu(x),\, x \in [0,1]; \\ u|_{AC} = \tau(x),\, x \in [-1,1], \end{gathered} \tag{1.3}$$

где граничные функции на отрезках своего определения принадлежат классу C^2.

В силу $u \in C(\overline{G})$ имеют место условия согласования

$$\mu(0) = \nu(0), \quad \tau(-1) = \mu(-1), \quad \tau(1) = \nu(1). \tag{1.4}$$

Мы будем использовать представление (1.2) в несколько преобразованном виде. А именно, прибавляя и вычитая в правой части конструкцию

$$f_1(1) - f_2(-1) - (y+1)\varphi'(1)$$

и вводя обозначения

$$\begin{gathered} F_1(x+y) = f_1(x+y) - f_1(1) + \tfrac{x+y+1}{2}\varphi'(1), \\ F_2(x-y) = f_2(x-y) - f_2(-1) - \tfrac{x-y-1}{2}\varphi'(1), \\ \omega(y) = \varphi(y) + f_1(1) + f_2(-1) - (y+1)\varphi'(1), \end{gathered}$$

можно переписать (1.2) в форме

$$u(x,y) = F_1(x+y) + F_2(x-y) + \omega(y), \quad F_1,\, F_2,\, \omega \in C^2. \tag{1.5}$$

Непосредственно проверяется, что

$$F_1(1) = F_2(-1) = \omega'(1) = 0. \tag{1.6}$$

Из первых двух условий (1.3) находим с учетом (1.6) значения

$$F_1(z) = \mu\left(\frac{z-1}{2}\right) - \omega\left(\frac{z-1}{2}\right), \quad z \in [-1,1], \tag{1.7}$$

$$F_2(z) = \nu\left(\frac{z+1}{2}\right) - \omega\left(\frac{1-z}{2}\right), \quad z \in [-1,1], \tag{1.8}$$

с помощью которых из (1.5) получаем

$$\begin{aligned} u(x,y) = \mu\left(\frac{x+y-1}{2}\right) + \nu\left(\frac{1+x-y}{2}\right) - \\ - \omega\left(\frac{x+y+1}{2}\right) - \omega\left(\frac{1-x+y}{2}\right) + \omega(y). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Подставляя это значение $u(x,y)$ в последнее условие (1.3), приходим к функциональному уравнению для $\omega(y)$

$$\omega\left(\frac{x+1}{2}\right)+\omega\left(\frac{1-x}{2}\right)= \\ =\mu\left(\frac{x-1}{2}\right)+\nu\left(\frac{x+1}{2}\right)-\tau(x)+\omega(0), \quad x\in[-1,1]. \quad (1.10)$$

Заметим, что в общем случае это уравнение может быть неразрешимым. Действительно, полагая в (1.10) x равным "$-x$", имеем

$$\omega\left(\frac{1-x}{2}\right)+\omega\left(\frac{x+1}{2}\right)=\mu\left(-\frac{x+1}{2}\right)+\nu\left(\frac{1-x}{2}\right)-\tau(-x)+\omega(0). \quad (1.11)$$

Так как левые части (1.10) и (1.11) совпадают, то должно выполняться соотношение

$$\mu\left(\frac{x-1}{2}\right)+\nu\left(\frac{x+1}{2}\right)-\tau(x)=\mu\left(-\frac{x+1}{2}\right)+\nu\left(\frac{1-x}{2}\right)-\tau(-x). \quad (1.12)$$

Вследствие формул (1.5), (1.7), (1.8) при нарушении этого соотношения неразрешимой оказывается и задача D, то есть (1.12) следует рассматривать как необходимое условие ее разрешимости. Обратим внимание еще на то, что $\omega(0)$ через исходные данные задачи вычислить не удается. Поэтому далее эту величину будем обозначать через α и рассматривать как неопределенную постоянную.

Покажем, что решение уравнения (1.10) при условии (1.12) можно получить в явном виде. Обозначив

$$g(x)=\mu\left(\frac{x-1}{2}\right)+\nu\left(\frac{x+1}{2}\right)-\tau(x), \quad x\in[-1,1], \quad (1.13)$$

перепишем (1.10) так

$$\omega\left(\frac{x+1}{2}\right)+\omega\left(\frac{1-x}{2}\right)=g(x)+\alpha, \quad x\in[-1,1]. \quad (1.14)$$

Возьмем

$$\omega_1\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{1}{2}(g(x)+\alpha), \quad (1.15)$$

вследствие чего (заменяем x на "$-x$")

$$\omega_1\left(\frac{1-x}{2}\right)=\frac{1}{2}(g(-x)+\alpha), \quad (1.16)$$

Складывая (1.15) и (1.16), получаем

$$\omega_1\left(\frac{x+1}{2}\right)+\omega_1\left(\frac{1-x}{2}\right)=\alpha+\frac{1}{2}(g(x)+g(-x)).$$

Так как (1.15) — определение, а (1.16) — его следствие, то можно рассматривать эти соотношения как тождества. Поэтому тождеством будет и последнее из записанных равенств. Если еще учесть, что (1.12) означает $g(x)\equiv g(-x)$, то

$$\omega_1\left(\frac{x+1}{2}\right)+\omega_1\left(\frac{1-x}{2}\right)\equiv\alpha+g(x).$$

Таким образом, функция ω_1, определяемая с помощью (1.15), удовлетворяет уравнению (1.14). Сделав в (1.15) замену $x=2y-1$, имеем

$$\omega_1(y)=\frac{1}{2}(g(2y-1)+\alpha),\quad y\in[0,1]. \tag{1.17}$$

Мы получили $\omega_1(y)$ как частное решение неоднородного линейного уравнения (1.10). В силу его линейности путем добавления к нему решения соответствующего однородного уравнения мы снова получим решение для (1.10). Рассмотрим это однородное уравнение

$$\omega\left(\frac{x+1}{2}\right)+\omega\left(\frac{1-x}{2}\right)=0. \tag{1.18}$$

Пусть $\theta(z)$ — произвольная функция. Возьмем

$$\omega_0\left(\frac{x+1}{2}\right)=\theta\left(\frac{x+1}{2}\right)-\theta\left(\frac{1-x}{2}\right). \tag{1.19}$$

Полагая здесь x равным "$-x$", находим

$$\omega_0\left(\frac{1-x}{2}\right)=\theta\left(\frac{1-x}{2}\right)-\theta\left(\frac{1+x}{2}\right). \tag{1.20}$$

Сложив (1.19) и (1.20) убеждаемся, что формула (1.19) определяет решение уравнения (1.18). С помощью уже использованной выше подстановки $x=2y-1$ запишем это решение так

$$\omega_0(y)=\theta(y)-\theta(1-y). \tag{1.21}$$

Понятно, что из (1.17), (1.21) мы получаем решение уравнения (1.10) в виде

$$\begin{aligned}\omega(y)&=\omega_0(y)+\omega_1(y)=\\&=\theta(y)-\theta(1-y)+\frac{1}{2}(\mu(y-1)+\nu(y)-\tau(2y-1)+\alpha).\end{aligned} \tag{1.22}$$

Подставляя $\omega(y)$ из (1.22) в (1.9), получим решение задачи D, зависящее от произвольной функции $\theta(y)$ и неопределенной постоянной α.

Таким образом, имеет место

Теорема 1.1. *В общем случае задача D неразрешима. При дополнительном условии* (1.12) *она становится разрешимой в явном виде, но решение содержит произвольную функцию и неопределенную постоянную α.*

1.2. Обеспечение единственности решения. Из только что сформулированной теоремы следует, что можно попытаться обеспечить единственность решения задачи D за счет такого дополнительного задания значений искомой функции внутри рассматриваемой области, которое позволило бы вычислить $\omega(y)$. Здесь мы покажем, что единственное решение имеет следующая

Задача V. *Найти решение уравнения* (1.1) *класса* (1.5) *всюду в G, за исключением характеристик этого уравнения, проходящих через точку $K(0, \frac{1}{2})$, при пересечении которых первые производные от $u \in C(\overline{G})$ могут претерпевать разрывы первого рода, а сама искомая функция удовлетворяет на границе G условиям* (1.3), (1.4) *и принимает заданные значения на отрезке BK оси y, расположенном внутри области:*

$$u(0, y) = \lambda(y), \quad y \in [\tfrac{1}{2}, 1], \quad \lambda \in C^2[\tfrac{1}{2}, 1], \quad \lambda(1) = \mu(0). \tag{1.23}$$

Понятно, что условие согласования в (1.23) является дополнением к (1.4), возникающим в связи с принадлежностью искомой функции классу $C(\overline{G})$.

Из вышеизложенных рассуждений ясно, что при исследовании задачи V следует сначала снова пройти путь из п. 1.1 до получения формулы (1.9), а затем подставить правую часть этой формулы в (1.23). В результате приходим к функциональному уравнению

$$\omega(y) = 2\omega\left(\frac{y+1}{2}\right) + \sigma(y), \quad y \in [\tfrac{1}{2}, 1], \tag{1.24}$$

$$\sigma(y) = \lambda(y) - \mu\left(\frac{y-1}{2}\right) - \nu\left(\frac{y+1}{2}\right), \quad y \in [\tfrac{1}{2}, 1], \tag{1.25}$$

Ясно, что $\sigma \in C^2[\frac{1}{2}, 1]$.

Продифференцируем (1.24)

$$\omega'(y) = \omega'\left(\frac{y+1}{2}\right) + \sigma'(y), \tag{1.26}$$

а затем применим к (1.26) процесс итераций

$$\omega'(y) = \sigma'(y) + \sigma'\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right) + \omega'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{y+1}{2}\right) =$$
$$= \sigma'(y) + \sigma'\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right) + \sigma'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{y}{2^2}\right) + \omega'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{y}{2^3}\right) = \ldots$$
$$= \sigma'(y) + \sigma'\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right) + \sigma'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{y}{2^2}\right) + \cdots +$$
$$+ \sigma'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{y}{2^k}\right) + \omega'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Используя формулу суммы $k = n$ членов геометрической прогрессии, перепишем последнее соотношение в виде

$$\omega'(y) = \omega'\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{y}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{n} \sigma'\left(1 - \frac{1}{2^k} + \frac{y}{2^k}\right). \qquad (1.27)$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$ и учитывая условие $\omega'(1) = 0$ из (1.6), имеем

$$\omega'(y) = \sum_{k=0}^{n} \sigma'\left(1 + \frac{y-1}{2^k}\right), \quad y \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \qquad (1.28)$$

Из (1.26) следует, что $\sigma'(1) = 0$. Поэтому

$$\left|\sigma'\left(1 + \frac{y-1}{2^k}\right)\right| = \left|\sigma'\left(1 + \frac{y-1}{2^{k-1}}\right) - \sigma'(1)\right| \leqslant \frac{M|y-1|}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}. \qquad (1.29)$$

Мы здесь воспользовались принадлежностью $\sigma(y)$ классу $C^2[\frac{1}{2}, 1]$ и теоремой Лагранжа о конечном приращении, вследствие чего можно взять $M = \max\limits_{y \in [\frac{1}{2}, 1]} |\sigma''(y)|$.

Оценка (1.29) обеспечивает равномерную сходимость ряда (1.28) к некоторой непрерывной функции $\omega'(y) = r(y)$, $y \in [\frac{1}{2}, 1]$. С учетом (1.26) можем записать

$$r(y) = r\left(\frac{y+1}{2}\right) + \sigma'(y),$$

откуда

$$\omega(y) - \omega(1) = \int\limits_1^y r\left(\frac{t+1}{2}\right) dt + \sigma(y) - \sigma(1), \quad y \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \qquad (1.30)$$

Вычисляя из (1.24) $\omega(1) = -\sigma(1)$ и подставляя в (1.30), находим

$$\omega(y) = \int\limits_1^y r\left(\frac{t+1}{2}\right) dt + \sigma(y) - 2\sigma(1). \tag{1.31}$$

Пусть $s(y)$ — ряд, полученный из (1.28) почленным дифференцированием, которое возможно, так как $\sigma \in C^2[\frac{1}{2}, 1]$. Для общего члена этого ряда имеем

$$\left|\frac{d}{dy}\sigma'\left(1 + \frac{y-1}{2^k}\right)\right| = \frac{1}{2^k}\left|\sigma''\left(1 + \frac{y-1}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{M|y-1|}{2^k} \leqslant \frac{M}{2^k},$$

что обеспечивает равномерную сходимость ряда $s(y)$. А в этом случае, на основании теорем 1 и 7 из [204, с. 430 и 438] можем утверждать, что $\omega''(y) = r'(y)$, причем $r'(x) \in C^2[\frac{1}{2}, 1]$. Таким образом, доказана принадлежность $\omega(y)$ классу $C^2[\frac{1}{2}, 1]$. Однако, нам этого недостаточно: в формуле (1.9), являющейся представлением искомого решения в Ω, нужно, чтобы ω была определена на $[0, 1]$ и принадлежала там классу C^2, за исключением, быть может, точки $y = \frac{1}{2}$, где (см. постановку задачи V) для $\omega'(y)$ и $\omega''(y)$ допустимы разрывы первого рода. Более того, $\omega(y)$ остается до сих пор неизвестной на $y \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Для отыскания ω на указанном отрезке используем последнее условие из (1.2). Требуя его выполнения, придем к соотношению (1.10), переписанному ранее в виде (1.14) с функцией $g(x)$ из (1.13). При этом константа $\alpha = \omega(0)$ остается до сих пор неопределенной. Если рассмотреть (1.14) только на $[0, 1]$, то там мы имеем уже найденную выше функцию (см. (1.31))

$$\omega\left(\frac{x+1}{2}\right) = \int\limits_1^{\frac{x+1}{2}} r\left(\frac{t+1}{2}\right) dt + \sigma\left(\frac{x+1}{2}\right) - 2\sigma(1), \quad x \in [0, 1], \tag{1.32}$$

что позволяет определить

$$\omega\left(\frac{1-x}{2}\right) = g(x) - \int\limits_1^{\frac{x+1}{2}} r\left(\frac{t+1}{2}\right) dt -$$
$$- \sigma\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2\sigma(1) + \alpha, \quad x \in [0, 1], \tag{1.33}$$

или

$$\omega(y) = g(1-2y) - \int\limits_1^{1-y} r\left(\frac{t+1}{2}\right) dt - \sigma(1-y) + 2\sigma(1) + \alpha, \quad y \in [0, \tfrac{1}{2}], \tag{1.34}$$

Из вышеизложенного следует, что (1.34) определяет $\omega \in C^2[0, \frac{1}{2}]$. Нам остается еще обеспечить требуемое в силу $u \in C(\overline{G})$ условие

$$\omega\left(\frac{1}{2}+0\right)=\omega\left(\frac{1}{2}-0\right). \tag{1.35}$$

Подставляя в (1.35) значения $\omega\left(\frac{1}{2}\pm 0\right)$, вычисляемые из (1.32), (1.33), находим неизвестную до сих пор постоянную α в виде

$$\alpha = 4\nu(1) + 2\left(\lambda\left(\frac{1}{2}\right)-\mu\left(-\frac{1}{4}\right)-\nu\left(\frac{3}{4}\right)-2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} r\left(\frac{t+1}{2}\right)dt\right)- \\ -\mu\left(-\frac{1}{2}\right)-\nu\left(\frac{1}{2}\right)+\tau(0). \tag{1.36}$$

Таким образом, функция $\omega(y)$ при $y \in [\frac{1}{2}, 1]$ определяется в соответствии с (1.32) в виде

$$\omega(y)=\sigma(y)+\int\limits_{1}^{y} r\left(\frac{t+1}{2}\right)dt-2\sigma(1), \tag{1.37}$$

а при $y \in [0, \frac{1}{2}]$ она задается формулой (1.34), где α следует заменить из (1.36), что одновременно обеспечивает для $\omega(y)$ принадлежность классу $C[0,1]$. Подставляя $\omega(y)$ в (1.9), получим единственное решение задачи V. Другими словами имеет место

Теорема 1.2. *При условии* (1.12) *задача* V *однозначно разрешима.*

Замечание. Через функции r, λ, μ, ν, τ теоретически нетрудно записать условия принадлежности искомого решения классу (1.5), когда

$$\omega^{(k)}\left(\frac{1}{2}+x\right)=\omega^{(k)}\left(\frac{1}{2}-x\right), \quad k=1,\,2.$$

Но практически обеспечить выполнение этих условий затруднительно. Например, в случае $k=1$ требуется согласование вида

$$2\left[r\left(\frac{3}{4}\right)+\lambda'\left(\frac{1}{2}\right)+\tau'(0)\right] = \mu'\left(-\frac{1}{2}\right)+\mu'\left(-\frac{1}{4}\right)+\nu'\left(\frac{1}{2}\right)+\mu'\left(\frac{3}{4}\right). \tag{1.38}$$

Функция $r(y)$ представляет собой ряд (1.28). Поэтому (1.38) означает фактически достаточно сложное согласование производных от исходных функций λ, μ, ν в бесконечном числе точек на отрезках своего определения.

1.3. Геометрический смысл условия разрешимости и изменение постановки задачи V. Учитывая, что $\mu(x) = u(x, x+1)$, $\nu(x) = u(x, 1-x)$, $\tau(x) = u(x, 0)$, перепишем (1.12) в виде

$$u\left(-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}, \frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right) + u\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}, \frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right) - u(-x, 0) =$$
$$= u\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}, \frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right) + u\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}, \frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right) - u(x, 0). \quad (1.39)$$

Введем обозначения $a = \left(-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}, \frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right)$, $b = \left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}, \frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)$, $c = (-x, 0)$, $\overline{a} = \left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}, \frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right)$, $\overline{b} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}, \frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)$, $\overline{c} = (c, 0)$, в которых соотношение (1.39) принимает вид

$$u(a) + u(b) - u(\overline{c}) = u(\overline{a}) + u(\overline{b}) - u(c).$$

Прибавляя здесь к левой и правой части $u(c) + u(\overline{c})$, перепишем данное соотношение так (см. рис. 4.1)

$$u(a) + u(b) + u(c) = u(\overline{a}) + u(\overline{b}) + u(\overline{c}). \quad (1.40)$$

С аналитической точки зрения (1.40) есть типичное условие смещений, связывающее шесть переменных точек границы области. Задачи с подобными условиями (называемые еще нелокальными) в последние пятьдесят лет изучаются многими авторами. С другой стороны, (1.40) выражает определенное геометрическое свойство решений уравнения (1.1), которое может быть сформулировано как следующая

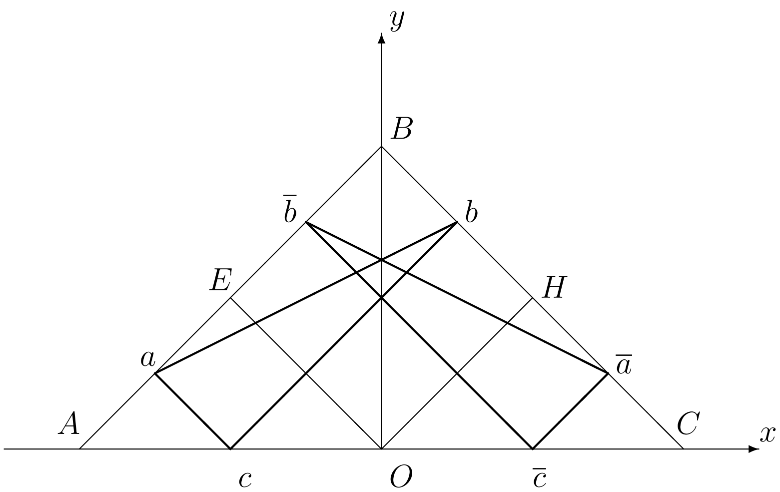

Рис. 4.1

Лемма. *Пусть Ω — вписанный в G треугольник с прямоугольной вершиной, расположенной на AC и с образованными характеристиками уравнения* (1.1) *катетами, а $\overline{\Omega}$ — треугольник, симметричный с Ω относительно оси y. Тогда, если $u(x,y)$ — решение в G уравнения* (1.1), *то суммы значений этого решения в вершинах треугольников Ω и $\overline{\Omega}$ равны друг другу.*

Можно рассматривать данную лемму в качестве аналога хорошо известного свойства решений уравнения колебаний струны $u_{xx}-u_{yy}=0$: суммы значений его решений в противоположных углах характеристического прямоугольника совпадают.

Мы видим, что точки E, H, O, разделяющие AB, BC и AC пополам, порождают на ∂G шесть участков этой границы, каждому из которых принадлежит одна из точек a, b, c, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, причем в случае перемещения одной из этих точек по своему участку от одного его конца до другого остальные пять точек проходят соответствующие свои участки. Формула (1.40) позволяет вычислить значения решения уравнения (1.1) на любом из участков, если на остальных пяти участках это решение задано. Другими словами, оказывается, что задача D не только недоопределена, как мы видели в п. 1.1, но является также и переопределенной. В связи с этим естественно ожидать, что при освобождении в задаче V одного из указанных участков ∂G от граничного условия возникнет ситуация, обеспечивающая существование единственного решения. Одним из шести вариантов возникающих здесь возможностей является

Задача W, получаемая из предыдущей задачи V путем отказа от задания искомой функции на OC. Покажем, что она однозначно разрешима.

Итак, считаем заданными (1.23) и первые два условия (1.3), а третье пусть имеет место только на AO: $u(x,0)=\tau_-(x)$, причем будем считать $\tau_-(x)\in C^2[-1,0]$. Ясно, что тогда значения $u(x,0)=\tau_+(x)$ на OC можно найти из (1.40). Если мы хотим редуцировать эту ситуацию к задаче V, то следует прежде всего обеспечить непрерывное склеивание $\tau_-(x)$ и $\tau_+(x)$ вместе с производными первого и второго порядков. Естественно, мы оставляем предположение о принадлежности $\mu(x)$ и $\nu(x)$ на отрезках своего определения классу C^2. Из формулы (1.12), являющейся другим вариантом записи (1.40), определяем значения $\tau_+(x)$:

$$\tau_+(x)=\mu\left(\frac{x-1}{2}\right)+\nu\left(\frac{x+1}{2}\right)-\mu\left(-\frac{x+1}{2}\right)-\\ -\nu\left(\frac{1-x}{2}\right)+\tau_-(-x),\quad x\in[0,1]. \quad (1.41)$$

Переходя к пределу при $x \to 0$, имеем

$$\tau_+(+0) = \mu\left(-\frac{1}{2}+0\right) - \mu\left(-\frac{1}{2}-0\right) + \nu\left(\frac{1}{2}+0\right) - \\ - \nu\left(\frac{1}{2}-0\right) + \tau_-(-0). \quad (1.42)$$

Из непрерывности $\mu(x)$, $\nu(x)$ в точках $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ соответственно следует $\tau_+(+0) = \tau_-(-0)$, то есть желаемое склеивание имеется. Путем дифференцирования соотношения (1.41) находим

$$\begin{gathered} 2[\tau'_+(+0) + \tau'_-(-0)] = \mu'\left(-\tfrac{1}{2}+0\right) + \\ +\mu'\left(-\tfrac{1}{2}-0\right) + \nu'\left(\tfrac{1}{2}+0\right) + \nu'\left(\tfrac{1}{2}-0\right), \\ 4[\tau''_+(+0) + \tau''_-(-0)] = \mu''\left(-\tfrac{1}{2}+0\right) - \\ -\mu''\left(-\tfrac{1}{2}-0\right) + \nu''\left(\tfrac{1}{2}+0\right) - \nu''\left(\tfrac{1}{2}-0\right). \end{gathered} \quad (1.43)$$

Условия (1.43) обеспечивают требуемое склеивание $\tau_+^{(k)}$ и $\tau_-^{(k)}$ в точке $x = 0$ $(k = 1, 2)$. Из (1.41) усматривается, что (1.43) имеет место, если $\mu(x)$ и $\nu(x)$ являются локально-четными соответственно относительно точек $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$.

В постановках задач V и W участвуют условия (1.3), что предполагает, в частности, выполнение согласований $\tau_-(-1) = \mu(-1)$, $\mu(0) = \nu(0)$. Нам остается только проверить выполнение последнего условия из (1.3). Для этой проверки достаточно положить в (1.41) $x = 1$. С учетом только что указанных согласований получим нужное нам условие $\tau_+(1) = \nu(1)$. Таким образом, задача W оказалась редуцированной к задаче V, причем выполнение соотношения (1.12) учтено в наших рассуждениях. Следовательно, имеет место

Теорема 1.3. *Задача W однозначно разрешима.*

В задачах V и W представляет интерес класс решений, который пришлось выбрать: он не везде одинаков. Искомая функция принадлежит классу (1.5) в шести частях G, получаемых при делении G тремя характеристиками уравнения (1.1), проходящими через точку $(0, \frac{1}{2})$. При пересечении же этих характеристик у вторых производных решения допускаются разрывы первого рода. В последующих задачах мы рассмотрим случаи, когда допускается нарушение гладкости уже у первых производных от искомого решения.

§ 2. Уравнение с младшими членами. Задача для характеристического прямоугольника

Речь идет об уравнении

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xy}+au_x+bu_y+cu)=0, \tag{2.1}$$

относящегося к одному из канонических видов, указанных в [30]. При $a\equiv b\equiv c\equiv 0$ уравнение (2.1) заменой $x+y=\xi$, $x-y=\eta$ переводится в (1.1), только записанное в переменных ξ, η.

Пусть $D=\{0<x<x_1,\, 0<y<y_1\}$, а X, Y — части ∂D, лежащие на осях x, y соответственно. Отрезок характеристики $y=x$, расположенный внутри D, обозначим M.

Задача Z_2. *Найти в D функцию $u\in C(\overline{D})\cap C^{(1,0)}(D\cup\overline{X})\cap C^{(0,1)}(D\cup\overline{Y})$, являющуюся в $D\setminus M$ регулярным решением уравнения* (2.1) *и удовлетворяющую условиям*

$$u\,|_{\overline{Y}}=\varphi_1(y),\quad u\,|_{\overline{X}}=\varphi_2(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\overline{Y}}=\psi_1(y),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\overline{X}}=\psi_2(x), \tag{2.2}$$

$$\varphi_1,\,\psi_1\in C^2([0,y_1]),\quad \varphi_2,\,\psi_2\in C^2([0,x_1]),\quad \varphi_1(0)=\varphi_2(0). \tag{2.3}$$

При решении этой задачи воспользуемся возможностью записать решение уравнения (2.1) в форме

$$u_{xy}+au_x+bu_y+cu=\omega(x-y). \tag{2.4}$$

Из постановки задачи следует, что функция $\omega(\xi)$, рассматриваемая при $\xi\in[-y_1,x_1]$, должна быть на $[-y_1,0]$ и $[0,x_1]$ непрерывно дифференцируема, а в точке $\xi=0$ непрерывно склеиваться. В остальном ее следует считать пока произвольной.

Пусть $u_0(x,y)=u_0(\varphi_1,\varphi_2)$ есть в D решение уравнения (2.4) при $\omega\equiv 0$, удовлетворяющее первым двум условиям (2.2). При условиях

$$a,\,b,\,c,\,a_x,\,b_y\in C(\overline{D}) \tag{2.5}$$

$u_0(x,y)$ записывается через функцию Римана $R(x,y,t,\tau)$ уравнения (2.4), при этом формула [8, с. 65]

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int\limits_0^x\int\limits_0^y R(t,\tau,x,y)\omega(t-\tau)\,dt\,d\tau \tag{2.6}$$

дает решение уравнения (2.4), тоже удовлетворяющее первым двум условиям (2.2). Требуя выполнения последних двух условий из (2.2), получим

$$\begin{aligned} &\int_0^y R(0,\tau,0,y)\omega(-\tau)d\tau = \psi_1(y) - \psi_{01}(y),\ y\in[0,y_1],\\ &\int_0^x R(t,0,x,0)\omega(t)dt = \psi_2(x) - \psi_{02}(x),\ x\in[0,x_1], \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\psi_{01}(y) = \left.\frac{\partial u_0}{\partial y}\right|_{y=0}, \quad \psi_{02}(x) = \left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Функции ψ_{01}, ψ_{02} можно вычислить через исходные данные задачи. Например, для отыскания ψ_{01} зададим сначала некоторое малое $\varepsilon > 0$ и проинтегрируем (2.4) при $\omega \equiv 0$ по y от ε до y, а затем перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате получим для ψ_{01} интегральное уравнение

$$\psi_{01}(y) + \int_0^y a(0,\beta)\psi_{01}(\beta)d\beta \ = \ \psi_1(0) - \int_0^y [b(0,\beta)\varphi_1'(\beta) + c(0,\beta)\varphi_1(\beta)]d\beta.$$

Нетрудно видеть, что решение этого уравнения дается формулой

$$\begin{aligned} \psi_{01}(y) = \psi_1(0)\exp\int_y^0 a(0,\eta)d\eta - \\ - \int_0^y [b(0,\eta)\varphi_1'(\eta) + c(0,\eta)\varphi_1(\eta)]\left(\exp\int_y^\eta a(0,\eta_1)d\eta_1\right)d\eta. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \psi_{02}(x) = \psi_2(0)\exp\int_x^0 b(\xi,0)d\xi - \\ - \int_0^x [a(\xi,0)\varphi_2'(\xi) + c(\xi,0)\varphi_2(\xi)]\left(\exp\int_x^\xi b(\xi_1,0)d\xi_1\right)d\xi. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Уравнения (2.7) решаются в квадратурах. Действительно, дифференцируя их с учетом формул (1.18) из [50, с. 13], получаем

$$\omega(-y) - a(0,y)\int\limits_0^y R(0,\tau,0,y)\omega(-\tau)d\tau = \psi_1'(y) - \psi_{01}'(y),\ y \in [0,y_1], \quad (2.10)$$

$$\omega(x) - b(x,0)\int\limits_0^x R(t,0,x,0)\omega(t)dt = \psi_2'(x) - \psi_{02}'(x),\ x \in [0,x_1]. \quad (2.11)$$

Под интегралами здесь содержатся известные значения функции Римана, записываемые через коэффициенты a и b

$$R(0,\tau,0,y) = \exp\int\limits_y^\tau a(0,\eta)d\eta, \quad R(t,0,x,0) = \exp\int\limits_x^t b(\xi,0)d\xi.$$

Поэтому, например, (2.10) можно переписать в форме

$$\begin{gathered}\theta(y) - a(0,y)\int\limits_0^y \theta(\eta)d\eta = [\psi_1'(y) - \psi_{01}'(y)]\exp\int\limits_0^y a(0,\eta)d\eta,\\ \theta(y) = \omega(-y)\exp\int\limits_0^y a(0,\eta)d\eta.\end{gathered} \quad (2.12)$$

С помощью подстановки

$$v(y) = \int\limits_0^y \theta(\eta)d\eta$$

уравнение (2.12) сводится к линейному дифференциальному уравнению

$$v(y) - a(0,y)v = [\psi_1'(y) - \psi_{01}'(y)]\exp\int\limits_0^y a(0,\eta)d\eta, \quad v(0) = 0.$$

Решая его с учетом вытекающего из первой формулы (2.7) равенства $\psi_1(0) - \psi_{01}(0) = 0$, найдем

$$\omega(-y) = \psi_1'(y) - \psi_{01}'(y) + a(0,y)[\psi_1(y) - \psi_{01}(y)]. \quad (2.13)$$

Аналогично вычисляется

$$\omega(x) = \psi_2'(x) - \psi_{02}'(x) + b(x,0)[\psi_2(x) - \psi_{02}(x)]. \quad (2.14)$$

Включения (2.3) и (2.5) обеспечивают принадлежность ω классу C^1 на отрезках $[-y_1, 0]$ и $[0, x_1]$, а склейка $\omega(+0) = \omega(-0)$ получается, если на основании (2.13) и (2.14) потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\psi_1'(0) - \psi_2'(0) = \psi_{01}'(0) - \psi_{02}'(0). \tag{2.15}$$

Из формул (2.8) и (2.9) вычисляем

$$\begin{aligned} \psi_{01}'(0) &= -a(0,0)\psi_1(0) - b(0,0)\varphi_1'(0) - c(0,0)\varphi_1(0), \\ \psi_{02}'(0) &= -b(0,0)\psi_2(0) - a(0,0)\varphi_2'(0) - c(0,0)\varphi_2(0). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Поэтому (2.15) превращается в

$$\begin{aligned} \psi_1'(0) + a(0,0)\psi_1(0) + b(0,0)\varphi_1'(0) = \\ = \psi_2'(0) + b(0,0)\psi_2(0) + a(0,0)\varphi_2'(0). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Заметим еще, что $\omega(x)$, $\omega(-y)$ определяются единственным образом, ибо уравнения для этих функций с необходимостью следуют из постановки задачи. Если при этом учесть, что $u_0(x, y)$ тоже вычисляется через φ_1, φ_2 однозначно, то в качестве вывода из вышеизложенного может быть сформулирована

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* (2.5), (2.17), *то рассматриваемая задача имеет единственное решение, определяемое по формулам* (2.6), (2.13), (2.14).

Понятно, что решение будет иметь явный вид, когда известна функция Римана R. Ряд таких случаев указан в главе 3 настоящей книги.

§ 3. Трехмерный аналог предыдущей задачи

3.1. Постановка задачи и ее сведение к интегральным уравнениям. Пусть $G = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1, 0 < z < z_1\}$, а X, Y, Z — грани G при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ соответственно. Части плоскостей $z = x$, $z = y$, $y = x$, расположенные внутри G, обозначим M, N, K.

Задача Z_3. *Найти в G функцию $u \in C(\overline{G}) \cap C^{(1,0,0)}(G \cup \overline{X}) \cap C^{(0,1,0)}(G \cup \overline{Y}) \cap C^{(0,0,1)}(G \cup \overline{Z})$, являющуюся в $G \setminus (M \cup N \cup K)$ регулярным решением уравнения*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) Lu = 0, \tag{3.1}$$

$$Lu \equiv u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + e_y + fu_z + gu, \tag{3.2}$$

и удовлетворяющую условиям

$$u\,|_{\overline{X}} = \varphi_1(y, z), \quad u\,|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x, z), \quad u\,|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x, y)\,. \tag{3.3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\overline{X}} = \psi_1(y, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\overline{Y}} = \psi_2(x, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\overline{Z}} = \psi_3(x, y). \tag{3.4}$$

При этом

$$\varphi_1,\, \psi_1 \in C^{(2,2)}(\overline{X}), \quad \varphi_2,\, \psi_2 \in C^{(2,2)}(\overline{Y}), \quad \varphi_3,\, \psi_3 \in C^{(2,2)}(\overline{Z}). \tag{3.5}$$

Попытаемся применить к этой задаче схему рассуждений из предыдущего параграфа. Сначала заметим, что (3.1) можно записать в виде $Lu = v$, где v есть решение уравнения $v_x + v_y + v_z = 0$, и, следовательно,

$$Lu = \omega(z - x, z - y), \tag{3.6}$$

$\omega(t, \tau)$ — произвольная функция. Из уравнения для v и постановки задачи следует, что должно выполняться требование $\omega(z - x, z - y) \in C^{(1,1,1)}[G \setminus (M \cup N \cup K)]$. С помощью вспомогательных переменных $\xi = z - x$, $\eta = z - y$ правая часть (3.6) записывается в виде $\omega(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in P = \{-x_1 \leqslant \xi \leqslant z_1, -y_1 \leqslant \eta \leqslant z_1\}$. Прямоугольникам M, N и K соответствуют значения $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\xi - \eta = 0$. Так как решение уравнения (3.1) отыскивается в $G \setminus (M \cup N \cup K)$, то уравнение $v_x + v_y + v_z = 0$ должно рассматриваться тоже на этом множестве. Таким образом, $\omega(\xi, \eta)$ есть произвольная функция класса $C^{(1,1)}(P_0)$, где P_0 получается из P отбрасыванием точек плоскости (ξ,η), лежащих на осях $\xi=0$, $\eta=0$ и на линии $\xi=\eta$.

Известно [50, с. 28], что решение уравнения (3.6) допускает представление

$$u=u_0(x,y,z)+\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^z R(t,\tau,\sigma,x,y,z)\omega(\sigma-t,\sigma-\tau)d\sigma d\tau dt, \tag{3.7}$$

если в замкнутой области $\overline{G}$

$$\begin{gathered} a\in C^{(1,1,0)},\ b\in C^{(0,1,1)},\ c\in C^{(1,0,1)},\ d\in C^{(1,0,0)},\ e\in C^{(0,1,0)},\\ f\in C^{(0,0,1)},\ g\in C^{(0,0,0)},\ \omega(z-x,z-y)\in C^{(0,0,0)}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Здесь R есть функция Римана, а u_0 можно считать любым решением уравнения $Lu=0$. Однако, из (3.7) видно, что u_0 должна удовлетворять условиям (3.3), вследствие чего она записывается (тоже через R) с помощью формулы (2.19) из [50]. Подставляя (3.7) в соотношения (3.4), получаем

$$\int\limits_0^y\int\limits_0^z R(0,\tau,\sigma,0,y,z)\omega(\sigma,\sigma-\tau)d\sigma d\tau=\psi_1(y,z)-\psi_{01}(y,z),\ (y,z)\in\overline{X}; \tag{3.9}$$

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^z R(t,0,\sigma,x,0,z)\omega(\sigma-t,\sigma)d\sigma dt=\psi_2(x,z)-\psi_{02}(x,z),\ (x,z)\in\overline{Y}; \tag{3.10}$$

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y R(t,\tau,0,x,y,0)\omega(-t,-\tau)d\tau dt=\psi_3(x,y)-\psi_{03}(x,y),\ (x,y)\in\overline{Z}; \tag{3.11}$$

$$\psi_{01}(y,z)=\left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{\overline{X}},\quad \psi_{02}(x,z)=\left.\frac{\partial u_0}{\partial y}\right|_{\overline{Y}},\quad \psi_{03}(x,y)=\left.\frac{\partial u_0}{\partial z}\right|_{\overline{Z}}. \tag{3.12}$$

Вычисляя смешанные производные от (3.9)–(3.11) по аргументам (y,z), (x,z), (x,y) соответственно, найдем

$$\omega(z,z-y)+\int\limits_0^y\frac{\partial R}{\partial y}(0,\tau,z,0,y,z)\omega(z,z-\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^z\frac{\partial R}{\partial z}(0,y,\sigma,0,y,z)\omega(\sigma,\sigma-y)d\sigma+$$

$$+\int_0^y\int_0^z \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}(0,\tau,\sigma,0,y,z)\omega(\sigma,\sigma-\tau)d\sigma d\tau =$$

$$= [\psi_1(y,z)-\psi_{01}(y,z)]_{yz},\ (y,z)\in\overline{X},$$

$$\omega(z-x,z)+\int_0^x \frac{\partial R}{\partial x}(t,0,z,x,0,z)\omega(z-t,z)dt+$$

$$+\int_0^z \frac{\partial R}{\partial z}(x,0,\sigma,x,0,z)\omega(\sigma-x,\sigma)d\sigma+$$

$$+\int_0^x\int_0^z \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}(t,0,\sigma,x,0,z)\omega(\sigma-t,\sigma)d\sigma dt = \tag{3.13}$$

$$= [\psi_2(x,z)-\psi_{02}(x,z)]_{xz},\ (x,z)\in\overline{Y},$$

$$\omega(-x,-y)+\int_0^x \frac{\partial R}{\partial x}(t,y,0,x,y,0)\omega(-t,-y)dt+$$

$$+\int_0^y \frac{\partial R}{\partial y}(x,\tau,0,x,y,0)\omega(-x,-\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^x\int_0^y \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}(t,\tau,0,x,y,0)\omega(-t,-\tau)d\tau dt =$$

$$= [\psi_3(x,y)-\psi_{03}(x,y)]_{xy},\ (x,y)\in\overline{Z}.$$

Возможность проведенного дифференцирования обеспечивается условиями (3.5), (3.8). Нами учтено также $R(x,y,z,x,y,z)\equiv 1$. Очевидно, (3.13) представляют собой интегральные уравнения для функций

$$f_1(y,z)=\omega(z,z-y),\quad f_2(x,z)=\omega(z-x,z),\quad f_3(x,y)=\omega(-x,-y). \tag{3.14}$$

Коэффициенты в уравнениях (3.13) непрерывны (опять в силу (3.5), (3.8)). Поэтому в соответствующих областях $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ существуют единственные решения всех трех уравнений (3.13).

Обратимся к плоскости (ξ,η), в которой у нас был определен прямоугольник P. Нетрудно видеть, что его вершинами (см. рис. 4.2) являются

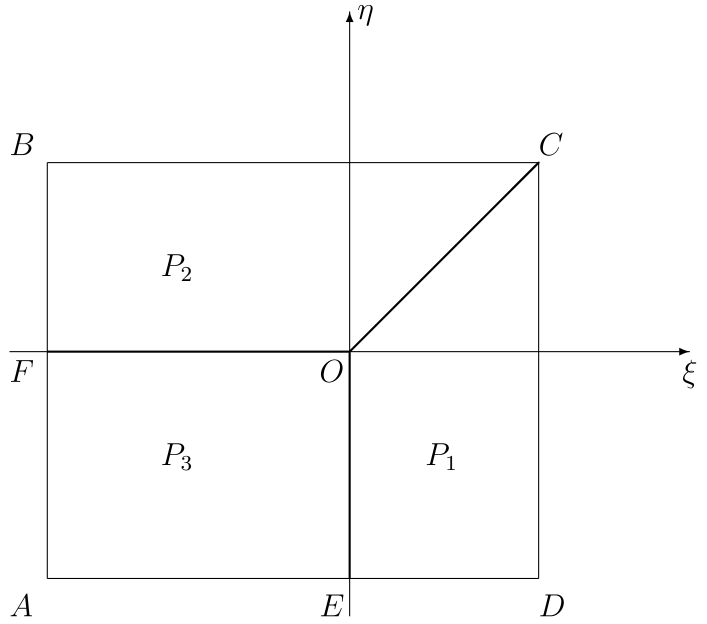

Рис. 4.2

точки $A(-x_1, -y_1)$, $B(-x_1, z_1)$, $C(z_1, z_1)$, $D(z_1, -y_1)$. Для обозначения областей (частей P), в которых из (3.13) отыскиваются функции f_1, f_2, f_3, нам понадобятся еще точки $E(0, -y_1)$, $F(-x_1, 0)$ и $O(0, 0)$. В самом деле, возьмем первое из соотношений (3.14) и положим там $z = \xi$, $z - y = \eta$. Имеем $\omega(\xi, \eta) = f_1(\xi - \eta, \xi)$, причем $\xi \in [0, z_1]$, $z - \eta \in [0, y_1]$ (или $0 \leqslant \xi - \eta \leqslant y_1$). Так как в прямоугольнике P должно быть еще $\eta \geqslant -y_1$, то областью определения f_1 является трапеция P_1 с вершинами $EOCD$. Запишем теперь второе соотношение (3.14) в форме $\omega(\xi, \eta) = f_2(\eta - \xi, \eta)$, $\eta \in [0, z_1]$, $\eta - \xi \in [0, x_1]$. Поскольку для включения $(\xi, \eta) \in P$ нужно еще выполнение неравенства $\eta \geqslant -x_1$, областью определения f_2 будет трапеция P_2 с вершинами $OFBC$. Аналогично убеждаемся, что из последнего уравнения (3.13) функция f_3 в прямоугольнике P_3 с вершинами $AFOE$.

Для принадлежности решения u классу функций, определенному в постановке задачи, нужно, чтобы $\omega(z - x, z - y)$ в областях P_1, P_2, P_3 была непрерывно дифференцируема, то есть должны быть непрерывно дифференцируемы в этих областях f_1, f_2, f_3. Известно [50, с. 11], что степень гладкости у решений уравнений вида (3.13) та же, что у коэффициентов этих уравнений. Следовательно, нам достаточно увеличить порядок гладкости правых частей (3.13) и производных от R, входящих в левые части, на единицу по каждой переменной. Учитывая интегральное уравнение для функции Римана [50, с. 27], видим, что для участвующих в (3.13) значений R должны иметь место соотношения

$$R(0,\tau,\sigma,0,y,z)-\int\limits_{z}^{\sigma}a(0,\tau,\gamma)R(0,\tau,\gamma,0,y,z)d\gamma-$$
$$-\int\limits_{y}^{\tau}c(0,\beta,\sigma)R(0,\beta,\sigma,0,y,z)d\beta+$$
$$+\int\limits_{y}^{\tau}\int\limits_{z}^{\sigma}d(0,\beta,\gamma)R(0,\beta,\gamma,0,y,z)d\gamma d\beta=1,$$

$$R(t,0,\sigma,x,0,z)-\int\limits_{z}^{\sigma}a(t,0,\gamma)R(t,0,\gamma,x,0,z)d\gamma-$$
$$-\int\limits_{x}^{t}b(\alpha,0,\sigma)R(\alpha,0,\sigma,x,0,z)d\alpha+$$
$$+\int\limits_{x}^{t}\int\limits_{z}^{\sigma}e(\alpha,0,\gamma)R(\alpha,0,\gamma,x,0,z)d\gamma d\alpha=1,$$

$$R(t,\tau,0,x,y,0)-\int\limits_{x}^{t}b(\alpha,\tau,0)R(\alpha,\tau,0,x,y,0)d\alpha-$$
$$-\int\limits_{y}^{\tau}c(t,\beta,0)R(t,\beta,0,x,y,0)d\beta+$$
$$+\int\limits_{x}^{t}\int\limits_{y}^{\tau}f(\alpha,\beta,0)R(\alpha,\beta,0,x,y,0)d\beta d\alpha=1.$$

От входящих сюда коэффициентов следует требовать

$$\begin{array}{l} a(0,y,z),\ c(0,y,z),\ d(0,y,z)\in C^{(1,1)}(\overline{X}),\\ a(x,0,z),\ b(x,0,z),\ e(x,0,z)\in C^{(1,1)}(\overline{Y}),\\ b(x,y,0),\ c(x,y,0),\ f(x,y,0)\in C^{(1,1)}(\overline{Z}). \end{array} \tag{3.15}$$

Как мы уже отмечали, формула (3.7) записана в предположении $\omega(z-x, z-y) \in C^{(0,0,0)}(\overline{G})$ (см. последнее включение в (3.8)). Таким образом, нужна еще непрерывность функции ω при переходе через части границ P_1, P_2, P_3, лежащих внутри P (на рис. 4.1 это OF, OE, OC). Поскольку f_1, f_2, f_3 определяются из (3.13) однозначно, требование только что указанной непрерывности ω следует рассматривать как условие разрешимости рассматриваемой задачи (конечно, вместе с уже введенными выше требованиями из (3.8), (3.15)). В соответствии с OF, OE, OC это условие распадается на три соотношения. Требуется определить их в исходных данных задачи.

3.2. Вывод условий разрешимости. Итак,

$$\omega(\xi,\eta) = \begin{cases} f_1(\xi-\eta,\xi),\ (\xi,\eta) \in P_1; \\ f_2(\eta-\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in P_2; \\ f_3(-\xi,-\eta),\ (\xi,\eta) \in P_3. \end{cases}$$

Поэтому на OE, OF и OC имеем

$$\begin{gathered} \omega(+0,\eta) = f_1(-\eta,0), \quad \omega(-0,\eta) = f_3(0,-\eta), \\ \omega(\xi,+0) = f_2(-\xi,0), \quad \omega(\xi,-0) = f_3(-\xi,0), \\ \omega(\xi,\xi+0) = f_2(0,\xi), \quad \omega(\xi,\xi-0) = f_1(0,\xi). \end{gathered}$$

Следовательно, интересующая нас непрерывность $\omega(\xi,\eta)$ обеспечивается тождествами

$$\begin{gathered} f_1(-\eta,0) \equiv f_3(0,-\eta), \quad \eta \in [0,-y_1]; \\ f_2(-\xi,0) \equiv f_3(-\xi,0), \quad \xi \in [0,-x_1]; \\ f_1(0,\xi) \equiv f_2(0,\xi), \quad \xi \in [0,z_1]. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Возьмем теперь уравнение (3.9), продифференцируем его по y, а затем положим $y=0$. С учетом первого обозначения (3.14) получим

$$\int_0^z R(0,0,\sigma,0,0,z) f_1(0,\sigma)d\sigma = [\psi_1(0,z) - \psi_{01}(0,z)]_y, \quad z \in [0,z_1]. \tag{3.17}$$

Аналогично, дифференцируя по x и полагая $x=0$, из (3.10) находим

$$\int_0^z R(0,0,\sigma,0,0,z) f_2(0,\sigma)d\sigma = [\psi_2(0,z) - \psi_{02}(0,z)]_x, \quad z \in [0,z_1]. \tag{3.18}$$

Вычитая (3.18) из (3.17), получаем

$$\int\limits_0^z R(0,0,\sigma,0,0,z)[f_1(0,\sigma)-f_2(0,\sigma)]d\sigma =$$
$$= [\psi_1(0,z)-\psi_{01}(0,z)]_y - [\psi_2(0,z)-\psi_{02}(0,z)]_x. \quad (3.19)$$

Пусть теперь

$$[\psi_1(0,z)-\psi_{01}(0,z)]_y \equiv [\psi_2(0,z)-\psi_{02}(0,z)]_x. \quad (3.20)$$

Тогда, вычисляя от (3.19) производную по z, приходим к соотношению

$$f_1(0,z)-f_2(0,z)+\int\limits_0^z \frac{\partial R}{\partial z}(0,0,\sigma,0,0,z)[f_1(0,\sigma)-f_2(0,\sigma)]d\sigma = 0.$$

Это есть однородное интегральное уравнение, единственным решением которого [50, с. 9–12] является $f_1(0,z)-f_2(0,z)\equiv 0$ (третье тождество (3.16)). Аналогичным образом убеждаемся, что условия

$$\begin{gathered}[\psi_1(y,0)-\psi_{01}(y,0)]_z \equiv [\psi_3(0,y)-\psi_{03}(0,y)]_x,\\ [\psi_2(x,0)-\psi_{02}(y,0)]_z \equiv [\psi_3(x,0)-\psi_{03}(x,0)]_y\end{gathered} \quad (3.21)$$

обеспечивают выполнение первого и второго тождеств (3.16).

Следствиями (3.20), (3.21), очевидно, будут равенства

$$\begin{gathered}[\psi_1(0,z)-\psi_{01}(0,z)]_{yz}+a(0,0,z)[\psi_1(0,z)-\psi_{01}(0,z)]_y \equiv\\ \equiv [\psi_2(0,z)-\psi_{02}(0,z)]_{xz}+a(0,0,z)[\psi_2(0,z)-\psi_{02}(0,z)]_x,\ z\in[0,z_1];\\ [\psi_1(y,0)-\psi_{01}(y,0)]_{yz}+c(0,y,0)[\psi_1(y,0)-\psi_{01}(y,0)]_z \equiv\\ \equiv [\psi_3(0,y)-\psi_{03}(0,y)]_{xy}+c(0,y,0)[\psi_3(0,y)-\psi_{03}(0,y)]_x,\ y\in[0,y_1];\\ [\psi_2(x,0)-\psi_{02}(x,0)]_{xz}+b(x,0,0)[\psi_2(x,0)-\psi_{02}(x,0)]_z \equiv\\ \equiv [\psi_3(x,0)-\psi_{03}(x,0)]_{xy}+b(x,0,0)[\psi_3(x,0)-\psi_{03}(x,0)]_y,\ x\in[0,x_1].\end{gathered} \quad (3.22)$$

Покажем, что равенства (3.22) эквивалентны (3.20), (3.21). Первое равенство (3.22) с учетом (3.7) дает задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}w_z + a(0,0,z)w = 0, \quad w|_{z=0}=0,\\ w=[\psi_1(0,z)-\psi_{01}(0,z)]_y-[\psi_2(0,z)-\psi_{02}(0,z)]_x,\end{gathered}$$

решение которой $w\equiv 0$ существует и единственно. Из тождества $w\equiv 0$ следует (3.20). Аналогично доказывается эквивалентность оставшихся двух равенств из (3.22) и условий (3.21).

Конструкции из функций ψ_{0k}, входящие в (3.22), можно выписать в явном виде, воспользовавшись связями граничных значений и их производных [50, с. 108–112] (см. также [48]).

В самом деле, формулы (4.23), (4.29) из [50] при $y = 0$ можно записать так:

$$\begin{gathered}\psi_{01yz}(0,z) + a(0,0,z)\psi_{01y}(0,z) = -c(0,0,z)\psi_{01z}(0,z) - \\ -d(0,0,z)\psi_{01}(0,z) - b(0,0,z)\varphi_{1yz}(0,z) - \\ -e(0,0,z)\varphi_{1y}(0,z) - f(0,0,z)\varphi_{1z}(0,z) - g(0,0,z)\varphi_{1}(0,z), \\ \psi_{02xz}(0,z) + a(0,0,z)\psi_{02x}(0,z) = -b(0,0,z)\psi_{02z}(0,z) - \\ -e(0,0,z)\psi_{02}(0,z) - c(0,0,z)\varphi_{2xz}(0,z) - \\ -d(0,0,z)\varphi_{2x}(0,z) - f(0,0,z)\varphi_{2z}(0,z) - g(0,0,z)\varphi_{2}(0,z).\end{gathered} \tag{3.23}$$

Из (3.9) следует, что $\psi_{01}(0,z) \equiv \psi_1(0,z)$, $\psi_{02}(0,z) \equiv \psi_2(0,z)$, а из непрерывности $u(x,y,z)$ в $\overline{G}$ получается $\varphi_1(0,z) \equiv \varphi_2(0,z)$, при этом в силу (3.5) данные тождества можно дифференцировать. Поэтому подстановка конструкций из (3.23) в первое тождество (3.22) приводит к формуле

$$\begin{gathered}\psi_{1yz}(0,z) + a(0,0,z)\psi_{1y}(0,z) + c(0,0,z)\psi_{1z}(0,z) + \\ + d(0,0,z)\psi_{1}(0,z) + b(0,0,z)\varphi_{1yz}(0,z) + e(0,0,z)\varphi_{1y}(0,z) \equiv \\ \equiv \psi_{2xz}(0,z) + a(0,0,z)\psi_{2x}(0,z) + b(0,0,z)\psi_{2z}(0,z) + \\ + e(0,0,z)\psi_{2}(0,z) + c(0,0,z)\varphi_{2xz}(0,z) + d(0,0,z)\varphi_{2x}(0,z),\ z \in [0,z_1].\end{gathered} \tag{3.24}$$

Это и есть одно из условий разрешимости задачи 1, записанное в исходных данных. Аналогично, с дополнительным привлечением формулы формулы (4.33) из [50], приходим к тождествам

$$\begin{gathered}\psi_{2xz}(x,0) + b(x,0,0)\psi_{2z}(x,0) + a(x,0,0)\psi_{2x}(x,0) + \\ + e(x,0,0)\psi_{2}(x,0) + c(x,0,0)\varphi_{2xz}(x,0) + f(x,0,0)\varphi_{2z}(x,0) \equiv \\ \equiv \psi_{3xy}(x,0) + b(x,0,0)\psi_{3y}(x,0) + c(x,0,0)\psi_{3x}(x,0) + \\ + f(x,0,0)\psi_{3}(x,0) + a(x,0,0)\varphi_{3xy}(x,0) + e(x,0,0)\varphi_{3y}(x,0),\ x \in [0,x_1];\end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered}\psi_{3xy}(0,y) + c(0,y,0)\psi_{3x}(0,y) + b(0,y,0)\psi_{3y}(0,y) + \\ + f(0,y,0)\psi_{3}(0,y) + a(0,y,0)\varphi_{3xy}(0,y) + d(0,y,0)\varphi_{3x}(0,y) \equiv \\ \equiv \psi_{1yz}(y,0) + a(0,y,0)\psi_{1y}(y,0) + c(0,y,0)\psi_{1z}(y,0) + \\ + d(0,y,0)\psi_{1}(y,0) + b(0,y,0)\varphi_{1yz}(y,0) + f(0,y,0)\varphi_{1z}(y,0),\ y \in [0,y_1].\end{gathered} \tag{3.26}$$

Поскольку уравнения для определения $\omega(\xi,\eta)$ имеют единственные решения, а $u_0(x,y,z)$ однозначно вычисляется через φ_1, φ_2, φ_3, то из вышеизложенного следует

Теорема 3.1. *При условиях гладкости* (3.8), (3.15) *и выполнении тождеств* (3.24)–(3.26) *задача* Z_3 *однозначно разрешима.*

§ 4. Четырехмерный вариант

4.1. Формулировка задачи и ее интегральные уравнения. Аналогом уравнения (3.1) в области $\Omega = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1, 0 < z < z_1, 0 < t < t_1\}$ является уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\right) Mu = 0, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} Mu \equiv u_{xyzt} + au_{xyz} + bu_{xyt} + cu_{xzt} + du_{yzt} + \\ + eu_{xy} + fu_{xz} + gu_{xt} + hu_{yz} + ku_{yt} + su_{zt} + \\ + mu_x + nu_y + pu_z + qu_t + ru, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered} a \in C^{(1,1,1,0)},\ b \in C^{(1,1,0,1)},\ c \in C^{(1,0,1,1)},\ d \in C^{(0,1,1,1)},\ e \in C^{(1,1,0,0)}, \\ f \in C^{(1,0,1,0)},\ g \in C^{(1,0,0,1)},\ k \in C^{(0,1,0,1)},\ s \in C^{(0,0,1,1)},\ m \in C^{(1,0,0,0)}, \\ n \in C^{(0,1,0,0)},\ p \in C^{(0,0,1,0)},\ q \in C^{(0,0,0,1)},\ r \in C^{(0,0,0,0)}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Обозначим X, Y, Z, T — грани Ω при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ соответственно. Пусть $N_1, \ldots, N_6$ — части Ω, для которых $t = x$, $t = y$, $t = z$, $x = y$, $x = z$, $y = z$ (тоже соответственно).

Задача Z_4. *Найти в* Ω *функцию* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{(1,0,0,0)}(\Omega \cup \overline{X}) \cap C^{(0,1,0,0)}(\Omega \cup \overline{Y}) \cap C^{(0,0,1,0)}(\Omega \cup \overline{Z}) \cap C^{(0,0,0,1)}(\Omega \cup \overline{T})$, *являющуюся в* $\Omega \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{6} N_i)$ *регулярным решением уравнения* (4.1)–(4.2) *и удовлетворяющую условиям*

$$\begin{aligned} & u\,|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z,t), \quad u\,|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z,t), \\ & u\,|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x,y,t), \quad u\,|_{\overline{T}} = \varphi_4(y,z,t), \\ & \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\overline{X}} = \psi_1(y,z,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\overline{Y}} = \psi_2(x,z,t), \\ & \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\overline{Z}} = \psi_3(x,y,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\overline{T}} = \psi_4(x,y,z), \end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1,\ \psi_1 \in C^{(2,2,2)}(\overline{X}), \quad \varphi_2,\ \psi_2 \in C^{(2,2,2)}(\overline{Y}), \\ \varphi_3,\ \psi_3 \in C^{(2,2,2)}(\overline{Z}), \quad \varphi_4,\ \psi_4 \in C^{(2,2,2)}(\overline{T}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Исследование задачи 3 может быть проведено по схеме пункта 3.1.

Роль уравнения (3.6) играет

$$Mu = \omega(t-x, t-y, t-z). \tag{4.6}$$

где $\omega(t-x,t-y,t-z) \in C^{(1,1,1,1)}[\Omega \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{6} N_i)]$. Полагая $t-x=\xi$, $t-y=\eta$, $t-z=\zeta$, устанавливаем, что $\omega(\xi,\eta,\zeta)$ определена в параллелепипеде: $-x_1 \leqslant \xi \leqslant t_1$, $-y_1 \leqslant \eta \leqslant t_1$, $-z_1 \leqslant \zeta \leqslant t_1$. Вместо (3.7) следует взять формулу [50, с. 49–51]

$$\begin{gathered} u = u_0(x,y,z)+ \\ + \int\limits_0^x \int\limits_0^y \int\limits_0^z \int\limits_0^t R(\xi,\eta,\zeta,\theta,x,y,z,t)\omega(\theta-\xi,\theta-\eta,\theta-\zeta)d\theta d\zeta d\eta d\xi, \end{gathered} \tag{4.7}$$

имеющую место при условиях (4.3) и

$$\omega(t-x,t-y,t-z) \in C^{(0,0,0,0)}(\overline{\Omega}). \tag{4.8}$$

В силу (4.7) u_0 удовлетворяет условиям (4.4) и записывается по формуле (3.9) из [50]. Понятно, что R в (4.7) и в формуле для u_0 есть функция Римана уравнения $Mu = 0$. Подставляя (4.7) в (4.4) приходим к аналогичным (3.9)–(3.11) уравнениям

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^y \int\limits_0^z \int\limits_0^t R(0,\eta,\zeta,\theta,0,y,z,t)\omega(\theta,\theta-\eta,\theta-\zeta)d\theta d\zeta d\eta = \\
= \psi_1(y,z,t) - \psi_{01}(y,z,t), \\
\int\limits_0^x \int\limits_0^z \int\limits_0^t R(\xi,0,\zeta,\theta,x,0,z,t)\omega(\theta-\xi,\theta,\theta-\zeta)d\theta d\zeta d\xi = \\
= \psi_2(x,z,t) - \psi_{02}(x,z,t), \\
\int\limits_0^x \int\limits_0^y \int\limits_0^t R(\xi,\eta,0,\theta,x,y,0,t)\omega(\theta-\xi,\theta-\eta,\theta)d\theta d\eta d\xi = \\
= \psi_3(x,y,t) - \psi_{03}(x,y,t), \\
\int\limits_0^x \int\limits_0^y \int\limits_0^z R(\xi,\eta,\zeta,0,x,y,z,0)\omega(-\xi,-\eta,-\zeta)d\zeta d\eta d\xi = \\
= \psi_4(x,y,z) - \psi_{04}(x,y,z),
\end{gathered} \tag{4.9}$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{10}(y,z,t) &= \left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{\overline{X}}, \quad \psi_{20}(x,z,t) = \left.\frac{\partial u_0}{\partial y}\right|_{\overline{Y}},\\
\psi_{30}(x,y,t) &= \left.\frac{\partial u_0}{\partial z}\right|_{\overline{Z}}, \quad \psi_{40}(x,y,z) = \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{\overline{T}}.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Дифференцируя (4.9) по верхним пределам интегралов, получаем

$$
\omega(t,t-y,t-z) + \int\limits_0^t \frac{\partial R}{\partial t}(0,y,z,\theta,0,y,z,t)\omega(\theta,\theta-y,\theta-z)d\theta +
$$

$$
+ \int\limits_0^z \frac{\partial R}{\partial z}(0,y,\zeta,t,0,y,z,t)\omega(t,t-y,t-\zeta)d\zeta +
$$

$$
+ \int\limits_0^y \frac{\partial R}{\partial y}(0,\eta,z,t,0,y,z,t)\omega(t,t-\eta,t-z)d\eta +
$$

$$
+ \int\limits_0^z \int\limits_0^t \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial t}(0,y,\zeta,\theta,0,y,z,t)\omega(\theta,\theta-y,\theta-\zeta)d\theta d\zeta +
$$

$$
+ \int\limits_0^y \int\limits_0^t \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial t}(0,\eta,z,\theta,0,y,z,t)\omega(\theta,\theta-\eta,\theta-z)d\theta d\eta +
$$

$$
+ \int\limits_0^y \int\limits_0^z \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}(0,\eta,\zeta,t,0,y,z,t)\omega(t,t-\eta,t-\zeta)d\zeta d\eta +
$$

$$
+ \int\limits_0^y \int\limits_0^z \int\limits_0^t \frac{\partial^3 R}{\partial y\partial z\partial t}(0,\eta,\zeta,\theta,0,y,z,t)\omega(\theta,\theta-\eta,\theta-\zeta)d\theta d\zeta d\eta =
$$

$$
= [\psi_1(y,z,t) - \psi_{01}(y,z,t)]_{yzt},
$$

$$
\omega(t-x,t,t-z) + \int\limits_0^t \frac{\partial R}{\partial t}(x,0,z,\theta,x,0,z,t)\omega(\theta-x,\theta,\theta-z)d\theta +
$$

$$
+ \int\limits_0^z \frac{\partial R}{\partial z}(x,0,\zeta,t,x,0,z,t)\omega(t-x,t,t-\zeta)d\zeta +
$$

$$+\int_0^x \frac{\partial R}{\partial x}(\xi,0,z,t,x,0,z,t)\omega(t-\xi,t,t-z)d\xi+$$

$$+\int_0^z\int_0^t \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial t}(x,0,\zeta,\theta,x,0,z,t)\omega(\theta-x,\theta,\theta-\zeta)d\theta d\zeta+$$

$$+\int_0^x\int_0^t \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial t}(\xi,0,z,\theta,x,0,z,t)\omega(\theta-\xi,\theta,\theta-z)d\theta d\xi+$$

$$+\int_0^x\int_0^z \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}(\xi,0,\theta,t,x,0,z,t)\omega(t-\xi,t,t-\zeta)d\zeta d\xi+$$

$$+\int_0^x\int_0^z\int_0^t \frac{\partial^3 R}{\partial x\partial z\partial t}(\xi,0,\zeta,\theta,x,0,z,t)\omega(\theta-\xi,\theta,\theta-\zeta)d\theta d\zeta d\xi=$$

$$=[\psi_2(x,z,t)-\psi_{02}(x,z,t)]_{xzt},$$

$$\omega(t-x,t-y,t)+\int_0^t \frac{\partial R}{\partial t}(x,y,0,\theta,x,y,0,t)\omega(\theta-x,\theta-y,\theta)d\theta+ \tag{4.11}$$

$$+\int_0^y \frac{\partial R}{\partial y}(x,\eta,0,t,x,y,0,t)\omega(t-x,t-\eta,t)d\eta+$$

$$+\int_0^x \frac{\partial R}{\partial x}(\xi,y,0,t,x,y,0,t)\omega(t-\xi,t-y,t)d\xi+$$

$$+\int_0^y\int_0^t \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial t}(x,\eta,0,\theta,x,y,0,t)\omega(\theta-x,\theta-\eta,\theta)d\theta d\eta+$$

$$+\int_0^x\int_0^t \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial t}(\xi,y,0,\theta,x,y,0,t)\omega(\theta-\xi,\theta-y,\theta)d\theta d\xi+$$

$$+\int_0^x\int_0^y \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}(\xi,\eta,0,t,x,y,0,t)\omega(t-\xi,t-\eta,t)d\eta d\xi+$$

$$+\int_0^x\int_0^y\int_0^t \frac{\partial^3 R}{\partial x\partial y\partial t}(\xi,\eta,0,\theta,x,y,0,t)\omega(\theta-\xi,\theta-\eta,\theta)d\theta d\eta d\xi =$$

$$=[\psi_3(x,y,t)-\psi_{03}(x,y,t)]_{xyt},$$

$$\omega(-x,-y,-z)+\int_0^z \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,\zeta,0,x,y,z,0)\omega(-x,-y,-\zeta)d\zeta +$$

$$+\int_0^y \frac{\partial R}{\partial y}(x,\eta,z,0,x,y,z,0)\omega(-x,-\eta,-z)d\eta +$$

$$+\int_0^x \frac{\partial R}{\partial x}(\xi,y,z,0,x,y,z,0)\omega(-\xi,-y,-z)d\xi +$$

$$+\int_0^y\int_0^z \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}(x,\eta,\zeta,0,x,y,z,0)\omega(-x,-\eta,-\zeta)d\zeta d\eta +$$

$$+\int_0^x\int_0^z \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}(\xi,y,\zeta,0,x,y,z,0)\omega(-\xi,-y,-\zeta)d\zeta d\xi +$$

$$+\int_0^x\int_0^y \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}(\xi,\eta,z,0,x,y,z,0)\omega(-\xi,-\eta,-z)d\eta d\xi +$$

$$+\int_0^x\int_0^y\int_0^z \frac{\partial^3 R}{\partial x\partial y\partial z}(\xi,\eta,\zeta,0,x,y,z,0)\omega(-\xi,-\eta,-\zeta)d\zeta d\eta d\xi =$$

$$=[\psi_4(x,y,z)-\psi_{04}(x,y,z)]_{xyz}.$$

Обозначим неизвестные функции (4.11) через f_k:

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y,z)=\omega(-x,-y,-z), & f_2(x,y,t)=\omega(t-x,t-y,t), \\ f_3(x,z,t)=\omega(t-x,t,t-z), & f_4(y,z,t)=\omega(t,t-y,t-z). \end{array} \tag{4.12}$$

Заметим, что здесь порядок $f_1, \ldots, f_4$ является обратным по отношению к порядку следования уравнений (4.11).

Уравнения (4.11) однозначно разрешимы [50, § 2] в областях Q_k определения функций f_k ($k = 1, 2, 3, 4$), при этом Q_k, играющие роль P_k из задачи Z_3, возникают из области Q указанным на рис. 4.3 способом.

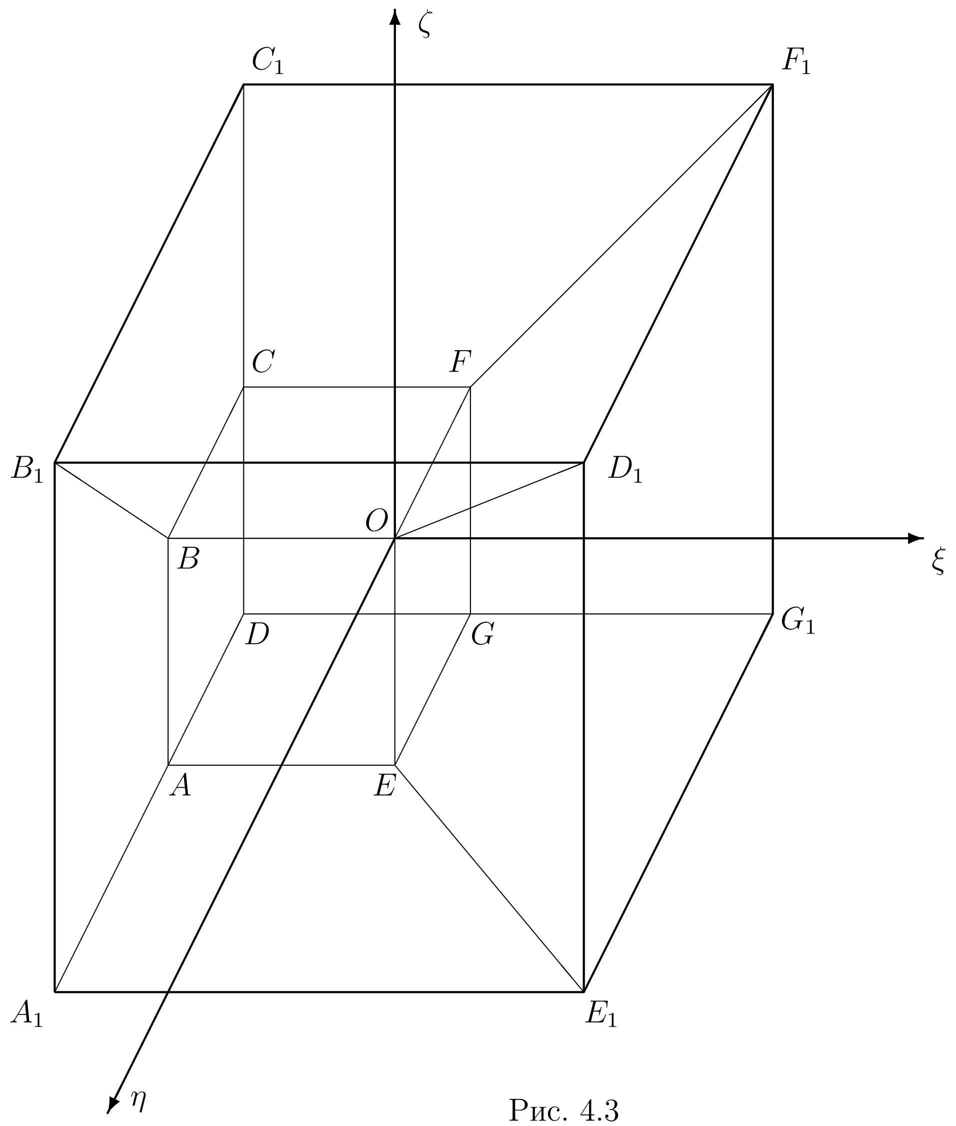

Рис. 4.3

А именно, введем точки (в скобках указаны их координаты): $O(0,0,0)$, $A(-x_1,0,-z_1)$, $B(-x_1,0,0)$, $C(-x_1,-y_1,0)$, $D(-x_1,-y_1,-z_1)$, $E(0,0,-z_1)$, $F(0,-y_1,0)$, $G(0,-y_1,-z_1)$, $A_1(-x_1,t_1,-z_1)$, $B_1(-x_1,t_1,t_1)$, $C_1(-x_1,-y_1,t_1)$, $D_1(t_1,t_1,t_1)$, $E_1(t_1,t_1,-z_1)$, $F_1(t_1,-y_1,t_1)$, $G_1(t_1,-y_1,-z_1)$. Тогда Q есть параллелепипед $A_1B_1C_1DE_1D_1F_1G_1$. Через Q_1 обозначим параллелепипед $ABCDEOFG$, в котором из последнего уравнения (4.11) отыскивается функция $f_1(x,y,z)$. Область $Q\setminus Q_1$ разделяется на три усеченных пирамиды $Q_2 = OBCFD_1B_1C_1F_1$, $Q_3 = ABOEA_1B_1D_1E_1$, $Q_4 = OFGED_1F_1G_1E_1$, в которых из соответствующих уравнений (4.11) определяются функции $f_2(x,y,t)$, $f_3(x,z,t)$, $f_4(y,z,t)$.

Из постановки задачи и формулы (4.6) следует, что f_k должны быть в областях своего определения непрерывно дифференцируемы. Для этого, как и в § 3, нам следует увеличить порядок гладкости правых частей в (4.11) и производных от R, входящих в эти уравнения. Из интегрального уравнения, определяющего функцию Римана [50, с. 47–48], имеем для значения

$R(0,\eta,\zeta,\theta,0,y,z,t)$, входящего в первое уравнение (4.11), соотношение

$$R(0,\eta,\zeta,\theta,0,y,z,t)-\int\limits_t^\theta a(0,\eta,\zeta,\tau)R(0,\eta,\zeta,\tau,0,y,z,t)d\tau-$$

$$-\int\limits_z^\zeta b(0,\eta,\gamma,\theta)R(0,\eta,\gamma,\theta,0,y,z,t)d\gamma-$$

$$-\int\limits_y^\eta c(0,\beta,\zeta,\theta)R(0,\beta,\zeta,\theta,0,y,z,t)d\beta-$$

$$-\int\limits_z^\zeta\int\limits_t^\theta e(0,\eta,\gamma,\tau)R(0,\eta,\gamma,\tau,0,y,z,t)d\tau d\gamma+$$

$$+\int\limits_y^\eta\int\limits_t^\theta f(0,\beta,\zeta,\tau)R(0,\beta,\zeta,\tau,0,y,z,t)d\tau d\beta+$$

$$+\int\limits_y^\eta\int\limits_z^\zeta g(0,\beta,\gamma,\theta)R(0,\beta,\gamma,\theta,0,y,z,t)d\gamma d\beta-$$

$$-\int\limits_y^\eta\int\limits_z^\zeta\int\limits_t^\theta m(0,\beta,\gamma,\tau)R(0,\beta,\gamma,\tau,0,y,z,t)d\tau d\gamma d\beta=1. \qquad (4.13)$$

Аналогично записываются уравнения для $R(\xi,0,\zeta,\theta,x,0,z,t)$, $R(\xi,\eta,0,\theta,x,y,0,t)$, $R(\xi,\eta,\zeta,0,x,y,z,0)$, входящих соответственно во второе, третье и четвертое уравнения (4.11):

$$R(\xi,0,\zeta,\theta,x,0,z,t)-\int\limits_t^\theta a(\xi,0,\zeta,\tau)R(\xi,0,\zeta,\tau,x,0,z,t)d\tau-$$

$$-\int\limits_z^\zeta b(\xi,0,\gamma,\theta)R(\xi,0,\gamma,\theta,x,0,z,t)d\gamma-$$

$$-\int\limits_x^\xi d(\alpha,0,\zeta,\theta)R(\alpha,0,\zeta,\theta,x,0,z,t)d\alpha-$$

$$-\int_z^\zeta\int_t^\theta e(\xi,0,\gamma,\tau)R(\xi,0,\gamma,\tau,x,0,z,t)d\tau d\gamma+$$

$$+\int_x^\xi\int_t^\theta h(\alpha,0,\zeta,\tau)R(\alpha,0,\zeta,\tau,x,0,z,t)d\tau d\alpha+$$

$$+\int_x^\xi\int_z^\zeta k(\alpha,0,\gamma,\theta)R(\alpha,0,\gamma,\theta,x,0,z,t)d\gamma d\alpha-$$

$$-\int_x^\xi\int_z^\zeta\int_t^\theta n(\alpha,0,\gamma,\tau)R(\alpha,0,\gamma,\tau,x,0,z,t)d\tau d\gamma d\alpha=1, \tag{4.14}$$

$$R(\xi,\eta,0,\theta,x,y,0,t)-\int_t^\theta a(\xi,\eta,0,\tau)R(\xi,\eta,0,\tau,x,y,0,t)d\tau-$$

$$-\int_y^\eta c(\xi,\beta,0,\theta)R(\xi,\beta,0,\theta,x,y,0,t)d\beta-$$

$$-\int_x^\xi d(\alpha,\eta,0,\theta)R(\alpha,\eta,0,\theta,x,y,0,t)d\alpha-$$

$$-\int_y^\eta\int_t^\theta f(\xi,\beta,0,\tau)R(\xi,\beta,0,\tau,x,y,0,t)d\tau d\beta+$$

$$+\int_x^\xi\int_t^\theta h(\alpha,\eta,0,\tau)R(\alpha,\eta,0,\tau,x,y,0,t)d\tau d\alpha+$$

$$+\int_x^\xi\int_y^\eta s(\alpha,\beta,\zeta,\theta)R(\alpha,\beta,\zeta,\theta,x,y,0,t)d\beta d\alpha-$$

$$-\int_x^\xi\int_y^\eta\int_t^\theta p(\alpha,\beta,0,\tau)R(\alpha,\beta,0,\tau,x,y,0,t)d\tau d\beta d\alpha=1, \tag{4.15}$$

$$R(\xi,\eta,\zeta,0,x,y,z,0)-\int\limits_{z}^{\zeta} b(\xi,\eta,\gamma,0)R(\xi,\eta,\gamma,0,x,y,z,0)d\gamma-$$

$$-\int\limits_{y}^{\eta} c(\xi,\beta,\zeta,0)R(\xi,\beta,\zeta,0,x,y,z,0)d\beta-$$

$$-\int\limits_{x}^{\xi} d(\alpha,\eta,\zeta,0)R(\alpha,\eta,\zeta,0,x,y,z,0)d\alpha-$$

$$-\int\limits_{y}^{\eta}\int\limits_{z}^{\zeta} g(\xi,\beta,\gamma,0)R(\xi,\beta,\gamma,0,x,y,z,0)d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{x}^{\xi}\int\limits_{z}^{\zeta} k(\alpha,\eta,\gamma,0)R(\alpha,\eta,\gamma,0,x,y,z,0)d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x}^{\xi}\int\limits_{y}^{\eta} s(\alpha,\beta,\zeta,0)R(\alpha,\beta,\zeta,0,x,y,z,0)d\beta d\alpha-$$

$$-\int\limits_{x}^{\xi}\int\limits_{y}^{\eta}\int\limits_{z}^{\zeta} q(\alpha,\beta,\gamma,0)R(\alpha,\beta,\gamma,0,x,y,z,0)d\gamma d\beta d\alpha=1. \tag{4.16}$$

Из (4.13)–(4.16) понятно, что роль (3.15) здесь играют формулы

$$\begin{array}{c} a,\, b,\, c,\, e,\, f,\, g,\, m \in C^{(1,1,1)}(\overline{X}),\\ a,\, b,\, d,\, e,\, h,\, k,\, n \in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}),\\ a,\, c,\, d,\, f,\, h,\, s,\, p \in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}),\\ b,\, c,\, d,\, g,\, k,\, s,\, q \in C^{(1,1,1)}(\overline{T}). \end{array} \tag{4.17}$$

4.2. Условия разрешимости. Они, подобно условиям из п. 3.2, получаются из требования непрерывности функции $\omega(t-x,t-y,t-z)$ при переходе через части границ областей Q_k $(k=\overline{1,4})$, лежащих внутри Q. Это есть границы (см. рис. 4.3) между: Q_1 и Q_2 $(\zeta=0)$, Q_1 и Q_4 $(\xi=0)$, Q_1 и Q_3 $(\eta=0)$, Q_2 и Q_4 $(\xi=\eta)$, Q_2 и Q_3 $(\eta=\zeta)$, Q_3 и Q_4 $(\xi=\eta)$. В том же порядке запишем требующиеся нам условия непрерывности на указанных переходах

$$\begin{aligned} f_1(x,y,0) &\equiv f_2(x,y,0), \quad f_1(0,y,z) \equiv f_4(y,z,0),\\ f_1(x,0,z) &\equiv f_3(x,z,0), \quad f_2(0,y,t) \equiv f_4(y,0,t),\\ f_2(x,0,t) &\equiv f_3(x,0,t), \quad f_3(0,z,t) \equiv f_4(0,z,t). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Здесь мы учитываем, что f_k есть значения функции $\omega(t-x, t-y, t-z)$, получаемые для $k = 1, 2, 3, 4$ соответственно при $t = 0$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$. Вследствие этого, например, при $\zeta = 0$ должны совпадать значения $f_1(x,y,z)|_{z=0}$ и $f_2(x,y,t)|_{t=0}$.

Функции, входящие в (4.18), вычислим из (4.9). Из четвертого соотношения (4.9) путем его дифференцирования по z и фиксирования затем $z = 0$ находим

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y R(\xi,\eta,0,0,x,y,0,0) f_1(\xi,\eta,0)d\eta d\xi = [\psi_4(x,y,z) - \psi_{04}(x,y,z)]_z|_{z=0}, \tag{4.19}$$

а из третьего уравнения, дифференцируя по t и полагая $t = 0$, имеем

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y R(\xi,\eta,0,0,x,y,0,0) f_2(\xi,\eta,0)d\eta d\xi = [\psi_3(x,y,t) - \psi_{03}(x,y,t)]_t|_{t=0}. \tag{4.20}$$

Вычитая (4.20) из (4.19), получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^x\int\limits_0^y R(\xi,\eta,0,0,x,y,0,0)[f_1(\xi,\eta,0) - f_2(\xi,\eta,0)]d\eta d\xi =\\ &\qquad = [\psi_4(x,y,z) - \psi_{04}(x,y,z)]_z|_{z=0} - [\psi_3(x,y,t) - \psi_{03}(x,y,t)]_t|_{t=0}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Пусть теперь

$$\frac{\partial}{\partial z}[\psi_4(x,y,z) - \psi_{04}(x,y,z)]\bigg|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial t}[\psi_3(x,y,t) - \psi_{03}(x,y,t)]\bigg|_{t=0}. \tag{4.22}$$

Тогда, вычисляя от (4.21) производную $\partial^2/\partial x\partial y$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
&f_1(x,y,0)-f_2(x,y,0)+\\
&\qquad+\int\limits_0^x \frac{\partial R}{\partial x}(\xi,y,0,0,x,y,0,0)[f_1(\xi,y,0)-f_2(\xi,y,0)]d\xi+\\
&\qquad+\int\limits_0^y \frac{\partial R}{\partial y}(x,\eta,0,0,x,y,0,0)[f_1(x,\eta,0)-f_2(x,\eta,0)]d\eta+\\
&\qquad+\int\limits_0^x\int\limits_0^y \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}(\xi,\eta,0,0,x,y,0,0)[f_1(\xi,\eta,0)-f_2(\xi,\eta,0)]d\eta d\xi=0.
\end{aligned}$$

Это есть однородное интегральное уравнение, единственным решением которого [50, с. 9–12] является $f_1(x,y,0)-f_2(x,y,0)\equiv 0$. Аналогичным образом убеждаемся, что условия

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}[\psi_4(x,y,z)-\psi_{04}(x,y,z)]\Big|_{x=0} &= \frac{\partial}{\partial t}[\psi_1(y,z,t)-\psi_{01}(y,z,t)]\Big|_{t=0},\\
\frac{\partial}{\partial y}[\psi_4(x,y,z)-\psi_{04}(x,y,z)]\Big|_{y=0} &= \frac{\partial}{\partial t}[\psi_2(x,y,t)-\psi_{02}(x,y,t)]\Big|_{t=0},\\
\frac{\partial}{\partial x}[\psi_3(x,y,t)-\psi_{03}(x,y,t)]\Big|_{x=0} &= \frac{\partial}{\partial z}[\psi_1(y,z,t)-\psi_{01}(y,z,t)]\Big|_{z=0},\\
\frac{\partial}{\partial y}[\psi_3(x,y,t)-\psi_{03}(x,y,t)]\Big|_{y=0} &= \frac{\partial}{\partial z}[\psi_2(x,y,t)-\psi_{02}(x,y,t)]\Big|_{z=0},\\
\frac{\partial}{\partial x}[\psi_2(x,z,t)-\psi_{02}(x,z,t)]\Big|_{x=0} &= \frac{\partial}{\partial y}[\psi_1(y,z,t)-\psi_{01}(y,z,t)]\Big|_{y=0}
\end{aligned}\tag{4.23}$$

обеспечивают выполнение остальных пяти тождеств (4.18).

Таким образом, условия (4.22), (4.23) достаточны для необходимой нам непрерывности функции $\omega(\xi,\eta,\zeta)$ в области Q.

Пользуясь формулами из [50, § 5] мы можем записать эквивалентные (4.22), (4.23) условия, используя только исходные данные задачи Z_4.

Проделаем это для условия (4.22). Используем равенства (5.19), (5.14) из [50], которые запишем при $z = 0$ и $t = 0$ соответственно в следующем виде

$$
\begin{multline}
\psi_{03xyt}(x,y,0) + c(x,y,0,0)\psi_{03xt}(x,y,0)+\\
+ d(x,y,0,0)\psi_{03yt}(x,y,0) + s(x,y,0,0)\psi_{03t}(x,y,0) =\\
= -a(x,y,0,0)\psi_{03xy}(x,y,0) - f(x,y,0,0)\psi_{03x}(x,y,0)-\\
- h(x,y,0,0)\psi_{03y}(x,y,0) - p(x,y,0,0)\psi_{03}(x,y,0)-\\
- b(x,y,0,0)\varphi_{3xyt}(x,y,0) - e(x,y,0,0)\varphi_{3xy}(x,y,0)-\\
- g(x,y,0,0)\varphi_{3xt}(x,y,0) - k(x,y,0,0)\varphi_{3yt}(x,y,0)-\\
- m(x,y,0,0)\varphi_{3x}(x,y,0) - n(x,y,0,0)\varphi_{3y}(x,y,0)-\\
- q(x,y,0,0)\varphi_{3t}(x,y,0) - r(x,y,0,0)\varphi_{3}(x,y,0), \tag{4.24}
\end{multline}
$$

$$
\begin{multline}
\psi_{04xyz}(x,y,0) + c(x,y,0,0)\psi_{04xz}(x,y,0)+\\
+ d(x,y,0,0)\psi_{04yz}(x,y,0) + s(x,y,0,0)\psi_{04z}(x,y,0) =\\
= -b(x,y,0,0)\psi_{04xy}(x,y,0) - g(x,y,0,0)\psi_{04x}(x,y,0)-\\
- k(x,y,0,0)\psi_{04y}(x,y,0) - q(x,y,0,0)\psi_{04}(x,y,0)-\\
- a(x,y,0,0)\varphi_{4xyz}(x,y,0) - e(x,y,0,0)\varphi_{4xy}(x,y,0)-\\
- f(x,y,0,0)\varphi_{4xz}(x,y,0) - h(x,y,0,0)\varphi_{4yz}(x,y,0)-\\
- m(x,y,0,0)\varphi_{4x}(x,y,0) - n(x,y,0,0)\varphi_{4y}(x,y,0)-\\
- p(x,y,0,0)\varphi_{4z}(x,y,0) - r(x,y,0,0)\varphi_{4}(x,y,0). \tag{4.25}
\end{multline}
$$

Из (4.7) следует, что $\psi_3(x,y,0) \equiv \psi_{03}(x,y,0)$, $\psi_4(x,y,0) \equiv \psi_{04}(x,y,0)$, а из непрерывности $u(x,y,z,t)$ в $\overline{\Omega}$ — $\varphi_3(x,y,0) \equiv \varphi_4(x,y,0)$, причем указанные тождества можно дифференцировать.

Следствием (4.22), очевидно, будет равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}[\psi_4(x,y,z)-\psi_{04}(x,y,z)]\Big|_{z=0}\right)_{xy}+$$
$$+c(x,y,0,0)\left(\frac{\partial}{\partial z}[\psi_4(x,y,z)-\psi_{04}(x,y,z)]\Big|_{z=0}\right)_{x}+$$
$$+d(x,y,0,0)\left(\frac{\partial}{\partial z}[\psi_4(x,y,z)-\psi_{04}(x,y,z)]\Big|_{z=0}\right)_{y}+$$
$$+s(x,y,0,0)\,\frac{\partial}{\partial z}[\psi_4(x,y,z)-\psi_{04}(x,y,z)]\Big|_{z=0}=$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial t}[\psi_3(x,y,t)-\psi_{03}(x,y,t)]\Big|_{t=0}\right)_{xy}+$$
$$+c(x,y,0,0)\left(\frac{\partial}{\partial t}[\psi_3(x,y,t)-\psi_{03}(x,y,t)]\Big|_{t=0}\right)_{x}+$$
$$+d(x,y,0,0)\left(\frac{\partial}{\partial t}[\psi_3(x,y,t)-\psi_{03}(x,y,t)]\Big|_{t=0}\right)_{y}+$$
$$+s(x,y,0,0)\,\frac{\partial}{\partial t}[\psi_3(x,y,t)-\psi_{03}(x,y,t)]\Big|_{t=0}. \quad (4.26)$$

Подстановка (4.24), (4.25) в (4.26) приводит к искомой формуле

$$\psi_{3xyt}(x,y,0)+c(x,y,0,0)\psi_{3xt}(x,y,0)+$$
$$+d(x,y,0,0)\psi_{3yt}(x,y,0)+s(x,y,0,0)\psi_{3t}(x,y,0)+$$
$$+a(x,y,0,0)\psi_{3xy}(x,y,0)+f(x,y,0,0)\psi_{3x}(x,y,0)+$$
$$+h(x,y,0,0)\psi_{3y}(x,y,0)+p(x,y,0,0)\psi_{3}(x,y,0)+$$
$$+b(x,y,0,0)\varphi_{3xyt}(x,y,0)+g(x,y,0,0)\varphi_{3xt}(x,y,0)+$$
$$+k(x,y,0,0)\varphi_{3yt}(x,y,0)+q(x,y,0,0)\varphi_{3t}(x,y,0)\equiv$$
$$\equiv\psi_{4xyz}(x,y,0)+c(x,y,0,0)\psi_{4xz}(x,y,0)+$$
$$+d(x,y,0,0)\psi_{4yz}(x,y,0)+s(x,y,0,0)\psi_{4z}(x,y,0)+$$
$$+b(x,y,0,0)\psi_{4xy}(x,y,0)+g(x,y,0,0)\psi_{4x}(x,y,0)+$$
$$+k(x,y,0,0)\psi_{4y}(x,y,0)+q(x,y,0,0)\psi_{4}(x,y,0)+$$
$$+a(x,y,0,0)\varphi_{4xyz}(x,y,0)+f(x,y,0,0)\varphi_{4xz}(x,y,0)+$$
$$+h(x,y,0,0)\varphi_{4yz}(x,y,0)+p(x,y,0,0)\varphi_{4z}(x,y,0). \quad (4.27)$$

Покажем, что полученное условие разрешимости (4.27) эквивалентно условию (4.22). Действительно, как показано выше, тождество (4.27) является следствием (4.22). Обратно, соотношение (4.26) (непосредственно приводящего к (4.27)) с учетом (4.7) эквивалентно задаче Гурса

$$w_{xy} + c(x, y, 0, 0)w_x + d(x, y, 0, 0)w_y + s(x, y, 0, 0)w = 0,$$
$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{y=0} = 0,$$
$$w = \frac{\partial}{\partial z}[\psi_4(x, y, z) - \psi_{04}(x, y, z)]\bigg|_{z=0} - \frac{\partial}{\partial t}[\psi_3(x, y, t) - \psi_{03}(x, y, t)]\bigg|_{t=0},$$

решение которой $w \equiv 0$ существует и единственно. Из тождества $w \equiv 0$ следует (4.22).

Совершенно аналогично из (4.23) с учетом формул (5.8), (5.12) из [50], получаем остальные условия разрешимости задачи 2:

$$\begin{gathered}
\psi_{4xyz}(0, y, z) + b(0, y, z, 0)\psi_{4xy}(0, y, z)+ \\
+c(0, y, z, 0)\psi_{4xz}(0, y, z) + g(0, y, z, 0)\psi_{3x}(0, y, z)+ \\
+d(0, y, z, 0)\psi_{4yz}(0, y, z) + k(0, y, z, 0)\psi_{4y}(0, y, z)+ \\
+s(0, y, z, 0)\psi_{4z}(0, y, z) + q(0, y, z, 0)\psi_4(0, y, z)+ \\
+a(0, y, z, 0)\varphi_{4xyz}(0, y, z) + e(0, y, z, 0)\varphi_{4xy}(0, y, z)+ \\
+f(0, y, z, 0)\varphi_{4xz}(0, y, z) + m(0, y, z, 0)\varphi_{4x}(0, y, z) \equiv \\
\equiv \psi_{1yzt}(y, z, 0) + b(0, y, z, 0)\psi_{1yz}(y, z, 0)+ \\
+c(0, y, z, 0)\psi_{1zt}(y, z, 0) + g(0, y, z, 0)\psi_{1t}(y, z, 0)+ \\
+a(0, y, z, 0)\psi_{1yz}(y, z, 0) + e(0, y, z, 0)\psi_{1y}(y, z, 0)+ \\
+f(0, y, z, 0)\psi_{1z}(y, z, 0) + m(0, y, z, 0)\psi_1(y, z, 0)+ \\
+d(0, y, z, 0)\varphi_{1yzt}(y, z, 0) + k(0, y, z, 0)\varphi_{1yt}(y, z, 0)+ \\
+s(0, y, z, 0)\varphi_{1zt}(y, z, 0) + q(0, y, z, 0)\varphi_{1t}(y, z, 0); \qquad (4.28) \\
\psi_{4xyz}(x, 0, z) + b(x, 0, z, 0)\psi_{4xy}(x, 0, z)+ \\
+d(x, 0, z, 0)\psi_{4yz}(x, 0, z) + k(x, 0, z, 0)\psi_{4y}(x, 0, z)+ \\
+c(x, 0, z, 0)\psi_{4xz}(x, 0, z) + g(x, 0, z, 0)\psi_{4x}(x, 0, z)+ \\
+s(x, 0, z, 0)\psi_{4z}(x, 0, z) + q(x, 0, z, 0)\psi_4(x, 0, z)+ \\
+a(x, 0, z, 0)\varphi_{4xyz}(x, 0, z) + e(x, 0, z, 0)\varphi_{4xy}(x, 0, z)+ \\
+h(x, 0, z, 0)\varphi_{4yz}(x, 0, z) + n(x, 0, z, 0)\varphi_{4y}(x, 0, z) \equiv \\
\equiv \psi_{2xzt}(x, z, 0) + b(x, 0, z, 0)\psi_{2xz}(x, z, 0)+
\end{gathered}$$

$$+d(x,0,z,0)\psi_{2zt}(x,z,0)+k(x,0,z,0)\psi_{2t}(x,z,0)+$$
$$+a(x,0,z,0)\psi_{2xz}(x,z,0)+e(x,0,z,0)\psi_{2x}(x,z,0)+$$
$$+h(x,0,z,0)\psi_{2z}(x,z,0)+n(x,0,z,0)\psi_{2}(x,z,0)+$$
$$+c(x,0,z,0)\varphi_{2xzt}(x,z,0)+g(x,0,z,0)\varphi_{2xt}(x,z,0)+$$
$$+s(x,0,z,0)\varphi_{2zt}(x,z,0)+q(x,0,z,0)\varphi_{2t}(x,z,0); \tag{4.29}$$
$$\psi_{3xyt}(0,y,t)+a(0,y,0,t)\psi_{3xy}(0,y,t)+$$
$$+c(0,y,0,t)\psi_{3xt}(0,y,t)+f(0,y,0,t)\psi_{3x}(0,y,t)+$$
$$+d(0,y,0,t)\psi_{3yt}(0,y,t)+h(0,y,0,t)\psi_{3y}(0,y,t)+$$
$$+s(0,y,0,t)\psi_{3t}(0,y,t)+p(0,y,0,t)\psi_{3}(0,y,t)+$$
$$+b(0,y,0,t)\varphi_{3xyt}(0,y,t)+e(0,y,0,t)\varphi_{3xy}(0,y,t)+$$
$$+g(0,y,0,t)\varphi_{3xt}(0,y,t)+m(0,y,0,t)\varphi_{3x}(0,y,t)\equiv$$
$$\equiv\psi_{1yzt}(y,0,t)+a(0,y,0,t)\psi_{1yz}(y,0,t)+$$
$$+c(0,y,0,t)\psi_{1zt}(y,0,t)+f(0,y,0,t)\psi_{1z}(y,0,t)+$$
$$+b(0,y,0,t)\psi_{1yt}(y,0,t)+e(0,y,0,t)\psi_{1y}(y,0,t)+$$
$$+g(0,y,0,t)\psi_{1t}(y,0,t)+m(0,y,0,t)\psi_{1}(y,0,t)+$$
$$+d(0,y,0,t)\varphi_{1yzt}(y,0,t)+h(0,y,0,t)\varphi_{1yz}(y,0,t)+$$
$$+s(0,y,0,t)\varphi_{1zt}(y,0,t)+p(0,y,0,t)\varphi_{1z}(y,0,t); \tag{4.30}$$
$$\psi_{3xyt}(x,0,t)+a(x,0,0,t)\psi_{3xy}(x,0,t)+$$
$$+d(x,0,0,t)\psi_{3yt}(x,0,t)+h(x,0,0,t)\psi_{3y}(x,0,t)+$$
$$+c(x,0,0,t)\psi_{3xt}(x,0,t)+f(x,0,0,t)\psi_{3x}(x,0,t)+$$
$$+s(x,0,0,t)\psi_{3t}(x,0,t)+p(x,0,0,t)\psi_{3}(x,0,t)+$$
$$+b(x,0,0,t)\varphi_{3xyt}(x,0,t)+e(x,0,t)\varphi_{3xy}(x,0,t)+$$
$$+k(x,0,0,t)\varphi_{3yt}(x,0,t)+n(x,0,0,t)\varphi_{3y}(x,0,t)\equiv$$
$$\equiv\psi_{2xzt}(x,0,t)+a(x,0,0,t)\psi_{2xz}(x,0,t)+$$
$$+d(x,0,0,t)\psi_{2zt}(x,0,t)+h(x,0,0,t)\psi_{2z}(x,0,t)+$$
$$+b(x,0,0,t)\psi_{2xt}(x,0,t)+e(x,0,0,t)\psi_{2x}(x,0,t)+$$
$$+k(x,0,0,t)\psi_{2t}(x,0,t)+n(x,0,0,t)\psi_{2}(x,0,t)+$$
$$+c(x,0,0,t)\varphi_{2xzt}(x,0,t)+f(x,0,0,t)\varphi_{2xz}(x,0,t)+$$

$$+s(x,0,0,t)\varphi_{2zt}(x,0,t)+p(x,0,0,t)\varphi_{2z}(x,0,t); \tag{4.31}$$

$$\psi_{2xzt}(0,z,t)+a(0,0,z,t)\psi_{2xz}(0,z,t)+$$
$$+b(0,0,z,t)\psi_{2xt}(0,z,t)+e(0,0,z,t)\psi_{2x}(0,z,t)+$$
$$+d(0,0,z,t)\psi_{2zt}(0,z,t)+h(0,0,z,t)\psi_{2z}(0,z,t)+$$
$$+k(0,0,z,t)\psi_{2t}(0,z,t)+n(0,0,z,t)\psi_{2}(0,z,t)+$$
$$+c(0,0,z,t)\varphi_{2xzt}(0,z,t)+f(0,0,z,t)\varphi_{2xz}(0,z,t)+$$
$$+g(0,0,z,t)\varphi_{2xt}(0,z,t)+m(0,0,z,t)\varphi_{2x}(0,z,t)\equiv$$
$$\equiv\psi_{1yzt}(0,z,t)+a(0,0,z,t)\psi_{1yz}(0,z,t)+$$
$$+b(0,0,z,t)\psi_{1yt}(0,z,t)+e(0,0,z,t)\psi_{1y}(0,z,t)+$$
$$+c(0,0,z,t)\psi_{1zt}(0,z,t)+f(0,0,z,t)\psi_{1z}(0,z,t)+$$
$$+g(0,0,z,t)\psi_{1z}(0,z,t)+m(0,0,z,t)\psi_{1}(0,z,t)+$$
$$+d(0,0,z,t)\varphi_{1yzt}(0,z,t)+h(0,0,z,t)\varphi_{1yz}(0,z,t)+$$
$$+k(0,0,z,t)\varphi_{1yt}(0,z,t)+n(0,0,z,t)\varphi_{1y}(0,z,t). \tag{4.32}$$

На основании вышеизложенного имеет место

Теорема 4.1. *При условиях гладкости* (4.3), (4.17) *и выполнении тождеств* (4.27)–(4.32) *задача* Z_4 *однозначно разрешима.*

§ 5. Задача для факторизованного уравнения в n-мерном параллелотопе

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}\right)Lu=0, \tag{5.1}$$

$$Lu\equiv D^{\tilde{\alpha}}u+\sum_{\alpha<\tilde{\alpha}}a_\alpha(x_1,x_2,\dots,x_n)D^\alpha u,$$

где мультииндексы имеют n компонент, $\tilde{\alpha}=(1,1,\dots,1)$, отношение подчиненности $\alpha<\tilde{\alpha}$ означает, что α получен из $\tilde{\alpha}$ уменьшением по меньшей мере одной компоненты. Очевидно, (5.1) является аналогом рассмотренных выше уравнений в n-мерном пространстве.

Целью данного параграфа является распространение полученных в данной главе результатов на уравнение (5.1). При этом необходима формализация рассуждений, позволяющая получить и сформулировать результаты в пространстве произвольного числа переменных.

5.1. Сведение задачи к интегральным уравнениям. Пусть $G=\{(x_1,x_2,\dots,x_n):\ 0<x_i<x_i^1,\ i=\overline{1,n}\}$, $G_i=\{(x_1,x_2,\dots,x_n):\ 0<x_j<x_j^1,\ j\neq i,\ x_i=0\}$ — части границы G, являющиеся частями плоскостей $x_i=0$. Расположенные внутри G части плоскостей $x_1=x_2,\dots,\ x_1=x_n,\ x_2=x_3,\ \dots,\ x_{n-1}=x_n$ обозначим соответственно через $M_{12},\dots,M_{1n},M_{23},\dots,M_{(n-1)n}$.

Обозначим через e_i единичный мультииндекс, $e_i=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$, $\varepsilon_i=1$, $\varepsilon_j=0$, $j\neq i$.

Задача Z_n. *Найти в* G *функцию* $u\in C(\overline{G})\bigcap(\bigcap\limits_{i=1}^{n}C^{e_i}(G\bigcup G_i))$, *являющуюся в* $G\setminus(\bigcup\limits_{i,j}M_{ij})$ *регулярным решением уравнения* (5.1) *и удовлетворяющую условиям*

$$u\big|_{\overline{G}_i}=\varphi_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n),\quad i=\overline{1,n}, \tag{5.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\overline{G}_i}=\psi_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n),\quad i=\overline{1,n}. \tag{5.3}$$

При этом предполагаем, что выполняются включения

$$a_\alpha\in C^\alpha(\overline{G}),\quad \varphi_i,\,\psi_i\in C^{2\tilde{\alpha}}(\overline{G}_i). \tag{5.4}$$

Уравнение (5.1) можно переписать в виде $Lu = v$, где v есть решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \tag{5.5}$$

следовательно

$$Lu = \omega(x_n - x_1, x_n - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}), \tag{5.6}$$

где ω — произвольная функция. Из уравнения для v и постановки задачи следует, что должно выполняться требование

$$\omega(x_n - x_1, x_n - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}) \in C^{\tilde{\alpha}}(G \setminus (\bigcup_{i,j} M_{ij})).$$

С помощью вспомогательных переменных $\xi_i = x_n - x_i$, $i = \overline{1, n-1}$, правая часть (5.6) записывается в виде $\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$, $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) \in P = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) : -x_i^1 < \xi_i < x_n^1,\ i = \overline{1, n-1}\}$. Многообразиям M_{ij} соответствуют уравнения

$$\xi_i = 0 \ \text{ при } \ j = n; \quad \xi_j - \xi_i = 0 \ \text{ при } \ j \neq n. \tag{5.7}$$

Так как решение $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнения (5.1) отыскивается в $G \setminus (\bigcup_{i,j} M_{ij})$, то уравнение (5.5) должно рассматриваться на том же множестве. Таким образом, $\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ есть произвольная функция класса $C^{\tilde{\alpha}}(P_0)$, где P_0 — множество точек P без точек, удовлетворяющих уравнениям (5.7).

Известно [50, с. 79], что если

$$a_\alpha \in C^\alpha(\overline{G}), \quad \omega \in C(\overline{G}), \tag{5.8}$$

то решение уравнения (5.6) допускает представление

$$u = u_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \ldots \int_0^{x_n} R(t_1, t_2, \ldots, t_n,$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n) \omega(t_n - t_1, t_n - t_2, \ldots, t_n - t_{n-1}) dt_n dt_{n-1} \ldots dt_1, \tag{5.9}$$

где u_0 — решение уравнения $Lu = 0$, для которого R является функцией Римана (которая определяется как решение интегрального уравнения с частными интегралами [50, с. 76]. Вместе с тем, из (5.9) видно, что функция u_0 должна удовлетворять условиям (5.2), вследствие чего u_0 — решение задачи

Гурса в G для уравнения $Lu = 0$ с условиями (5.2), которое может быть записано в явном виде в терминах функции Римана по формуле (3.54) из [50, с. 76].

Рассуждая как в предыдущих параграфах, получаем интегральные уравнения Вольтерра второго рода с частными интегралами с непрерывными коэффициентами относительно функций

$$\begin{gathered}
f_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \omega(x_n, x_n - x_2, x_n - x_3, \ldots, x_n - x_{n-1}),\\
f_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) = \omega(x_n - x_1, x_n, x_n - x_3, \ldots, x_n - x_{n-1}),\\
f_3(x_1, x_2, x_4, \ldots, x_n) = \omega(x_n - x_1, x_n - x_2, x_n, x_n - x_4, \ldots, x_n - x_{n-1}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \omega(x_n - x_1, x_n - x_2, \ldots, x_n - x_{n-2}, x_n),\\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \omega(-x_1, -x_2, \ldots, -x_{n-2}, -x_{n-1}),
\end{gathered} \tag{5.10}$$

причем каждая функция f_i задана на множестве $\overline{G}_i$, $i = \overline{1, n}$. В соответствующих областях $\overline{G}_i$ существуют единственные непрерывные решения всех указанных интегральных уравнений. Для принадлежности решения u классу функций, определенному в постановке задачи, нужно, чтобы функция ω в каждой области $\overline{G}_i$ была непрерывно дифференцируема, то есть должны быть непрерывно дифференцируемы в этих областях f_1, f_2, $\ldots$, f_n. Известно [50, с. 27], что степень гладкости решений уравнений Вольтерра второго рода с частными интегралами та же, что у коэффициентов и свободных членов этих уравнений. Следовательно, надо потребовать, чтобы на $\overline{G}_i$ гладкость коэффициентов была увеличена:

$$a_\alpha \in C^\beta(\overline{G}_i),\ \alpha_i = 1,\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}),\ \beta_j = 1,\ j = \overline{1, n-1},\ i = \overline{1, n}. \tag{5.11}$$

Перейдем к рассмотрению множества $P \subset R^{n-1}$. Определим подмножества P, в которых отыскиваются функции f_1, f_2, $\ldots$, f_n. Возьмем первое соотношение из (5.10) и положим $x_n = \xi_1$, $x_n - x_2 = \xi_2$, $\ldots$, $x_n - x_{n-1} = \xi_{n-1}$. Имеем

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = f_1(\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3, \ldots, \xi_1 - \xi_{n-1}, \xi_1),$$

причем $\xi_1 \in [0, x_n^1]$, $(\xi_1 - \xi_2) \in [0, x_2^1]$, $\ldots$, $(\xi_1 - \xi_{n-1}) \in [0, x_{n-1}^1]$. Получаем, что f_1 определяется в области Q_1, ограниченной плоскостями

$$\begin{gathered}
\xi_1 = 0, \quad \xi_1 = x_n^1, \quad \xi_1 - \xi_2 = 0, \quad \xi_1 - \xi_3 = 0, \ldots, \xi_1 - \xi_{n-1} = 0,\\
\xi_2 = -x_2^1, \quad \xi_3 = -x_3^1, \ldots, \quad \xi_{n-1} = -x_{n-1}^1.
\end{gathered}$$

Аналогично, из второго соотношения (5.10) для f_2 получаем

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = f_2(\xi_2 - \xi_1, \xi_2 - \xi_3, \ldots, \xi_2 - \xi_{n-1}, \xi_2),$$

$$\xi_2 \in [0, x_n^1], \quad (\xi_2 - \xi_1) \in [0, x_1^1], \quad (\xi_2 - \xi_3) \in [0, x_3^1], \ \ldots, \\ (\xi_2 - \xi_{n-1}) \in [0, x_{n-1}^1].$$

Очевидно, что f_2 определяется в области Q_2, ограниченной плоскостями

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_2 = x_n^1, \quad \xi_2 - \xi_1 = 0, \quad \xi_2 - \xi_3 = 0, \ \ldots, \\ \xi_2 - \xi_{n-1} = 0, \quad \xi_1 = -x_1^1, \quad \xi_3 = -x_3^1, \ \ldots, \quad \xi_{n-1} = -x_{n-1}^1.$$

Далее последовательно получаем

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = f_3(\xi_3 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2, \ldots, \xi_3 - \xi_{n-1}, \xi_3),$$

$$\xi_3 \in [0, x_n^1], \quad (\xi_3 - \xi_1) \in [0, x_1^1], \quad (\xi_3 - \xi_2) \in [0, x_2^1], \quad (\xi_3 - \xi_4) \in [0, x_4^1], \ \ldots, \\ (\xi_3 - \xi_{n-1}) \in [0, x_{n-1}^1];$$

$$Q_3: \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_3 = x_n^1, \quad \xi_3 - \xi_1 = 0, \quad \xi_3 - \xi_2 = 0, \quad \xi_3 - \xi_4 = 0, \ \ldots, \\ \xi_3 - \xi_{n-1} = 0, \quad \xi_1 = -x_1^1, \quad \xi_2 = -x_2^1, \quad \xi_4 = -x_4^1, \ \ldots, \quad \xi_{n-1} = -x_{n-1}^1;$$

. . . .

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = f_{n-1}(\xi_{n-1} - \xi_1, \xi_{n-1} - \xi_2, \ldots, \xi_{n-1} - \xi_{n-2}, \xi_{n-1}), \\ \xi_{n-1} \in [0, x_n^1], \quad (\xi_{n-1} - \xi_1) \in [0, x_1^1], \quad (\xi_{n-1} - \xi_2) \in [0, x_2^1], \ \ldots, \\ (\xi_{n-1} - \xi_{n-2}) \in [0, x_{n-2}^1];$$

$$Q_{n-1}: \quad \xi_{n-1} = 0, \quad \xi_{n-1} = x_n^1, \quad \xi_{n-1} - \xi_1 = 0, \quad \xi_{n-1} - \xi_2 = 0, \ \ldots, \\ \xi_{n-1} - \xi_{n-2} = 0, \quad \xi_1 = -x_1^1, \quad \xi_2 = -x_2^1, \ \ldots, \quad \xi_{n-2} = -x_{n-2}^1.$$

Последнее соотношение (5.10) дает

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = f_n(-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_{n-2}, -\xi_{n-1}),$$

$$-\xi_1 \in [0, x_1^1], \quad -\xi_2 \in [0, x_2^1], \ \ldots, \ -\xi_{n-2} \in [0, x_{n-2}^1], \quad -\xi_{n-1} \in [0, x_{n-1}^1];$$

$$Q_n: \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_1 = -x_1^1, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_2 = -x_2^1, \ \ldots, \quad \xi_{n-1} = 0, \\ \xi_{n-1} = -x_{n-1}^1.$$

В каждой из областей Q_1, Q_2, …, Q_n соответствующая функция f_1, f_2, …, f_n определяется однозначно.

Из (5.8) видим, что на частях границ Q_1, Q_2, …, Q_n, лежащих внутри P, должны выполняться условия согласования, обеспечивающие непрерывность ω в P (очевидно, таких условий $n(n-1)/2$). Указанные условия согласования должны рассматриваться как условия разрешимости задачи Z_n. Требуется определить их в исходных данных задачи.

5.2. Вывод условий разрешимости. Ясно, что условия согласования задаются следующим образом: на плоскостях $\xi_i - \xi_j = 0$

$$f_i(t_1, \ldots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \ldots, t_{n-1}) = f_j(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_{n-1}); \tag{5.12}$$

на плоскостях $\xi_i = 0$

$$f_n(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}) = f_i(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{n-2}, 0). \tag{5.13}$$

Учитывая связь между ω и f_k, получаем, например, для f_1 и f_2 следующие соотношения

$$\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}\ldots\int\limits_0^{x_n} R(0, t_2, t_3, \ldots, t_n, 0, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$
$$f_1(t_2, t_3, \ldots, t_n) dt_n \ldots dt_3 dt_2 =$$
$$= (\psi_1 - \psi_{01})(x_2, x_3, \ldots, x_n), \tag{5.14}$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_3}\ldots\int\limits_0^{x_n} R(t_1, 0, t_3, \ldots, t_n, x_1, 0, x_3, \ldots, x_n)$$
$$f_2(t_1, t_3, \ldots, t_n) dt_n \ldots dt_3 dt_1 =$$
$$= (\psi_2 - \psi_{02})(x_1, x_3, \ldots, x_n). \tag{5.15}$$

Дифференцируем (5.14) по t_2 и полагаем $t_2 = 0$, а (5.15) — по t_1 и полагаем $t_1 = 0$. Вычитая, очевидно, получаем

$$\int\limits_0^{x_3}\int\limits_0^{x_4}\ldots\int\limits_0^{x_n} R(0, 0, t_3, t_4, \ldots, t_n, 0, 0, x_3, x_4, \ldots, x_n)(f_1(0, t_3, t_4, \ldots, t_n) -$$
$$f_2(0, t_3, t_4, \ldots, t_n)) dt_n \ldots dt_4 dt_3 =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(\psi_1 - \psi_{01})(x_2, x_3, \ldots, x_n)\right]_{x_2=0} - \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\psi_2 - \psi_{02})(x_1, x_3, \ldots, x_n)\right]_{x_1=0}. \tag{5.16}$$

Пусть теперь

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(\psi_1 - \psi_{01})(x_2, x_3, \ldots, x_n)\right]_{x_2=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\psi_2 - \psi_{02})(x_1, x_3, \ldots, x_n)\right]_{x_1=0}. \tag{5.17}$$

Дифференцируя (5.16) по x_3, x_4, …, x_n получаем однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода с частными интегралами относительно $(f_1 - f_2)(0, x_3, x_4, \dots, x_n)$, всегда имеющее лишь нулевое решение. Поэтому на M_{12} выполняется условие согласования

$$f_1(0, t_3, t_4, \dots, t_n) = f_2(0, t_3, t_4, \dots, t_n).$$

Рассуждая точно так же в остальных случаях, получаем достаточные условия, при которых имеют место (5.12), (5.13)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi_j - \psi_{0j})(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)\right]_{x_i=0} \equiv$$
$$\equiv \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi_i - \psi_{0i})(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\right]_{x_j=0}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (5.18)$$

Условия (5.18) могут быть записаны в другой форме. Для простоты ограничимся рассмотрением случая $i = 1$, $j = 2$.

Из (5.9) следует, что $\psi_{0i}|_{x_j=0} \equiv \psi_i|_{x_j=0}$, $i \neq j$, а из непрерывности $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в $\overline{G}$ вытекает $\varphi_i|_{x_j=0} \equiv \varphi_j|_{x_i=0}$, причем данные тождества можно дифференцировать.

В работе [48] получены уравнения, связывающие граничные значения функции, являющейся решением уравнения

$$Lu = 0 \quad (5.19)$$

при $n = 3$ с граничными значениями ее нормальных производных первого порядка на характеристиках G_i (см. также [50, с. 106–114]). Имеется обобщение данных формул на случаи $n = 4$ и произвольного n [50, § 5, с. 115–131]. При сделанных выше предположениях о гладкости коэффициентов уравнения (5.1) и данных (5.3), (5.4), указанные уравнения для произвольного n могут быть записаны в виде

$$\sum_{\alpha_1=1} a_\alpha D^{\alpha-e_1}\psi_{01}|_{x_1=0} + \sum_{\alpha_1=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_1|_{x_1=0} = 0, \quad (5.20)$$

$$\sum_{\alpha_2=1} a_\alpha D^{\alpha-e_2}\psi_{02}|_{x_2=0} + \sum_{\alpha_2=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_2|_{x_2=0} = 0, \quad (5.21)$$

где e_1, e_2 — единичные мультииндексы. Формула (5.20) получается из уравнения $Lu = 0$ формальной заменой всех производных функции u_{x_1} на производные функции ψ_{01}, а производных функции u, не содержащих дифференцирования по x_1, на производные φ_1. То же относится и к (5.21).

Формулы (5.20), (5.21) можно переписать в виде

$$\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_1}\psi_{01}|_{x_1=0} = -\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=0}} a_\alpha D^{\alpha-e_1}\psi_{01}|_{x_1=0} - \sum_{\alpha_1=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_1|_{x_1=0}, \tag{5.22}$$

$$\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_2}\psi_{02}|_{x_2=0} = -\sum_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_2}\psi_{02}|_{x_2=0} - \sum_{\alpha_2=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_2|_{x_2=0}. \tag{5.23}$$

Из (5.18) следует, что на M_{12}

$$\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_1-e_2}[D^{e_2}(\psi_1-\psi_{01})]_{\substack{x_1=0\\ x_2=0}} = \sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_1-e_2}[D^{e_1}(\psi_2-\psi_{02})]_{\substack{x_1=0\\ x_2=0}}. \tag{5.24}$$

Подставляем в (5.24) левые части формул (5.22), (5.23). Получаем

$$\left[\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_1}\psi_1 + \sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=0}} a_\alpha D^{\alpha-e_1}\psi_1 + \sum_{\alpha_1=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_1\right]_{M_{12}} =$$

$$= \left[\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_2}\psi_2 + \sum_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_2}\psi_2 + \sum_{\alpha_2=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_2\right]_{M_{12}}. \tag{5.25}$$

Условие (5.25) записано через данные задачи Z. Оно эквивалентно условию (5.18) при $i = 1$, $j = 2$. В этом можно убедиться, рассматривая (5.24) как задачу Гурса [50, с. 75–79] для уравнения

$$\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_1-e_2} w = 0$$

с нулевыми условиями (полученными из (5.9))

$$w|_{x_i=0} = 0, \quad i = \overline{3,n}.$$

Решение задачи Гурса существует и единственно [117]. Это решение $w \equiv 0$ приводит к (5.18) при $i = 1$, $j = 2$.

С помощью аналогичных рассуждений получаем все оставшиеся условия разрешимости задачи. Таким образом, все условия разрешимости можно записать в форме

$$\left[\sum_{\alpha_i=1} a_\alpha D^{\alpha-e_i}\psi_i + \sum_{\alpha_i=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_i\right]_{M_{ij}} =$$
$$= \left[\sum_{\alpha_j=1} a_\alpha D^{\alpha-e_j}\psi_j + \sum_{\alpha_j=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_j\right]_{M_{ij}}, \quad i \neq j, \quad i,j=\overline{1,n}. \quad (5.26)$$

Из предыдущих рассуждений следует

Теорема 5.1. *При условиях гладкости* (5.4), (5.11) *и выполнении равенств* (5.26) *задача* Z_n *однозначно разрешима.*

§ 6. Случаи разрешимости уравнений Вольтерра с частными интегралами в явном виде

В случае двух независимых переменных рассматриваемые уравнения имеют вид

$$u(x,y)+\int\limits_{x_0}^{x}K_1(x,y,\xi)u(\xi,y)\,d\xi+\int\limits_{y_0}^{y}K_2(x,y,\eta)u(x,\eta)\,d\eta+ \\ +\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\eta d\xi=F(x,y). \quad (6.1)$$

Такие уравнения встречаются, например, в теории упругости [15, с. 279]. Название "с частными интегралами" заимствовано из [90], [218], [74], где изучается аналогичное обобщение уравнений Фредгольма. Здесь мы занимаемся также трехмерным аналогом уравнений вида (6.1).

Известно [15, с. 18], [133, с. 180], [8, с. 9–12 и 20–24], что при непрерывных коэффициентах K_1, K_2, K, F такие уравнения однозначно разрешимы. В данном параграфе рассмотрены некоторые частные случаи, когда могут быть записаны явные формулы решения.

Поясним идею рассуждений на примере уравнения (6.1).

Очевидно, при достаточной гладкости K_1, K_2, K, F путем дифференцирования (6.1) получаются интегродифференциальные уравнения, которым решение (6.1) тоже удовлетворяет. Если при этом K_1 и K_2 (K) есть полиномы по y и x (по x, y) соответственно, то процесс дифференцирования приведет к дифференциальному уравнению, разрешенному относительно старшей производной $\partial^{m+n}u/\partial x^m\partial y^n$, изучавшемуся в предыдущих главах настоящей книги. Бывает, что для полученного уравнения оказывается возможным вычислить из (6.1) граничные условия задачи Гурса и записать формулу решения этой задачи. Тем самым будет построено решение уравнения (6.1). По аналогичной схеме можно рассуждать и для многомерных аналогов уравнения (6.1). Здесь предлагается реализация этой схемы для некоторых уравнений на плоскости и в трехмерном пространстве.

6.1. Уравнения с двумя независимыми переменными Пусть сначала (6.1) имеет вид

$$u(x,y)+\int\limits_{x_0}^{x} B(\xi,y)u(\xi,y)\,d\xi+\int\limits_{y_0}^{y} A(x,\eta)u(x,\eta)\,d\eta+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\eta d\xi = F(x,y), \quad (6.2)$$

причем в замкнутой области $\overline{T}=\{x_0\leqslant x_1,\, y_0\leqslant y\leqslant y_1\}$, $A\in C^{(1,0)}$, $B\in C^{(0,1)}$, $C\in C^{(0,0)}$. Класс $C^{(i,k)}$, как и в предыдущих параграфах, означает существование непрерывных производных до порядка $\partial^{i+k}/\partial x^i\partial y^k$ включительно. Тогда $u(x,y)$ является также решением уравнения

$$u_{xy}+au_x+bu_y+cu=F_{xy}(x,y),\; a=A,\; b=B,\; c=C+A_x+B_y. \quad (6.3)$$

Из (6.2) следуют соотношения

$$\begin{aligned} &u(x_0,y)+\int\limits_{y_0}^{y} A(x_0,\eta)u(x_0,\eta)\,d\eta = F(x_0,y),\\ &u(x,y_0)+\int\limits_{x_0}^{x} B(\xi,y_0)u(\xi,y_0)\,d\xi = F(x,y_0), \end{aligned} \quad (6.4)$$

легко разрешаемые относительно первых слагаемых в левых частях:

$$u(x_0,y)=F(x_0,y)+\lambda(y),\quad u(x,y_0)=F(x,y_0)+\mu(x), \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} &\lambda(y)=-\int\limits_{y_0}^{y} A(x_0,\eta)\left(\exp\int\limits_{y}^{\eta} A(x_0,\eta_1)\,d\eta_1\right)F(x_0,\eta)\,d\eta,\\ &\mu(x)=-\int\limits_{x_0}^{x} B(\xi,y_0)\left(\exp\int\limits_{x}^{\xi} B(\xi_1,y_0)\,d\xi_1\right)F(\xi,y_0)\,d\xi. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Очевидно, (6.5) есть граничные значения задачи Гурса для (6.3). Решение этой задачи известно [8, с. 65-66], [50, с. 14]. Подставляя в него (6.5)–(6.6) и F_{xy}, после интегрирования по частям слагаемого

$$\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} R(\alpha,\beta,x,y)F_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\,d\beta d\alpha$$

найдем $u(x,y)$ в виде:

$$u(x,y) = R(x,y_0,x,y)\mu(x) + R(x_0,y,x,y)\lambda(y) +$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x} \left(B(\alpha,y_0)R(\alpha,y_0,x,y) - \frac{\partial R}{\partial \alpha}(\alpha,y_0,x,y) \right) \mu(\alpha)\, d\alpha +$$
$$+ \int\limits_{y_0}^{y} \left(A(x_0,\beta)R(x_0,\beta,x,y) - \frac{\partial R}{\partial \beta}(x_0,\beta,x,y) \right) \lambda(\beta)\, d\beta +$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x} [B(\alpha,\beta)R(\alpha,\beta,x,y)F(\alpha,\beta)]_{\beta=y}^{\beta=y_0}\, d\alpha +$$
$$+ \int\limits_{y_0}^{y} [A(\alpha,\beta)R(\alpha,\beta,x,y)F(\alpha,\beta)]_{\alpha=x}^{\alpha=x_0}\, d\beta +$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 R}{\partial\alpha\partial\beta}(\alpha,\beta,x,y)F(\alpha,\beta)\, d\beta d\alpha + F(x,y). \quad (6.7)$$

В [53] для коэффициентов уравнения (6.3) получены условия, обеспечивающие запись R в явном виде. В терминах A, B, C это есть тождества

$$A_x \equiv B_y, \quad A_x - AB + C \equiv p(x)q(y), \quad (6.8)$$

где второе из них указывает структуру конструкции левой части. При этом

$$R(x,y,t,\tau) = J_0\Bigg(\Big(2\int\limits_{t}^{x} p(\xi)\, d\xi \int\limits_{\tau}^{y} q(\eta)\, d\eta \Big)^{\frac{1}{2}} \Bigg) \times$$
$$\times \exp\Bigg(\int\limits_{\tau}^{y} A(t,\eta)\, d\eta + \int\limits_{t}^{x} B(\xi,y)\, d\xi \Bigg), \quad (6.9)$$

$J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Таким образом, имеет место

Теорема 6.1. *Решение уравнения* (6.2) *в терминах функции Римана для* (6.3) *дается формулой* (6.7). *Если* $A_x \equiv B_y$, *а конструкция* $A_x - AB + C$ *имеет вид* $p(x)q(y)$, *то это решение строится в явном виде с помощью экспоненты и функции Бесселя* $J_0(x)$.

Замечание. Проведенные рассуждения можно обобщить при $\beta(x,y) \neq 0$ на более общий вариант уравнения

$$\alpha(x,y)u(x,y) + \beta(x,y)\Bigg(\int\limits_{x_0}^{x} B(\xi,y)u(\xi,y)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} A(x,\eta)u(x,\eta)\,d\eta + \\ + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\eta d\xi\Bigg) = F(x,y).$$

Только следует сначала поделить это уравнение на $\beta(x,y)$. Возникающие в данном случае усложнения в формулах не мешают получению соответствующего окончательного результата.

Остановимся еще на одном уравнении вида (6.1)

$$u(x,y) + \int\limits_{x_0}^{x} A(\xi,y)u(\xi,y)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} B(x,\eta)u(x,\eta)\,d\eta + \\ + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}[C(\xi,\eta) + (x-\xi)D(\xi,\eta)]u(\xi,\eta)\,d\eta d\xi = F(x,y), \quad (6.10)$$

$A_{xy}, B_{xx}, C_x, D \in C(\overline{T})$, $T = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$. Роль уравнения (6.3) для него играет уравнение

$$\begin{gathered} u_{xxy} + au_{xx} + bu_{xy} + cu_x + du_y + eu = F_{xxy}, \quad a = B, \quad b = A, \\ c = A_y + 2B_x + C, \quad d = A_x, \quad e = A_{xy} + B_{xx} + C_x + D. \end{gathered} \qquad (6.11)$$

Для граничных значений $u(x_0,y) = \varphi(y)$, $u_x(x_0,y) = \varphi_1(y)$, $u(x,y_0) = \psi(x)$ из (6.10) находим соотношения:

$$\varphi(y) + \int\limits_{y_0}^{y} B(x_0,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta = F(x_0,y),$$

$$\psi(x) + \int\limits_{x_0}^{x} A(\xi,y_0)\psi(\xi)\,d\xi = F(x,y_0),$$

$$\varphi_1(y) + A(x_0)\varphi(y) + \int\limits_{y_0}^{y}\{[C(x_0,\eta) + D(x_0,\eta) + B_x(x_0,\eta)]\varphi(\eta) + \\ + B(x_0,\eta)\varphi_1(\eta)\}\,d\eta = F_x(x_0,y).$$

Отсюда имеем

$$\varphi(y)=F(x_0,y)+\lambda_0(y),\quad \psi(x)=F(x,y_0)+\mu_0(x),$$
$$\varphi_1(y)=\lambda_1(y)-\int\limits_{y_0}^{y}B(x_0,\eta)\lambda_1(\eta)\Big(\exp\int\limits_{y}^{\eta}B(x_0,\eta_1)\,d\eta_1\Big)\,d\eta, \tag{6.12}$$

$$\lambda_0(y)=-\int\limits_{y_0}^{y}B(x_0,\eta)F(x_0,\eta)\Big(\exp\int\limits_{y_0}^{\eta}B(x_0,\eta_1)\,d\eta_1\Big)\,d\eta,$$

$$\mu_0(x)=-\int\limits_{x_0}^{x}A(\xi,y_0)F(\xi,y_0)\Big(\exp\int\limits_{x}^{\xi}A(\xi_1,y_0)\,d\xi_1\Big)\,d\xi,$$

$$\lambda_1(y)=F_x(x_0,y)-A(x_0,y)[F(x_0,y)+\lambda_0(y)]-$$
$$-\int\limits_{y_0}^{y}[C(x_0,\eta)+D(x_0,\eta)+B_x(x_0,\eta)][F(x_0,\eta)+\lambda_0(\eta)]\,d\eta.$$

Решение задачи Гурса (6.11)–(6.12) известно [47]:

$$u(x,y)=\varphi(y)+\int\limits_{x_0}^{x}h(\xi,\eta)\,d\xi+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\xi}\int\limits_{y_0}^{y}R(t,\eta,\xi,y)F_{tt\eta}(t,\eta)\,d\eta dt d\xi.$$

Здесь $h(x,y)$ — правая часть формулы (6) из [47] без последнего слагаемого (зависящая от φ, φ_1, ψ), R — функция Римана для (6.11). Проинтегрировав по частям последнее слагаемое, получим аналог формулы (6.7).

Укажем теперь некоторые условия, при которых R может быть записана в явном виде.

а) $d\equiv e\equiv 0$. Уравнение для функции Римана [47, формула (3)] имеет вид

$$v(x,y)-\int\limits_{\eta}^{y}a(x,\tau)v(x,\tau)\,d\tau-\int\limits_{\xi}^{x}b(t,y)v(t,y)\,dt=1.$$

В [53] показано, что при условиях $a_x\equiv b_y$, $c-ab-a_x=p(x)q(y)$ функция v определяется равенством

$$v=J_0\bigg(\Big(\int\limits_{t}^{x}p(\xi)\,d\xi\int\limits_{\tau}^{y}q(\eta)\,d\eta\Big)^{\frac{1}{2}}\bigg)\exp\Big(\int\limits_{\tau}^{y}a(t,\eta)\,d\eta+\int\limits_{t}^{x}b(\xi,y)\,d\xi\Big). \tag{6.13}$$

Подставив в указанные условия значения, a, …, e имеем (с учетом $e \equiv d$) соотношения

$$A_x \equiv 0, \quad A_{xy} + B_{xx} + C_x + D \equiv 0, \quad B_x \equiv A_y, \quad C - AB + 2B_x = p(x)q(y).$$

Нетрудно заметить, что данные соотношения выполняются, если коэффициенты уравнения (6.11) имеют вид

$$\begin{gathered} A = \omega(y), \quad B = x\omega'(y) + \omega_1(y), \\ C = \omega(y)\left[x\omega'(y) + \omega_1(y)\right] - 2\omega'(y) + p(x)q(y), \\ D = -\omega(y)\omega'(y) - p'(x)q(y), \end{gathered} \tag{6.14}$$

где p, $\omega \in C^1$, q, $\omega_1 \in C$ на $x \in [x_0, x_1]$, $y \in [y_0, y_1]$. В соответствии с (6.13) находим

$$\begin{aligned} R(x,y,t,\tau) = J_0\biggl(\Bigl(\int\limits_t^x p(\xi)\,d\xi \int\limits_\tau^y q(\eta)\,d\eta\Bigr)^{\frac{1}{2}}\biggr) \times \\ \times \exp\Bigl(\Bigl[2\omega(y) - \omega(\tau) + \int\limits_\tau^y \omega_1(\eta)\,d\eta\Bigr]x - t\omega(y)\Bigr). \end{aligned}$$

б) $a \equiv c \equiv e \equiv b + xd \equiv 0$, $x_0 > 0$. Уравнение для функции Римана приобретает вид

$$v(x,y) + x\int\limits_\xi^x d(t,y)v(t,y)\,dt = 1,$$

или

$$w(x,y) + \int\limits_\xi^x td(t,y)w(t,y)\,dt = \frac{1}{x}, \quad w = \frac{v(x,y)}{x}. \tag{6.15}$$

Отсюда вычисляем

$$w = \frac{1}{\xi^2}\exp\Bigl(\int\limits_x^\xi td(t,y)\,dt\Bigr) - \int\limits_\xi^x \Bigl(\exp\Bigl(\int\limits_x^t sd(s,y)\,ds\Bigr)\Bigr)\frac{dt}{t^2}. \tag{6.16}$$

Легко видеть, что в терминах коэффициентов уравнения (6.10) условия данного варианта имеют место, если

$$A = p(y)\exp(-x), \quad C = -p'(y)\exp(-x), \quad B \equiv D \equiv 0, \quad x_0 > 0. \tag{6.17}$$

В соответствии с (6.15), (6.16) получаем

$$R(x,y,t,\tau)=R(x,y,t)=\omega(x,y,t)-\int\limits_t^x \omega(x,y,s)\,ds,$$

$$\omega(x,y,t)=\frac{x}{t^2}\exp\{p(y)[(1+t)\exp(-t)-(1+x)\exp(-x)]\}.$$

в) $a\equiv b\equiv d\equiv 0$, $c+xe\equiv 0$, $x_0>0$. Роль, аналогичную (6.15), здесь играет

$$w(x,y)-\int\limits_\xi^x\int\limits_\eta^y te(t,\tau)w(t,\tau)\,d\tau dt=\frac{1}{x},\quad w=\frac{v}{x}, \tag{6.18}$$

эквивалентное задаче Гурса с условиями $w(\xi,y)=w(x,\eta)=\frac{1}{\xi}$ для уравнения $w_{xy}-xe(x,y)w=0$. Если $e(x,y)=-m(x)n(y)$, то указанная задача Гурса решается в явном виде [8, формула (1.166)], [50, формула (1.20)], так как функция Римана в данном случае имеет вид [213]

$$J_0\biggl(2\Bigl(\int\limits_t^x \alpha m(\alpha)\,d\alpha\int\limits_\tau^y n(\beta)\,d\beta\Bigr)^{\frac{1}{2}}\biggr).$$

Чтобы получить функцию Римана для уравнения (6.11), остается подставить w в соотношение $R=xw$. Отметим еще, что в терминах коэффициентов уравнения (6.10) наложенные в данном варианте условия будут выполнены, если

$$A\equiv B\equiv 0,\quad C=xm(x)n(y),\quad D=-n(y)[2m(x)+xm'(x)],\quad x_0>0. \tag{6.19}$$

Здесь $m\in C^1[x_0,x_1]$, $n\in C[x_0,y]$.

Таким образом, имеет место

Теорема 6.2. *Решение уравнения* (6.10) *может быть записано в терминах функции Римана для* (6.11). *Если при этом для коэффициентов* (6.10) *имеет место один из наборов представлений* (6.14), (6.17), (6.19), *то указанное решение строится в явном виде.*

6.2. Трехмерное уравнение. Рассмотрим теперь пространственный аналог уравнения (6.2)

$$u(x,y,z)+\int_{x_0}^{x}A(y,z,\xi)u(\xi,y,z)\,d\xi+\int_{y_0}^{y}B(x,z,\eta)u(x,\eta,z)\,d\eta+$$
$$+\int_{z_0}^{z}C(x,y,\zeta)u(x,y,\zeta)\,d\zeta+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}D(\xi,\eta,z)u(\xi,\eta,z)\,d\eta d\xi+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}E(\xi,y,\zeta)u(\xi,y,\zeta)\,d\zeta d\xi+\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}F(x,\eta,\zeta)u(x,\eta,\zeta)\,d\zeta d\eta+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}G(\xi,\eta,\zeta)u(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta d\eta d\xi=\Phi(x,y,z), \quad (6.20)$$

A_{yz}, B_{xz}, C_{xy}, D_z, E_y, F_x, G, $\Phi_{xyz} \in C(\overline{T})$, $T = \{x_0<x<x_1,\, y_0<y<y_1,\, z_0<z<z_1\}$. Роль (6.3) здесь играет уравнение

$$u_{xyz}+au_{xy}+bu_{yz}+cu_{xz}+du_x+eu_y+fu_z+gu=\Phi_{xyz}, \quad (6.21)$$

$$\begin{gathered} a=C,\, b=A,\, c=B,\, d=B_z+C_y+F,\, e=A_z+C_x+E,\\ f=A_y+B_x+D,\, g=A_{yz}+B_{xz}+C_{xy}+D_z+E_y+F_x+G. \end{gathered} \quad (6.22)$$

Из (6.20) следует, что функции $\varphi_1(y,z)=u(x_0,y,z)$, $\varphi_2(x,z)=u(x,y_0,z)$, $\varphi_3(x,y)=u(x,y,z_0)$ удовлетворяют соотношениям

$$\varphi_1(y,z)+\int_{y_0}^{y}B(x_0,z,\eta)\varphi_1(\eta,z)\,d\eta+\int_{z_0}^{z}C(x_0,y,\zeta)\varphi_1(y,\zeta)\,d\zeta+$$
$$+\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}F(x_0,\eta,\zeta)\varphi_1(\eta,\zeta)\,d\zeta d\eta=\Phi(x_0,y,z),$$

$$\varphi_2(x,z)+\int_{x_0}^{x}A(y_0,z,\xi)\varphi_2(\xi,z)\,d\xi+\int_{z_0}^{z}C(x,y_0,\zeta)\varphi_2(x,\zeta)\,d\zeta+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}E(\xi,y_0,\zeta)\varphi_2(\xi,\zeta)\,d\zeta d\xi=\Phi(x,y_0,z),$$

$$\varphi_3(x,y)+\int\limits_{x_0}^{x}A(y,z_0,\xi)\varphi_3(\xi,y)\,d\xi+\int\limits_{y_0}^{y}B(x,z_0,\eta)\varphi_3(x,\eta)\,d\eta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}D(\xi,\eta,z_0)\varphi_3(\xi,\eta)\,d\eta d\xi=\Phi(x,y,z_0), \tag{6.23}$$

которые представляют собой уравнения вида (6.2). Аналог формулы (6.7) для φ_1 имеет вид

$$\varphi_1(y,z)=R_1(y,z_0,y,z)\mu_1(y)+R_1(y_0,z,y,z)\lambda_1(z)+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\left(B(x_0,\beta,z_0)R_1(\beta,z_0,y,z)-\frac{\partial R_1}{\partial\beta}(\beta,z_0,y,z)\right)\mu_1(\beta)\,d\beta+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}\left(C(x_0,y_0,\gamma)R_1(y_0,\gamma,y,z)-\frac{\partial R_1}{\partial\gamma}(y_0,\gamma,y,z)\right)\lambda_1(\gamma)\,d\gamma+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\left[B(x_0,\beta,\gamma)R_1(\beta,\gamma,y,z)\Phi(x_0,\beta,\gamma)\right]_{\gamma=z}^{\gamma=z_0}\,d\beta+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}\left[C(x_0,\beta,\gamma)R_1(\beta,\gamma,y,z)\Phi(x_0,\beta,\gamma)\right]_{\beta=y}^{\beta=y_0}\,d\gamma+\Phi(x_0,y,z)+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\partial^2 R}{\partial\beta\partial\gamma}(\beta,\gamma,y,z)\Phi(x_0,\beta,\gamma)\,d\gamma d\beta, \tag{6.24}$$

$$\lambda_1(z)=\int\limits_{z_0}^{z}C(x_0,y_0,\zeta)\left(\exp\int\limits_{z}^{\zeta}C(x_0,y_0,\zeta_1)\,d\zeta_1\right)\Phi(x_0,y_0,\zeta)\,d\zeta,$$

$$\mu_1(y)=\int\limits_{y_0}^{y}B(x_0,z_0,\eta)\left(\exp\int\limits_{y}^{\eta}B(x_0,z_0,\eta_1)\,d\eta_1\right)\Phi(x_0,\eta,z_0)\,d\eta.$$

Здесь $R_1(y,z,\tau,\theta)$ есть функция Римана для уравнения, получаемого из первого соотношения (6.22) путем применения к нему операции $\partial^2/\partial y\partial z$. Аналогично записываются $\varphi_2(x,z)$, $\varphi_3(x,y)$, через соответствующие $R_2(x,z,t,\theta)$, $R_3(x,y,t,\tau)$. Таким образом, граничные значения задачи Гурса для (6.21) можно считать известными. Подставляя их в формулу решения этой задачи [38] (или [50, с. 28]), получим решение $u(x, y, z)$ уравнения (6.20). Окончательную формулу ввиду ее громоздкости не записываем. Ограничиваемся частным случаем

$$(B \equiv C \equiv F)_{x=x_0} \equiv (A \equiv C \equiv E)_{y=y_0} \equiv (A \equiv B \equiv D)_{z=z_0} \equiv 0,$$

когда все интегралы в (6.23) исчезают:

$$u(x,y,z) = \Phi(x,y,z) - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \frac{\partial^3 R(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma}\Phi(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma d\beta d\alpha -$$

$$-\int_{x_0}^{x} [b(\alpha,y,z)R(\alpha,y,z)\Phi(\alpha,y,z) + b(\alpha,y_0,z_0)R(\alpha,y_0,z_0)\Phi(\alpha,y_0,z_0)]\,d\alpha -$$

$$-\int_{y_0}^{y} [c(x,\beta,z)R(x,\beta,z)\Phi(x,\beta,z) + c(x_0,\beta,z_0)R(x_0,\beta,z_0)\Phi(x_0,\beta,z_0)]\,d\beta -$$

$$-\int_{z_0}^{z} [a(x,y,\gamma)R(x,y,\gamma)\Phi(x,y,\gamma) + a(x_0,y_0,\gamma)R(x_0,y_0,\gamma)\Phi(x_0,y_0,\gamma)]\,d\gamma +$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \{[((bR)_\beta + (cR)_\alpha - fR)\Phi](\alpha,\beta,\gamma)\}_{\gamma=z_0}^{\gamma=z}\,d\beta d\alpha +$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z} \{[((aR)_\alpha + (bR)_\gamma - eR)\Phi]\,(\alpha,\beta,\gamma)\}_{\beta=y_0}^{\beta=y}\,d\gamma d\alpha +$$

$$+\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \{[((aR)_\beta + (cR)_\gamma - dR)\Phi]\,(\alpha,\beta,\gamma)\}_{\alpha=x_0}^{\alpha=x}\,d\gamma d\beta. \tag{6.25}$$

Здесь у функции Римана R для уравнения (6.21) указана только первая тройка аргументов (например, в двойных интегралах это α, β, γ), вторая же тройка всюду есть x, y, z. Конечно, $a, \ldots, f$ следует считать записанными через коэффициенты уравнения (6.20) по формулам (6.22).

В [44] сформулированы 6 наборов требований на коэффициенты уравнения (6.21), с помощью которых можно построить R в явном виде. Для записи этих требований в терминах коэффициентов уравнения (6.20) введем конструкции:

$$
\begin{gathered}
H_1 = A_y - AB + D, \quad H_2 = B_x - AB + D,\\
H_3 = A_z - AC + E, \quad H_4 = C_x - AC + E,\\
H_5 = B_z - BC + F, \quad H_6 = C_y - BC + F,\\
H_7 = A_{yz} + D_z + E_y - A(B_z + C_y + F) + G,\\
H_8 = B_{xz} + D_z + F_x - B(A_z + C_x + E) + G,\\
H_9 = C_{xy} + E_y + F_x - C(A_y + B_x + D) + G.
\end{gathered}
\tag{6.26}
$$

H_k получены подстановкой в h_k из [44] значений (6.22), но при этом внесены изменения в порядок следования "k" (для некоторого соответствия коэффициентов $A, B, \ldots$ алфавитной последовательности). Указанные наборы имеют вид

$$
\begin{aligned}
&1)\, H_1 \equiv H_3 \equiv H_5 \equiv 0,\ H_7 = m_1(x)n_1(y)r_1(z);\\
&2)\, H_2 \equiv H_4 \equiv H_5 \equiv 0,\ H_8 = m_2(x)n_2(y)r_2(z);\\
&3)\, H_1 \equiv H_4 \equiv H_6 \equiv 0,\ H_9 = m_3(x)n_3(y)r_3(z);\\
&4)\, H_1 \equiv H_3 \equiv H_6 \equiv 0,\ H_7 = m_1(x)n_1(y)r_1(z);\\
&5)\, H_2 \equiv H_3 \equiv H_5 \equiv 0,\ H_8 = m_2(x)n_2(y)r_2(z);\\
&6)\, H_2 \equiv H_4 \equiv H_6 \equiv 0,\ H_9 = m_3(x)n_3(y)r_3(z).
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

Последние соотношения в каждом из наборов (6.27) означают существование функций $m_k(x)$, $n_k(y)$, $r_k(z)$, через которые могут быть представлены H_7, H_8, H_9. В [50, с. 43] дополнительно выяснено, что при условии представления первых трех коэффициентов уравнения (6.21) в формах $a = a_0(z) + \lambda xy$, $b = b_0(x) + \lambda yz$, $c = c_0(y) + \lambda xz$, $\lambda = const$ конструкции h_7, h_8, h_9 (в нашем случае это H_7, H_8, H_9) совпадают, а функция R записывается через их общее значение $m(x)n(y)r(z)$. Для коффициентов уравнения (6.20) указанные представления приобретают вид

$$
A = a_1(x) + \lambda yz, \quad B = b_1(y) + \lambda xz, \quad C = c_1(z) + \lambda xy, \tag{6.28}
$$

а функция Римана R дается формулой

$$
R(x, y, z, t, \tau, \theta) = {}_0F_2(1, 1; \sigma) \exp\Bigg(\lambda(xyz - t\tau\theta) + \int\limits_t^x a_1(\alpha)\, d\alpha + \\
+ \int\limits_\tau^y b_1(\beta)\, d\beta + \int\limits_\theta^z c_1(\gamma)\, d\gamma \Bigg), \tag{6.29}
$$

$$\sigma = -\int\limits_t^x m(\alpha)\,d\alpha \int\limits_\tau^y n(\beta)\,d\beta \int\limits_\theta^z r(\gamma)\,d\gamma,$$

где ${}_0F_2(1,1;\sigma)$ — обобщенная гипергеометрическая функция [6, с. 183]. Однако, формулы (6.29) недостаточно для получения явного решения уравнения (6.20): нужно иметь еще явный вид φ_1, φ_2, φ_3. Конечно, при этом следует сохранить (6.27), (6.28), ибо они обеспечили вычисление R. Попутно заметим, что из условий (6.28) имеем

$$A_y \equiv B_x, \quad A_z \equiv C_x, \quad C_y \equiv B_z, \tag{6.30}$$

откуда следуют тождества

$$H_1 \equiv H_2, \quad H_3 \equiv H_4, \quad H_5 \equiv H_6. \tag{6.31}$$

При получении нужного вида φ_1, φ_2, φ_3 достаточно знать функции Римана R_1, R_2, R_3 для уравнений, находящихся по отношению к (6.23) в том же соответствии, в котором было (6.3) по отношению к (6.2). Другими словами, достаточно выполнения для (6.23) тождеств типа (6.8):

$$\begin{array}{l} (C_y - B_z)_{x=x_0} \equiv 0, \quad H_5(x_0,y,z) \equiv p_1(y)q_1(z); \\ (A_z - C_x)_{y=y_0} \equiv 0, \quad H_4(x,y_0,z) \equiv p_2(x)q_2(z); \\ (A_y - B_x)_{z=z_0} \equiv 0, \quad H_1(x,y,z_0) \equiv p_3(x)q_3(y). \end{array} \tag{6.32}$$

В силу (6.30) левая колонка здесь выполняется. Правая же колонка может выполняться вместе с (6.27) лишь при условиях $p_k q_k \equiv 0$ ($k = 1,\ 2,\ 3$), вследствие чего (см. (6.9))

$$\begin{aligned} R_1(y,z,\tau,\theta) &= \exp\left(\lambda x_0(yz - \tau\theta) + \int\limits_\tau^y b_1(\eta)\,d\eta + \int\limits_\theta^z c_1(\zeta)\,d\zeta\right), \\ R_2(x,z,t,\theta) &= \exp\left(\lambda y_0(xz - t\theta) + \int\limits_t^x a_1(\xi)\,d\xi + \int\limits_\theta^z c_1(\zeta)\,d\zeta\right), \\ R_3(x,y,t,\tau) &= \exp\left(\lambda z_0(xy - t\tau) + \int\limits_t^x a_1(\xi)\,d\xi + \int\limits_\tau^y b_1(\eta)\,d\eta\right). \end{aligned} \tag{6.33}$$

Тождества из правой колонки в (6.32) при $p_k q_k \equiv 0$ заведомо выполняются в предположениях

$$H_1 \equiv H_4 \equiv H_5 \equiv 0, \tag{6.34}$$

влекущих за собой в силу (6.31) тождества $H_2 \equiv H_3 \equiv H_6 \equiv 0$. Поэтому все шесть вариантов условий, наложенных на $H_1, \ldots, H_6$ в (6.27), выполняются одновременно. Условия (6.34) запишем еще в исходных данных:

$$D \equiv AB - A_y, \quad E \equiv AC - C_x, \quad F \equiv BC - B_z. \tag{6.35}$$

Для получения искомого явного решения уравнения (6.20) остается подставить R_k в формулы типа (6.7), соответствующие (6.23), а затем вычисленные значения φ_k и функцию R вписать в формулу решения задачи Гурса из [50, с. 28].

Таким образом, доказана

Теорема 6.3. *Решение уравнения* (6.20) *может быть записано в терминах функции Римана R для* (6.21) *и аналогичных функций R_1, R_2, R_3, отвечающих уравнениям* (6.23). *Если при этом первые три коэффициента имеют представления* (6.28), *следующие три даются формулами* (6.35), *а оказывающиеся равными друг другу H_7, H_8, H_9 имеют вид $m(x)n(y)r(z)$, то решение уравнения* (6.20) *записывается в квадратурах через экспоненты и обобщенную гипергеометрическую функцию.*

Глава 5
Системы уравнений

В данной главе речь идет, в основном, о методе Римана и его приложениях для системы

$$u_{lx_j} = \sum_{i=1}^{m} a_{li}(x_1, \ldots, x_n) u_i + f_l(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 \leqslant l \leqslant m = \sum_{i=1}^{n} k_i, \tag{6.36}$$

если $1 \leqslant l \leqslant k_1$, то $j = 1$, если $k_1 + 1 \leqslant l \leqslant k_1 + k_2$, то $j = 2$, если $k_1 + k_2 + 1 \leqslant l \leqslant k_1 + k_2 + k_3$, то $j = 3, \ldots$, если $\sum_{i=1}^{n-1} k_i + 1 \leqslant l \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i$, то $j = n$.

Ранее ряд авторов исследовал систему уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n) u_k + f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.37}$$

которая представляет интерес, в частности, с точки зрения применения получаемых результатов к изучению важных в теоретическом и практическом отношении дифференциальных уравнений смешанного типа (например [8], [13], [14], [92], [144], [145], [146], [166], [212], [50, глава 4]).

Аналогичная система высокого порядка имеет, очевидно, вид

$$\frac{\partial^{k_s} v_s}{\partial x_s^{k_s}} = f_s\Big(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, \frac{\partial^{k_1-1} v_1}{\partial x_s^{k_1-1}}, \ldots, v_n, \ldots, \frac{\partial^{k_n-1} v_n}{\partial x_s^{k_n-1}}\Big), \tag{6.38}$$

$$s = 1, \ldots, n,$$

где f_s — линейные относительно аргументов $v_1, \ldots, \frac{\partial^{k_n-1} v_n}{\partial x_s^{k_n-1}}$ функции. Путем введения новых искомых функций можно представить (6.38) как частный случай системы (6.36).

Метод Римана для систем дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными был разработан Э. Хольмгреном [227]. В работе Б. Н. Бурмистрова [14] результаты Э. Хольмгрена развивались с целью решения задачи Коши, возникшей в связи с исследованием граничной задачи для системы уравнений смешанного типа на плоскости.

Вместе с тем многие авторы исследовали системы дифференциальных уравнений с частными производными, не прибегая к схеме, предложенной

Э. Хольмгреном. Так, в работах Т. В. Чекмарева [209], [210], [211], [212] решение задачи Гурса для (6.37) с условиями

$$u_i|_{x_i=x_i^0} = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.39}$$

строится методом последовательных приближений. На полученных результатах основывается вывод формул решений задач Коши и Дарбу. Отметим также работу [9], в которой были найдены интегральные представления решений задач Коши и Гурса для (6.37) при $n = 2$, позволяющие установить их структурные свойства.

Таким образом, система (6.36) может рассматриваться как обобщение ряда частных случаев, изучавшихся в различных аспектах ранее.

§ 1. Метод Римана

1.1. Существование и единственность решений задач Гурса и Коши. Рассматривается система уравнений с кратными характеристиками

$$u_{lx_j} = \sum_{i=1}^{m} a_{li}(x_1, \ldots, x_n)u_i + f_l(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 \leqslant l \leqslant m = \sum_{i=1}^{n} k_i, \tag{1.1}$$

если $1 \leqslant l \leqslant k_1$, то $j = 1$, если $k_1 + 1 \leqslant l \leqslant k_1 + k_2$, то $j = 2$, если $k_1 + k_2 + 1 \leqslant l \leqslant k_1 + k_2 + k_3$, то $j = 3$,…, если $\sum_{i=1}^{n-1} k_i + 1 \leqslant l \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i$, то $j = n$. Далее всюду предполагается, что все a_{li}, f_l непрерывны в замыкании рассматриваемой области. Будем называть регулярным в области D решение (1.1) непрерывное в D вместе со всеми входящими в систему производными: $u_l \in C(D)$, $u_{lx_j} \in C(D)$, $l = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^{j-1} k_i + 1 \leqslant l \leqslant \sum_{i=1}^{j} k_i$.

Пусть $G = \{x_i^0 < x_i < x_i^1, \, i = \overline{1, n}\}$. Обозначим через X_j грани G при $x_j = x_j^0$.

Задача Гурса. *Найти регулярное в области G решение системы* (1.1), *удовлетворяющее условиям*

$$u_l|_{\overline{X}_j} = \varphi_l(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n), \quad l = \overline{1, m}, \tag{1.2}$$

$\varphi_l \in C(\overline{X}_j)$, *связь между l и j дается формулой* (1.1).

Решение задачи Гурса существует и единственно. Действительно, сведем (1.1) с условиями (1.2) к системе интегральных уравнений

$$u_l = \varphi_l + \int\limits_{x_j^0}^{x_j} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{li}u_i + f_l \right) d\alpha_j, \quad l = \overline{1, m}. \tag{1.3}$$

Решение системы (1.3) существует и единственно в $C(\overline{G})$ (это можно доказать методом последовательных приближений [73, с. 59]). Очевидно, (1.3) равносильна задаче Гурса (1.1), (1.2).

Перейдем к постановке задачи Коши. В ориентированном системой координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространстве R^n рассмотрим поверхность S класса C^1, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x_1 & = & x_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ x_2 & = & x_2(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x_n & = & x_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \end{cases} \quad \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \mu_1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \mu_{n-1}} \end{pmatrix} = n - 1,$$

где $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) \in R^{n-1}$. Считаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость не параллельную ни одной из координатных осей. Через точку $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ проведем плоскости $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$. Обозначим S^0 участок поверхности S, вырезанный этими плоскостями, D_0 — конечную область пространства R^n, ограниченную плоскостями $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ и поверхностью S^0, ∂D_0 — край D_0. Считаем ориентацию области D_0 положительной.

Задача Коши. *Найти регулярное в D_0 решение системы* (1.1)*, удовлетворяющее на поверхности S условиям*

$$u_l|_{\overline{S^0}} = u_{l0}, \quad l = \overline{1, m}, \quad u_{l0} \in C(\overline{S^0}). \tag{1.4}$$

Отметим, что поверхность S допускает различные формы записи через переменные $x_1,\ldots,$ x_n: $x_1 = \sigma_1(x_2, \ldots, x_n)$, $x_2 = \sigma_2(x_1, x_3, \ldots, x_n),\ldots,$ $x_n = \sigma_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Поэтому мы можем считать, что функции u_{l0} зависят от любого набора $(n-1)$ переменных из числа $x_1,\ldots,$ x_n.

Существование и единственность решения задачи Коши доказывается так же, как и в случае задачи Гурса. Для определенности будем считать, что в области D_0 $x_1 > \sigma_1(x_2, \ldots, x_n)$, $x_2 > \sigma_2(x_1, x_3, \ldots, x_n),\ldots,$ $x_n > \sigma_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Тогда система (1.1) с условиями (1.4) сводится к системе интегральных уравнений

$$u_l = u_{l0} + \int\limits_{\sigma_j}^{x_j} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{li} u_i + f_l \right) d\alpha_j, \quad l = \overline{1, m}, \tag{1.5}$$

связь между l и j снова дается формулой (1.1).

Как уже было сказано выше, решение (1.5) существует и единственно в $C(\overline{D}_0)$. Система (1.5) равносильна задаче Коши (1.1), (1.4).

Рассмотрим еще одну задачу, которую назовем смешанной, так как на одной части границы рассматриваемой области задаются условия Гурса, а на другой — условия Коши. Рассмотрим область G_0, которая получена усечением характеристического параллелепипеда $G = \{x_i^0 < x_i < x_i^1,\ i = \overline{1,n}\}$, поверхностью S (эта поверхность была описана при постановке задачи Коши) со стороны точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Для определенности полагаем $0 \leqslant x_i^0 < x_i^1$, $i = \overline{1,n}$. Обозначим через X_i, часть границы G_0, лежащую в плоскости $x_i = x_i^0$, $i = \overline{1,n}$.

1.2. Построение решений задач в терминах матрицы Римана. Перепишем (1.1) в векторно-матричной форме

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{x_i} - \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathrm{colon}(u_1, \ldots, u_m).$$

Здесь $\mathbf{A}_i$ — постоянные диагональные матрицы, $\mathbf{A}_i = \mathrm{diag}(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$, причем $\alpha_s^1 = 1$ при $1 \leqslant s \leqslant k_1$, $\alpha_s^2 = 1$ при $k_1 + 1 \leqslant s \leqslant k_1 + k_2$, $\ldots$, $\alpha_s^n = 1$ при $\sum_{i=1}^{n-1} k_i + 1 \leqslant s \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i$, остальные диагональные элементы матриц $\mathbf{A}_i$ равны нулю; $\mathbf{B} = (a_{li})$, a_{li} — коэффициенты системы (1.1), $l = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,m}$; $\mathbf{F} = \mathrm{colon}(f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Введем матрицу Римана $\mathbf{R} = \mathrm{colon}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_m)$, где $\mathbf{R}_i(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = (r_{i1}, \ldots, r_{im})$, $i = \overline{1,m}$, являются решениями систем

$$r_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{ij} - \int_{\xi_p}^{x_p} \Big(\sum_{q=1}^{m} a_{qj}(x_1, \ldots, x_{p-1}, \eta_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) \times$$

$$\times r_{iq}(x_1, \ldots, x_{p-1}, \eta_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) \Big) d\eta_p, \quad (1.6)$$

$$\sum_{q=1}^{p-1} k_q + 1 \leqslant j \leqslant \sum_{q=1}^{p} k_q, \quad p = \overline{1,n},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, a_{qj} — коэффициенты системы (1.1). Решения систем (1.6) при каждом i существуют и единственны в классе непрерывных функций. Дифференцируя (1.6) получаем, что по первым n аргументам $(x_1, \ldots, x_n)$ матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряженной к (1.1) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{V}\mathbf{A}_i)_{x_i} - \mathbf{V}\mathbf{B}.$$

Для любого вектора $\mathbf{U} \in C^1$ справедливо тождество

$$\mathbf{R}L(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U})_{x_i}. \tag{1.7}$$

Действительно

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U})_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U}_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i)_{x_i}\mathbf{U} =$$

$$= \mathbf{R}L(\mathbf{U}) + \mathbf{RBU} + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i)_{x_i}\mathbf{U} =$$

$$= \mathbf{R}L(\mathbf{U}) - L^*(\mathbf{R})\mathbf{U} = \mathbf{R}L(\mathbf{U}).$$

Справедлива общая формула Стокса [83, с. 246]

$$\int_H \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k =$$

$$= \int_{\partial H} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_k. \tag{1.8}$$

Перейдем теперь к выводу формул решения задач.

1.2.1. Задача Гурса. Пусть $M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in G$. Считая в тождестве (1.7) матрицу $\mathbf{U}$ решением системы (1.1), проинтегрируем (1.7) по области $G_1 = \{x_i^0 < x_i < \xi_i,\ i = \overline{1,n}\}$

$$\int_{G_1} \mathbf{RF} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{G_1} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U})_{x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

По общей формуле Стокса

$$\int_{G_1} \mathbf{RF} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{\partial G_1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{1.9}$$

Найдем значение $u_k(M)$. Пусть в (1.1) входит производная функции u_k по переменной x_s. Ясно, что номера s и k связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^{s-1} k_i + 1 \leqslant k \leqslant \sum_{i=1}^{s} k_i.$$

Запишем k-ю строку (1.9)

$$\int\limits_{G_1}\left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki}f_i\right)dx_1\dots dx_n =$$
$$= \int\limits_{\partial G_1}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n. \tag{1.10}$$

Так как ∂G_1 — граница параллелепипеда, формула (1.10) принимает вид

$$\int\limits_{G_1}\left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki}f_i\right)dx_1\dots dx_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_1^0}^{\xi_1}\dots\int\limits_{x_{i-1}^0}^{\xi_{i-1}}\int\limits_{x_{i+1}^0}^{\xi_{i+1}}\dots\int\limits_{x_n^0}^{\xi_n}\left(\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\right)\Bigg|_{x_i^0}^{\xi_i} dx_n\dots dx_{i+1}dx_{i-1}\dots dx_1. \tag{1.11}$$

Из системы (1.6) следует, что входящие в правую часть (1.11) функции r_{kj} удовлетворяют соотношениям

$$r_{kj}(x_1,\dots,x_{i-1},\xi_i,x_{i+1},\dots,x_n;\xi_1,\dots,\xi_n)\equiv\begin{cases}1,\ j=k,\\ 0,\ j\neq k,\end{cases} \tag{1.12}$$

где $\sum_{q=1}^{i-1}k_q + 1 \leqslant j \leqslant \sum_{q=1}^{i}k_q$. Левая часть (1.11) и функции $u_j(x_1,\dots,x_{i-1},x_i^0,x_{i+1},\dots,x_n)$, $\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1\leqslant j\leqslant\sum_{q=1}^{i}k_q$, $j=\overline{1,n}$, известны (если считать известной матрицу $\mathbf{R}$). Поэтому (1.11) можно переписать в виде

$$\int\limits_{x_1^0}^{\xi_1}\dots\int\limits_{x_{s-1}^0}^{\xi_{s-1}}\int\limits_{x_{s+1}^0}^{\xi_{s+1}}\dots\int\limits_{x_n^0}^{\xi_n} u_k(x_1,\dots,x_{s-1},\xi_s,x_{s+1},\dots,x_n)dx_n\dots$$
$$\dots dx_{s+1}dx_{s-1}\dots dx_1 = \Phi_k(\xi_1,\dots,\xi_n)$$

с известной $\Phi_k(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Отсюда решение задачи Гурса получается в виде

$$u_k(\xi_1,\dots,\xi_n)=\frac{\partial^{n-1}\Phi_k(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial\xi_1\dots\partial\xi_{s-1}\partial\xi_{s+1}\dots\partial\xi_n}. \tag{1.13}$$

Из предыдущих рассуждений следует

Теорема 1.1. *Решение задачи Гурса* (1.1), (1.2) *существует, единственно и дается формулой* (1.13).

1.2.2. Задача Коши. Через точку $M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in D_0$ проведем плоскости $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \ldots$, $x_n = \xi_n$. Обозначим D_1 часть D_0, ограниченную плоскостями $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2,\ldots$, $x_n = \xi_n$; D_{1i} — пересечение D_1 с плоскостью $x_i = \xi_i$. Тогда $\partial D_1 = S_1^0 \cup (\cup_{i=1}^n D_{1i})$, где S_1^0 является частью S^0. Снова считая в тождестве (1.7) $\mathbf{U}$ решением системы (1.1), проинтегрируем (1.7) по области D_1. Согласно общей формуле Стокса получаем

$$\int\limits_{D_1} \mathbf{RF} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{\partial D_1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \mathbf{R} \mathbf{A}_i \mathbf{U} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n. \quad (1.14)$$

Построчная запись (1.14) дает

$$\int\limits_{D_1} \left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki} f_i \right) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \int\limits_{D_{1l}} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1} k_q + 1}^{\sum_{q=1}^{i} k_q} r_{kj} u_j \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n +$$

$$+ \int\limits_{S_1^0} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1} k_q + 1}^{\sum_{q=1}^{i} k_q} r_{kj} u_j \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Очевидно

$$\int\limits_{D_{1l}} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1} k_q + 1}^{\sum_{q=1}^{i} k_q} r_{kj} u_j \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n =$$

$$= \int\limits_{D_{1l}} (-1)^{l-1} \left(\sum_{j=\sum_{q=1}^{l-1} k_q + 1}^{\sum_{q=1}^{l} k_q} r_{kj} u_j \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{l-1} \wedge dx_{l+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Отсюда

$$\int\limits_{D_1}\left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki}f_i\right)dx_1\dots dx_n =$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\int\limits_{D_{1l}}(-1)^{l-1}\left(\sum_{j=\sum_{q=1}^{l-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{l}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{l-1}\wedge dx_{l+1}\wedge\dots\wedge dx_n+$$

$$+\int\limits_{S_1^0}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n. \tag{1.15}$$

В силу (1.12) формулу (1.15) можно записать в виде

$$\int\limits_{D_{1s}} u_k dx_1\dots dx_{s-1}dx_{s+1}\dots dx_n = \Psi_k(\xi_1,\dots,\xi_n), \tag{1.16}$$

где Ψ_k выражается через элементы $\mathbf{R}$ и данные Коши. Преобразуя интеграл по $(n-1)$-мерному многообразию D_{1s} в повторный и дифференцируя (1.16) по $\xi_1,\dots,\xi_{s-1},\xi_{s+1},\dots,\xi_n$, получим искомое решение задачи Коши $u_k(\xi_1,\dots,\xi_n)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1.2. *Решение задачи Коши* (1.1), (1.4) *существует, единственно и определяется по формуле* (1.16).

§ 2. Система с двукратными доминирующими частными производными в R^2

В данном параграфе остановимся на исследовании системы с двукратными доминирующими производными с двумя независимыми переменными.

Речь идет о системе

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1(x,y)v_x + b_1(x,y)u + c_1(x,y)v + f_1(x,y), \\ v_{yy} = a_2(x,y)u_y + b_2(x,y)u + c_2(x,y)v + f_2(x,y). \end{cases} \tag{2.1}$$

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области D плоскости (x, y) выполняются включения a_1, $a_2 \in C^2$, b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, $f_2 \in C^1$. Решение (2.1) класса u, $v \in C^1(D)$, u_{xx}, $v_{yy} \in C(D)$ назовем регулярным в D.

К системе (2.1) подстановками

$$u^* = \exp\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} a_1^*(\alpha, y)\,d\alpha\Big)u, \quad v^* = \exp\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{y_0}^{y} b_2^*(x, \beta)\,d\beta\Big)v$$

сводится система вида

$$\begin{cases} u^*_{xx} = a_1^*(x,y)u^*_x + b_1^*(x,y)v^*_x + c_1^*(x,y)u^* + d_1^*(x,y)v^* + f_1^*(x,y), \\ v^*_{yy} = a_2^*(x,y)u^*_y + b_2^*(x,y)v^*_y + c_2^*(x,y)u^* + d_2^*(x,y)v^* + f_2^*(x,y). \end{cases}$$

2.1. Теоремы существования и единственности. Сформулируем для системы (2.1) две задачи.

2.1.1. Основная характеристическая задача. Рассмотренная ниже задача названа основной, потому что она играет существенную роль при исследовании других характеристических задач.

Задача. *В области* $G = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ *найти регулярное решение* (2.1), *удовлетворяющее условиям*

$$\begin{matrix} u(x_0, y) = \varphi_1(y), & (u_x - a_1 v)(x_0, y) = \varphi_2(y), \\ v(x, y_0) = \psi_1(x), & (v_y - a_2 u)(x, y_0) = \psi_2(x), \end{matrix} \tag{2.2}$$

$\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y) \in C^1([y_0, y_1])$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

Докажем существование и единственность решения данной задачи. Преобразуем (2.1) к виду

$$\begin{cases} u_x = u_1 + a_1 v, \\ u_{1x} = b_1 u + c_{10} v + f_1, \\ v_y = a_2 u + v_1, \\ v_{1y} = b_{20} u + c_2 v + f_2, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $c_{10} = c_1 - a_{1x}$, $b_{20} = b_2 - a_{2y}$. Очевидно, из (2.3) и (2.2) следует система

$$\begin{cases} u(x,y) = \varphi_1(y) + \int\limits_{x_0}^{x} (u_1 + a_1 v)(\alpha, y) d\alpha, \\ u_1(x,y) = \varphi_2(y) + \int\limits_{x_0}^{x} (b_1 u + c_{10} v + f_1)(\alpha, y) d\alpha, \\ v(x,y) = \psi_1(x) + \int\limits_{y_0}^{y} (a_2 u + v_1)(x, \beta) d\beta, \\ v_1(x,y) = \psi_2(x) + \int\limits_{y_0}^{y} (b_{20} u + c_2 v + f_2)(x, \beta) d\beta. \end{cases} \tag{2.4}$$

Решение системы (2.4) существует, единственно и принадлежит классу u, $v \in C^1(G)$, u_{xx}, $v_{yy} \in C(G)$. Очевидно, эта система эквивалентна характеристической задаче. Итак, справедлива

Теорема 2.1. *Если в замыкании области G выполняются включения a_1, $a_2 \in C^2$, b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, $f_2 \in C^1$, то решение основной характеристической задачи существует и единственно.*

2.1.2. Задача Коши. Выше уже рассматривалась задача Коши для системы (1.1). Необходимость рассмотрения здесь задачи Коши для (2.1) объясняется тем, что в постановке этой задачи появляются различия со случаем системы (1.1), связанные с различным порядком уравнений, входящих в системы (1.1) и (2.1) (это приводит, в частности, к появлению в граничных условиях для (2.1) значений производных искомых функций, в то время как для (1.1) нужно задавать лишь граничные значения самих искомых функций). В результате возникают различия в доказательствах и формулировках теорем существования и единственности, а также в методике применения метода Римана и в виде итоговых формул, дающих решение задачи. Поэтому целесообразно заново изучить задачу Коши для (2.1), а не ссылаться на соответствующий результат для (1.1).

Пусть D — треугольная область плоскости (x, y), ограниченная характеристиками $x = x_1$, $y = y_1$, $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, и отрезком кривой Σ: $y = \sigma(x)$, $\sigma'(x) < 0$ (Σ — кривая класса C^2). Для определенности положим $y_1 = \sigma(0)$, $\sigma(x_1) = 0$.

Задача. *Найти регулярное в D решение* (2.1), *удовлетворяющее условиям*

$$u|_\Sigma = u_0(x), \quad v|_\Sigma = v_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = u_{10}(x), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Sigma = v_{10}(x), \tag{2.5}$$

$\vec{n}$ *— внешняя нормаль к* Σ, u_0, $v_0 \in C^2([0, x_1])$, u_{10}, $v_{10} \in C^1([0, x_1])$.

Уравнение кривой Σ может быть записано также в виде $x = \sigma^{-1}(y)$. Ясно, что вместо условий (2.5) могут быть заданы эквивалентные им условия

$$u|_\Sigma = u_0^*(y), \quad v|_\Sigma = v_0^*(y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = u_{10}^*(y), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Sigma = v_{10}^*(y).$$

Докажем существование и единственность решения задачи Коши. Сведем задачу (2.1), (2.5) к системе интегральных уравнений. Аналогично случаю основной характеристической задачи получаем

$$\begin{cases} u(x,y) = u_0^*(y) + \int\limits_{\sigma^{-1}(y)}^{x} (u_1 + a_1 v)(\alpha, y)d\alpha, \\ u_1(x,y) = \overline{u}_1^*(y) + \int\limits_{\sigma^{-1}(y)}^{x} (b_1 u + c_{10} v + f_1)(\alpha, y)d\alpha, \\ v(x,y) = v_0(x) + \int\limits_{\sigma(x)}^{y} (a_2 u + v_1)(x, \beta)d\beta, \\ v_1(x,y) = \overline{v}_1(x) + \int\limits_{\sigma(x)}^{y} (b_{20} u + c_2 v + f_2)(x, \beta)d\beta. \end{cases} \tag{2.6}$$

Здесь

$$\overline{u}_1^*(y) = u_1(\sigma^{-1}(y), y) = \\ = u_x(\sigma^{-1}(y), y) - a_1(\sigma^{-1}(y), y)v(\sigma^{-1}(y), y),$$

$$\overline{v}_1(x) = v_1(x, \sigma(x)) = \\ = v_y(x, \sigma(x)) - a_2(x, \sigma(x))u(x, \sigma(x)).$$

Функции $\overline{u}_1^*(y)$, $\overline{v}_1(x)$ определяются из условий Коши (2.5). Действительно, на кривой Σ выполняются соотношения [16, с. 254]

$$\begin{gathered} u_x \sigma^{-1\prime} + u_y = u_{0y}^*, \quad u_x n_1 + u_y n_2 = u_{10}^*, \\ v_x + v_y \sigma' = v_{0x}, \quad v_x n_1 + v_y n_2 = v_{10}, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где $(n_1, n_2) = \vec{n}$ — единичный вектор нормали к кривой Σ,

$$n_1 = \frac{\sigma'}{\Delta}, \quad n_2 = -\frac{1}{\Delta}, \quad \Delta = \sqrt{1 + (\sigma')^2}.$$

Система (2.7) позволяет по данным Коши определить $u_x(\sigma^{-1}(y), y)$ и $v_y(x, \sigma(x))$, следовательно $\overline{u}_1^*(y)$, $\overline{v}_1(x)$ известны в силу (2.7).

Решение системы (2.6) существует и единственно в классе непрерывных функций. Кроме того, ясно, что u, $v \in C^1(D)$, u_{xx}, $v_{yy} \in C(D)$. Покажем, что эта система эквивалентна задаче Коши. Система (2.6) является следствием задачи (2.1), (2.5). Обратно, дифференцируя по x последовательно первое и второе уравнения (2.6), получаем первое уравнение (2.1). Кроме того, из первого уравнения (2.6) следует, что $u|_\Sigma = u_0^*(y)$, а из второго — $u_1|_\Sigma = \overline{u}_1^*(y) = (u_x - a_1 v)|_\Sigma$. Аналогично, из третьего и четвертого уравнений (2.6) получаем второе уравнение (2.1) и условия $v|_\Sigma = v_0(x)$, $v_1|_\Sigma = \overline{v}_1(x) = (v_y - a_2 u)|_\Sigma$. Ясно, что из полученных четырех условий на кривой Σ определятся $u_x|_\Sigma$ и $v_y|_\Sigma$. В силу (2.7) задание $u_x|_\Sigma$ и $v_y|_\Sigma$ эквивалентно заданию третьего и четвертого условий (2.5). Таким образом, решение системы (2.6) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (2.1) и условиям (2.5).

Теорема 2.2. *Если в замыкании области D выполняются включения a_1, $a_2 \in C^2$, b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, $f_2 \in C^1$, то решение задачи Коши существует и единственно.*

2.2. Построение решений сформулированных задач. Перепишем (2.3) в векторно-матричной форме

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{U}_x + \mathbf{B}\mathbf{U}_y - \mathbf{C}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathrm{colon}(u, u_1, v, v_1), \tag{2.8}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & 0 \\ b_1 & 0 & c_{10} & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 \\ b_{20} & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \mathrm{colon}(0, f_1, 0, f_2).$$

Введем матрицу Римана $\mathbf{R} = \mathrm{colon}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4)$, где векторы $\mathbf{R}_i(x, y, \xi, \eta) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4})$, $i = \overline{1, 4}$, являются решениями систем

$$\begin{cases} r_{i1}(x, y) = \delta_{i1} - \int\limits_{\xi}^{x} (b_1 r_{i2} + a_2 r_{i3} + b_{20} r_{i4})(\alpha, y) d\alpha, \\ r_{i2}(x, y) = \delta_{i2} - \int\limits_{\xi}^{x} r_{i1}(\alpha, y) d\alpha, \\ r_{i3}(x, y) = \delta_{i3} - \int\limits_{\eta}^{y} (a_1 r_{i1} + c_{10} r_{i2} + c_2 r_{i4})(x, \beta) d\beta, \\ r_{i4}(x, y) = \delta_{i4} - \int\limits_{\eta}^{y} r_{i3}(x, \beta) d\beta, \end{cases} \tag{2.9}$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Решения систем (2.9) существуют и единственны в классе непрерывных функций. Очевидно, что R по первой паре аргументов удовлетворяет сопряженной к (2.8) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -(\mathbf{VA})_x - (\mathbf{VB})_y - \mathbf{VC}.$$

Имеет место тождество

$$\mathbf{R}L(\mathbf{U}) = (\mathbf{RAU})_x + (\mathbf{RBU})_y. \tag{2.10}$$

2.2.1. Решение основной характеристической задачи. В описанной выше области G возьмем произвольную точку $M(\xi, \eta)$. Вычислим значение $\mathbf{U}(\xi, \eta)$. Первая строка (2.10) дает

$$r_{12} f_1 + r_{14} f_2 = (r_{11} u + r_{12} u_1)_x + (r_{13} v + r_{14} v_1)_y, \tag{2.11}$$

где $r_{1j} = r_{1j}(x, y, \xi, \eta)$, остальные функции зависят от (x, y). Интегрируем (2.11) по прямоугольнику $G_1 = \{x_0 \leqslant x \leqslant \xi,\ y_0 \leqslant y \leqslant \eta\}$:

$$\iint\limits_{G_1} (r_{12} f_1 + r_{14} f_2)(x, y, \xi, \eta) dx dy = \int\limits_{\Gamma} (r_{11} u + r_{12} u_1)(x, y, \xi, \eta) dy -$$

$$- (r_{13} v + r_{14} v_1)(x, y, \xi, \eta) dx,$$

Γ — граница G_1. Отсюда

$$\int\limits_{y_0}^{\eta}(r_{11}u+r_{12}u_1)(\xi,y,\xi,\eta)dy+\int\limits_{x_0}^{\xi}(r_{13}v+r_{14}v_1)(x,\eta,\xi,\eta)dx=$$
$$=\int\limits_{x_0}^{\xi}(r_{13}v+r_{14}v_1)(x,y_0,\xi,\eta)dx+\int\limits_{y_0}^{\eta}(r_{11}u+r_{12}u_1)(x_0,y,\xi,\eta)dy+$$
$$+\iint\limits_{G_1}(r_{12}f_1+r_{14}f_2)(x,y,\xi,\eta)dxdy. \quad (2.12)$$

В силу (2.9)

$$r_{11}(\xi,y,\xi,\eta)\equiv 1, \quad r_{12}(\xi,y,\xi,\eta)=r_{13}(x,\eta,\xi,\eta)=r_{14}(x,\eta,\xi,\eta)\equiv 0. \quad (2.13)$$

В правой части (2.12) стоит известная функция $g_1(\xi,\eta)$ (если, конечно, известны r_{1j}, $j=\overline{1,4}$). Окончательно получаем

$$u(\xi,\eta)=\frac{\partial g_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}. \quad (2.14)$$

Аналогично

$$\int\limits_{x_0}^{\xi} r_{33}v(x,\eta,\xi,\eta)dx=$$
$$=\int\limits_{x_0}^{\xi}(r_{33}v+r_{34}v_1)(x,y_0,\xi,\eta)dx+\int\limits_{y_0}^{\eta}(r_{31}u+r_{32}u_1)(x_0,y,\xi,\eta)dy+$$
$$+\iint\limits_{G_1}(r_{32}f_1+r_{34}f_2)(x,y,\xi,\eta)dx\,dy,$$

откуда, обозначая правую часть равенства через $g_2(\xi,\eta)$, получаем

$$v(\xi,\eta)=\frac{\partial g_2(\xi,\eta)}{\partial\xi}. \quad (2.15)$$

Формулы (2.14), (2.15) дают решение основной характеристической задачи.

2.2.2. Решение задачи Коши. В описанной выше треугольной области D возьмем точку $M(\xi,\eta)$. Пусть $y_2=\sigma(\xi)$, $\eta=\sigma(x_2)$, а $D_{\xi\eta}$ и $\Sigma_{\xi\eta}$ —

части D и Σ, лежащие между характеристиками $x = \xi$, $y = \eta$. Интегрируя (2.11) по $D_{\xi\eta}$ получаем

$$\int\limits_{y_2}^{\eta} (r_{11}u + r_{12}u_1)(\xi, y, \xi, \eta)dy + \int\limits_{x_2}^{\xi} (r_{13}v + r_{14}v_1)(x, \eta, \xi, \eta)dx =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_{\xi\eta}} (r_{13}v + r_{14}v_1)(x, y, \xi, \eta)dx - (r_{11}u + r_{12}u_1)(x, y, \xi, \eta)dy +$$

$$+ \iint\limits_{D_{\xi\eta}} (r_{12}f_1 + r_{14}f_2)(x, y, \xi, \eta)dxdy. \quad (2.16)$$

Входящие в интеграл по $\Sigma_{\xi\eta}$ величины определяются через условия Коши (2.5), поскольку справедливы соотношения (2.7).

В силу (2.13) из (2.16) получаем

$$u(\xi, \eta) = \frac{\partial h_1(\xi, \eta)}{\partial \eta},$$

где $h_1(\xi, \eta)$ — правая часть (2.16). Все значения функций u, u_1, v, v_1, входящие в $h_1(\xi, \eta)$ определяются по условиям Коши. Аналогично

$$v(\xi, \eta) = \frac{\partial h_2(\xi, \eta)}{\partial \xi},$$

$$h_2(\xi, \eta) = \int\limits_{\Sigma_{\xi\eta}} (r_{33}v + r_{34}v_1)(x, y, \xi, \eta)dx - (r_{31}u + r_{32}u_1)(x, y, \xi, \eta)dy +$$

$$+ \iint\limits_{D_{\xi\eta}} (r_{32}f_1 + r_{34}f_2)(x, y, \xi, \eta)dx\, dy.$$

Покажем, что найденные функции удовлетворяют условиям Коши. Отметим, что полученные нами значения $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$, а также определяемые из аналогичных формул значения $u_1(\xi, \eta)$, $v_1(\xi, \eta)$, удовлетворяют на Σ условиям

$$\begin{cases} u|_\Sigma = u_0(x), \quad v|_\Sigma = v_0(x), \\ u_1|_\Sigma = u_x(x, \sigma(x)) - a_1(x, \sigma(x))v_0(x), \\ v_1|_\Sigma = v_y(x, \sigma(x)) - a_2(x, \sigma(x))u_0(x). \end{cases} \quad (2.17)$$

Чтобы доказать, что найденные нами функции u, v удовлетворяют (2.5), осталось показать, что по (2.17) могут быть восстановлены значения $\partial u/\partial n|_\Sigma$, $\partial v/\partial n|_\Sigma$.

Знание $v|_\Sigma$ и $u_1|_\Sigma$ позволяет определить из (2.17) $u_x(x,\sigma(x))$. На Σ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} u_x + u_y\sigma' &= u_{0x}, \\ u_x n_1 + u_y n_2 &= \frac{\partial u}{\partial n}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Первое уравнение (2.18) позволяет выразить u_y на Σ через u_{0x} и $u_x(x,\sigma(x)) = u_x|_\Sigma$, а второе — восстановить значение $\partial u/\partial n|_\Sigma = u_{10}(x)$. Аналогично рассуждаем и относительно значений, связанных с v.

Таким образом, полученные нами функции u, v действительно дают решение задачи Коши.

2.3. Другие варианты граничных задач. При рассмотрении граничных условий основной характеристической задачи нетрудно заметить, что эти условия отличаются определенной несимметричностью. Сформулируем задачу с более "симметричными" условиями (производные искомых функций входят в граничные условия равноправно).

Задача 1. *Найти регулярное в G решение системы* (2.1), *удовлетворяющее условиям*

$$u(x_0, y) = \varkappa(y), \quad v(x, y_0) = \mu(x), \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} a_{11}(y)u_x(x_0,y) + a_{12}(y)v_x(x_0,y) = m_1(y), \\ a_{21}(x)u_y(x,y_0) + a_{22}(x)v_y(x,y_0) = m_2(x). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Предполагаем, что выполняются условия гладкости a_{11}, $a_{12} \in C^1([y_0,y_1])$, a_{21}, $a_{22} \in C^1([x_0,x_1])$, $m_1 \in C^1([y_0,y_1])$, $m_2 \in C^1([x_0,x_1])$, причем

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Исследуется задача 1 путем сведения к основной характеристической задаче. Оказывается, что эта задача может быть разрешима как однозначно, так и с точностью до одной или двух произвольных постоянных [61]. Задачи с линейными комбинациями искомых функций в граничных условиях исследовались В. И. Жегаловым и Н. Х. Х. Зомотом для системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1,\ldots,x_n)u_k + f_i(x_1,\ldots,x_n), \quad i = 1,\ldots,n,$$

при $n = 2$, 3 и в общем случае [46], [78], [80], [81], [50, глава 4].

В работе [128] выделены достаточные условия однозначной разрешимости задач для системы (2.1) в характеристическом прямоугольнике $G = \{x_0 < x < x_1,\, y_0 < y < y_1\}$ с граничными условиями на трех и четырех сторонах G. При этом указанные задачи редуцируются к основной характеристической задаче.

Результаты данной главы взяты из диссертации [126], которая посвящена исследованию различных граничных задач для системы с двукратными доминирующими производными

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^1(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^0(x_1,\ldots,x_n)u_i + \\ + f_k(x_1,\ldots,x_n), \quad k=\overline{1,n}. \quad (2.21)$$

§ 3. Задача с нормальными производными в граничных условиях для гиперболической системы дифференциальных уравнений

Исследование задач с нормальными производными в граничных условиях для уравнения $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$ и его трехмерного аналога было начато в работах [245], [48]. Для уравнения Бианки второго порядка были изучены и некоторые задачи с производными высших порядков [100], [110].

В данном параграфе изложены результаты статьи [63], где в области $D = \{x_0 < x < x_1,\, y_0 < y < y_1\}$ изучается подобная задача для системы уравнений

$$u_x = av, \quad v_y = bu, \quad a,\, a_y,\, b,\, b_x \in C(\overline{D}). \tag{3.1}$$

Все выводы могут быть распространены на более общий случай

$$u_x = av + cu + f_1(x, y), \quad v_y = bu + dv + f_2(x, y),$$

ибо простым линейным преобразованием искомых функций всегда можно добиться, чтобы c и d обратились в нули, а наличие f_1, f_2 не мешает реализовать приведенные рассуждения, при этом лишь усложняются формулы.

Заметим, что в [46] (см. также [50, с. 169–174]) были выведены условия однозначной разрешимости в D задачи с граничными соотношениями

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}(y)u(x_0, y) + \alpha_{12}(y)v(x_0, y) = m_1(y), \quad y \in (y_0, y_1) = h, \\ &\alpha_{21}(x)u(x, y_0) + \alpha_{22}(x)v(x, y_0) = m_2(x), \quad x \in (x_0, x_1) = k. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Задача 2. *Найти функции u, $v \in C(\overline{D}) \cap C(D \cup \overline{h} \cup \overline{k})$, являющиеся в D решением системы* (3.1), *удовлетворяющим условиям*

$$\begin{aligned} &\beta_{11}(y)u_x(x_0, y) + \beta_{12}(y)v_x(x_0, y) = n_1(y), \quad y \in \overline{h}, \\ &\beta_{21}(x)u_y(x, y_0) + \beta_{22}(x)v_y(x, y_0) = n_2(x), \quad x \in \overline{k}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\beta_{11},\, \beta_{12},\, n_1 \in C(\overline{h}), \quad \beta_{21},\, \beta_{22},\, n_2 \in C(\overline{k}). \tag{3.4}$$

Очевидно, (3.3) соотносятся с (3.2) подобно тому, как в теории эллиптических уравнений граничные условия задач Неймана и Дирихле.

3.1. Существование решения. Ниже удобно использовать обозначения

$$u(x_0, y) = \varphi(y), \quad v(x, y_0) = \psi(x), \tag{3.5}$$

$$v(x_0, y) = \varphi_0(y), \quad u(x, y_0) = \psi_0(x). \tag{3.6}$$

Соотношения (3.5) при известных функциях φ, ψ есть граничные условия однозначно разрешимой задачи Гурса. Из (3.1) интегрированием находим

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \varphi(y) + \int\limits_{x_0}^{x} a(\xi,y)v(\xi,y)d\xi, \\ v(x,y) &= \psi(x) + \int\limits_{y_0}^{y} b(x,\eta)u(x,\eta)d\eta, \end{aligned} \tag{3.7}$$

вследствие чего (см. (3.6))

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \varphi(y_0) + \int\limits_{x_0}^{x} a(\xi,y_0)\psi(\xi)d\xi, \\ \varphi_0(y) &= \psi(x_0) + \int\limits_{y_0}^{y} b(x_0,\eta)\varphi(\eta)d\eta. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Из (3.7) с учетом (3.1) вычисляем

$$u_y(x,y) = \varphi'(y) + \int\limits_{x_0}^{x} [a(\xi,y)b(\xi,y)u(\xi,y) + a_y(\xi,y)v(\xi,y)]d\xi,$$
$$v_x(x,y) = \psi'(x) + \int\limits_{y_0}^{y} [a(x,\eta)b(x,\eta)v(x,\eta) + b_x(x,\eta)u(x,\eta)]d\eta,$$

откуда следуют формулы

$$u_y(x,y_0) = \varphi'(y_0) + \int\limits_{x_0}^{x} [a(\xi,y_0)b(\xi,y_0)\psi_0(\xi) + a_y(\xi,y_0)\psi(\xi)]d\xi,$$
$$v_x(x_0,y) = \psi'(x_0) + \int\limits_{y_0}^{y} [a(x_0,\eta)b(x_0,\eta)\varphi_0(\eta) + b_x(x_0,\eta)\varphi(\eta)]d\eta.$$

Подставляя сюда (3.8) и меняя при этом порядок интегрирования, находим

$$u_y(x, y_0) = \varphi'(y_0) + \int\limits_{x_0}^{x} [a_y(\xi, y_0) +$$

$$+ a(\xi, y_0) \int\limits_{\xi}^{x} a(\xi_1, y_0) b(\xi_1, y_0) d\xi_1] \psi(\xi) d\xi +$$

$$+ \varphi(y_0) \int\limits_{x_0}^{x} a(\xi, y_0) b(\xi, y_0) d\xi,$$

$$v_x(x_0, y) = \psi'(x_0) + \int\limits_{y_0}^{y} [b_x(x_0, \eta) +$$

$$+ b(x_0, \eta) \int\limits_{\eta}^{y} a(x_0, \eta_1) b(x_0, \eta_1) d\eta_1] \varphi(\eta) d\eta +$$

$$+ \psi(x_0) \int\limits_{y_0}^{y} a(x_0, \eta) b(x_0, \eta) d\eta.$$

С учетом этих формул, а также u_x, v_y из (3.1), соотношения (3.3) приобретают вид

$$\beta_{11}(y) a(x_0, y) [\psi(x_0) + \int\limits_{y_0}^{y} b(x_0, \eta) \varphi(\eta) d\eta] +$$

$$+ \beta_{12}(y) \{\psi'(x_0) + \psi(x_0) \int\limits_{y_0}^{y} a(x_0, \eta) b(x_0, \eta) d\eta +$$

$$+ \int\limits_{y_0}^{y} [b_x(x_0, \eta) + b(x_0, \eta) \int\limits_{\eta}^{y} a(x_0, \eta_1) b(x_0, \eta_1) d\eta_1] \varphi(\eta) d\eta\} =$$

$$= n_1(y),\ y \in \overline{h}, \tag{3.9}$$

$$\beta_{21}(x) \{\varphi'(y_0) + \varphi(y_0) \int\limits_{x_0}^{x} a(\xi, y_0) b(\xi, y_0) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} [a_y(\xi, y_0) + a(\xi, y_0) \int\limits_{\xi}^{x} a(\xi_1, y_0) b(\xi_1, y_0) d\xi_1] \psi(\xi) d\xi\} +$$

$$+\beta_{22}(x)b(x,y_0)[\varphi(y_0)+\int\limits_{x_0}^{x}a(\xi,y_0)\psi(\xi)d\xi]=n_2(x),\ x\in\overline{k}.$$

Положив здесь $x=x_0$, $y=y_0$, имеем

$$\begin{aligned}&\beta_{11}(y_0)a(x_0,y_0)\psi(x_0)+\beta_{12}(y_0)\psi'(x_0)=n_1(y_0),\\&\beta_{21}(x_0)\varphi'(y_0)+\beta_{22}(x_0)b(x_0,y_0)\varphi(y_0)=n_2(x_0).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Пусть

$$\beta_{12}(y_0)\beta_{21}(x_0)\neq 0.\tag{3.11}$$

Тогда из (3.10) следуют

$$\psi'(x_0)=\frac{n_1(y_0)-a(x_0,y_0)\beta_{11}(y_0)\psi(x_0)}{\beta_{12}(y_0)},$$

$$\varphi'(y_0)=\frac{n_2(x_0)-b(x_0,y_0)\beta_{22}(x_0)\varphi(y_0)}{\beta_{21}(x_0)}.$$

Поэтому (3.9) можно переписать в форме

$$\begin{aligned}&\int\limits_{y_0}^{y}K_1(y,\eta)\varphi(\eta)d\eta=M(y)\psi(x_0)+n_1(y)-\frac{\beta_{12}(y)}{\beta_{12}(y_0)}n_1(y_0),\\&\int\limits_{x_0}^{x}K_2(x,\xi)\psi(\xi)d\xi=N(x)\varphi(y_0)+n_2(x)-\frac{\beta_{21}(x)}{\beta_{21}(x_0)}n_2(x_0),\end{aligned}\tag{3.12}$$

где

$$\begin{aligned}&K_1(y,\eta)=\beta_{11}(y)a(x_0,y)b(x_0,\eta)+\\&+\beta_{12}(y)[b_x(x_0,\eta)+b(x_0,\eta)\int\limits_{\eta}^{y}a(x_0,\eta_1)b(x_0,\eta_1)d\eta_1],\\&K_2(x,\xi)=\beta_{22}(x)b(x,y_0)a(\xi,y_0)+\\&+\beta_{21}(x)[a_y(\xi,y_0)+a(\xi,y_0)\int\limits_{\xi}^{x}a(\xi_1,y_0)b(\xi_1,y_0)d\xi_1],\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$M(y) = -\beta_{11}(y)a(x_0,y) + \frac{\beta_{12}(y)}{\beta_{12}(y_0)}a(x_0,y_0)\beta_{11}(y_0) -$$
$$-\beta_{12}(y)\int\limits_{y_0}^{y} a(x_0,\eta)b(x_0,\eta)d\eta,$$
$$N(x) = -\beta_{22}(x)b(x,y_0) + \frac{\beta_{21}(x)}{\beta_{21}(x_0)}b(x_0,y_0)\beta_{22}(x_0) -$$
$$-\beta_{21}(x)\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi,y_0)b(\xi,y_0)d\xi. \tag{3.14}$$

Полагая в (3.12) $y = y_0$, $x = x_0$, имеем

$$M(y_0)\psi(x_0) = 0, \quad N(x_0)\varphi(y_0) = 0. \tag{3.15}$$

Из (3.14) видно, что $M(y_0) = N(x_0) = 0$, вследствие чего (3.15) выполняются при любых значениях $\psi(x_0)$, $\varphi(y_0)$. Поэтому можем (и будем!) далее считать их произвольными постоянными: $\psi(x_0) = C$, $\varphi(y_0) = C_1$. Дифференцируя первое уравнение (3.12) по y, а второе по x, находим

$$K_1(y,y)\varphi(y) + \int\limits_{y_0}^{y} K_{1y}(y,\eta)\varphi(\eta)d\eta =$$
$$= M'(y)C + n_1'(y) - \frac{\beta_{12}'(y)}{\beta_{12}(y_0)}n_1(y_0),$$
$$K_2(x,x)\psi(x) + \int\limits_{x_0}^{x} K_{2x}(x,\xi)\psi(\xi)d\xi =$$
$$= N'(x)C_1 + n_2'(x) - \frac{\beta_{21}'(x)}{\beta_{21}(x_0)}n_2(x_0). \tag{3.16}$$

Из (3.13) следует, что

$$K_1(y,y) = \beta_{11}(y)a(x_0,y)b(x_0,y) + \beta_{12}(y)b_x(x_0,y),$$
$$K_2(x,x) = \beta_{22}(x)b(x,y_0)a(x,y_0) + \beta_{21}(x)a_y(x,y_0),$$
$$K_{1y}(y,\eta) = b(x_0,\eta)[\beta_{11}(y)a(x_0,y)]' +$$
$$+\beta_{12}'(y)[b_x(x_0,\eta) + b(x_0,\eta)\int\limits_{\eta}^{y} a(x_0,\eta_1)b(x_0,\eta_1)d\eta_1] +$$
$$+\beta_{12}(y)a(x_0,y)b(x_0,\eta)b(x_0,y),$$

$$K_{2x}(x,\xi) = a(\xi,y_0)[\beta_{22}(x)b(x,y_0)]' +$$

$$+\beta_{21}'(x)[a_y(\xi,y_0) + a(\xi,y_0)\int\limits_{\xi}^{x} a(\xi_1,y_0)b(\xi_1,y_0)d\xi_1] +$$

$$+\beta_{21}(x)a(\xi,y_0)a(x,y_0)b(x,y_0).$$

Понятно, что для обоснования проведенных вычислений условий гладкости (3.4) недостаточно: нужно потребовать, чтобы обеспечивались включения

$$\beta_{11},\, \beta_{12},\, n_1 \in C^1(\overline{h}), \quad \beta_{21},\, \beta_{22},\, n_2 \in C^1(\overline{k}). \tag{3.17}$$

При этом в случае выполнения неравенств

$$\begin{gathered} \beta_{11}(y)a(x_0,y)b(x_0,y) + \beta_{12}(y)b_x(x_0,y) \neq 0, \\ \beta_{22}(x)b(x,y_0)a(x,y_0) + \beta_{21}(x)a_y(x,y_0) \neq 0 \end{gathered} \tag{3.18}$$

соотношения (3.16) представляют собой стандартные уравнения Вольтерра второго рода [150, с. 437], решения которых существуют и могут быть записаны в терминах их резольвент. Решение первого уравнения (3.16) линейно зависит от C, а второго — от C_1. Для получения решения задачи 3.1 остается подставить определяемые из (3.16) функции $\varphi(y)$, $\psi(x)$ в формулы из [211] или [212] (см. § 2).

На основании вышеизложенного справедлива

Теорема 3.1. *Задача* 2 *при выполнении условий* (3.11), (3.17) *и* (3.18) *разрешима с точностью до двух произвольных постоянных, от которых каждая из функций u, v зависит линейно.*

3.2. О разрешимости задачи в квадратурах. Пусть вместо (3.11) выполнено более сильное требование

$$\beta_{12}(y)\beta_{21}(x) \neq 0. \tag{3.19}$$

Тогда соотношения (3.9) можно разрешить относительно $\psi'(x_0)$ и $\varphi'(y_0)$. Сделав это и продифференцировав первое из них по y, а второе по x, получим

$$\begin{gathered}
\gamma_{11}(y)\varphi(y)+\gamma_{12}(y)\int\limits_{y_0}^{y} b(x_0,\eta)\varphi(\eta)d\eta+ \\
+\delta_1(y)\psi(x_0)=\left[\frac{n_1(y)}{\beta_{12}(y)}\right]',\ y\in\overline{h}, \\
\gamma_{21}(x)\psi(x)+\gamma_{22}(x)\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi,y_0)\psi(\xi)d\xi+ \\
+\delta_2(x)\varphi(y_0)=\left[\frac{n_2(x)}{\beta_{21}(x)}\right]',\ x\in\overline{k},
\end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}
\gamma_{11}(y)=b_x(x_0,y)+\frac{b(x_0,y)}{\beta_{12}(y)}, \\
\gamma_{12}(y)=a(x_0,y)b(x_0,y)+\left[\tfrac{1}{\beta_{12}(y)}\right]', \\
\gamma_{21}(x)=a_y(x,y_0)+\frac{a(x,y_0)}{\beta_{21}(x)}, \\
\gamma_{22}(x)=a(x,y_0)b(x,y_0)+\left[\tfrac{1}{\beta_{21}(x)}\right]',
\end{gathered} \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered}
\delta_1(y)=a(x_0,y)b(x_0,y)+\left[\frac{\beta_{11}(y)a(x_0,y)}{\beta_{12}(y)}\right]', \\
\delta_2(x)=a(x,y_0)b(x,y_0)+\left[\frac{\beta_{22}(x)b(x,y_0)}{\beta_{21}(x)}\right]'.
\end{gathered} \tag{3.22}$$

В силу (3.17) проведенные действия правомерны.

Соотношения (3.20) есть нагруженные уравнения для определения $\varphi(y)$, $\psi(x)$. Положим в первом из них $y=y_0$, а во втором — $x=x_0$. Имеем

$$\begin{gathered}
\gamma_{11}(y_0)\varphi(y_0)+\delta_1(y_0)\psi(x_0)=\mu, \\
\delta_2(x_0)\varphi(y_0)+\gamma_{21}(x_0)\psi(x_0)=\nu,
\end{gathered} \tag{3.23}$$

$$\mu=\left[\frac{n_1(y)}{\beta_{12}(y)}\right]'_{y=y_0},\quad \nu=\left[\frac{n_2(x)}{\beta_{21}(x)}\right]'_{x=x_0}.$$

Это есть система алгебраических уравнений для $\varphi(y_0)$, $\psi(x_0)$. Если Δ — определитель данной системы, то она может иметь следующие варианты разрешимости (или неразрешимости).

1) $\Delta\neq 0$. $\varphi(y_0)$, $\psi(x_0)$ определяются однозначно.

2) Ранг Δ равен 1. При выполнении одного дополнительного условия на μ, ν решение (3.23) зависит от одной произвольной постоянной C. При отсутствии указанного дополнительного условия система неразрешима.
3) Все элементы Δ равны нулю. Тогда при $\mu = \nu = 0$ $\varphi(y_0) = C$, $\psi(x_0) = C_1$, где C, C_1 — произвольные константы. Если $\mu \neq \nu$, то система неразрешима.

Очевидно, неразрешимость системы (3.23) влечет за собой неразрешимость исходной задачи 2.

В случаях разрешимости системы (3.23) подставим решение в (3.20). Получим при этом два независимых друг от друга уравнения для определения $\varphi(y)$, $\psi(x)$. Обозначим правые части этих уравнений $\omega_1(y, C, C_1)$, $\omega_2(x, C, C_1)$. Наличие или отсутствие C, C_1 определяется вариантами 1)–3).

Обратимся к первому уравнению. Пусть $\gamma_{11}(y) \neq 0$, $b(x_0, y) \neq 0$. Вводя обозначение $\theta(y) = \int\limits_{y_0}^{y} b(x_0, y)\varphi(\eta)d\eta$, получим стандартное линейное уравнение первого порядка, решение которого однозначно (ибо $\theta(y_0) = 0$) определяется в квадратурах [150, с. 235]. Очевидно, $\varphi(y)$ легко определяется при известной $\theta(y)$. Аналогично при $\gamma_{21}(x) \neq 0$, $a(x, y_0) \neq 0$ отыскивается явное решение второго уравнения. Если объединить все неравенства, наложенные выше, то в исходных данных имеем

$$\beta_{12}(y)\beta_{21}(x)a(x, y_0)b(x_0, y) \neq 0,$$

$$[\beta_{12}(y)b_x(x_0, y) + b(x_0, y)][\beta_{21}(y)a_y(x, y_0) + a(x, y_0)] \neq 0. \tag{3.24}$$

Система (3.1) методом исключения легко приводится к двум уравнениям

$$u_{xy} - \frac{a_y}{b}u_x - abu = 0, \quad v_{xy} - \frac{b_x}{a}v_y - abv = 0, \tag{3.25}$$

а по формулам (3.8) через φ, ψ вычисляются φ_0, ψ_0. При этом соотношения

$$\begin{array}{ll} u(x_0, y) = \varphi(y), & u(x, y_0) = \psi_0(x), \\ v(x_0, y) = \varphi_0(y), & v(x, y_0) = \psi(x) \end{array} \tag{3.26}$$

есть соответственно условия задач Гурса для первого и второго из уравнений (3.25). Это открывает путь для получения условий на коэффициенты a, b, обеспечивающих построение искомых функций u, v в квадратурах. А именно, на основании результатов из [50, с. 181–189] можно утверждать, что первая и вторая задачи (3.25)–(3.26) разрешимы в квадратурах, если коэффициенты a, b системы (3.1) имеют определенные представления через функции $p(x)$, $q(y)$, $r(x)$, $s(y)$. Более точно, эти представления должны описываться одним из следующих вариантов:

A) один из коэффициентов задается структурой pq, а другой — rs, или $\frac{2r's'}{pq(r+s)^2}$;
B) один коэффициент имеет представление $p+q$, или $p+q+rs$, а другой (соответственно) — $\frac{p'q'}{(p+q)^3}$, или $\frac{r's'}{(p+q+rs)^2} - \frac{(p'+r's)(q+rs')}{(p+q+rs)^3}$.
Понятно, что из указанной разрешимости задач (3.25)–(3.26) вытекает разрешимость исходной задачи.

Таким образом, имеет место

Теорема 3.2. *Пусть существуют такие функции* $p(x)$, $r(x)$, $q(y)$, $s(y)$, *что коэффициенты* a, b *системы* (3.1) *имеют одно из представлений, указанных в* A), B). *Тогда, если выполнены условия* (3.17) *и* (3.24), *то задача* 2 *разрешима в квадратурах либо однозначно, либо с точностью до одной, или двух произвольных постоянных, в зависимости из обстоятельств из вариантов* 2)–3).

Глава 6
Исследование уравнений Бианки методами группового анализа

§ 1. Уравнение третьего порядка

Хорошо известна (см., например, [168, с. 175–186]) роль инвариантов Лапласа в теории уравнения

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0. \tag{1.1}$$

В частности, они играют определяющую роль в классификации уравнений вида (1.1) с точки зрения группового анализа. Напомним основной классификационный результат для уравнений (1.1) [142, с. 116–125], [85, с. 123–124], [107, с. 164]. Два уравнения (1.1) эквивалентны по функции [142, с. 117] тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа

$$h = a_x + ab - c, \quad k = b_y + ab - c$$

имеют для обоих уравнений одинаковые значения. Алгебра Ли уравнения (1.1) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где L^r образована операторами вида

$$X = \xi^1(x,y)\partial_x + \xi^2(x,y)\partial_y + \sigma(x,y)u\partial_u, \tag{1.2}$$

а L^∞ — подалгебра с оператором $\omega(x,y)\partial_u$, ω — решение (1.1). Оператор $u\partial_u$ допускается любым уравнением (1.1), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и считать, что $\sigma(x,y)$ определяется в (1.2) с точностью до постоянного слагаемого.

Если $h = k \equiv 0$, то уравнение (1.1) эквивалентно уравнению $u_{xy} = 0$ и допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов $X = \xi^1(x)\partial_x + \xi^2(y)\partial_y$ с произвольными функциями $\xi^1(x)$, $\xi^2(y)$. Если $h \neq 0$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1 [141], [142, с. 123]. *Уравнение* (1.1) *допускает более чем одномерную алгебру Ли операторов* (1.2) *тогда и только тогда, когда функции*

$$p = \frac{k}{h}, \quad q = \frac{(\ln h)_{xy}}{h}$$

тождественно постоянны. Если p и q постоянны, то уравнение (1.1) *равносильно либо уравнению Эйлера-Пуассона ($q \neq 0$)*

$$u_{xy} - \frac{2/q}{x+y}u_x - \frac{2p/q}{x+y}u_y + \frac{4p/q^2}{(x+y)^2}u = 0,$$

либо уравнению ($q = 0$)

$$u_{xy} + xu_x + pyu_y + pxyu = 0,$$

причем его алгебра Ли операторов (1.2) *трехмерна.*

Однородное уравнение Бианки третьего порядка имеет вид

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \tag{1.3}$$

Очевидно, его можно рассматривать в качестве трехмерного аналога уравнения (1.1). Совокупность преобразований эквивалентности для (1.3)

$$\overline{x} = \alpha(x), \quad \overline{y} = \beta(y), \quad \overline{z} = \gamma(z), \quad u = \omega(x, y, z)\overline{u}. \tag{1.4}$$

Два уравнения вида (1.3) называются эквивалентными по функции, если они переходят друг в друга при преобразованиях (1.4), в которых

$$\alpha(x) = x, \quad \beta(y) = y, \quad \gamma(z) = z.$$

В статье [25] было показано, что два уравнения вида (1.3) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа

$$\begin{gathered} H_1 = a_y + ac - d,\ H_2 = a_x + ab - e,\ H_3 = c_x + bc - f, \\ H_4 = b_z + ab - e,\ H_5 = b_y + bc - f,\ H_6 = c_z + ac - d, \\ H_7 = a_{xy} + bd + ce + af - 2abc - g, \\ H_8 = b_{yz} + bd + ce + af - 2abc - g, \\ H_9 = c_{xz} + bd + ce + af - 2abc - g \end{gathered} \tag{1.5}$$

одинаковы для обоих уравнений.

Отметим, что ранее конструкции $H_1, \ldots, H_6$ использовались в статьях [44], [55] при построении явных формул для функции Римана уравнения (1.3) и решений уравнения (1.3) в квадратурах.

Дальнейшее изложение опирается на схему рассуждений из [142, с. 116–125].

1.1. Построение определяющих уравнений. Если искать допускаемый уравнением (1.3) оператор

$$\alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z + \tau\partial_u,$$

то оказывается, что часть системы определяющих уравнений составят

$$\partial_u\alpha=\partial_u\beta=\partial_u\gamma=0,\quad \partial_u^2\tau=0.$$

Известно [142, с. 99–100], что в таком случае алгебра Ли уравнения (1.3) есть $L=L^r\oplus L^\infty$, где алгебра L^r размерности r образована операторами вида

$$X=\xi^1(x,y,z)\partial_x+\xi^2(x,y,z)\partial_y+\xi^3(x,y,z)\partial_z+\sigma(x,y,z)u\partial_u, \tag{1.6}$$

а L^∞ — типичная для линейных уравнений абелева подалгебра с оператором $\omega(x,y,z)\partial_u$, где ω — решение уравнения (1.3). Ясно, что оператор $u\partial_u$ допускается любым уравнением (1.3), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и считать, что $\sigma(x,y,z)$ определяется в (1.6) с точностью до постоянного слагаемого.

Применение трижды продолженного оператора X к уравнению (1.3) и расщепление относительно свободных параметров приводит к определяющим уравнениям, которые могут быть записаны с использованием инвариантов Лапласа (1.5) в виде

$$\begin{gathered}
\xi^1_y=\xi^1_z=\xi^2_x=\xi^2_z=\xi^3_x=\xi^3_y=0,\\
(\sigma+b\xi^1+c\xi^2+a\xi^3)_x=(H_3-H_5)\xi^2+(H_2-H_4)\xi^3,\\
(\sigma+b\xi^1+c\xi^2+a\xi^3)_y=(H_5-H_3)\xi^1+(H_1-H_6)\xi^3,\\
(\sigma+b\xi^1+c\xi^2+a\xi^3)_z=(H_4-H_2)\xi^1+(H_6-H_1)\xi^2,\\
H_{1x}\xi^1+(H_1\xi^2)_y+(H_1\xi^3)_z=0,\\
H_{6x}\xi^1+(H_6\xi^2)_y+(H_6\xi^3)_z=0,\\
(H_2\xi^1)_x+H_{2y}\xi^2+(H_2\xi^3)_z=0,\\
(H_4\xi^1)_x+H_{4y}\xi^2+(H_4\xi^3)_z=0,\\
(H_3\xi^1)_x+(H_3\xi^2)_y+H_{3z}\xi^3=0,\\
(H_5\xi^1)_x+(H_5\xi^2)_y+H_{5z}\xi^3=0,\\
(H_7\xi^1)_x+(H_7\xi^2)_y+(H_7\xi^3)_z=0,\\
(H_8\xi^1)_x+(H_8\xi^2)_y+(H_8\xi^3)_z=0,\\
(H_9\xi^1)_x+(H_9\xi^2)_y+(H_9\xi^3)_z=0.
\end{gathered}\tag{1.7}$$

Первая строка в (1.7) показывает, что

$$\xi^i=\xi^i(x_i),\quad i=\overline{1,3}.$$

Вторая, третья и четвертая строки из (1.7) представляют собой дифференциальные уравнения для определения функции σ, после того как найдены ξ^1, ξ^2, ξ^3. Ответственными за результаты групповой классификации оказываются уравнения, записанные начиная с пятой строки.

Выведем уравнения (1.8). Находим трижды продолженный оператор (1.6)

$$\underset{3}{X} = \xi^1\partial_x + \xi^2\partial_y + \xi^3\partial_z + \sigma u\partial_u + \\ + \tau^1\partial_{u_1} + \tau^2\partial_{u_2} + \tau^3\partial_{u_3} + \tau^{11}\partial_{u_{11}} + \\ + \tau^{12}\partial_{u_{12}} + \tau^{13}\partial_{u_{13}} + \tau^{22}\partial_{u_{22}} + \tau^{23}\partial_{u_{23}} + \\ + \tau^{33}\partial_{u_{33}} + \tau^{111}\partial_{u_{111}} + \tau^{112}\partial_{u_{112}} + \\ + \tau^{113}\partial_{u_{113}} + \tau^{122}\partial_{u_{122}} + \tau^{123}\partial_{u_{123}} + \tau^{133}\partial_{u_{133}} + \\ + \tau^{222}\partial_{u_{222}} + \tau^{223}\partial_{u_{223}} + \tau^{233}\partial_{u_{233}} + \tau^{333}\partial_{u_{333}},$$

где $u_1 = u_x, \ldots, u_{333} = u_{zzz}$. Нам требуются коэффициенты

$$\begin{gathered}
\tau^1 = \sigma_x u + (\sigma - \xi^1_x)u_1 - \xi^2_x u_2 - \xi^3_x u_3, \\
\tau^2 = \sigma_y u - \xi^1_y u_1 + (\sigma - \xi^2_y)u_2 - \xi^3_y u_3, \\
\tau^3 = \sigma_z u - \xi^1_z u_1 - \xi^2_z u_2 + (\sigma - \xi^3_z)u_3, \\
\tau^{12} = \sigma_{xy} u + (\sigma_y - \xi^1_{xy})u_1 + (\sigma_x - \xi^2_{xy})u_2 - \xi^3_{xy}u_3 - \\
-\xi^1_y u_{11} + (\sigma - \xi^1_x - \xi^2_y)u_{12} - \xi^3_y u_{13} - \xi^2_x u_{22} - \xi^3_x u_{23}, \\
\tau^{13} = \sigma_{xz} u + (\sigma_z - \xi^1_{xz})u_1 - \xi^2_{xz}u_2 + (\sigma_x - \xi^3_{xz})u_3 - \\
-\xi^1_z u_{11} - \xi^2_z u_{12} + (\sigma - \xi^1_x - \xi^3_z)u_{13} - \xi^2_x u_{23} - \xi^3_x u_{33}, \\
\tau^{23} = \sigma_{yz} u - \xi^1_{yz}u_1 + (\sigma_z - \xi^2_{yz})u_2 + (\sigma_y - \xi^3_{yz})u_3 - \\
-\xi^1_z u_{12} - \xi^1_y u_{13} - \xi^2_z u_{22} + (\sigma - \xi^1_y - \xi^3_z)u_{23} - \xi^3_y u_{33}, \\
\tau^{123} = \sigma_{xyz} u + (\sigma_{yz} - \xi^1_{xyz})u_1 + (\sigma_{xz} - \xi^2_{xyz})u_2 + (\sigma_{xy} - \xi^3_{xyz})u_3 - \\
-\xi^1_{yz}u_{11} + (\sigma_z - \xi^2_{yz} - \xi^1_{xz})u_{12} + (\sigma_y - \xi^1_{xy} - \xi^3_{yz})u_{13} - \\
-\xi^2_{xz}u_{22} + (\sigma_x - \xi^3_{xz} - \xi^2_{xy})u_{23} - \xi^3_{xy}u_{33} - \\
-\xi^1_z u_{112} - \xi^1_y u_{113} - \xi^2_z u_{122} + (\sigma - \xi^1_x - \xi^2_y - \xi^3_z)u_{123} - \\
-\xi^3_y u_{133} - \xi^2_x u_{223} - \xi^3_x u_{233}.
\end{gathered}$$

Применение оператора $\underset{3}{X}$ к уравнению (1.3) и расщепление относительно свободных параметров $u, u_1, \ldots, u_{233}$ приводит к определяющим уравнениям в форме

$$\begin{gathered}
\xi^1_y = \xi^1_z = \xi^2_x = \xi^2_z = \xi^3_x = \xi^3_y = 0, \\
\sigma_x + (b\xi^1)_x + b_y\xi^2 + b_z\xi^3 = 0, \\
\sigma_y + c_x\xi^1 + (c\xi^2)_y + c_z\xi^3 = 0, \\
\sigma_z + a_x\xi^1 + a_y\xi^2 + (a\xi^3)_z = 0, \\
\sigma_{xy} + c\sigma_x + b\sigma_y + (f\xi^1)_x + (f\xi^2)_y + f_z\xi^3 = 0, \\
\sigma_{xz} + a\sigma_x + b\sigma_z + (e\xi^1)_x + e_y\xi^2 + (e\xi^3)_z = 0, \\
\sigma_{yz} + a\sigma_y + c\sigma_z + d_x\xi^1 + (d\xi^2)_y + (d\xi^3)_z = 0, \\
\sigma_{xyz} + a\sigma_{xy} + b\sigma_{yz} + c\sigma_{xz} + d\sigma_x + e\sigma_y + f\sigma_z + \\
+(g\xi^1)_x + (g\xi^2)_y + (g\xi^3)_z = 0.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Соотношения (1.7) и (1.8) эквивалентны. Действительно, рассмотрим вторую строку из (1.8)

$$\sigma_x + (b\xi^1)_x + b_y\xi^2 + b_z\xi^3 = 0.$$

Очевидно, что ее можно переписать в виде

$$(\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_x = (H_3 - H_5)\xi^2 + (H_2 - H_4)\xi^3.$$

Аналогично из третьей и четвертой строк (1.8) получаем

$$\begin{aligned}(\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_y &= (H_5 - H_3)\xi^1 + (H_1 - H_6)\xi^3,\\ (\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_z &= (H_4 - H_2)\xi^1 + (H_6 - H_1)\xi^2.\end{aligned}$$

Перейдем к уравнению

$$\sigma_{xy} + c\sigma_x + b\sigma_y + (f\xi^1)_x + (f\xi^2)_y + f_z\xi^3 = 0. \tag{1.9}$$

Из (1.8) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -(b\xi^1)_x - b_y\xi^2 - b_z\xi^3,\\ \sigma_y &= -c_x\xi^1 - (c\xi^2)_y - c_z\xi^3,\\ \sigma_{xy} &= -(b_y\xi^1)_x - (b_y\xi^2)_y - b_{yz}\xi^3,\\ \sigma_{xy} &= -(c_x\xi^1)_x - (c_x\xi^2)_y - c_{xz}\xi^3.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Подставив производные σ из первых трех равенств (1.10) в (1.9), получим

$$(H_5\xi^1)_x + (H_5\xi^2)_y + H_{5z}\xi^3 = 0.$$

Если вместо третьего равенства в (1.10) взять четвертое, то придем к еще одному соотношению

$$(H_3\xi^1)_x + (H_3\xi^2)_y + H_{3z}\xi^3 = 0.$$

Аналогично получаются оставшиеся уравнения из (1.7).

Из результатов статьи [25] непосредственно следует

Теорема 1.2. *Два уравнения вида* (1.3) *с наборами инвариантов Лапласа* $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_9$ *и* $\overline{H}_1,\ \overline{H}_2,\ \ldots,\ \overline{H}_9$ *соответственно эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$\begin{gathered}H_1 = \beta'(y)\gamma'(z)\overline{H}_1,\quad H_2 = \alpha'(x)\gamma'(z)\overline{H}_2,\quad H_3 = \alpha'(x)\beta'(y)\overline{H}_3,\\ H_4 = \alpha'(x)\gamma'(z)\overline{H}_4,\quad H_5 = \alpha'(x)\beta'(y)\overline{H}_5,\quad H_6 = \beta'(y)\gamma'(z)\overline{H}_6,\\ H_i = \alpha'(x)\beta'(y)\gamma'(z)\overline{H}_i,\quad i = 7,\,8,\,9.\end{gathered} \tag{1.11}$$

1.2. Выделение некоторых классов уравнений с постоянными отношениями инвариантов Лапласа. Перейдем к анализу определяющих уравнений (1.7). Если все H_i, $i = \overline{1,9}$, тождественно равны нулю, то уравнение (1.3) равносильно уравнению $u_{xyz} = 0$ и допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов вида

$$\xi^1(x)\partial_x + \xi^2(y)\partial_y + \xi^3(z)\partial_z$$

с произвольными $\xi^1(x)$, $\xi^2(y)$, $\xi^3(z)$.

Введем в рассмотрение отношения

$$p_{12} = \frac{H_3}{H_5}, \quad p_{13} = \frac{H_2}{H_4}, \quad p_{23} = \frac{H_1}{H_6}, \tag{1.12}$$

а также конструкции

$$\begin{gathered} q_1 = \frac{(\ln H_1)_{yz}}{H_1}, \quad q_2 = \frac{(\ln H_2)_{xz}}{H_2}, \quad q_3 = \frac{(\ln H_3)_{xy}}{H_3}, \\ q_4 = \frac{(\ln H_4)_{xz}}{H_4}, \quad q_5 = \frac{(\ln H_5)_{xy}}{H_5}, \quad q_6 = \frac{(\ln H_6)_{yz}}{H_6}, \\ q_i = \frac{(\ln H_i)_{xyz}}{H_i}, \quad i = 7,\ 8,\ 9. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Подставляем $H_1 = p_{23}H_6$, $H_6 \neq 0$, в пятую строку (1.7)

$$p_{23}(H_{6x}\xi^1 + (H_6\xi^2)_y + (H_6\xi^3)_z) + p_{23x}H_6\xi^1 + p_{23y}H_6\xi^2 + p_{23z}H_6\xi^3 = 0.$$

Так как слагаемое в скобках обращается в нуль, отсюда следует

$$\xi^1 p_{23x} + \xi^2 p_{23y} + \xi^3 p_{23z} = 0. \tag{1.14}$$

Тождество (1.14) означает, что либо $p_{23} = const$, либо p_{23} является инвариантом группы G с оператором (1.6).

Если $p_{23} = const$, то из пятой и шестой строк (1.7) остается только одна (шестая), которая может быть записана в виде

$$\xi^1(\ln H_6)_x + \xi^2(\ln H_6)_y + \xi^3(\ln H_6)_z + \xi^2_y + \xi^3_z = 0. \tag{1.15}$$

Дифференцируя по y, z получаем

$$\xi^1\frac{((\ln H_6)_{yz})_x}{(\ln H_6)_{yz}} + \xi^2\frac{((\ln H_6)_{yz})_y}{(\ln H_6)_{yz}} + \xi^3\frac{((\ln H_6)_{yz})_z}{(\ln H_6)_{yz}} + \xi^2_y + \xi^3_z = 0. \tag{1.16}$$

Вычитая (1.15) из (1.16) и умножая затем на $(\ln H_6)_{yz}/H_6$, получим

$$\xi^1 q_{6x} + \xi^2 q_{6y} + \xi^3 q_{6z} = 0. \tag{1.17}$$

Следовательно снова либо $q_6 = const$, либо q_6 является инвариантом группы G с оператором (1.6).

Совершенно аналогично могут быть получены тождества, аналогичные (1.14), (1.17) для p_{12}, p_{13}, q_i, $i = \overline{1,5}$.

Подобные тождества можно получить и для отношений

$$P_1 = \frac{H_7}{H_8}, \quad P_2 = \frac{H_7}{H_9}, \quad P_3 = \frac{H_8}{H_9}. \tag{1.18}$$

Например, рассматривая отношение P_1, приходим к тождеству

$$\xi^1 P_{1x} + \xi^2 P_{1y} + \xi^3 P_{1z} = 0.$$

Таким образом, опять либо $P_1 = const$, либо P_1 является инвариантом группы G с оператором (1.6). Если же $P_1 = const$, то 12 строка (1.7) дает

$$\xi^1 (\ln H_8)_x + \xi^2 (\ln H_8)_y + \xi^3 (\ln H_8)_z + \xi^1_x + \xi^2_y + \xi^3_z = 0. \tag{1.19}$$

Дифференцируя по x, y, z получаем

$$\xi^1 \frac{((\ln H_8)_{xyz})_x}{(\ln H_8)_{xyz}} + \xi^2 \frac{((\ln H_8)_{xyz})_y}{(\ln H_8)_{xyz}} + \xi^3 \frac{((\ln H_8)_{xyz})_z}{(\ln H_8)_{xyz}} + \xi^1_x + \xi^2_y + \xi^3_z = 0. \tag{1.20}$$

Вычитая (1.19) из (1.20) и умножая затем на $(\ln H_8)_{xyz}/H_8$, получим

$$\xi^1 q_{8x} + \xi^2 q_{8y} + \xi^3 q_{8z} = 0. \tag{1.21}$$

Следовательно либо $q_8 = const$, либо q_8 является инвариантом группы G с оператором (1.6) (то же самое справедливо и для P_2, P_3, q_7, q_9).

Укажем теперь некоторые классы уравнений вида (1.3), аналогичные указанным в теореме 1.1, для которых p_{12}, p_{13}, p_{23} и q_4, q_5, q_6 постоянны. При этом ограничимся случаями с H_7, H_8, H_9 тождественно равными нулю. Отметим, что переход от уравнений с конструкциями H_7, H_8, H_9 тождественно равными нулю, к уравнениям с ненулевыми H_7, H_8, H_9, приводит, вообще говоря, к уменьшению размерности r допускаемой уравнением алгебры Ли L^r (соответствующие примеры легко построить). Так что с точки зрения отыскания уравнений, допускающих алгебры Ли L^r наиболее высокой размерности, достаточно ограничиться случаями, когда H_7, H_8, H_9 тождественно равны нулю. Кроме того, ясно, что в случае трехмерного пространства независимых переменных x, y, z, соотношения (1.12), (1.13) приводят к инвариантам H_i, $i = \overline{1,9}$, определяемым с точностью до произвольных функций. В связи с этим, указываются не все, а только некоторые возможности, наиболее близкие к указанным в теореме 1.1.

Теорема 1.2 позволяет рассматривать по одному конкретному уравнению в каждом классе эквивалентности. Кроме того, очевидно, что перестановки переменных позволяют не рассматривать конструкции

$$p_{21} = \frac{H_5}{H_3}, \quad p_{31} = \frac{H_4}{H_2}, \quad p_{32} = \frac{H_6}{H_1}, \quad q_1, \quad q_2, \quad q_3.$$

Перейдем к рассмотрению возможных вариантов уравнений (1.3) с указанными выше постоянными инвариантами преобразования (1.6). Анализ определяющих уравнений всюду проводится аналогично изложенному в [142, с. 124–125].

Сначала перечислим варианты (их три), которые характеризуются условиями: если $H_i \neq 0$, то $q_i = 0$, $i = \overline{1,6}$.

1. $H_2 = H_3 = H_4 = H_5 = 0$, $H_1 = p_{23}$, $H_6 = 1$. Постоянная p_{23} может быть равна нулю. Соответствующее уравнение имеет вид

$$u_{xyz} + p_{23} y u_{xy} + z u_{xz} + p_{23} y z u_x = 0. \tag{1.22}$$

и допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi^1(x)\partial_x + (Cy + C_1)\partial_y - (Cz - C_2)\partial_z - (C_2 y + C_1 p_{23} z)u\partial_u,$$

где коэффициент $\xi^1(x)$ произволен. Таким образом, допускаемая данным уравнением алгебра L^r бесконечномерна, $r = \infty$.

2. $H_3 = H_5 = 0$, $H_1 = p_{23}$, $H_2 = p_{13}$, $H_4 = H_6 = 1$. Уравнение имеет вид

$$u_{xyz} + (p_{13}x + p_{23}y)u_{xy} + z u_{yz} + z u_{xz} + (p_{13}x + p_{23}y) z u_x + (p_{13}x + p_{23}y) z u_y + \\ + z^2 u_z + (p_{13}x + p_{23}y) z^2 u = 0$$

и допускает алгебру L^4, образованную операторами

$$X_1 = x\partial_x + y\partial_y - z\partial_z, \quad X_2 = \partial_x - p_{13} z u\partial_u, \\ X_3 = \partial_y - p_{23} z u\partial_u, \quad X_4 = \partial_z - (x+y)u\partial_u.$$

3. $H_1 = p_{23}$, $H_2 = p_{13}$, $H_3 = p_{12}$, $H_4 = H_5 = H_6 = 1$. Уравнение имеет вид

$$u_{xyz} + (p_{13}x + p_{23}y)u_{xy} + (y+z)u_{yz} + (p_{12}x + z)u_{xz} + \\ + (p_{13}x + p_{23}y)(p_{12}x + z)u_x + (p_{13}x + p_{23}y)(y+z)u_y + \\ + (p_{12}x + z)(y+z)u_z + (p_{13}x + p_{23}y)(p_{12}x + z)(y+z)u = 0$$

и допускает алгебру L^3, образованную операторами

$$X_1 = \partial_x - (p_{12}y + p_{13}z)u\partial_u, \quad X_2 = \partial_y - (x + p_{23}z)u\partial_u, \\ X_3 = \partial_z - (x+y)u\partial_u.$$

Следующие 3 варианта характеризуются условиями: если $H_i \neq 0$, то $q_i \neq 0$, $i = \overline{1,6}$.

4. $H_2=H_3=H_4=H_5=0$, $H_1=\frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_6=\frac{2/q_6}{(y+z)^2}$. Уравнение имеет вид

$$u_{xyz}-\frac{2p_{23}/q_6}{y+z}u_{xy}-\frac{2/q_6}{y+z}u_{xz}+\frac{4p_{23}}{q_6^2(y+z)^2}u_x=0 \qquad (1.23)$$

и допускает алгебру Ли операторов

$$X=\xi^1(x)\partial_x+(Cy^2+C_1y+C_2)\partial_y-(Cz^2-C_1z+C_2)\partial_z+\frac{2C}{q_6}(y-p_{23}z)u\partial_u,$$

где коэффициент $\xi^1(x)$ произволен. Таким образом, допускаемая данным уравнением алгебра L^r бесконечномерна, $r=\infty$.

5. $H_3=H_5=0$, $H_1=\frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2=\frac{2p_{13}/q_4}{(x+z)^2}$, $H_4=\frac{2/q_4}{(x+z)^2}$, $H_6=\frac{2/q_6}{(y+z)^2}$. Уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}u_{xyz}&-\left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z}+\frac{2p_{13}/q_4}{x+z}\right)u_{xy}-\frac{2/q_4}{x+z}u_{yz}-\frac{2/q_6}{y+z}u_{xz}+\\&+\frac{2/q_6}{y+z}\left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z}+\frac{2p_{13}/q_4}{x+z}\right)u_x+\frac{2/q_4}{x+z}\left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z}+\frac{2p_{13}/q_4}{x+z}\right)u_y+\\&+\frac{4}{q_4q_6(x+z)(y+z)}u_z-\frac{4}{q_4q_6(x+z)(y+z)}\left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z}+\frac{2p_{13}/q_4}{x+z}\right)u=0\end{aligned}$$

и допускает алгебру L^3, образованную операторами

$$X_1=x^2\partial_x+y^2\partial_y-z^2\partial_z+2\left(\frac{x}{q_4}+\frac{y}{q_6}-\left(\frac{p_{23}}{q_6}+\frac{p_{13}}{q_4}\right)z\right)u\partial_u,$$
$$X_2=x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z,\quad X_3=\partial_x+\partial_y-\partial_z.$$

6. $H_1=\frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2=\frac{2p_{13}/q_4}{(x+z)^2}$, $H_3=\frac{2p_{12}/q_5}{(x+y)^2}$, $H_4=\frac{2/q_4}{(x+z)^2}$, $H_5=\frac{2/q_5}{(x+y)^2}$, $H_6=\frac{2/q_6}{(y+z)^2}$. Уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}u_{xyz}&-\left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z}+\frac{2p_{13}/q_4}{x+z}\right)u_{xy}-\\&-\left(\frac{2/q_4}{x+z}+\frac{2/q_5}{x+y}\right)u_{yz}-\left(\frac{2/q_6}{y+z}+\frac{2p_{12}/q_5}{x+y}\right)u_{xz}+\\&+\left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z}+\frac{2p_{13}/q_4}{x+z}\right)\left(\frac{2/q_6}{y+z}+\frac{2p_{12}/q_5}{x+y}\right)u_x+\\&+\left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z}+\frac{2p_{13}/q_4}{x+z}\right)\left(\frac{2/q_4}{x+z}+\frac{2/q_5}{x+y}\right)u_y+\\&+\left(\frac{2/q_4}{x+z}+\frac{2/q_5}{x+y}\right)\left(\frac{2/q_6}{y+z}+\frac{2p_{12}/q_5}{x+y}\right)u_z-\\&-\left(\frac{2/q_4}{x+z}+\frac{2/q_5}{x+y}\right)\left(\frac{2/q_6}{y+z}+\frac{2p_{12}/q_5}{x+y}\right)\left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z}+\frac{2p_{13}/q_4}{x+z}\right)u=0\end{aligned}$$

и допускает алгебру L^1, образованную оператором

$$X_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z.$$

Оставшиеся варианты носят “смешанный” характер: имеются как $q_i \neq 0$, так и $q_i = 0$.

7. $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2 = p_{13}$, $H_3 = p_{12}$, $H_4 = s_1 = const$, $H_5 = s_2 = const$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$. Здесь постоянные p_{12}, p_{13}, p_{23}, s_1, s_2 могут равняться нулю, но при этом либо одна из постоянных s_1, s_2 равна 1, либо обе.

Соответствующее уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}
u_{xyz} - \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - p_{13}x\right)u_{xy} + (s_2y + s_1z)u_{yz} - \\
- \left(\frac{2/q_6}{y+z} - p_{12}x\right)u_{xz} + \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - p_{13}x\right)\left(\frac{2/q_6}{y+z} - p_{12}x\right)u_x - \\
- \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - p_{13}x\right)(s_2y + s_1z)u_y - (s_2y + s_1z)\left(\frac{2/q_6}{y+z} - p_{12}x\right)u_z + \\
+ (s_2y + s_1z)\left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - p_{13}x\right)\left(\frac{2/q_6}{y+z} - p_{12}x\right)u = 0
\end{gathered}$$

и допускает алгебру L^3, образованную операторами

$$X_1 = x\partial_x - y\partial_y - z\partial_z, \quad X_2 = \partial_y - \partial_z + (s_1 - s_2)xu\partial_u,$$
$$X_3 = \partial_x - (p_{12}y + p_{13}z)u\partial_u.$$

8. $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2 = p_{13}$, $H_3 = \frac{2p_{12}/q_5}{(x+y)^2}$, $H_4 = 1$, $H_5 = \frac{2/q_5}{(x+y)^2}$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$. Снова постоянные p_{12}, p_{13}, p_{23} могут равняться нулю.

Соответствующее уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}
u_{xyz} - \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - s_1x\right)u_{xy} - \left(\frac{2/q_5}{x+y} - s_2z\right)u_{yz} - \\
- \left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y}\right)u_{xz} + \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - s_1x\right)\left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y}\right)u_x + \\
+ \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - s_1x\right)\left(\frac{2/q_5}{x+z} - s_2z\right)u_y + \\
+ \left(\frac{2/q_5}{x+z} - s_2z\right)\left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y}\right)u_z - \\
- \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - s_1x\right)\left(\frac{2/q_5}{x+z} - s_2z\right)\left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y}\right)u = 0
\end{gathered}$$

и допускает алгебру L^1, образованную оператором

$$X_1 = \partial_x - \partial_y + \partial_z - (x + p_{13}z)u\partial_u.$$

Замечание. Отметим, что уравнения (1.22), (1.23) заменой $v = u_x$ приводятся к уравнениям с двумя независимыми переменными:

$$v_{yz} + p_{23}yv_y + zv_z + p_{23}yzv = 0, \tag{1.24}$$

$$v_{yz} - \frac{2p_{23}/q_6}{y+z}v_y - \frac{2/q_6}{y+z}v_z + \frac{4p_{23}}{q_6^2(y+z)^2}v = 0. \tag{1.25}$$

Известно [85, с. 124–125], что функции Римана для уравнений (1.24), (1.25) являются решениями некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Функции Римана для уравнений (1.3) и (1.1) определяются как решение интегральных уравнений Вольтерры [50, с. 13 и 26–27]. Нетрудно заметить, что соответствующие интегральные уравнения для уравнений (1.22), (1.23) и для уравнений (1.24), (1.25) совпадают. Следовательно функции Римана для уравнений (1.22), (1.23) также могут быть найдены как решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

1.3. Построение трехмерного аналога уравнения Эйлера-Пуассона. Отметим, что в случае постоянных q_i, $i = \overline{1,6}$, инвариант H_i является решением уравнения Лиувилля (см. (1.13)), формула общего решения которого известна [142, с. 123]. Аналогично, если какая-либо из конструкций q_i, $i = \overline{7,9}$, постоянна, то соответствующий инвариант H_i является решением уравнения

$$(\ln H_i)_{xyz} = q_i H_i. \tag{1.26}$$

Рассмотрим сначала уравнение

$$u_{xyz} = e^u. \tag{1.27}$$

Построим в явном виде решение уравнения (1.27), зависящее от трех произвольных функций.

Стандартная процедура отыскания допускаемой уравнением (1.27) группы точечных преобразований приводит к допускаемой алгебре Ли операторов

$$X = \xi(x)\partial_x + \eta(y)\partial_y + \zeta(z)\partial_z - (\xi'(x) + \eta'(y) + \zeta'(z))\partial_u,$$

где $\xi(x)$, $\eta(y)$, $\zeta(z)$ — произвольные функции.

Найдем инварианты допускаемой уравнением (1.27) группы. Для определения инвариантов получаем систему

$$\frac{dx}{\xi(x)} = \frac{dy}{\eta(y)} = \frac{dz}{\zeta(z)} = \frac{du}{-\xi'(x) - \eta'(y) - \zeta'(z)}. \tag{1.28}$$

Находим первые интегралы системы (1.28)

$$u - \ln|\xi(x)\eta(y)\zeta(z)| = C_1,$$

$$\varphi(x) - \psi(y) = C_2, \quad \varphi(x) - \chi(z) = C_3,$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\xi(x)}, \quad \psi'(y) = \frac{1}{\eta(y)}, \quad \chi'(z) = \frac{1}{\zeta(z)}.$$

Левые части первых интегралов и являются искомыми инвариантами.

Введем новые переменные

$$v = u - \ln|\xi(x)\eta(y)\zeta(z)|, \quad t = \varphi(x) - \psi(y), \quad \tau = \varphi(x) - \chi(z).$$

Инвариантное относительно допускаемой уравнением (1.27) группы точечных преобразований решение имеет вид $v = w(t, \tau)$. Получаем редуцированное уравнение для определения функции w

$$w_{tt\tau} + w_{t\tau\tau} = e^w. \tag{1.29}$$

Уравнение (1.29) относится к одному из канонических видов, указанных в [30].

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение (1.29) имеет решение

$$w = \ln\frac{-12}{(t+\tau)^3}.$$

Тогда (считаем $\xi(x)\eta(y)\zeta(z) > 0$)

$$u = -\ln(\xi(x)\eta(y)\zeta(z)) + \ln\frac{-12}{(2\varphi(x) - \psi(y) - \chi(z))^3} =$$

$$= \ln\frac{-12\frac{1}{\xi(x)}\frac{1}{\eta(y)}\frac{1}{\zeta(z)}}{(2\varphi(x) - \psi(y) - \chi(z))^3}.$$

Обозначив $\lambda(x) = 2\varphi(x)$, $\mu(y) = -\psi(y)$, $\nu(z) = -\chi(z)$, приходим к формуле, дающей точное решение уравнения (1.27), зависящее от трех произвольных функций

$$u = \ln\frac{-6\lambda'(x)\mu'(y)\nu'(z)}{(\lambda(x) + \mu(y) + \nu(z))^3}.$$

Очевидно, что уравнение (1.26) имеет точное решение

$$H_i = -\frac{6\lambda'(x)\mu'(y)\nu'(z)}{q_i(\lambda(x)+\mu(y)+\nu(z))^3}.$$

Возникает вопрос: какое уравнение вида (1.3) может рассматриваться в качестве трехмерного аналога уравнения Эйлера-Пуассона (то есть имеет близкие групповые свойства)?

Уравнение Эйлера-Пуассона согласно теореме 1.1 характеризуется условиями: p и q постоянны, $q \neq 0$. В качестве критерия отбора следует принять, что трехмерный аналог
1) должен допускать алгебру L^r наибольшей конечной размерности,
2) имеет конструкции q_i, $i = 7, 8, 9$, отличные от нуля,
3) коэффициенты уравнения должны иметь достаточно простую структуру, сходную со структурой коэффициентов уравнения Эйлера-Пуассона.

Уравнение, являющееся, в соответствии с требованиями 1)–3), трехмерным аналогом уравнения Эйлера-Пуассона, имеет вид

$$u_{xyz} - \frac{2p_{23}/q_6}{y+z}u_{xy} - \frac{2/q_6}{y+z}u_{xz} + \frac{4p_{23}}{q_6^2(y+z)^2}u_x + \frac{6}{q_7(x+y+z)^3}u = 0. \quad (1.30)$$

Оно отличается от уравнения (1.23) только последним членом. Непосредственное вычисление коэффициента $\xi^1(x)$ из определяющих уравнений (1.7) (последние три строки) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi_1(x)}{(x+y+z)^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Cy^2+C_1y+C_2}{(x+y+z)^3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Cz^2-C_1z+C_2}{(x+y+z)^3}\right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, приходим к допускаемому уравнением (1.30) оператору группы

$$X = C_1x\partial_x + (C_1y+C_2)\partial_y + (C_1z-C_2)\partial_z.$$

Таким образом, уравнение (1.30) допускает алгебру L^2, образованную операторами

$$X_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad X_2 = \partial_y - \partial_z.$$

§ 2. Инварианты Лапласа уравнения Бианки четвертого порядка

Рассмотрим уравнение

$$
\begin{aligned}
L(u) \equiv u_{x_1x_2x_3x_4} + a_1u_{x_2x_3x_4} + a_2u_{x_1x_3x_4} + a_3u_{x_1x_2x_4} + a_4u_{x_1x_2x_3} + \\
+ a_{12}u_{x_3x_4} + a_{13}u_{x_2x_4} + a_{14}u_{x_2x_3} + a_{23}u_{x_1x_4} + a_{24}u_{x_1x_3} + a_{34}u_{x_1x_2} + \\
+ a_{123}u_{x_4} + a_{124}u_{x_3} + a_{134}u_{x_2} + a_{234}u_{x_1} + a_{1234}u = 0 \quad (2.1)
\end{aligned}
$$

с переменными коэффициентами.

Построим инварианты Лапласа уравнения (2.1), то есть инварианты преобразования

$$u = \lambda v \tag{2.2}$$

(v — новая неизвестная функция, $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$ — функциональный множитель), а также построим определяющие уравнения для (2.1).

2.1. Построение инвариантов. Преобразование (2.2) приводит уравнение (2.1) к виду

$$v_{x_1x_2x_3x_4} + \sum_{k=1}^{3} \sum_{r_1,\dots,r_k} A_{r_1,\dots,r_k} v_{x_{s_1}\dots x_{s_{4-k}}} + A_{1234}v = 0, \tag{2.3}$$

где $1 \leqslant r_1 \leqslant \dots \leqslant 4$, набор индексов $(s_1, \dots, s_{4-k})$ дополняет $(r_1, \dots, r_k)$ до полного набора $(1, 2, 3, 4)$, причем

$$
\begin{gathered}
A_1 = \lambda^{-1}\lambda_{x_1} + a_1, \quad A_2 = \lambda^{-1}\lambda_{x_2} + a_2, \\
A_3 = \lambda^{-1}\lambda_{x_3} + a_3, \quad A_4 = \lambda^{-1}\lambda_{x_4} + a_4, \\
A_{12} = \lambda^{-1}\lambda_{x_1x_2} + \lambda^{-1}\lambda_{x_1}a_2 + \lambda^{-1}\lambda_{x_2}a_1 + a_{12}, \\
A_{13} = \lambda^{-1}\lambda_{x_1x_3} + \lambda^{-1}\lambda_{x_1}a_3 + \lambda^{-1}\lambda_{x_3}a_1 + a_{13}, \\
A_{14} = \lambda^{-1}\lambda_{x_1x_4} + \lambda^{-1}\lambda_{x_1}a_4 + \lambda^{-1}\lambda_{x_4}a_1 + a_{14}, \\
A_{23} = \lambda^{-1}\lambda_{x_2x_3} + \lambda^{-1}\lambda_{x_2}a_3 + \lambda^{-1}\lambda_{x_3}a_2 + a_{23}, \\
A_{24} = \lambda^{-1}\lambda_{x_2x_4} + \lambda^{-1}\lambda_{x_2}a_4 + \lambda^{-1}\lambda_{x_4}a_2 + a_{24}, \\
A_{34} = \lambda^{-1}\lambda_{x_3x_4} + \lambda^{-1}\lambda_{x_3}a_4 + \lambda^{-1}\lambda_{x_4}a_3 + a_{34}, \qquad (2.4) \\
A_{123} = \lambda^{-1}\lambda_{x_1x_2x_3} + \lambda^{-1}\lambda_{x_1x_2}a_3 + \lambda^{-1}\lambda_{x_1x_3}a_2 +
\end{gathered}
$$

$$+\lambda^{-1}\lambda_{x_2x_3}a_1+\lambda^{-1}\lambda_{x_1}a_{23}+\lambda^{-1}\lambda_{x_2}a_{13}+\lambda^{-1}\lambda_{x_3}a_{12}+a_{123},$$
$$A_{124}=\lambda^{-1}\lambda_{x_1x_2x_4}+\lambda^{-1}\lambda_{x_1x_2}a_4+\lambda^{-1}\lambda_{x_1x_4}a_2+$$
$$+\lambda^{-1}\lambda_{x_2x_4}a_1+\lambda^{-1}\lambda_{x_1}a_{24}+\lambda^{-1}\lambda_{x_2}a_{14}+\lambda^{-1}\lambda_{x_4}a_{12}+a_{124},$$
$$A_{134}=\lambda^{-1}\lambda_{x_1x_3x_4}+\lambda^{-1}\lambda_{x_1x_3}a_4+\lambda^{-1}\lambda_{x_1x_4}a_3+$$
$$+\lambda^{-1}\lambda_{x_3x_4}a_1+\lambda^{-1}\lambda_{x_1}a_{34}+\lambda^{-1}\lambda_{x_3}a_{14}+\lambda^{-1}\lambda_{x_4}a_{13}+a_{134},$$
$$A_{234}=\lambda^{-1}\lambda_{x_2x_3x_4}+\lambda^{-1}\lambda_{x_2x_3}a_4+\lambda^{-1}\lambda_{x_2x_4}a_3+$$
$$+\lambda^{-1}\lambda_{x_3x_4}a_2+\lambda^{-1}\lambda_{x_2}a_{34}+\lambda^{-1}\lambda_{x_3}a_{24}+\lambda^{-1}\lambda_{x_4}a_{23}+a_{234},$$
$$A_{1234}=\lambda^{-1}L(\lambda).$$

Справедливы соотношения

$$\lambda^{-1}\lambda_{x_1}=(\ln\lambda)_{x_1},$$
$$\lambda^{-1}\lambda_{x_1x_2}=(\ln\lambda)_{x_1x_2}+(\ln\lambda)_{x_1}(\ln\lambda)_{x_2},$$
$$\lambda^{-1}\lambda_{x_1x_2x_3}=(\ln\lambda)_{x_1x_2x_3}+(\ln\lambda)_{x_1}(\ln\lambda)_{x_2x_3}+(\ln\lambda)_{x_2}(\ln\lambda)_{x_1x_3}+$$
$$+(\ln\lambda)_{x_3}(\ln\lambda)_{x_1x_2}+(\ln\lambda)_{x_1}(\ln\lambda)_{x_2}(\ln\lambda)_{x_3},$$
$$\lambda^{-1}\lambda_{x_1x_2x_3x_4}=(\ln\lambda)_{x_1x_2x_3x_4}+(\ln\lambda)_{x_1}(\ln\lambda)_{x_2x_3x_4}+(\ln\lambda)_{x_2}(\ln\lambda)_{x_1x_3x_4}+$$
$$+(\ln\lambda)_{x_3}(\ln\lambda)_{x_1x_2x_4}+(\ln\lambda)_{x_4}(\ln\lambda)_{x_1x_2x_3}+$$
$$+(\ln\lambda)_{x_1x_2}(\ln\lambda)_{x_3x_4}+(\ln\lambda)_{x_1x_3}(\ln\lambda)_{x_2x_4}+(\ln\lambda)_{x_1x_4}(\ln\lambda)_{x_2x_3}+$$
$$+(\ln\lambda)_{x_1}(\ln\lambda)_{x_2}(\ln\lambda)_{x_3x_4}+(\ln\lambda)_{x_1}(\ln\lambda)_{x_3}(\ln\lambda)_{x_2x_4}+$$
$$+(\ln\lambda)_{x_1}(\ln\lambda)_{x_4}(\ln\lambda)_{x_2x_3}+(\ln\lambda)_{x_2}(\ln\lambda)_{x_3}(\ln\lambda)_{x_1x_4}+$$
$$+(\ln\lambda)_{x_2}(\ln\lambda)_{x_4}(\ln\lambda)_{x_1x_3}+(\ln\lambda)_{x_3}(\ln\lambda)_{x_4}(\ln\lambda)_{x_1x_2}+$$
$$+(\ln\lambda)_{x_1}(\ln\lambda)_{x_2}(\ln\lambda)_{x_3}(\ln\lambda)_{x_4},$$

с учетом которых формулы (2.4) принимают вид

$$A_1=a_1+(\ln\lambda)_{x_1},\quad A_2=a_2+(\ln\lambda)_{x_2},$$
$$A_3=a_3+(\ln\lambda)_{x_3},\quad A_4=a_4+(\ln\lambda)_{x_4},$$
$$A_{12}-A_1A_2=a_{12}-a_1a_2+(\ln\lambda)_{x_1x_2},$$
$$A_{13}-A_1A_3=a_{13}-a_1a_3+(\ln\lambda)_{x_1x_3},$$
$$A_{14}-A_1A_4=a_{14}-a_1a_4+(\ln\lambda)_{x_1x_4},$$
$$A_{23}-A_2A_3=a_{23}-a_2a_3+(\ln\lambda)_{x_2x_3},$$
$$A_{24}-A_2A_4=a_{24}-a_2a_4+(\ln\lambda)_{x_2x_4},$$

$$A_{34} - A_3A_4 = a_{34} - a_3a_4 + (\ln\lambda)_{x_3x_4},$$

$$A_{123} - A_1A_{23} - A_2A_{13} - A_3A_{12} + 2A_1A_2A_3 =$$

$$= a_{123} - a_1a_{23} - a_2a_{13} - a_3a_{12} + 2a_1a_2a_3 + (\ln\lambda)_{x_1x_2x_3}, \tag{2.5}$$

$$A_{124} - A_1A_{24} - A_2A_{14} - A_4A_{12} + 2A_1A_2A_4 =$$

$$= a_{124} - a_1a_{24} - a_2a_{14} - a_4a_{12} + 2a_1a_2a_4 + (\ln\lambda)_{x_1x_2x_4},$$

$$A_{134} - A_1A_{34} - A_3A_{14} - A_4A_{13} + 2A_1A_3A_4 =$$

$$= a_{134} - a_1a_{34} - a_3a_{14} - a_4a_{13} + 2a_1a_3a_4 + (\ln\lambda)_{x_1x_3x_4},$$

$$A_{234} - A_2A_{34} - A_3A_{24} - A_4A_{23} + 2A_2A_3A_4 =$$

$$= a_{234} - a_2a_{34} - a_3a_{24} - a_4a_{23} + 2a_2a_3a_4 + (\ln\lambda)_{x_2x_3x_4},$$

$$A_{1234} - A_1A_{234} - A_2A_{134} - A_3A_{124} - A_4A_{123} - A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} -$$

$$-A_{14}A_{23} + 2A_1A_2A_{34} + 2A_1A_3A_{24} + 2A_1A_4A_{23} +$$

$$+2A_2A_3A_{14} + 2A_2A_4A_{13} + 2A_3A_4A_{12} - 6A_1A_2A_3A_4 =$$

$$= a_{1234} - a_1a_{234} - a_2a_{134} - a_3a_{124} - a_4a_{123} - a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} -$$

$$-a_{14}a_{23} + 2a_1a_2a_{34} + 2a_1a_3a_{24} + 2a_1a_4a_{23} + 2a_2a_3a_{14} +$$

$$+2a_2a_4a_{13} + 2a_3a_4a_{12} - 6a_1a_2a_3a_4 + (\ln\lambda)_{x_1x_2x_3x_4}.$$

Следовательно, уравнения (2.1) и (2.3) переходят друг в друга при преобразовании (2.2) тогда и только тогда, когда существует функция $\ln\lambda$, удовлетворяющая соотношениям (2.5).

Из (2.5) дифференцированием получаем следствия

$$A_{12} - A_1A_2 - a_{12} + a_1a_2 = (A_1 - a_1)_{x_2} = (A_2 - a_2)_{x_1},$$

$$A_{13} - A_1A_3 - a_{13} + a_1a_3 = (A_1 - a_1)_{x_3} = (A_3 - a_3)_{x_1},$$

$$A_{14} - A_1A_4 - a_{14} + a_1a_4 = (A_1 - a_1)_{x_4} = (A_4 - a_4)_{x_1},$$

$$A_{23} - A_2A_3 - a_{23} + a_2a_3 = (A_2 - a_2)_{x_3} = (A_3 - a_3)_{x_2},$$

$$A_{24} - A_2A_4 - a_{24} + a_2a_4 = (A_2 - a_2)_{x_4} = (A_4 - a_4)_{x_2},$$

$$A_{34} - A_3A_4 - a_{34} + a_3a_4 = (A_3 - a_3)_{x_4} = (A_4 - a_4)_{x_3},$$

$$A_{123} - A_1A_{23} - A_2A_{13} - A_3A_{12} + 2A_1A_2A_3 -$$

$$-a_{123} + a_1a_{23} + a_2a_{13} + a_3a_{12} - 2a_1a_2a_3 =$$

$$= (A_1 - a_1)_{x_2x_3} = (A_2 - a_2)_{x_1x_3} = (A_3 - a_3)_{x_1x_2},$$

$$A_{124} - A_1A_{24} - A_2A_{14} - A_4A_{12} + 2A_1A_2A_4 -$$

$$
\begin{gathered}
-a_{124}+a_1a_{24}+a_2a_{14}+a_4a_{12}-2a_1a_2a_4=\\
=(A_1-a_1)_{x_2x_4}=(A_2-a_2)_{x_1x_4}=(A_4-a_4)_{x_1x_2},\\
A_{134}-A_1A_{34}-A_3A_{14}-A_4A_{13}+2A_1A_3A_4-\\
-a_{134}+a_1a_{34}+a_3a_{14}+a_4a_{13}-2a_1a_3a_4=\\
=(A_1-a_1)_{x_3x_4}=(A_3-a_3)_{x_1x_4}=(A_4-a_4)_{x_1x_3},\\
A_{234}-A_2A_{34}-A_3A_{24}-A_4A_{23}+2A_2A_3A_4-\\
-a_{234}+a_2a_{34}+a_3a_{24}+a_4a_{23}-2a_2a_3a_4=\\
=(A_2-a_2)_{x_3x_4}=(A_3-a_3)_{x_2x_4}=(A_4-a_4)_{x_2x_3},\\
A_{1234}-A_1A_{234}-A_2A_{134}-A_3A_{124}-A_4A_{123}-A_{12}A_{34}-A_{13}A_{24}-\\
-A_{14}A_{23}+2A_1A_2A_{34}+2A_1A_3A_{24}+2A_1A_4A_{23}+\\
+2A_2A_3A_{14}+2A_2A_4A_{13}+2A_3A_4A_{12}-6A_1A_2A_3A_4-\\
-a_{1234}+a_1a_{234}+a_2a_{134}+a_3a_{124}+a_4a_{123}+a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}+\\
+a_{14}a_{23}-2a_1a_2a_{34}-2a_1a_3a_{24}-2a_1a_4a_{23}-\\
-2a_2a_3a_{14}-2a_2a_4a_{13}-2a_3a_4a_{12}+6a_1a_2a_3a_4=\\
=(A_1-a_1)_{x_2x_3x_4}=(A_2-a_2)_{x_1x_3x_4}=(A_3-a_3)_{x_1x_2x_4}=(A_4-a_4)_{x_1x_2x_3}.
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Во всех полученных равенствах (2.6) переносим в одну сторону коэффициенты уравнения (2.1), а в другую — коэффициенты уравнения (2.3). Видим, что инвариантами Лапласа уравнения (2.1) являются

$$
\begin{gathered}
h_{1,2}=a_{1x_2}+a_1a_2-a_{12},\quad h_{2,1}=a_{2x_1}+a_1a_2-a_{12},\\
h_{1,3}=a_{1x_3}+a_1a_3-a_{13},\quad h_{3,1}=a_{3x_1}+a_1a_3-a_{13},\\
h_{1,4}=a_{1x_4}+a_1a_4-a_{14},\quad h_{4,1}=a_{4x_1}+a_1a_4-a_{14},\\
h_{2,3}=a_{2x_3}+a_2a_3-a_{23},\quad h_{3,2}=a_{3x_2}+a_2a_3-a_{23},\\
h_{2,4}=a_{2x_4}+a_2a_4-a_{24},\quad h_{4,2}=a_{4x_2}+a_2a_4-a_{24},\\
h_{3,4}=a_{3x_4}+a_3a_4-a_{34},\quad h_{4,3}=a_{4x_3}+a_3a_4-a_{34},\\
h_{1,23}=a_{1x_2x_3}+a_1a_{23}+a_2a_{13}+a_3a_{12}-2a_1a_2a_3-a_{123},\\
h_{2,13}=a_{2x_1x_3}+a_1a_{23}+a_2a_{13}+a_3a_{12}-2a_1a_2a_3-a_{123},\\
h_{3,12}=a_{3x_1x_2}+a_1a_{23}+a_2a_{13}+a_3a_{12}-2a_1a_2a_3-a_{123},\\
h_{1,24}=a_{1x_2x_4}+a_1a_{24}+a_2a_{14}+a_4a_{12}-2a_1a_2a_4-a_{124},\\
h_{2,14}=a_{2x_1x_4}+a_1a_{24}+a_2a_{14}+a_4a_{12}-2a_1a_2a_4-a_{124},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
h_{4,12} = a_{4x_1x_2} + a_1a_{24} + a_2a_{14} + a_4a_{12} - 2a_1a_2a_4 - a_{124},\\
h_{1,34} = a_{1x_3x_4} + a_1a_{34} + a_3a_{14} + a_4a_{13} - 2a_1a_3a_4 - a_{134},\\
h_{3,14} = a_{3x_1x_4} + a_1a_{34} + a_3a_{14} + a_4a_{13} - 2a_1a_3a_4 - a_{134},\\
h_{4,13} = a_{4x_1x_3} + a_1a_{34} + a_3a_{14} + a_4a_{13} - 2a_1a_3a_4 - a_{134},\\
h_{2,34} = a_{2x_3x_4} + a_2a_{34} + a_3a_{24} + a_4a_{23} - 2a_2a_3a_4 - a_{234},\\
h_{3,24} = a_{3x_2x_4} + a_2a_{34} + a_3a_{24} + a_4a_{23} - 2a_2a_3a_4 - a_{234},\\
h_{4,23} = a_{4x_2x_3} + a_2a_{34} + a_3a_{24} + a_4a_{23} - 2a_2a_3a_4 - a_{234},\\
h_{1,234} = a_{1x_2x_3x_4} + a_1a_{234} + a_2a_{134} + a_3a_{124} + a_4a_{123}+\\
+a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} - 2a_1a_2a_{34} - 2a_1a_3a_{24} - 2a_1a_4a_{23}-\\
-2a_2a_3a_{14} - 2a_2a_4a_{13} - 2a_3a_4a_{12} + 6a_1a_2a_3a_4 - a_{1234},\\
h_{2,134} = a_{2x_1x_3x_4} + a_1a_{234} + a_2a_{134} + a_3a_{124} + a_4a_{123}+\\
+a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} - 2a_1a_2a_{34} - 2a_1a_3a_{24} - 2a_1a_4a_{23}-\\
-2a_2a_3a_{14} - 2a_2a_4a_{13} - 2a_3a_4a_{12} + 6a_1a_2a_3a_4 - a_{1234},\\
h_{3,124} = a_{3x_1x_2x_4} + a_1a_{234} + a_2a_{134} + a_3a_{124} + a_4a_{123}+\\
+a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} - 2a_1a_2a_{34} - 2a_1a_3a_{24} - 2a_1a_4a_{23}-\\
-2a_2a_3a_{14} - 2a_2a_4a_{13} - 2a_3a_4a_{12} + 6a_1a_2a_3a_4 - a_{1234},\\
h_{4,123} = a_{4x_2x_3x_4} + a_1a_{234} + a_1a_{134} + a_3a_{124} + a_4a_{123}+\\
+a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} - 2a_1a_2a_{34} - 2a_1a_3a_{24} - 2a_1a_4a_{23}-\\
-2a_2a_3a_{14} - 2a_2a_4a_{13} - 2a_3a_4a_{12} + 6a_1a_2a_3a_4 - a_{1234}.
\end{gathered} \tag{2.7}
$$

2.2. Определяющие уравнения. Совокупность преобразований эквивалентности для уравнения (2.1) имеет вид

$$\overline{x}_i = \alpha_i(x_i), \quad i = \overline{1,4}, \quad u = \lambda(x_1, x_2, x_3, x_4)\overline{u}. \tag{2.8}$$

Два уравнения вида (2.1) называются эквивалентными по функции, если они переходят друг в друга при преобразованиях (2.8), в которых

$$\alpha_i(x_i) = x_i, \quad i = \overline{1,4}.$$

Если искать допускаемый уравнением (2.1) оператор

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i \partial_{x_i} + \tau \partial_u,$$

то оказывается, что часть системы определяющих уравнений составляют следующие уравнения
$$\partial_u \alpha_i = 0, \quad i = \overline{1,4}, \quad \partial_u^2 \tau = 0.$$
Известно [142, с. 99–100], что в таком случае алгебра Ли уравнения (2.1) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где L^r образована операторами вида
$$X = \sum_{i=1}^{4} \xi^i(x_1, x_2, x_3, x_4)\partial_{x_i} + \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)u\partial_u, \tag{2.9}$$
а L^∞ — типичная для линейных уравнений абелева подалгебра с оператором $\omega(x_1, x_2, x_3, x_4)\partial_u$, ω — решение уравнения (2.1). Оператор $u\partial_u$ включаем в L^∞ и далее считаем, что $\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)$ определяется в (2.9) с точностью до постоянного слагаемого.

Четырежды продолженный оператор (2.9) запишем с использованием стандартных обозначений
$$\begin{aligned} \underset{4}{X} = \xi^1\partial_{x_1} + \xi^2\partial_{x_2} + \xi^3\partial_{x_3} + \xi^4\partial_{x_4} + \sigma u\partial_u + \tau^1\partial_{u_1} + \tau^2\partial_{u_2} + \tau^3\partial_{u_3} + \tau^4\partial_{u_4} + \\ + \tau^{11}\partial_{u_{11}} + \tau^{12}\partial_{u_{12}} + \tau^{13}\partial_{u_{13}} + \tau^{14}\partial_{u_{14}} + \dots + \tau^{111}\partial_{u_{111}} + \dots + \\ + \tau^{444}\partial_{u_{444}} + +\tau^{1111}\partial_{u_{1111}} + \dots + \tau^{4444}\partial_{u_{4444}}, \end{aligned}$$
где $u_1 = u_{x_1}$, $\dots$, $u_{4444} = u_{x_4x_4x_4x_4}$.

Известно [142, с. 55–56], что
$$\tau_{i_1i_2\dots i_k} = D_{i_k}(\tau_{i_1i_2\dots i_{k-1}}) - \sum_{j=1}^{4} u_{ji_1i_2\dots i_{k-1}} D_{i_k}(\xi^j),$$
где D_{i_k} — оператор полного дифференцирования. Нам требуются коэффициенты
$$\begin{aligned} \tau^1 &= \sigma_{x_1}u + (\sigma - \xi^1_{x_1})u_1 - \xi^2_{x_1}u_2 - \xi^3_{x_1}u_3 - \xi^4_{x_1}u_4, \\ \tau^2 &= \sigma_{x_2}u - \xi^1_{x_2}u_1 + (\sigma - \xi^2_{x_2})u_2 - \xi^3_{x_2}u_3 - \xi^4_{x_2}u_4, \\ \tau^3 &= \sigma_{x_3}u - \xi^1_{x_3}u_1 - \xi^2_{x_3}u_2 + (\sigma - \xi^3_{x_3})u_3 - \xi^4_{x_3}u_4, \\ \tau^4 &= \sigma_{x_4}u - \xi^1_{x_4}u_1 - \xi^2_{x_4}u_2 - \xi^3_{x_4}u_3 + (\sigma - \xi^4_{x_4})u_4, \end{aligned}$$
$$\begin{gathered} \tau^{12} = \sigma_{x_1x_2}u + (\sigma_{x_2} - \xi^1_{x_1x_2})u_1 + (\sigma_{x_1} - \xi^2_{x_1x_2})u_2 - \xi^3_{x_1x_2}u_3 - \xi^4_{x_1x_2}u_4 - \\ -\xi^1_{x_2}u_{11} + (\sigma - \xi^1_{x_1} - \xi^2_{x_2})u_{12} - \xi^3_{x_2}u_{13} - \xi^4_{x_2}u_{14} - \xi^2_{x_1}u_{22} - \xi^3_{x_1}u_{23} - \xi^4_{x_1}u_{24}, \\ \tau^{13} = \sigma_{x_1x_3}u + (\sigma_{x_3} - \xi^1_{x_1x_3})u_1 - \xi^2_{x_1x_3}u_2 + (\sigma_{x_1} - \xi^3_{x_1x_3})u_3 - \xi^4_{x_1x_3}u_4 - \\ -\xi^1_{x_3}u_{11} - \xi^2_{x_3}u_{12} + (\sigma - \xi^1_{x_1} - \xi^3_{x_3})u_{13} - \xi^4_{x_3}u_{14} - \xi^2_{x_1}u_{23} - \xi^3_{x_1}u_{33} - \xi^4_{x_1}u_{34}, \end{gathered}$$

$$\tau^{14} = \sigma_{x_1x_4}u + (\sigma_{x_4} - \xi^1_{x_1x_4})u_1 - \xi^2_{x_1x_4}u_2 - \xi^3_{x_1x_4}u_3 + (\sigma_{x_1} - \xi^4_{x_1x_4})u_4 -$$
$$-\xi^1_{x_4}u_{11} - \xi^2_{x_4}u_{12} - \xi^3_{x_4}u_{13} + (\sigma - \xi^1_{x_1} - \xi^4_{x_4})u_{14} - \xi^2_{x_1}u_{24} - \xi^3_{x_1}u_{34} - \xi^4_{x_1}u_{44},$$
$$\tau^{23} = \sigma_{x_2x_3}u - \xi^1_{x_2x_3}u_1 + (\sigma_{x_3} - \xi^2_{x_2x_3})u_2 + (\sigma_{x_2} - \xi^3_{x_2x_3})u_3 - \xi^4_{x_2x_3}u_4 -$$
$$-\xi^1_{x_3}u_{12} - \xi^1_{x_2}u_{13} - \xi^2_{x_3}u_{22} + (\sigma - \xi^2_{x_2} - \xi^3_{x_3})u_{23} - \xi^4_{x_3}u_{24} - \xi^3_{x_2}u_{33} - \xi^4_{x_2}u_{34},$$
$$\tau^{24} = \sigma_{x_2x_4}u - \xi^1_{x_2x_4}u_1 + (\sigma_{x_4} - \xi^2_{x_2x_4})u_2 - \xi^3_{x_2x_4}u_3 + (\sigma_{x_2} - \xi^4_{x_2x_4})u_4 -$$
$$-\xi^1_{x_4}u_{12} - \xi^1_{x_2}u_{14} - \xi^2_{x_4}u_{22} - \xi^3_{x_4}u_{23} + (\sigma - \xi^2_{x_2} - \xi^4_{x_4})u_{24} - \xi^3_{x_2}u_{34} - \xi^4_{x_2}u_{44},$$
$$\tau^{34} = \sigma_{x_3x_4}u - \xi^1_{x_3x_4}u_1 - \xi^3_{x_3x_4}u_2 + (\sigma_{x_4} - \xi^3_{x_3x_4})u_3 + (\sigma_{x_3} - \xi^4_{x_3x_4})u_4 -$$
$$-\xi^1_{x_4}u_{13} - \xi^1_{x_3}u_{14} - \xi^2_{x_4}u_{23} - \xi^2_{x_3}u_{24} - \xi^3_{x_4}u_{33} + (\sigma - \xi^3_{x_3} - \xi^4_{x_4})u_{34} - \xi^4_{x_3}u_{44},$$
$$\tau^{123} = \sigma_{x_1x_2x_3}u + (\sigma_{x_2x_3} - \xi^1_{x_1x_2x_3})u_1 + (\sigma_{x_1x_3} - \xi^2_{x_1x_2x_3})u_2 + (\sigma_{x_1x_2} - \xi^3_{x_1x_2x_3})u_3 -$$
$$-\xi^4_{x_1x_2x_3}u_4 - \xi^1_{x_2x_3}u_{11} + (\sigma_{x_3} - \xi^1_{x_1x_3} - \xi^2_{x_2x_3})u_{12} + (\sigma_{x_2} - \xi^1_{x_1x_2} - \xi^3_{x_2x_3})u_{13} -$$
$$-\xi^4_{x_2x_3}u_{14} - \xi^2_{x_1x_3}u_{22} + (\sigma_{x_1} - \xi^2_{x_1x_2} - \xi^3_{x_1x_3})u_{23} - \xi^4_{x_1x_3}u_{24} - \xi^3_{x_1x_2}u_{33} - \xi^4_{x_1x_2}u_{34} -$$
$$-\xi^1_{x_3}u_{112} - \xi^1_{x_2}u_{113} - \xi^2_{x_3}u_{122} + (\sigma - \xi^1_{x_1} - \xi^2_{x_2} - \xi^3_{x_3})u_{123} - \xi^4_{x_3}u_{124} -$$
$$-\xi^3_{x_2}u_{133} - \xi^4_{x_2}u_{134} - \xi^2_{x_1}u_{223} - \xi^3_{x_1}u_{233} - \xi^4_{x_1}u_{234},$$
$$\tau^{124} = \sigma_{x_1x_2x_4}u + (\sigma_{x_2x_4} - \xi^1_{x_1x_2x_4})u_1 + (\sigma_{x_1x_4} - \xi^2_{x_1x_2x_4})u_2 - \xi^3_{x_1x_2x_4}u_3 +$$
$$+(\sigma_{x_1x_2} - \xi^4_{x_1x_2x_4})u_4 - \xi^1_{x_2x_4}u_{11} + (\sigma_{x_4} - \xi^1_{x_1x_4} - \xi^2_{x_2x_4})u_{12} + (\sigma_{x_2} - \xi^1_{x_1x_2} - \xi^4_{x_2x_4})u_{14} -$$
$$-\xi^3_{x_2x_4}u_{13} - \xi^2_{x_1x_4}u_{22} - \xi^3_{x_1x_4}u_{23} + (\sigma_{x_1} - \xi^2_{x_1x_2} - \xi^4_{x_1x_4})u_{24} - \xi^3_{x_1x_2}u_{34} - \xi^4_{x_1x_2}u_{44} -$$
$$-\xi^1_{x_4}u_{112} - \xi^1_{x_2}u_{114} - \xi^2_{x_4}u_{122} - \xi^3_{x_4}u_{123} + (\sigma - \xi^1_{x_1} - \xi^2_{x_2} - \xi^4_{x_4})u_{124} -$$
$$-\xi^3_{x_2}u_{134} - \xi^4_{x_2}u_{144} - \xi^2_{x_1}u_{224} - \xi^3_{x_1}u_{234} - \xi^4_{x_1}u_{244},$$
$$\tau^{134} = \sigma_{x_1x_3x_4}u + (\sigma_{x_3x_4} - \xi^1_{x_1x_3x_4})u_1 - \xi^2_{x_1x_3x_4}u_2 + (\sigma_{x_1x_4} - \xi^3_{x_1x_3x_4})u_3 +$$
$$+(\sigma_{x_1x_3} - \xi^4_{x_1x_3x_4})u_4 - \xi^1_{x_3x_4}u_{11} - \xi^2_{x_3x_4}u_{12} + (\sigma_{x_4} - \xi^1_{x_1x_4} - \xi^3_{x_3x_4})u_{13} +$$
$$+(\sigma_{x_3} - \xi^1_{x_1x_3} - \xi^4_{x_3x_4})u_{14} - \xi^2_{x_1x_4}u_{23} - \xi^2_{x_1x_3}u_{24} - \xi^3_{x_1x_4}u_{33} + (\sigma_{x_1} - \xi^3_{x_1x_3} - \xi^4_{x_1x_4})u_{34} -$$
$$-\xi^4_{x_1x_3}u_{44} - \xi^1_{x_4}u_{113} - \xi^1_{x_3}u_{114} - \xi^2_{x_4}u_{123} - \xi^2_{x_3}u_{124} - \xi^3_{x_4}u_{133} +$$
$$+(\sigma - \xi^1_{x_1} - \xi^3_{x_3} - \xi^4_{x_4})u_{134} - \xi^4_{x_3}u_{144} - \xi^2_{x_1}u_{234} - \xi^3_{x_1}u_{334},$$
$$\tau^{234} = \sigma_{x_2x_3x_4}u - \xi^1_{x_2x_3x_4}u_1 + (\sigma_{x_3x_4} - \xi^2_{x_2x_3x_4})u_2 + (\sigma_{x_2x_4} - \xi^3_{x_2x_3x_4})u_3 +$$
$$+(\sigma_{x_2x_3} - \xi^4_{x_2x_3x_4})u_4 - \xi^1_{x_3x_4}u_{12} - \xi^1_{x_2x_4}u_{13} - \xi^1_{x_2x_3}u_{14} -$$
$$-\xi^2_{x_3x_4}u_{22} + (\sigma_{x_4} - \xi^2_{x_2x_4} - \xi^3_{x_3x_4})u_{23} + (\sigma_{x_3} - \xi^2_{x_2x_3} - \xi^4_{x_3x_4})u_{24} - \xi^3_{x_2x_4}u_{33} +$$
$$+(\sigma_{x_2} - \xi^3_{x_2x_3} - \xi^4_{x_2x_4})u_{34} - \xi^4_{x_2x_3}u_{44} - -\xi^1_{x_4}u_{123} - \xi^1_{x_3}u_{124} -$$
$$-\xi^1_{x_2}u_{134} - \xi^2_{x_4}u_{223} - \xi^2_{x_3}u_{224} - \xi^3_{x_4}u_{233} +$$

$$
\begin{gathered}
+(\sigma-\xi^2_{x_2}-\xi^3_{x_3}-\xi^4_{x_4})u_{234}-\xi^4_{x_3}u_{244}-\xi^3_{x_2}u_{334}-\xi^4_{x_2}u_{344},\\
\tau^{1234}=\sigma_{x_1x_2x_3x_4}u+(\sigma_{x_2x_3x_4}-\xi^1_{x_1x_2x_3x_4})u_1+(\sigma_{x_1x_3x_4}-\xi^2_{x_1x_2x_3x_4})u_2+\\
+(\sigma_{x_1x_2x_4}-\xi^3_{x_1x_2x_3x_4})u_3-(\sigma_{x_1x_2x_3}-\xi^4_{x_1x_2x_3x_4})u_4-\\
-\xi^1_{x_2x_3x_4}u_{11}+(\sigma_{x_3x_4}-\xi^1_{x_1x_3x_4}-\xi^2_{x_2x_3x_4})u_{12}+\\
+(\sigma_{x_2x_4}-\xi^1_{x_1x_2x_4}-\xi^3_{x_2x_3x_4})u_{13}+(\sigma_{x_2x_3}-\xi^1_{x_1x_2x_3}-\xi^4_{x_2x_3x_4})u_{14}-\\
-\xi^2_{x_1x_3x_4}u_{22}+(\sigma_{x_1x_4}-\xi^2_{x_1x_2x_4}-\xi^3_{x_1x_3x_4})u_{23}+\\
+(\sigma_{x_1x_3}-\xi^2_{x_1x_2x_3}-\xi^4_{x_1x_3x_4})u_{24}-\xi^3_{x_1x_2x_4}u_{33}+\\
+(\sigma_{x_1x_2}-\xi^3_{x_1x_2x_3}-\xi^4_{x_1x_2x_4})u_{34}-\xi^4_{x_1x_2x_3}u_{44}-\\
-\xi^1_{x_3x_4}u_{112}-\xi^1_{x_2x_4}u_{113}-\xi^1_{x_2x_3}u_{114}-\\
-\xi^2_{x_3x_4}u_{122}+(\sigma_{x_4}-\xi^1_{x_1x_4}-\xi^2_{x_2x_4}-\xi^3_{x_3x_4})u_{123}+\\
+(\sigma_{x_3}-\xi^1_{x_1x_3}-\xi^2_{x_2x_3}-\xi^4_{x_3x_4})u_{124}-\xi^3_{x_2x_3}u_{133}+\\
+(\sigma_{x_2}-\xi^1_{x_1x_2}-\xi^3_{x_2x_3}-\xi^4_{x_2x_4})u_{134}-\xi^4_{x_2x_3}u_{144}-\\
-\xi^2_{x_1x_4}u_{223}-\xi^2_{x_1x_3}u_{224}-\xi^3_{x_1x_4}u_{233}+\\
+(\sigma_{x_1}-\xi^2_{x_1x_2}-\xi^3_{x_1x_3}-\xi^4_{x_1x_4})u_{234}-\xi^4_{x_1x_3}u_{244}-\\
-\xi^3_{x_1x_2}u_{334}-\xi^4_{x_1x_2}u_{344}-\xi^1_{x_4}u_{1123}-\xi^1_{x_3}u_{1124}-\\
-\xi^1_{x_2}u_{1134}-\xi^2_{x_4}u_{1223}-\xi^2_{x_3}u_{1224}-\xi^3_{x_4}u_{1233}-\\
-\xi^4_{x_3}u_{1244}-\xi^3_{x_2}u_{1334}-\xi^4_{x_2}u_{1344}-\xi^2_{x_1}u_{2234}-\\
-\xi^3_{x_1}u_{2334}-\xi^4_{x_1}u_{2344}+(\sigma-\xi^1_{x_1}-\xi^2_{x_2}-\xi^3_{x_3}-\xi^4_{x_4})u_{1234}.
\end{gathered}
$$

Применение оператора $\underset{4}{X}$ к уравнению (2.1) и расщепление относительно параметров u, u_1, …, u_{2344} приводит к определяющим уравнениям

$$
\xi^i_{x_j}=0,\quad i,j=\overline{1,4},\quad i\neq j,
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{x_1}+(a_1\xi^1)_{x_1}+a_{1x_2}\xi^2+a_{1x_3}\xi^3+a_{1x_4}\xi^4=0,\\
\sigma_{x_2}+a_{2x_1}\xi^1+(a_2\xi^2)_{x_2}+a_{2x_3}\xi^3+a_{2x_4}\xi^4=0,\\
\sigma_{x_3}+a_{3x_1}\xi^1+a_{3x_2}\xi^2+(a_3\xi^3)_{x_3}+a_{3x_4}\xi^4=0,\\
\sigma_{x_4}+a_{4x_1}\xi^1+a_{4x_2}\xi^2+a_{4x_3}\xi^3+(a_4\xi^4)_{x_4}=0,\\
\sigma_{x_1x_2}+a_1\sigma_{x_2}+a_2\sigma_{x_1}+(a_{12}\xi^1)_{x_1}+(a_{12}\xi^2)_{x_2}+a_{12x_3}\xi^3+a_{12x_4}\xi^4=0,\\
\sigma_{x_1x_3}+a_1\sigma_{x_3}+a_3\sigma_{x_1}+(a_{13}\xi^1)_{x_1}+a_{13x_2}\xi^2+(a_{13}\xi^3)_{x_3}+a_{13x_4}\xi^4=0,\\
\sigma_{x_1x_4}+a_1\sigma_{x_4}+a_4\sigma_{x_1}+(a_{14}\xi^1)_{x_1}+a_{14x_2}\xi^2+a_{14x_3}\xi^3+(a_{14}\xi^4)_{x_4}=0,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{x_2x_3} + a_2\sigma_{x_3} + a_3\sigma_{x_2} + a_{23x_1}\xi^1 + (a_{23}\xi^2)_{x_2} + (a_{23}\xi^3)_{x_3} + a_{23x_4}\xi^4 = 0,\\
\sigma_{x_2x_4} + a_2\sigma_{x_4} + a_4\sigma_{x_2} + a_{24x_1}\xi^1 + (a_{24}\xi^2)_{x_2} + a_{24x_3}\xi^3 + (a_{24}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
\sigma_{x_3x_4} + a_3\sigma_{x_4} + a_4\sigma_{x_3} + a_{34x_1}\xi^1 + a_{34x_2}\xi^2 + (a_{34}\xi^3)_{x_3} + (a_{34}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
\sigma_{x_1x_2x_3} + a_1\sigma_{x_2x_3} + a_2\sigma_{x_1x_3} + a_3\sigma_{x_1x_2} + a_{12}\sigma_{x_3} + a_{13}\sigma_{x_2} + a_{23}\sigma_{x_1} + \qquad (2.10)\\
+(a_{123}\xi^1)_{x_1} + (a_{123}\xi^2)_{x_2} + (a_{123}\xi^3)_{x_3} + a_{123x_4}\xi^4 = 0,\\
\sigma_{x_1x_2x_4} + a_1\sigma_{x_2x_4} + a_2\sigma_{x_1x_4} + a_4\sigma_{x_1x_2} + a_{12}\sigma_{x_4} + a_{14}\sigma_{x_2} + a_{24}\sigma_{x_1} +\\
+(a_{124}\xi^1)_{x_1} + (a_{124}\xi^2)_{x_2} + a_{124}\xi^3 + (a_{124}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
\sigma_{x_1x_3x_4} + a_1\sigma_{x_3x_4} + a_3\sigma_{x_1x_4} + a_4\sigma_{x_1x_3} + a_{13}\sigma_{x_4} + a_{14}\sigma_{x_3} + a_{34}\sigma_{x_1} +\\
+(a_{134}\xi^1)_{x_1} + a_{134x_2}\xi^2 + (a_{134}\xi^3)_{x_3} + (a_{134}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
\sigma_{x_2x_3x_4} + a_2\sigma_{x_3x_4} + a_3\sigma_{x_2x_4} + a_4\sigma_{x_2x_3} + a_{23}\sigma_{x_4} + a_{24}\sigma_{x_3} + a_{34}\sigma_{x_2} +\\
+a_{234x_1}\xi^1 + (a_{234}\xi^2)_{x_2} + (a_{234}\xi^3)_{x_3} + (a_{234}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
\sigma_{x_1x_2x_3x_4} + a_1\sigma_{x_2x_3x_4} + a_2\sigma_{x_1x_3x_4} + a_3\sigma_{x_1x_2x_4} + a_4\sigma_{x_1x_2x_3} +\\
+a_{12}\sigma_{x_3x_4} + a_{13}\sigma_{x_2x_4} + a_{14}\sigma_{x_2x_3} + a_{23}\sigma_{x_1x_4} + a_{24}\sigma_{x_1x_3} + a_{34}\sigma_{x_1x_2} +\\
+a_{123}\sigma_{x_4} + a_{124}\sigma_{x_3} + a_{134}\sigma_{x_2} + a_{234}\sigma_{x_1} +\\
+(a_{1234}\xi^1)_{x_1} + (a_{1234}\xi^2)_{x_2} + (a_{1234}\xi^3)_{x_3} + (a_{1234}\xi^4)_{x_4} = 0.
\end{gathered}
$$

Первая строка в (2.10) показывает, что

$$\xi^i = \xi^i(x_i), \quad i = \overline{1,4}.$$

Остальные равенства из (2.10) представляют собой дифференциальные уравнения для функции σ, имеющие порядок от первого до четвертого.

Уравнения (2.10) (кроме первой строки) могут быть записаны в терминах инвариантов Лапласа. Рассмотрим вторую строку из (2.10)

$$\sigma_{x_1} + (a_1\xi^1)_{x_1} + a_{1x_2}\xi^2 + a_{1x_3}\xi^3 + a_{1x_4}\xi^4 = 0.$$

Очевидно, что ее можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
&(\sigma + a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4)_{x_1} =\\
&\qquad = (h_{2,1} - h_{1,2})\xi^2 + (h_{3,1} - h_{1,3})\xi^3 + (h_{4,1} - h_{1,4})\xi^4. \quad (2.11)
\end{aligned}
$$

Аналогично из третьей, четвертой и пятой строк (2.10) получаем

$$\begin{gathered}(\sigma + a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4)_{x_2} = \\ = (h_{2,1} - h_{1,2})\xi^1 + (h_{3,2} - h_{2,3})\xi^3 + (h_{4,2} - h_{2,4})\xi^4, \\ (\sigma + a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4)_{x_3} = \\ = (h_{1,3} - h_{3,1})\xi^1 + (h_{2,3} - h_{3,2})\xi^2 + (h_{4,3} - h_{3,4})\xi^4, \\ (\sigma + a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4)_{x_4} = \\ = (h_{1,4} - h_{4,1})\xi^1 + (h_{2,4} - h_{4,2})\xi^2 + (h_{3,4} - h_{4,3})\xi^3.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Перейдем к уравнению

$$\sigma_{x_1x_2} + a_1\sigma_{x_2} + a_2\sigma_{x_1} + (a_{12}\xi^1)_{x_1} + (a_{12}\xi^2)_{x_2} + a_{12x_3}\xi^3 + a_{12x_4}\xi^4 = 0. \tag{2.13}$$

Из (2.10) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} &= -(a_1\xi^1)_{x_1} - a_{1x_2}\xi^2 - a_{1x_3}\xi^3 - a_{1x_4}\xi^4, \\ \sigma_{x_2} &= -a_{2x_1}\xi^1 - (a_2\xi^2)_{x_2} - a_{2x_3}\xi^3 - a_{2x_4}\xi^4, \\ \sigma_{x_1x_2} &= -(a_1\xi^1)_{x_1x_2} - (a_{1x_2}\xi^2)_{x_2} - a_{1x_2x_3}\xi^3 - a_{1x_2x_4}\xi^4, \\ \sigma_{x_1x_2} &= -(a_{2x_1}\xi^1)_{x_1} - (a_2\xi^2)_{x_1x_2} - a_{2x_1x_3}\xi^3 - a_{2x_1x_4}\xi^4.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Подставив производные σ из первых трех равенств (2.14) в (2.13), получим

$$(h_{1,2}\xi^1)_{x_1} + (h_{1,2}\xi^2)_{x_2} + h_{1,2x_3}\xi^3 + h_{1,2x_4}\xi^4 = 0. \tag{2.15}$$

Если вместо третьего равенства в (2.14) взять четвертое, то придем к еще одному соотношению

$$(h_{2,1}\xi^1)_{x_1} + (h_{2,1}\xi^2)_{x_2} + h_{2,1x_3}\xi^3 + h_{2,1x_4}\xi^4 = 0. \tag{2.16}$$

Остальные соотношения из (2.10), являющиеся уравнениями для функции σ второго порядка, приводят к равенствам

$$\begin{gathered}(h_{1,3}\xi^1)_{x_1} + h_{1,3x_2}\xi^2 + (h_{1,3}\xi^3)_{x_3} + h_{1,3x_4}\xi^4 = 0, \\ (h_{3,1}\xi^1)_{x_1} + h_{3,1x_2}\xi^2 + (h_{3,1}\xi^3)_{x_3} + h_{3,1x_4}\xi^4 = 0, \\ (h_{1,4}\xi^1)_{x_1} + h_{1,4x_2}\xi^2 + h_{1,4x_3}\xi^3 + (h_{1,4}\xi^4)_{x_4} = 0, \\ (h_{4,1}\xi^1)_{x_1} + h_{4,1x_2}\xi^2 + h_{4,1x_3}\xi^3 + (h_{4,1}\xi^4)_{x_4} = 0, \\ h_{2,3x_1}\xi^1 + (h_{2,3}\xi^2)_{x_2} + (h_{2,3}\xi^3)_{x_3} + h_{2,3x_4}\xi^4 = 0, \\ h_{3,2x_1}\xi^1 + (h_{3,2}\xi^2)_{x_2} + (h_{3,2}\xi^3)_{x_3} + h_{3,2x_4}\xi^4 = 0, \\ h_{2,4x_1}\xi^1 + (h_{2,4}\xi^2)_{x_2} + h_{2,4x_3}\xi^3 + (h_{2,4}\xi^4)_{x_4} = 0, \\ h_{4,2x_1}\xi^1 + (h_{4,2}\xi^2)_{x_2} + h_{4,2x_3}\xi^3 + (h_{4,2}\xi^4)_{x_4} = 0, \\ h_{3,4x_1}\xi^1 + h_{3,4x_2}\xi^2 + (h_{3,4}\xi^3)_{x_3} + (h_{3,4}\xi^4)_{x_4} = 0, \\ h_{4,3x_1}\xi^1 + h_{4,3x_2}\xi^2 + (h_{4,3}\xi^3)_{x_3} + (h_{4,3}\xi^4)_{x_4} = 0.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Рассмотрим теперь уравнение третьего порядка для σ

$$\begin{gathered}\sigma_{x_1x_2x_3}+a_1\sigma_{x_2x_3}+a_2\sigma_{x_1x_3}+\\+a_3\sigma_{x_1x_2}+a_{12}\sigma_{x_3}+a_{13}\sigma_{x_2}+a_{23}\sigma_{x_1}+\\+(a_{123}\xi^1)_{x_1}+(a_{123}\xi^2)_{x_2}+(a_{123}\xi^3)_{x_3}+a_{123x_4}\xi^4=0.\end{gathered}\tag{2.18}$$

Используя предшествующие уравнения (2.10), выражаем входящие в (2.18) производные функции σ через коэффициенты уравнения (2.1) и ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. Выражения для производных первого порядка имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1}&=-(a_1\xi^1)_{x_1}-a_{1x_2}\xi^2-a_{1x_3}\xi^3-a_{1x_4}\xi^4,\\\sigma_{x_2}&=-a_{2x_1}\xi^1-(a_2\xi^2)_{x_2}-a_{2x_3}\xi^3-a_{2x_4}\xi^4,\\\sigma_{x_3}&=-a_{3x_1}\xi^1-a_{3x_2}\xi^2-(a_3\xi^3)_{x_3}-a_{3x_4}\xi^4.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Для производных второго порядка имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1x_2}=&-a_1\sigma_{x_2}-a_2\sigma_{x_1}-(a_{12}\xi^1)_{x_1}-(a_{12}\xi^2)_{x_2}-a_{12x_3}\xi^3-a_{12x_4}\xi^4=\\&=a_1(a_{2x_1}\xi^1+(a_2\xi^2)_{x_2}+a_{2x_3}\xi^3-a_{2x_4}\xi^4)+\\&+a_2((a_1\xi^1)_{x_1}+a_{1x_2}\xi^2+a_{1x_3}\xi^3+a_{1x_4}\xi^4)-\\&-(a_{12}\xi^1)_{x_1}-(a_{12}\xi^2)_{x_2}-a_{12x_3}\xi^3-a_{12x_4}\xi^4,\\\sigma_{x_1x_3}=&-a_1\sigma_{x_3}-a_3\sigma_{x_1}-(a_{13}\xi^1)_{x_1}-a_{13x_2}\xi^2-(a_{13}\xi^3)_{x_3}-a_{13x_4}\xi^4=\\&=a_1(a_{3x_1}\xi^1+a_{3x_2}\xi^2+(a_3\xi^3)_{x_3}-a_{3x_4}\xi^4)+\\&+a_3((a_1\xi^1)_{x_1}+a_{1x_2}\xi^2+a_{1x_3}\xi^3+a_{1x_4}\xi^4)-\\&-(a_{13}\xi^1)_{x_1}-a_{13x_2}\xi^2-(a_{13}\xi^3)_{x_3}-a_{13x_4}\xi^4,\\\sigma_{x_2x_3}=&-a_2\sigma_{x_3}-a_3\sigma_{x_2}-a_{23x_1}\xi^1-(a_{23}\xi^2)_{x_2}-(a_{23}\xi^3)_{x_3}-a_{23x_4}\xi^4=\\&=a_2(a_{3x_1}\xi^1+a_{3x_2}\xi^2+(a_3\xi^3)_{x_3}-a_{3x_4}\xi^4)+\\&+a_3(a_{2x_1}\xi^1+(a_2\xi^2)_{x_2}+a_{2x_3}\xi^3+a_{2x_4}\xi^4)-\\&-a_{23x_1}\xi^1-(a_{23}\xi^2)_{x_2}-(a_{23}\xi^3)_{x_3}-a_{23x_4}\xi^4.\end{aligned}$$

Производная третьего порядка может быть записана тремя способами

$$\sigma_{x_1x_2x_3}=(\sigma_{x_1})_{x_2x_3}=(\sigma_{x_2})_{x_1x_3}=(\sigma_{x_3})_{x_1x_2},$$

где σ_{x_1}, σ_{x_2}, σ_{x_3} берутся из (2.19). В результате получим три уравнения

$$\begin{aligned}(h_{1,23}\xi^1)_{x_1}+(h_{1,23}\xi^2)_{x_2}+(h_{1,23}\xi^3)_{x_3}+h_{1,23x_4}\xi^4=0,\\(h_{2,13}\xi^1)_{x_1}+(h_{2,13}\xi^2)_{x_2}+(h_{2,13}\xi^3)_{x_3}+h_{2,13x_4}\xi^4=0,\\(h_{3,12}\xi^1)_{x_1}+(h_{3,12}\xi^2)_{x_2}+(h_{3,12}\xi^3)_{x_3}+h_{3,12x_4}\xi^4=0.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Аналогично, оставшиеся уравнения для σ третьего порядка приводят к равенствам

$$\begin{array}{l}
(h_{1,24}\xi^1)_{x_1} + (h_{1,24}\xi^2)_{x_2} + h_{1,24x_3}\xi^3 + (h_{1,24}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
(h_{2,14}\xi^1)_{x_1} + (h_{2,14}\xi^2)_{x_2} + h_{2,14x_3}\xi^3 + (h_{2,14}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
(h_{4,12}\xi^1)_{x_1} + (h_{4,12}\xi^2)_{x_2} + h_{4,12x_3}\xi^3 + (h_{4,12}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
(h_{1,34}\xi^1)_{x_1} + h_{1,34x_2}\xi^2 + (h_{1,34}\xi^3)_{x_3} + (h_{1,34}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
(h_{3,14}\xi^1)_{x_1} + h_{3,14x_2}\xi^2 + (h_{3,14}\xi^3)_{x_3} + (h_{3,14}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
(h_{4,13}\xi^1)_{x_1} + h_{4,13x_2}\xi^2 + (h_{4,13}\xi^3)_{x_3} + (h_{4,13}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
h_{2,34x_1}\xi^1 + (h_{2,34}\xi^2)_{x_2} + (h_{2,34}\xi^3)_{x_3} + (h_{2,34}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
h_{3,24x_1}\xi^1 + (h_{3,24}\xi^2)_{x_2} + (h_{3,24}\xi^3)_{x_3} + (h_{3,24}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
h_{4,23x_1}\xi^1 + (h_{4,23}\xi^2)_{x_2} + (h_{4,23}\xi^3)_{x_3} + (h_{4,23}\xi^4)_{x_4} = 0.
\end{array} \tag{2.21}$$

Последнее уравнение из (2.10) при помощи аналогичных приведенным выше рассуждений приводится к следующим равенствам

$$\begin{array}{l}
(h_{1,234}\xi^1)_{x_1} + (h_{1,234}\xi^2)_{x_2} + (h_{1,234}\xi^3)_{x_3} + (h_{1,234}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
(h_{2,134}\xi^1)_{x_1} + (h_{2,134}\xi^2)_{x_2} + (h_{2,134}\xi^3)_{x_3} + (h_{2,134}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
(h_{3,124}\xi^1)_{x_1} + (h_{3,124}\xi^2)_{x_2} + (h_{3,124}\xi^3)_{x_3} + (h_{3,124}\xi^4)_{x_4} = 0,\\
(h_{4,123}\xi^1)_{x_1} + (h_{4,123}\xi^2)_{x_2} + (h_{4,123}\xi^3)_{x_3} + (h_{4,123}\xi^4)_{x_4} = 0.
\end{array} \tag{2.22}$$

Из изложенного выше вытекает

Теорема 2.1. *Соотношения* (2.11), (2.12), (2.15)–(2.17), (2.20)–(2.22), $\xi^i = \xi^i(x_i)$, $i = \overline{1,4}$, *эквивалентны определяющим уравнениям* (2.10) *для* (2.1).

Отметим, что (2.11), (2.12) служат для определения σ после того, как найдены ξ^i, $i = \overline{1,4}$. Оставшиеся соотношения (2.15)–(2.17), (2.20)–(2.22), ответственны за групповую классификацию [142, с. 75–82] уравнений вида (2.1).

§ 3. Классы уравнений с постоянными отношениями инвариантов Лапласа

Здесь рассматривается однородное уравнение

$$L(u) \equiv u_{x_1x_2x_3x_4} + a_1u_{x_2x_3x_4} + a_2u_{x_1x_3x_4} + a_3u_{x_1x_2x_4} + a_4u_{x_1x_2x_3} + \\ + a_{12}u_{x_3x_4} + a_{13}u_{x_2x_4} + a_{14}u_{x_2x_3} + a_{23}u_{x_1x_4} + a_{24}u_{x_1x_3} + a_{34}u_{x_1x_2} + \\ + a_{123}u_{x_4} + a_{124}u_{x_3} + a_{134}u_{x_2} + a_{234}u_{x_1} + a_{1234}u = 0 \quad (3.1)$$

с переменными коэффициентами. В § 2 для уравнения (3.1) построены инварианты Лапласа и определяющие уравнения, записанные в терминах этих инвариантов.

Дальнейшее изложение проводится по аналогии с § 1.

Совокупность преобразований эквивалентности для уравнения (3.1) имеет вид

$$\overline{x}_i = \alpha_i(x_i), \quad i = \overline{1,4}, \quad u = \lambda(x_1, x_2, x_3, x_4)\overline{u}. \quad (3.2)$$

Два уравнения вида (3.1) называются эквивалентными по функции, если они переходят друг в друга при преобразованиях (3.2), в которых

$$\alpha_i(x_i) = x_i, \quad i = \overline{1,4}.$$

В § 2 приведен список 28 инвариантов Лапласа для уравнения (3.1):

$$\begin{gathered} h_{i,j} = a_{ix_j} + a_ia_j - a_{ij}, \\ h_{i,jk} = a_{ix_jx_k} + a_ia_{jk} + a_ja_{ik} + a_ka_{ij} - 2a_ia_ja_k - a_{ijk}, \\ h_{i,jkl} = a_{ix_jx_kx_l} + a_ia_{jkl} + a_ja_{ikl} + a_ka_{ijl} + a_la_{ijk} + \\ +a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk} - 2a_ia_ja_{kl} - 2a_ia_ka_{jl} - \\ -2a_ia_la_{jk} - 2a_ja_ka_{il} - 2a_ja_la_{ik} - 2a_ka_la_{ij} + \\ +6a_ia_ja_ka_l - a_{ijkl}, \quad \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}, \quad j < k < l. \end{gathered} \quad (3.3)$$

Здесь коэффициенты, различающиеся порядком следования индексов, считаем равными (например, $a_{123} = a_{231}$). Два уравнения вида (3.1) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда у них равны все соответствующие инварианты Лапласа.

Хорошо известно (см. § 1), что алгебра Ли уравнения (3.1) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где L^r образована операторами вида

$$X = \sum_{i=1}^{4} \xi^i(x_i)\partial_{x_i} + \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)u\partial_u, \quad (3.4)$$

а L^∞ — типичная для линейных уравнений абелева подалгебра с оператором $\omega(x_1, x_2, x_3, x_4)\partial_u$, ω — решение уравнения (3.1).

Перейдем к анализу определяющих уравнений для (3.1). Если все инварианты Лапласа тождественно равны нулю, то уравнение (3.1) равносильно уравнению $u_{x_1x_2x_3x_4} = 0$ и допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов вида

$$\xi^1(x_1)\partial_{x_1} + \xi^2(x_2)\partial_{x_2} + \xi^3(x_3)\partial_{x_3} + \xi^4(x_4)\partial_{x_4}$$

с произвольными $\xi^i(x_i)$.

Введем в рассмотрение отношения инвариантов Лапласа

$$p_{ij} = \frac{h_{j,i}}{h_{i,j}}, \quad i,\, j = \overline{1,4}, \tag{3.5}$$

а также конструкции

$$q_{ij} = \frac{(\ln h_{i,j})_{x_ix_j}}{h_{i,j}}, \quad i,\, j = \overline{1,4}. \tag{3.6}$$

Подставим $h_{2,1} = p_{12}h_{1,2}$, $h_{1,2} \neq 0$, в формулу (2.16)

$$p_{12}((h_{1,2}\xi^1)_{x_1} + (h_{1,2}\xi^2)_{x_2} + h_{1,2x_3}\xi^3 + h_{1,2x_4}\xi^4)+ \\ + p_{12x_1}h_{1,2}\xi^1 + p_{12x_2}h_{1,2}\xi^2 + p_{12x_3}h_{1,2}\xi^3 + p_{12x_4}h_{1,2}\xi^4 = 0.$$

Так как слагаемое в скобках обращается в нуль, отсюда следует

$$p_{12x_1}\xi^1 + p_{12x_2}\xi^2 + p_{12x_3}\xi^3 + p_{12x_4}\xi^4 = 0. \tag{3.7}$$

Тождество (3.7) означает, что либо $p_{12} = const$, либо p_{12} является инвариантом группы G с оператором (3.4).

Если $p_{12} = const$, то из двух формул (2.15) и (2.16) остается только формула (2.16), которая может быть записана в виде

$$\xi^1(\ln h_{1,2})_{x_1} + \xi^2(\ln h_{1,2})_{x_2} + \xi^3(\ln h_{1,2})_{x_3} + \xi^4(\ln h_{1,2})_{x_4} + \xi^1_{x_1} + \xi^2_{x_2} = 0. \tag{3.8}$$

Дифференцируя по x_1, x_2 получаем

$$\xi^1\frac{((\ln h_{1,2})_{x_1x_2})_{x_1}}{(\ln h_{1,2})_{x_1x_2}} + \xi^2\frac{((\ln h_{1,2})_{x_1x_2})_{x_2}}{(\ln h_{1,2})_{x_1x_2}} + \xi^3\frac{((\ln h_{1,2})_{x_1x_2})_{x_3}}{(\ln h_{1,2})_{x_1x_2}}+ \\ + \xi^4\frac{((\ln h_{1,2})_{x_1x_2})_{x_4}}{(\ln h_{1,2})_{x_1x_2}} + \xi^1_{x_1} + \xi^2_{x_2} = 0. \tag{3.9}$$

Вычитая (3.8) из (3.9) и умножая затем на $(\ln h_{1,2})_{x_1x_2}/h_{1,2}$, получим

$$q_{12x_1}\xi^1 + q_{12x_2}\xi^2 + q_{12x_3}\xi^3 + q_{12x_4}\xi^4 = 0. \tag{3.10}$$

То есть снова либо $q_{12} = const$, либо q_{12} является инвариантом группы G с оператором (3.4).

Точно так же могут быть получены тождества, аналогичные (3.7), (3.10) для оставшихся p_{ij}, q_{ij}.

Далее для инвариантов Лапласа $h_{i,jk}$, $h_{i,jkl}$ могут быть рассмотрены конструкции, аналогичные (3.5), (3.6), а именно

$$p^l_{ijk} = \frac{h_{l,l_1l_2}}{h_{i,jk}}, \quad q_{ijk} = \frac{(\ln h_{i,jk})_{x_ix_jx_k}}{h_{i,jk}}, \quad \{l, l_1, l_2\} = \{i, j, k\}; \tag{3.11}$$

$$p^n_{ijkl} = \frac{h_{n,n_1n_2n_3}}{h_{i,jkl}}, \quad q_{ijkl} = \frac{(\ln h_{i,jkl})_{x_1x_2x_3x_4}}{h_{i,jkl}}, \quad \{n, n_1, n_2, n_3\} = \{i, j, k, l\}. \tag{3.12}$$

Например, рассматривая отношение p^2_{123}, приходим к тождеству (см. (2.20))

$$\xi^1 p^2_{123x_1} + \xi^2 p^2_{123x_2} + \xi^3 p^2_{123x_3} + \xi^4 p^2_{123x_4} = 0.$$

Следовательно опять либо $p^2_{123} = const$, либо p^2_{123} является инвариантом группы G с оператором (3.4). Если $p^2_{123} = const$, то первая строка формулы (2.20) дает

$$\xi^1(\ln h_{1,23})_{x_1} + \xi^2(\ln h_{1,23})_{x_2} + \xi^3(\ln h_{1,23})_{x_3} + \\ + \xi^4(\ln h_{1,23})_{x_4} + \xi^1_{x_1} + \xi^2_{x_2} + \xi^3_{x_3} = 0. \tag{3.13}$$

Дифференцируя по x_1, x_2, x_3 получаем

$$\xi^1 \frac{((\ln h_{1,23})_{x_1x_2x_3})_{x_1}}{(\ln h_{1,23})_{x_1x_2x_3}} + \xi^2 \frac{((\ln h_{1,23})_{x_1x_2x_3})_{x_2}}{(\ln h_{1,23})_{x_1x_2x_3}} + \xi^3 \frac{((\ln h_{1,23})_{x_1x_2x_3})_{x_3}}{(\ln h_{1,23})_{x_1x_2x_3}} + \\ + \xi^4 \frac{((\ln h_{1,23})_{x_1x_2x_3})_{x_4}}{(\ln h_{1,23})_{x_1x_2x_3}} + \xi^1_{x_1} + \xi^2_{x_2} + \xi^3_{x_3} = 0. \tag{3.14}$$

Вычитая (3.13) из (3.14) и умножая затем на $(\ln h_{1,23})_{x_1x_2x_3}/h_{1,23}$, получим

$$\xi^1 q_{123x_1} + \xi^2 q_{123x_2} + \xi^3 q_{123x_3} + \xi^4 q_{123x_4} = 0. \tag{3.15}$$

Таким образом, либо $q_{123} = const$, либо q_{123} является инвариантом группы G с оператором (3.4). Подобные выводы можно сделать и относительно других конструкций (3.11), (3.12), связанных с инвариантами Лапласа $h_{i,jk}$, $h_{i,jkl}$. Мы не будем здесь приводить все соответствующие рассуждения и формулы.

Укажем теперь некоторые классы уравнений вида (3.1), аналогичные указанным в теореме 1.1 и в § 1, для которых конструкции (3.5)–(3.6) постоянны. При этом ограничимся случаями с тождественно равными нулю инвариантами Лапласа $h_{i,jk}$, $h_{i,jkl}$. Отметим, что переход от уравнений с инвариантами Лапласа $h_{i,jk}$, $h_{i,jkl}$ тождественно равными нулю, к уравнениям с ненулевыми $h_{i,jk}$, $h_{i,jkl}$, приводит, вообще говоря, к уменьшению размерности r допускаемой уравнением алгебры Ли L^r (соответствующие примеры легко построить). Так что с точки зрения отыскания уравнений, допускающих алгебры Ли L^r наиболее высокой размерности, достаточно ограничиться случаями, когда все $h_{i,jk} \equiv 0$, $h_{i,jkl} \equiv 0$. Кроме того, ясно, что в случае четырехмерного пространства независимых переменных x_1, x_2, x_3, x_4 соотношения $p_{ij} = const$, $q_{ij} = const$ приводят к инвариантам $h_{i,j}$, i, $j = \overline{1,4}$, определяемым с точностью до произвольных функций. В связи с этим, указываются не все, а только некоторые возможности, наиболее близкие к указанным в теореме 1.1.

Основываясь на результатах § 2 нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Два уравнения вида* (3.1) *с наборами инвариантов Лапласа* $h_{1,2}$, $h_{2,1}$, $\dots$, $h_{1,23}$, $\dots$, $h_{1,234}$, $\dots$, $h_{4,123}$ *и* $\overline{h}_{1,2}$, $\overline{h}_{2,1}$, $\dots$, $\overline{h}_{1,23}$, $\dots$, $\overline{h}_{1,234}$, $\dots$, $\overline{h}_{4,123}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$\begin{gathered} h_{i,j} = \alpha_i'(x_i)\alpha_j'(x_j)\overline{h}_{i,j}, \quad h_{i,jk} = \alpha_i'(x_i)\alpha_j'(x_j)\alpha_k'(x_k)\overline{h}_{i,jk}, \\ h_{i,jkl} = \alpha_i'(x_i)\alpha_j'(x_j)\alpha_k'(x_k)\alpha_l'(x_l)\overline{h}_{i,jkl}, \\ i,j,k,l \in \{1,2,3,4\}, \quad i \neq j \neq k \neq l. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Теорема 3.1 позволяет рассматривать по одному конкретному уравнению в каждом классе эквивалентности. Кроме того, очевидно, что перестановки независимых переменных не приводят к новым случаям.

Перейдем к рассмотрению возможных вариантов уравнений (3.1) с указанными выше постоянными инвариантами преобразования (3.2). Анализ определяющих уравнений всюду проводится аналогично изложенному в § 1 и [142, с. 124–125].

Для краткости для каждого из перечисленных вариантов уравнения (3.1) указываются лишь значения инвариантов Лапласа $h_{i,j}$ и коэффициенты при производных функции u третьего порядка a_i, $i = \overline{1,4}$, поскольку по этим данным, учитывая (3.3), определяются все остальные коэффициенты соответствующего уравнения.

Сначала перечислим варианты (их девять), которые характеризуются условиями: если $h_{i,j} \neq 0$, то $q_{i,j} = 0$, i, $j = \overline{1,4}$.

1. $h_{4,3} \equiv p_{34}$, $h_{3,4} \equiv 1$, остальные $h_{i,j} \equiv 0$. Имеем $a_1 \equiv 0$, $a_2 \equiv 0$, $a_3 = x_4$, $a_4 = p_{34}x_3$. Постоянная p_{34} может быть равна нулю. Уравнение

допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi^1(x_1)\partial_{x_1} + \xi^2(x_2)\partial_{x_2} + (Cx_3 + C_1)\partial_{x_3} - \\ - (Cx_4 - C_2)\partial_{x_4} - (C_2x_3 + C_1p_{34}x_4)u\partial_u,$$

где коэффициенты $\xi^1(x_1)$, $\xi^2(x_2)$ произвольны. Таким образом, допускаемая данным уравнением алгебра L^r бесконечномерна, $r = \infty$.

2. $h_{4,2} \equiv p_{24}$, $h_{2,4} \equiv 1$, $h_{4,3} \equiv p_{34}$, $h_{3,4} \equiv 1$, остальные $h_{i,j} \equiv 0$; $a_1 \equiv 0$, $a_2 = x_4$, $a_3 = x_4$, $a_4 = p_{24}x_2 + p_{34}x_3$. Уравнение допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi^1(x_1)\partial_{x_1} + (Cx_2 + C_1)\partial_{x_2} + (Cx_3 + C_2)\partial_{x_3} - \\ - (Cx_4 - C_3)\partial_{x_4} - ((C_1p_{24} + C_2p_{34})x_4 + C_3(x_2 + x_3))u\partial_u,$$

где коэффициент $\xi^1(x_1)$ произволен. Допускаемая алгебра L^r бесконечномерна, $r = \infty$.

3. $h_{3,2} \equiv p_{23}$, $h_{2,3} \equiv 1$, $h_{4,2} \equiv p_{24}$, $h_{2,4} \equiv 1$, $h_{4,3} \equiv p_{34}$, $h_{3,4} \equiv 1$, остальные $h_{i,j} \equiv 0$; $a_1 \equiv 0$, $a_2 = x_3 + x_4$, $a_3 = p_{23}x_2 + x_4$, $a_4 = p_{24}x_2 + p_{34}x_3$. Уравнение допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi^1(x_1)\partial_{x_1} + C_1\partial_{x_2} + C_2\partial_{x_3} + C_3\partial_{x_4} - \\ - ((C_2 + C_3)x_2 + (C_1p_{23} + C_3)x_3 + (C_1p_{24} + C_2p_{34})x_4)u\partial_u,$$

где коэффициент $\xi^1(x_1)$ произволен. Допускаемая алгебра L^r бесконечномерна, $r = \infty$.

4. $h_{2,1} \equiv p_{12}$, $h_{1,2} \equiv 1$, $h_{4,3} \equiv p_{34}$, $h_{3,4} \equiv 1$, остальные $h_{i,j} \equiv 0$; $a_1 = x_2$, $a_2 = p_{12}x_1$, $a_3 = x_4$, $a_4 = p_{34}x_3$. Уравнение допускает алгебру Ли L^6, образованную операторами

$$X_1 = x_1\partial_{x_1} - x_2\partial_{x_2}, \quad X_2 = \partial_{x_1} - p_{12}x_2u\partial_u,$$
$$X_3 = \partial_{x_2} - x_1u\partial_u, \quad X_4 = \partial_{x_3} - p_{34}x_4u\partial_u,$$
$$X_5 = \partial_{x_4} - x_3u\partial_u, \quad X_6 = x_3\partial_{x_3} - x_4\partial_{x_4}.$$

5. $h_{4,1} \equiv p_{14}$, $h_{1,4} \equiv 1$, $h_{4,2} \equiv p_{24}$, $h_{2,4} \equiv 1$, $h_{4,3} \equiv p_{34}$, $h_{3,4} \equiv 1$, остальные $h_{i,j} \equiv 0$; $a_1 = x_4$, $a_2 = x_4$, $a_3 = x_4$, $a_4 = p_{14}x_1 + p_{24}x_2 + p_{34}x_3$. Уравнение допускает алгебру Ли L^5, образованную операторами

$$X_1 = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3} - x_4\partial_{x_4}, \quad X_2 = \partial_{x_1} - p_{14}x_4u\partial_u,$$
$$X_3 = \partial_{x_2} - p_{24}x_4u\partial_u, \quad X_4 = \partial_{x_3} - p_{34}x_4u\partial_u,$$
$$X_5 = \partial_{x_4} - (x_1 + x_2 + x_3)u\partial_u.$$

6. $h_{2,1} \equiv p_{12}$, $h_{1,2} \equiv 1$, $h_{3,1} \equiv p_{13}$, $h_{1,3} \equiv 1$, $h_{4,2} \equiv p_{24}$, $h_{2,4} \equiv 1$, $h_{4,3} \equiv p_{34}$, $h_{3,4} \equiv 1$, остальные $h_{i,j} \equiv 0$; $a_1 = x_2 + x_3$, $a_2 = p_{12}x_1 + x_4$, $a_3 = p_{13}x_1 + x_4$, $a_4 = p_{24}x_2 + p_{34}x_3$. Уравнение допускает алгебру Ли L^5, образованную операторами

$$X_1 = x_1\partial_{x_1} - x_2\partial_{x_2} - x_3\partial_{x_3} + x_4\partial_{x_4}, \quad X_2 = \partial_{x_1} - (p_{12}x_2 + p_{13}x_3)u\partial_u,$$
$$X_3 = \partial_{x_2} - (x_1 + p_{24}x_4)u\partial_u, \quad X_4 = \partial_{x_3} - (x_1 + p_{34}x_4)u\partial_u,$$
$$X_5 = \partial_{x_4} - (x_2 + x_3)u\partial_u.$$

7. $h_{4,1} \equiv p_{14}$, $h_{1,4} \equiv 1$, $h_{3,2} \equiv p_{23}$, $h_{2,3} \equiv 1$, $h_{4,2} \equiv p_{24}$, $h_{2,4} \equiv 1$, $h_{4,3} \equiv p_{34}$, $h_{3,4} \equiv 1$, остальные $h_{i,j} \equiv 0$; $a_1 = x_4$, $a_2 = x_3 + x_4$, $a_3 = p_{23}x_2 + x_4$, $a_4 = p_{14}x_1 + p_{24}x_2 + p_{34}x_3$. Уравнение допускает алгебру Ли L^4, образованную операторами

$$X_1 = \partial_{x_1} - p_{14}x_4u\partial_u, \quad X_2 = \partial_{x_2} - (p_{23}x_3 + p_{24}x_4)u\partial_u,$$
$$X_3 = \partial_{x_3} - (x_2 + p_{34}x_4)u\partial_u, \quad X_4 = \partial_{x_4} - (x_1 + x_2 + x_3)u\partial_u.$$

8. $h_{3,1} \equiv p_{13}$, $h_{1,3} \equiv 1$, $h_{4,1} \equiv p_{14}$, $h_{1,4} \equiv 1$, $h_{3,2} \equiv p_{23}$, $h_{2,3} \equiv 1$, $h_{4,2} \equiv p_{24}$, $h_{2,4} \equiv 1$, $h_{4,3} \equiv p_{34}$, $h_{3,4} \equiv 1$, остальные $h_{i,j} \equiv 0$; $a_1 = x_3 + x_4$, $a_2 = x_3 + x_4$, $a_3 = p_{13}x_1 + p_{23}x_2 + x_4$, $a_4 = p_{14}x_1 + p_{24}x_2 + p_{34}x_3$. Уравнение допускает алгебру Ли L^4, образованную операторами

$$X_1 = \partial_{x_1} - (p_{13}x_3 + p_{14}x_4)u\partial_u, \quad X_2 = \partial_{x_2} - (p_{23}x_3 + p_{24}x_4)u\partial_u,$$
$$X_3 = \partial_{x_3} - (x_1 + x_2 + p_{34}x_4)u\partial_u, \quad X_4 = \partial_{x_4} - (x_1 + x_2 + x_3)u\partial_u.$$

9. $h_{i,j} \equiv p_{ij}$, $i > j$, $h_{i,j} \equiv 1$, $i < j$, $i,\ j = \overline{1,4}$; $a_1 = x_2 + x_3 + x_4$, $a_2 = p_{12}x_1 + x_3 + x_4$, $a_3 = p_{13}x_1 + p_{23}x_2 + x_4$, $a_4 = p_{14}x_1 + p_{24}x_2 + p_{34}x_3$. Уравнение допускает алгебру Ли L^4, образованную операторами

$$X_1 = \partial_{x_1} - (p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + p_{14}x_4)u\partial_u,$$
$$X_2 = \partial_{x_2} - (x_1 + p_{23}x_3 + p_{24}x_4)u\partial_u,$$
$$X_3 = \partial_{x_3} - (x_1 + x_2 + p_{34}x_4)u\partial_u,$$
$$X_4 = \partial_{x_4} - (x_1 + x_2 + x_3)u\partial_u.$$

Далее идут варианты (их девять), характеризующиеся условиями: если $h_{i,j} \neq 0$, то $q_{i,j} \neq 0$, $i,\ j = \overline{1,4}$.

10. $h_{4,3} = \frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4} = \frac{2/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, остальные $h_{i,j} \equiv 0$. Имеем $a_1 \equiv 0$, $a_2 \equiv 0$, $a_3 = -\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}$, $a_4 = -\frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$. Уравнение допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi^1(x_1)\partial_{x_1} + \xi^2(x_2)\partial_{x_2} + (Cx_3^2 + C_1x_3 + C_2)\partial_{x_3} - \\ - (Cx_4^2 - C_1x_4 + C_2)\partial_{x_4} + \frac{2C}{q_{34}}(x_3 - p_{34}x_4)u\partial_u,$$

где коэффициенты $\xi^1(x_1)$, $\xi^2(x_2)$ произвольны. Допускаемая алгебра L^r бесконечномерна, $r=\infty$.

11. $h_{4,2}=\frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4}=\frac{2/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, остальные $h_{i,j}\equiv 0$; $a_1\equiv 0$, $a_2=-\frac{2/q_{24}}{x_2+x_4}$, $a_3=-\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}$, $a_4=-\left(\frac{2p_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}+\frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$. Уравнение допускает алгебру Ли операторов

$$X=\xi^1(x_1)\partial_{x_1}+(Cx_2^2+C_1x_2+C_2)\partial_{x_2}+(Cx_3^2+C_1x_3+C_2)\partial_{x_3}-$$
$$-(Cx_4^2-C_1x_4+C_2)\partial_{x_4}+2C\left(\frac{1}{q_{24}}(x_2-p_{24}x_4)+\frac{1}{q_{34}}(x_3-p_{34}x_4)\right)u\partial_u,$$

где коэффициент $\xi^1(x_1)$ произволен. Допускаемая алгебра L^r бесконечномерна, $r=\infty$.

12. $h_{3,2}=\frac{2p_{23}/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{2,3}=\frac{2/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{4,2}=\frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4}=\frac{2/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, остальные $h_{i,j}\equiv 0$; $a_1\equiv 0$, $a_2=-\left(\frac{2/q_{23}}{x_2+x_3}+\frac{2/q_{24}}{x_2+x_4}\right)$, $a_3=-\left(\frac{2p_{23}/q_{23}}{x_2+x_3}+\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$, $a_4=-\left(\frac{2p_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}+\frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$. Уравнение допускает алгебру Ли L^r, $r=\infty$, операторов

$$X=\xi^1(x_1)\partial_{x_1}+C_1x_2\partial_{x_2}+C_1x_3\partial_{x_3}+C_1x_4\partial_{x_4}.$$

13. $h_{2,1}=\frac{2p_{12}/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{1,2}=\frac{2/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, остальные $h_{i,j}\equiv 0$; $a_1=-\frac{2/q_{12}}{x_1+x_2}$, $a_2=-\frac{2p_{12}/q_{12}}{x_1+x_2}$, $a_3=-\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}$, $a_4=-\frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$. Уравнение допускает алгебру Ли L^6, образованную операторами

$$X_1=x_1^2\partial_{x_1}-x_2^2\partial_{x_2}+\tfrac{2}{q_{12}}(x_1-p_{12}x_2)u\partial_u,$$
$$X_2=x_3^2\partial_{x_3}-x_4^2\partial_{x_4}+\tfrac{2}{q_{34}}(x_3-p_{34}x_4)u\partial_u,$$
$$X_3=x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2},\quad X_4=x_3\partial_{x_3}+x_4\partial_{x_4},$$
$$X_5=\partial_{x_1}-\partial_{x_2},\quad X_6=\partial_{x_3}-\partial_{x_4}.$$

14. $h_{4,1}=\frac{2p_{14}/q_{14}}{(x_1+x_4)^2}$, $h_{1,4}=\frac{2/q_{14}}{(x_1+x_4)^2}$, $h_{4,2}=\frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4}=\frac{2/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, остальные $h_{i,j}\equiv 0$; $a_1=-\frac{2/q_{14}}{x_1+x_4}$, $a_2=-\frac{2/q_{24}}{x_2+x_4}$, $a_3=-\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}$, $a_4=-\left(\frac{2/q_{14}}{x_1+x_4}+\frac{2/q_{24}}{x_2+x_4}+\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$. Уравнение допускает алгебру Ли L^3, образованную операторами

$$X_1=x_1^2\partial_{x_1}+x_2^2\partial_{x_2}+x_3^2\partial_{x_3}-x_4^2\partial_{x_4}+$$
$$+2\left(\tfrac{1}{q_{14}}(x_1-p_{14}x_4)+\tfrac{1}{q_{24}}(x_2-p_{24}x_4)+\tfrac{1}{q_{34}}(x_3-p_{34}x_4)\right)u\partial_u,$$
$$X_2=x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2}+x_3\partial_{x_3}+x_4\partial_{x_4},$$
$$X_3=\partial_{x_1}+\partial_{x_2}+\partial_{x_3}-\partial_{x_4}.$$

15. $h_{2,1}=\frac{2p_{12}/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{1,2}=\frac{2/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{3,1}=\frac{2p_{13}/q_{13}}{(x_1+x_3)^2}$, $h_{1,3}=\frac{2/q_{13}}{(x_1+x_3)^2}$, $h_{4,2}=\frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4}=\frac{2/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, остальные $h_{i,j}\equiv 0$; $a_1=-\left(\frac{2/q_{12}}{x_1+x_2}+\frac{2/q_{13}}{x_1+x_3}\right)$, $a_2=-\left(\frac{2p_{12}/q_{12}}{x_1+x_2}+\frac{2/q_{24}}{x_2+x_4}\right)$, $a_3=-\left(\frac{2p_{13}/q_{13}}{x_1+x_3}+\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$, $a_4=-\left(\frac{2p_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}+\frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$. Уравнение допускает алгебру Ли L^3, образованную операторами

$$\begin{gathered}X_1=x_1^2\partial_{x_1}-x_2^2\partial_{x_2}-x_3^2\partial_{x_3}+x_4^2\partial_{x_4}+\\+2\left(\tfrac{1}{q_{12}}(x_1-p_{12}x_2)+\tfrac{1}{q_{13}}(x_1-p_{13}x_3)+\right.\\\left.+\tfrac{1}{q_{24}}(p_{24}x_4-x_2)+\tfrac{1}{q_{34}}(p_{34}x_4-x_3)\right)u\partial_u,\\X_2=x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2}+x_3\partial_{x_3}+x_4\partial_{x_4},\\X_3=\partial_{x_1}-\partial_{x_2}-\partial_{x_3}+\partial_{x_4}.\end{gathered}$$

16. Пусть выполняется один из трех вариантов условий.

1) $h_{3,2}=\frac{2p_{23}/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{2,3}=\frac{2/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{4,1}=\frac{2p_{14}/q_{14}}{(x_1+x_4)^2}$, $h_{1,4}=\frac{2/q_{14}}{(x_1+x_4)^2}$, $h_{4,2}=\frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4}=\frac{2/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, остальные $h_{i,j}\equiv 0$; $a_1=-\frac{2/q_{14}}{x_1+x_4}$, $a_2=-\left(\frac{2/q_{23}}{x_2+x_3}+\frac{2/q_{24}}{x_2+x_4}\right)$, $a_3=-\left(\frac{2p_{23}/q_{23}}{x_2+x_3}+\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$, $a_4=-\left(\frac{2/q_{14}}{x_1+x_4}+\frac{2/q_{24}}{x_2+x_4}+\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$.

2) $h_{3,1}=\frac{2p_{13}/q_{13}}{(x_1+x_3)^2}$, $h_{1,3}=\frac{2/q_{13}}{(x_1+x_3)^2}$, $h_{4,1}=\frac{2p_{14}/q_{14}}{(x_1+x_4)^2}$, $h_{1,4}=\frac{2/q_{14}}{(x_1+x_4)^2}$, $h_{3,2}=\frac{2p_{23}/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{2,3}=\frac{2/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{4,2}=\frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4}=\frac{2/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, остальные $h_{i,j}\equiv 0$; $a_1=-\left(\frac{2/q_{13}}{x_1+x_3}+\frac{2/q_{14}}{x_1+x_4}\right)$, $a_2=-\left(\frac{2/q_{23}}{x_2+x_3}+\frac{2/q_{24}}{x_2+x_4}\right)$, $a_3=-\left(\frac{2p_{13}/q_{13}}{x_1+x_3}+\frac{2p_{23}/q_{23}}{x_2+x_3}+\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$, $a_4=-\left(\frac{2p_{14}/q_{14}}{x_1+x_4}+\frac{2p_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}+\frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$.

3) $h_{2,1}=\frac{2p_{12}/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{1,2}=\frac{2/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{3,1}=\frac{2p_{13}/q_{13}}{(x_1+x_3)^2}$, $h_{1,3}=\frac{2/q_{13}}{(x_1+x_3)^2}$, $h_{4,1}=\frac{2p_{14}/q_{14}}{(x_1+x_4)^2}$, $h_{1,4}=\frac{2/q_{14}}{(x_1+x_4)^2}$, $h_{3,2}=\frac{2p_{23}/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{2,3}=\frac{2/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{4,2}=\frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4}=\frac{2/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, остальные $h_{i,j}\equiv 0$; $a_1=-\left(\frac{2/q_{12}}{x_1+x_2}+\frac{2/q_{13}}{x_1+x_3}+\frac{2/q_{14}}{x_1+x_4}\right)$, $a_2=-\left(\frac{2p_{12}/q_{12}}{x_1+x_2}+\frac{2/q_{23}}{x_2+x_3}+\frac{2/q_{24}}{x_2+x_4}\right)$, $a_3=-\left(\frac{2p_{13}/q_{13}}{x_1+x_3}+\frac{2p_{23}/q_{23}}{x_2+x_3}+\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$, $a_4=-\left(\frac{2p_{14}/q_{14}}{x_1+x_4}+\frac{2p_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}+\frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}\right)$.

Тогда уравнение допускает алгебру Ли L^1, образованную оператором

$$X_1=x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2}+x_3\partial_{x_3}+x_4\partial_{x_4}.$$

Теперь перечислим “смешанные” случаи, в которых при $h_{i,j}\neq 0$, может быть как $q_{i,j}=0$, так и $q_{i,j}\neq 0$, $i,\ j=\overline{1,4}$.

17. $h_{i,j}=s_{ij}$, $h_{j,i}=p_{ij}$, $i<j$, $(i,j)\neq(3,4)$, причем постоянные p_{ij} могут равняться нулю, а постоянные s_{ij} равны либо 1, либо 0, но при этом

хотя бы одна из постоянных s_{ij} равна 1; $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$; $a_1=s_{12}x_2+s_{13}x_3+s_{14}x_4$, $a_2=p_{12}x_1+s_{23}x_3+s_{24}x_4$, $a_3=p_{13}x_1+s_{23}x_2-\frac{2/q_{34}}{x_3+x_4}$, $a_4=p_{14}x_1+s_{24}x_2-\frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$. Уравнение допускает алгебру Ли L^3, образованную операторами

$$\begin{gathered}X_1=\partial_{x_1}-(p_{12}x_2+p_{13}x_3+p_{14}x_4)u\partial_u,\\ X_2=\partial_{x_2}-(s_{12}x_1+p_{23}x_3+p_{24}x_4)u\partial_u,\\ X_3=\partial_{x_3}-\partial_{x_4}-((s_{13}-s_{14})x_1+(s_{23}-s_{24})x_2)u\partial_u.\end{gathered}$$

18. $h_{i,j}=s_{ij}$, $h_{j,i}=p_{ij}$, $i<j$, $(i,j)\neq(3,4)$, $(i,j)\neq(2,4)$, $(i,j)\neq(1,2)$, причем постоянные p_{ij} могут равняться нулю, а постоянные s_{ij} равны либо 1, либо 0, но при этом хотя бы одна из постоянных s_{ij} равна 1; $h_{1,2}=\frac{2p_{12}/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{2,1}=\frac{2s_{12}/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{4,2}=\frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4}=\frac{2s_{23}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2s_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, где снова p_{ij} могут равняться нулю, а постоянные s_{ij} равны либо 1, либо 0, но при этом хотя бы одна из постоянных s_{ij} равна 1; $a_1=-\frac{2s_{12}/q_{12}}{x_1+x_2}+s_{13}x_3+s_{14}x_4$, $a_2=-\frac{2p_{12}/q_{12}}{x_1+x_2}+s_{23}x_3+s_{24}x_4$, $a_3=p_{13}x_1+p_{23}x_2-\frac{2s_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $a_4=p_{14}x_1+p_{24}x_2-\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$. Аналогичные ограничения на значения p_{ij}, s_{ij} сохраняются во всех нижеследующих случаях и далее не оговариваются. Уравнение допускает алгебру Ли L^3, образованную операторами

$$\begin{gathered}X_1=x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2}-x_3\partial_{x_3}-x_4\partial_{x_4},\\ X_2=\partial_{x_1}-\partial_{x_2}-((p_{13}-p_{23})x_3+(p_{14}-p_{24})x_4)u\partial_u,\\ X_3=\partial_{x_3}-\partial_{x_4}-((s_{13}-s_{14})x_1+(s_{23}-s_{24})x_2)u\partial_u.\end{gathered}$$

19. $h_{i,j}=s_{ij}$, $h_{j,i}=p_{ij}$, $i<j$, $(i,j)\neq(3,4)$, $(i,j)\neq(2,4)$, $h_{4,2}=\frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4}=\frac{2s_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2s_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $a_1=s_{12}x_2+s_{13}x_3+s_{14}x_4$, $a_2=p_{12}x_1+s_{23}x_3-\frac{2s_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}$, $a_3=p_{13}x_1+s_{23}x_2-\frac{2s_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$, $a_4=p_{14}x_1-\frac{2p_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}-\frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$. Уравнение допускает алгебру Ли L^2, образованную операторами

$$\begin{gathered}X_1=\partial_{x_1}-(p_{12}x_2+p_{13}x_3+p_{14}x_4)u\partial_u,\\ X_2=\partial_{x_2}+\partial_{x_3}-\partial_{x_4}-((s_{12}+s_{13}-s_{14})x_1+s_{23}x_2+p_{23})x_3)u\partial_u.\end{gathered}$$

20. $h_{i,j}=s_{ij}$, $h_{j,i}=p_{ij}$, $i<j$, $(i,j)\neq(3,4)$, $(i,j)\neq(2,4)$, $(i,j)\neq(2,3)$, $h_{3,2}=\frac{2p_{23}/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{2,3}=\frac{2s_{23}/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{4,2}=\frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4}=\frac{2s_{23}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3}=\frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4}=\frac{2s_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $a_1=s_{12}x_2+s_{13}x_3+s_{14}x_4$, $a_2=p_{12}x_1-\frac{2s_{23}/q_{23}}{x_2+x_3}-\frac{2s_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}$, $a_3=p_{13}x_1-\frac{2p_{23}/q_{23}}{x_2+x_3}-\frac{2s_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$, $a_4=p_{14}x_1-\frac{2p_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}-\frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$. Уравнение допускает алгебру Ли L^2, образованную операторами

$$\begin{gathered}X_1=x_1\partial_{x_1}-x_2\partial_{x_2}-x_3\partial_{x_3}-x_4\partial_{x_4},\\ X_2=\partial_{x_1}-(p_{12}x_2+p_{13}x_3+p_{14}x_4)u\partial_u.\end{gathered}$$

21. $h_{i,j} = s_{ij}$, $h_{j,i} = p_{ij}$, $i < j$, $(i,j) \neq (3,4)$, $(i,j) \neq (2,4)$, $(i,j) \neq (1,2)$, $h_{1,2} = \frac{2p_{12}/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{2,1} = \frac{2s_{12}/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{4,2} = \frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4} = \frac{2s_{23}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3} = \frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4} = \frac{2s_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $a_1 = -\frac{2s_{12}/q_{12}}{(x_1+x_2)^2} + s_{13}x_3 + s_{14}x_4$, $a_2 = -\frac{2p_{12}/q_{12}}{x_1+x_2} + s_{23}x_3 - \frac{2s_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}$, $a_3 = p_{13}x_1 + p_{23}x_2 - \frac{2s_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$, $a_4 = p_{14}x_1 - \frac{2p_{24}/q_{24}}{x_2+x_4} - \frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$. Уравнение допускает алгебру Ли L^1, образованную оператором

$$X_1 = x_1\partial_{x_1} - x_2\partial_{x_2} - x_3\partial_{x_3} + x_4\partial_{x_4} - \\ - ((s_{13} - s_{14})x_1 + s_{23}x_2 + (p_{23} - p_{13})x_3 - p_{14}x_4)u\partial_u.$$

22. $h_{i,j} = s_{ij}$, $h_{j,i} = p_{ij}$, $i < j$, $(i,j) \neq (3,4)$, $(i,j) \neq (2,4)$, $(i,j) \neq (1,2)$, $(i,j) \neq (1,3)$, $h_{1,2} = \frac{2p_{12}/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{2,1} = \frac{2s_{12}/q_{12}}{(x_1+x_2)^2}$, $h_{3,1} = \frac{2p_{13}/q_{13}}{(x_1+x_3)^2}$, $h_{1,3} = \frac{2s_{13}/q_{13}}{(x_1+x_3)^2}$, $h_{4,2} = \frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4} = \frac{2s_{23}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3} = \frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4} = \frac{2s_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $a_1 = -\frac{2s_{12}/q_{12}}{x_1+x_2} - \frac{2s_{13}/q_{13}}{x_1+x_3} + s_{14}x_4$, $a_2 = -\frac{2p_{12}/q_{12}}{x_1+x_2} + s_{23}x_3 - \frac{2s_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}$, $a_3 = -\frac{2p_{13}/q_{13}}{x_1+x_3} + p_{23}x_2 - \frac{2s_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$, $a_4 = p_{14}x_1 - \frac{2p_{24}/q_{24}}{x_2+x_4} - \frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$. Уравнение допускает алгебру Ли L^1, образованную оператором

$$X_1 = x_1\partial_{x_1} - x_2\partial_{x_2} - x_3\partial_{x_3} + x_4\partial_{x_4} - (s_{14}x_1 - s_{23}x_2 - p_{23}x_3 + p_{14}x_4)u\partial_u.$$

23. Пусть выполняется один из двух вариантов условий.

1) $h_{i,j} = s_{ij}$, $h_{j,i} = p_{ij}$, $i < j$, $(i,j) \neq (3,4)$, $(i,j) \neq (2,4)$, $(i,j) \neq (1,4)$, $(i,j) \neq (2,3)$, $h_{1,4} = \frac{2p_{14}/q_{14}}{(x_1+x_4)^2}$, $h_{4,1} = \frac{2s_{14}/q_{14}}{(x_1+x_4)^2}$, $h_{3,2} = \frac{2p_{23}/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{2,3} = \frac{2s_{23}/q_{23}}{(x_2+x_3)^2}$, $h_{4,2} = \frac{2p_{24}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{2,4} = \frac{2s_{23}/q_{24}}{(x_2+x_4)^2}$, $h_{4,3} = \frac{2p_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $h_{3,4} = \frac{2s_{34}/q_{34}}{(x_3+x_4)^2}$, $a_1 = s_{12}x_2 + s_{13}x_3 - \frac{2s_{14}/q_{14}}{x_1+x_4}$, $a_2 = p_{12}x_1 - \frac{2s_{23}/q_{23}}{x_2+x_3} - \frac{2s_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}$, $a_3 = p_{13}x_1 - \frac{2p_{23}/q_{23}}{x_2+x_3} - \frac{2s_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$, $a_4 = -\frac{2p_{14}/q_{14}}{x_1+x_4} - \frac{2p_{24}/q_{24}}{x_2+x_4} - \frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$.

2) $h_{1,2} = s_{12}$, $h_{2,1} = p_{12}$, $h_{i,j} = \frac{2p_{ij}/q_{ji}}{(x_i+x_j)^2}$, $h_{j,i} = \frac{2s_{ij}/q_{ji}}{(x_i+x_j)^2}$, $i < j$; $a_1 = s_{12}x_2 - \frac{2s_{13}/q_{13}}{x_1+x_3} - \frac{2s_{14}/q_{14}}{x_1+x_4}$, $a_2 = p_{12}x_1 - \frac{2s_{23}/q_{23}}{x_2+x_3} - \frac{2s_{24}/q_{24}}{x_2+x_4}$, $a_3 = -\frac{2p_{13}/q_{13}}{x_1+x_3} - \frac{2p_{23}/q_{23}}{x_2+x_3} - \frac{2s_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$, $a_4 = -\frac{2p_{14}/q_{14}}{x_1+x_4} - \frac{2p_{24}/q_{24}}{x_2+x_4} - \frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4}$.

В этих случаях допускаемых операторов нет, $r = 0$.

Снова, как и в § 1, возникает вопрос: какие уравнения вида (3.1) могут рассматриваться в качестве четырехмерных аналогов уравнения Эйлера-Пуассона (то есть имеют близкие групповые свойства)?

Отметим, что в случае постоянных q_{ij}, инвариант $h_{i,j}$ является решением уравнения Лиувилля (см. (3.6)), формула общего решения которого известна [142, с. 123]. Аналогично, если какая-либо из конструкций q_{ijk}, q_{ijkl} постоянна, то соответствующие инварианты $h_{i,jk}$, $h_{i,jkl}$ являются решениями уравнений

$$(\ln h_{i,jk})_{x_i x_j x_k} = q_{ijk} h_{i,jk}, \quad (\ln h_{i,jkl})_{x_1 x_2 x_3 x_4} = q_{ijkl} h_{i,jkl}. \tag{3.17}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнение с n независимыми переменными

$$\frac{\partial^n \ln u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = qu, \quad q = const,$$

имеет точное решение вида

$$u = \frac{(-1)^n n! \prod_{i=1}^n \alpha_i'(x_i)}{q \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i)\right)^n},$$

где функции $\alpha_i(x_i)$ произвольны.

Заметим, что инварианты Лапласа естественным образом делятся на три класса, представители которых нумеруются в (3.3) соответственно двумя, тремя и четырьмя индексами. Аналогичное деление на три класса получаем и для конструкций q_{ij}, q_{ijk}, q_{ijkl}.

Уравнение Эйлера-Пуассона согласно теореме 1 характеризуется условиями: p и q постоянны, $q \neq 0$. Таким образом, любое уравнение, у которого все конструкции p_{ij}, q_{ij}, p^l_{ijk}, q_{ijk}, p^n_{ijkl}, q_{ijkl} постоянны, причем некоторые конструкции q_{ij}, q_{ijk}, q_{ijkl} отличны от нуля (например, рассмотренные выше случаи 10–17), можно рассматривать в качестве аналогов уравнения Эйлера-Пуассона.

С другой стороны, в качестве критерия отбора можно принять, что четырехмерный аналог
1) должен допускать алгебру L^r наибольшей конечной размерности,
2) в каждом из трех классов конструкций q_{ij}, q_{ijk}, q_{ijkl} имеются отличные от нуля,
3) коэффициенты уравнения должны иметь достаточно простую структуру, сходную со структурой коэффициентов уравнения Эйлера-Пуассона.

Уравнение, в соответствии с требованиями 1)–3) являющееся четырехмерным аналогом уравнения Эйлера-Пуассона, имеет вид

$$\begin{aligned} &u_{x_1x_2x_3x_4} - \frac{2p_{34}/q_{34}}{x_3+x_4} u_{x_1x_2x_3} - \frac{2/q_{34}}{x_3+x_4} u_{x_1x_2x_4} + \\ &+ \frac{4p_{34}}{q_{34}^2(x_3+x_4)^2} u_{x_1x_2} + \frac{6/q_{234}}{(x_2+x_3+x_4)^3} u_{x_1} - \frac{24/q_{1234}}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^4} u = 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Уравнение (3.18) допускает алгебру L^2, образованную операторами

$$X_1 = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3} + x_4\partial_{x_4}, \quad X_2 = \partial_{x_3} - \partial_{x_4}.$$

Глава 7
Квазилинейные уравнения

В нашем случае общий вид этих уравнений задается соотношением

$$\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}U}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} = f(x_1,\ldots,x_n,U),$$

где f — нелинейный по U дифференциальный оператор, содержащий лишь производные от искомой функции, получаемые из левой части путем отбрасывания, по крайней мере, одного дифференцирования. Отметим, что уравнения данного вида встречаются при исследовании многочисленных процессов и явлений. Например, к частному его случаю простым преобразованием переменных ξ, η сводится синус Гордона уравнение (СГ-уравнение)

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \sin u.$$

Только в коллективной монографии [12, с. 6, 33] для этого уравнения указываются следующие области приложений: дислокации в кристаллах, контакты Джозефсона, спиновые возбуждения в жидком гелии, наносекундные и более короткие резонансные оптические импульсы, волны зарядовой плотности в одномерных органических проводниках, модели теории поля, двумерные вихревые модели в статистической механике. Известны также двойное СГ-уравнение [12, с. 124]

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \pm\left(\sin u + \frac{1}{2}\lambda\sin\frac{1}{2}u\right)$$

и тройное [12, с. 125]

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \sin u + \frac{1}{3}\lambda\sin\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}\sin\frac{2}{3}u,$$

которые описывают распространение строго резонансных пиков оптических импульсов сквозь невозбужденную поглощающую среду. Уравнения последних двух видов встречаются также [12, с. 125] в квазиодномерной конденсатной теории волн плотности заряда.

Нас квазилинейные уравнения рассматриваемого вида заинтересовали с точки зрения изучения возможностей исследования задач с нормальными производными в граничных условиях (для линейных уравнений они рассмотрены в [50, гл. 2] путем редукции к задаче Гурса). Естественным было начать указанное изучение с рассмотрения наиболее простого уравнения:

$$U_{xy} = f(x, y, U, U_x, U_y)$$

в характеристическом прямоугольнике $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1\}$.

Задача Гурса для этого уравнения ранее уже изучалась в [168, с. 205] и [10, с. 292–296], где к ее решению применялся метод последовательных приближений. Однако, решение при этом оказывалось возможным получить не во всем прямоугольнике D, а лишь в его части. Другими словами, существование решения даже задачи Гурса не гарантировалось в полной области D, для которой данная задача ставилась. Это закрывало возможность распространения способа исследования задач с нормальными производными в граничных условиях, осуществленного в случае линейного уравнения. Указанное препятствие удалось преодолеть за счет добавления к условиям на правую часть уравнения, сформулированным в [168], [10], некоторого дополнительного требования. Все это отражено в статье [105], к изложению содержания которой мы и переходим.

§ 1. Задача Гурса для квазилинейного аналога уравнения Бианки третьего порядка

Пусть

$$D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1, 0 < z < z_1\}\,,\ T = \left\{-\infty < t_k < +\infty,\ k = \overline{1,7}\right\},$$

функция f определена на $D \times T$ и является ограниченной в $\overline{D} \times T$, а на T имеет место условие (Липшица)

$$|f\,(x, y, z, \tau_1, \ldots, \tau_\tau) - f\,(x, y, z, \omega_1, \ldots, \omega_\tau)| \leqslant \\ \leqslant A \sum_{s=1}^{7} |\tau_s - \omega_s|\,, \quad A = const > 0. \quad (1.1)$$

В данном параграфе мы будем рассматривать уравнение

$$U_{xyz} = f(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz}). \quad (1.2)$$

Задача 1.1 (Гурса). *Найти функцию* $U \in C^{(1,1,1)}(D) \cap C\left(\overline{D}\right)$, *удовлетворяющую уравнению* (1.2) *и условиям*

$$U(x,y,0) = \varphi_1(x,y), \quad U(x,0,z) = \varphi_2(x,z), \quad U(0,y,z) = \varphi_3(y,z), \\ \varphi_k \in C^{(1,1)}(D_k), \tag{1.3}$$

$$\varphi_1(x,0) = \varphi_2(x,0) = \lambda_1(x), \quad \varphi_1(0,y) = \varphi_3(y,0) = \lambda_2(y), \\ \varphi_2(0,z) = \varphi_3(0,z) = \lambda_3(z). \tag{1.4}$$

Здесь $C^{(k,l,m)}$ — класс функций, имеющих непрерывные производные $\frac{\partial^{r_1+r_2+r_3}}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}}$ для всех $r_1 \leqslant k$, $r_2 \leqslant l$, $r_1 \leqslant m$, λ_k — обозначение общих значений, а D_k ($k = 1,\ 2,\ 3$) — грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ соответственно.

Очевидно, задача (1.2)–(1.4) эквивалентна интегральному уравнению

$$U(x,y,z) = W(x,y,z) + \int\limits_0^x \int\limits_0^y \int\limits_0^z f(\xi,\eta,\zeta,U,U_\xi,U_\eta,U_\zeta,U_{\xi\eta},U_{\xi\zeta},U_{\eta\zeta})d\xi d\eta d\zeta,$$

$W(x,y,z) = \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,z) + \varphi_3(y,z) - \lambda_2(y) - \lambda_3(z) - \lambda_1(x) - \varphi_1(0,0)$, решение которого можно получить с помощью последовательных приближений

$$U_n(x,y,z) = W(x,y,z) + \\ + \int\limits_0^x \int\limits_0^y \int\limits_0^z f(\xi,\eta,\zeta,U_{n-1},\tfrac{\partial U_{n-1}}{d\xi},\tfrac{\partial U_{n-1}}{d\eta},\tfrac{\partial U_{n-1}}{d\varsigma},\tfrac{\partial^2 U_{n-1}}{d\xi d\eta},\tfrac{\partial^2 U_{n-1}}{d\xi d\varsigma},\tfrac{\partial^2 U_{n-1}}{d\eta d\varsigma})d\xi d\eta d\zeta,$$

$$n = 1,\ 2,\ \ldots, \quad U_0 \equiv 0.$$

Для разностей $V_n(x,y,z) = U_{n+1}(x,y,z) - U_n(x,y,z)$, $n = 1,\ 2,\ldots$, с помощью (1.1) нетрудно получить оценки

$$|V_n| < \frac{7M}{A^2K^3}\frac{(3KLA)^{n+2}}{(n+2)!}, \quad K = L^2 + 3L + 3, \quad L = \max(x_1,y_1,z_1),$$

$$M = \max_{\overline{D}}\left(|V_0|, \left|\frac{\partial V_0}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial V_0}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial V_0}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial^2 V_0}{\partial x\partial y}\right|, \left|\frac{\partial^2 V_0}{\partial x\partial z}, \left|\frac{\partial^2 V_0}{\partial y\partial z}\right|\right|\right),$$

а для их первых производных

$$\left|\frac{\partial V_n}{\partial\theta}\right| < \frac{7M}{AK^2}\frac{(3KLA)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \theta = x,\ y,\ z.$$

Вторые же смешанные производные по (x,y), (x,z), (y,z) не превосходят по модулю величины

$$\frac{7M}{K}\frac{(3KLA)^n}{n!}.$$

Очевидно, из этих неравенств следует равномерная сходимость $\{U_n\}$ вместе с первыми и смешанными производными, что обеспечивает существование решения задачи 1.1. Его единственность устанавливается стандартным для метода последовательных приближений приемом. Следовательно, верна

Теорема 1.1. *Решение задачи Гурса* 1.1 *существует и единственно.*

Замечание. Аналогично доказывается однозначная разрешимость плоской задачи, где в соответствующих условиях для t участвуют только t_1, t_2.

Обратим еще внимание на то, что указанным ранее дополнительным требованием к условиям из [168], [10], является ограниченность f в $\overline{D} \times T$. Нетрудно привести пример, подтверждающий существенность данного требования. Действительно, рассмотрим задачу об отыскании решения указанного ранее уравнения

$$U_{xy} = f(x, y, U, U_x, U_y) \tag{1.5}$$

при

$$f = \frac{g\,(x, y) - U_x U_y}{U}, \quad g \in C\left(\overline{D}\right),$$

по условиям $U\,(x, 0) = \varphi_1\,(x)$, $U\,(0, y) = \varphi_2\,(y)$. Ясно, что f не является ограниченной в $\overline{D} \times T$. Умножая уравнение на $2U$, приходим к соотношению

$$V_{xy} = 2g\,(x, y)\,, \quad V = U^2.$$

Первая из этих формул есть легко решаемое уравнение с дополнительным условиями

$$V\,(x, 0) = \varphi_1^2\,(x)\,, \quad V\,(0, y) = \varphi_2^2\,(y)\,.$$

Путем непосредственного интегрирования находим единственное решение

$$V\,(x, y) = 2\int\limits_0^x \int\limits_0^y g\,(t, \tau)\,d\tau dt + \varphi_1^2\,(x) + \varphi_2^2\,(x) - \varphi_1^2\,(0)\,.$$

Если, например, $g\,(x, y) > 0$ и $|\varphi_1\,(x)| \geqslant |\varphi_1\,(0)|$, то $V\,(x, y) > 0$ и, следовательно, $U\,(x, y) = \pm\sqrt{V\,(x, y)}$. То есть исходная задача Гурса имеет два решения. Таким образом, нарушение в теореме обсуждаемого условия может привести к неединственности решения. Впрочем, (мы увидим это в § 4) бывают уравнения вида (1.5) с неограниченной в $\overline{D} \times T$ правой частью, для которых задача Гурса корректна.

Приведем еще один пример нарушения условий теоремы. Пусть

$$f \equiv f(x, y, U) = \begin{cases} -4xy, & U \geqslant x^2y^2 \\ -4xy, & U \leqslant 0 \\ \frac{4x^2y^2-8U}{xy}, & U \in \left[0, x^2y^2\right]. \end{cases}$$

Непосредственно усматривается, что f непрерывна при переходе через плоскость $U = 0$ и через параболический гиперболоид $U = x^2y^2$, но в окрестности начала координат (x, y, U) условие Липшица не выполняется. В той же области D рассмотрим для уравнения $U_{xy} = f\left(x, y, U\right)$ задачу Гурса с условиями $U\left(x, 0\right) = U\left(0, y\right) = 0$. Очевидно, она редуцируется к уравнению

$$U\left(x, y\right) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y f\left(\xi, \eta, U\left(\xi, \eta\right)\right) d\eta d\xi,$$

для которого последовательные приближения имеют вид

$$U_n\left(x, y\right) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y f\left(\xi, \eta, U_{n-1}\left(\xi, \eta\right)\right) d\eta d\xi, \quad n = 1,\, 2, \ldots$$

Если взять $U_0 = 0$, то путем непосредственного вычисления найдем: $U_1 = x^2y^2$, $U_2 = -x^2y^2$, $\ldots$, $U_n = \left(-1\right)^{n-1} x^2y^2$. Ясно, что эта последовательность расходится.

§ 2. Задача с нормальными производными в граничных условиях

Эту задачу удается исследовать при дополнительных предположениях относительно правой части рассматриваемого уравнения (1.2): функция f должна допускать выделение линейной части таким образом, что остающаяся нелинейная составляющая имеет определенную структуру. А именно, речь идет об уравнении вида

$$U_{xyz} + aU_{xy} + bU_{xz} + cU_{yz} + dU_x + eU_y + gU_z + hU = \\ = f\left(x, y, z, U, \lambda U_x, \mu U_y, \nu U_z, \alpha U_{xy}, \beta U_{xz}, \gamma U_{yz}\right), \quad (2.1)$$

где λ, μ, ν, α, β, γ — непрерывные в $\overline{D}$ функции. Предполагается, что в $\overline{D}$

$$\begin{gathered} a \in C^{(1,1,0)}, \quad b \in C^{(1,0,1)}, \quad c \in C^{(0,1,1)}, \quad d \in C^{(1,0,0)}, \\ e \in C^{(0,1,0)}, \quad g \in C^{(0,0,1)}, \quad h \in C^{(0,0,0)}. \end{gathered} \quad (2.2)$$

Задача 2.1. *Найти решение* $U \in C^{(1,1,1)}(D) \cap C\left(\overline{D}\right)$ *уравнения* (2.1) *с краевыми условиями, получаемыми заменой в* (1.3) *хотя бы одного значения* U *значением ее нормальной производной из набора*

$$\begin{gathered} U_x(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \; U_y(x, 0, z) = \psi_2(x, z), \; U_z(0, y, z) = \psi_3(y, z), \\ \psi_k \in C^{(1,1)}(D_k). \end{gathered} \quad (2.3)$$

Далее используем схему рассуждений из [48] (см. также [50, § 4]). Прежде всего изучим связи между φ_k и ψ_k.

Сначала займемся ситуацией на D_1. Интегрируя (2.1) по второму и третьему аргументам в пределах (ε_2, y), (ε_3, z) и перейдя к пределу при $\varepsilon_2 \to$

0, $\varepsilon_3 \to 0$ с учетом (1.3) и (2.3), получаем

$$c\left(0,y,z\right)\varphi_3\left(y,z\right)+\int\limits_0^y\left[g\left(0,\eta,z\right)-c_\eta\left(0,\eta,z\right)\right]\varphi_3\left(\eta,z\right)d\eta+$$
$$+\int\limits_0^z\left[e\left(0,y,\zeta\right)-c_\zeta\left(0,y,\zeta\right)\right]\varphi_3\left(y,\zeta\right)d\zeta+$$
$$+\int\limits_0^y\int\limits_0^z\left[c_{\eta\zeta}\left(0,\eta,\zeta\right)-e_\eta\left(0,\eta,\zeta\right)-g_\zeta\left(0,\eta,\zeta\right)+h\left(0,\eta,\zeta\right)\right]\varphi_3\left(\eta,\zeta\right)d\eta d\zeta+$$
$$+F\left(y,z\right)=\int\limits_0^y\int\limits_0^z f\left(\omega\right)d\eta d\zeta, \quad (2.4)$$

где ω есть набор аргументов: $0,\eta,\zeta,\varphi_3\left(\eta,\zeta\right),\lambda\varphi_3\left(\eta,\zeta\right),\mu\varphi_{3\eta}\left(\eta,\zeta\right),\nu\varphi_{3\zeta}\left(\eta,\zeta\right)$, $\alpha\varphi_{3\eta}\left(\eta,\zeta\right)$, $\beta\varphi_{3\zeta}\left(\eta,\zeta\right)$, $\gamma\varphi_{3\eta\zeta}\left(\eta,\zeta\right)$, а $F\left(y,z\right)$ имеет вид

$$F\left(y,z\right)=\psi_3\left(y,z\right)-\psi_3\left(0,z\right)-\psi_3\left(y,0\right)+\psi_3\left(0,0\right)+$$
$$+c\left(0,0,0\right)\varphi_1\left(0,0\right)-c\left(0,0,z\right)\varphi_2\left(0,z\right)-$$
$$-c\left(0,y,0\right)\varphi_1\left(0,y\right)-\int\limits_0^y\int\limits_0^z\left[a_\eta\left(0,\eta,\zeta\right)+b_\zeta\left(0,\eta,\zeta\right)-\right.$$
$$\left.-d\left(0,\eta,\zeta\right)\right]\psi_3\left(\eta,\zeta\right)d\eta d\zeta+$$
$$+\int\limits_0^z\left[c_\zeta\left(0,0,\zeta\right)-e\left(0,0,\zeta\right)\right]\varphi_2\left(0,\zeta\right)d\zeta+$$
$$+\int\limits_0^z\left[a\left(0,y,\zeta\right)\psi_3\left(y,\zeta\right)-a\left(0,0,\zeta\right)\psi_3\left(0,\zeta\right)\right]d\zeta+$$
$$+\int\limits_0^y\left[b\left(0,\eta,z\right)\psi_3\left(\eta,z\right)-b\left(0,\eta,0\right)\psi_3\left(\eta,0\right)\right]d\eta+$$
$$+\int\limits_0^y\left[c_\eta\left(0,\eta,0\right)-g\left(0,\eta,0\right)\right]\varphi_1\left(0,\eta\right)d\eta.$$

Очевидно, если функция ψ_3 известна, то (2.4) можно рассматривать как интегральное уравнение для φ_3. Непосредственно усматривается, что

$\varphi_1(0,y) = \varphi_3(0,y)$ и $\varphi_3(0,z) = \varphi_2(0,z)$ не могут быть найдены из (2.4) и в дальнейшем, если не представится возможности их определить из других соображений, должны рассматриваться как произвольные функции.

Предположения (2.2) позволяют продифференцировать (2.4) и получить уравнение

$$\begin{gathered} c(0,y,z)\varphi_{3yz}(y,z) + e(0,y,z)\varphi_{3y}(y,z) + \\ + g(0,y,z)\varphi_{3z}(y,z) + h(0,y,z)\varphi_3(y,z) + \\ + A_1(y,z) = f(0,y,z,\varphi_3(y,z),\lambda(0,y,z)\psi_3(y,z),\mu(0,y,z)\varphi_{3y}(y,z), \\ \nu(0,y,z)\varphi_{3z}(y,z),\alpha(0,y,z)\psi_{3y}(y,z),\beta(0,y,z)\psi_{3z}(y,z), \\ \gamma(0,y,z)\varphi_{3yz}(y,z)), \quad (2.5) \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} A_1(y,z) = \psi_{3yz}(y,z) + a(0,y,z)\psi_{3y}(y,z) + \\ + b(0,y,z)\psi_{3z}(y,z) + d(0,y,z)\psi_3(y,z). \end{gathered}$$

Вместе с условиями $\varphi_3(y,0) = \lambda_3(y)$, $\varphi_3(0,z) = \lambda_2(z)$ оно представляет собой плоскую задачу Гурса. Будем различать следующие случаи:

1) $\gamma(0,y,z) = 0$, $c(0,y,z) \neq 0$. Тогда (2.5) имеет вид

$$\begin{gathered} c(0,y,z)\varphi_{3yz}(y,z) + e(0,y,z)\varphi_{3y}(y,z) + g(0,y,z)\varphi_{3z}(y,z) + \\ + h(0,y,z)\varphi_3(y,z) + A_1(y,z) = \\ = f(0,y,z,\varphi_3(y,z),\lambda(0,y,z)\psi_3(y,z),0,0, \\ \alpha(0,y,z)\psi_{3y}(y,z),\beta(0,y,z)\psi_{3z}(y,z),0). \end{gathered}$$

Уравнение имеет единственное решение, зависящее от $\lambda_3(y)$, $\lambda_2(z)$.

2) $\gamma(0,y,z) = \mu(0,y,z) = \nu(0,y,z) = 0$, $c(0,y,z) \equiv g(0,y,z) \equiv 0$, $e(0,y,z) \neq 0$.

Тогда:

$$\begin{gathered} e(0,y,z)\varphi_{3y}(y,z) + h(0,y,z)\varphi_3(y,z) + A_1(y,z) = \\ = f(0,y,z,\varphi_3(y,z),\lambda(0,y,z)\psi_3(y,z),0,0, \\ \alpha(0,y,z)\psi_{3y}(y,z),\beta(0,y,z)\psi_{3z}(y,z),0). \quad (2.6) \end{gathered}$$

Интегрируя (2.6) по y, получаем

$$\varphi_3\left(y,z\right)=A_3(y,z)+\int\limits_0^y h_1(0,\eta,z)\varphi_3\left(\eta,z\right)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^y\frac{1}{e\left(0,\eta,z\right)}f(0,\eta,z,\varphi_3\left(\eta,z\right),\lambda\left(0,\eta,z\right)\psi_3\left(\eta,z\right),0,$$

$$0,\alpha\left(0,\eta,z\right)\psi_{3\eta}\left(\eta,z\right),\beta\left(0,\eta,z\right)\psi_{3z}\left(\eta,z\right),0)d\eta, \quad (2.7)$$

где

$$A_3\left(y,z\right)=\varphi_3\left(0,z\right)-\int\limits_0^y\frac{A_1\left(\eta,z\right)}{e\left(0,\eta,z\right)}d\eta, \quad h_1\left(0,y,z\right)=-\frac{h\left(0,y,z\right)}{e\left(0,y,z\right)}.$$

Если функция ψ_3 известна, то (2.7) есть интегральное уравнение для $\varphi_3\left(y,z\right)$, из которого значение $\lambda_3\left(z\right)$ не может быть найдено. Его решение существует и зависит от $\lambda_3\left(z\right)$.

3) $\gamma\left(0,y,z\right)=\mu\left(0,y,z\right)=\nu\left(0,y,z\right)=0$, $c\left(0,y,z\right)\equiv e\left(0,y,z\right)\equiv 0$, $g\left(0,y,z\right)\neq 0$. В этом случае

$$g(0,y,z)\varphi_{3z}(y,z)+h(0,y,z)\varphi_3(y,z)+A_1(y,z)=$$
$$=f(0,y,z,\varphi_3(y,z),\lambda(0,y,z)\psi_3(y,z),0,0,$$
$$\alpha(0,y,z)\psi_{3y}(y,z),\beta(0,y,z)\psi_{3z}(y,z),0). \quad (2.8)$$

Интегрируя (2.8) по z, получаем

$$\varphi_3(y,z)=A_5(y,z)+\int\limits_0^z h_2(0,y,\zeta)\varphi_3(y,\zeta)d\zeta+$$

$$+\int\limits_0^z\frac{1}{g(0,y,\zeta)}f(0,y,\zeta,\varphi_3(y,\zeta),\lambda(0,y,\zeta)\psi_3(y,\zeta),0,$$

$$0,\alpha(0,y,\zeta)\psi_{3y}(y,\zeta),\beta(0,y,\zeta)\psi_{3\zeta}(y,\zeta),0)d\zeta,$$

где

$$A_5(y,z)=\varphi_3(y,0)-\int\limits_0^z\frac{A_1(y,\zeta)}{g(0,y,\zeta)}d\zeta, \quad h_2(0,y,z)=-\frac{h(0,y,z)}{g(0,y,z)},$$

из которого $\varphi_3\left(y,z\right)$ определяется однозначно через ψ_3 и $\lambda_2\left(y\right)$.

4) $\gamma(0,y,z) = \mu(0,y,z) = \nu(0,y,z) = 0$, $c(0,y,z) \equiv e(0,y,z) \equiv g(0,y,z) \equiv 0$, $h(0,y,z) \neq 0$. Имеем

$$\begin{gathered}h(0,y,z)\,\varphi_3(y,z) + A_1(y,z) = \\ = f(0,y,z,\varphi_3(y,z)\,,\lambda(0,y,z)\,\psi_3(y,z)\,,0,0, \\ \alpha(0,y,z)\,\psi_{3y}(y,z)\,,\beta(0,y,z)\,\psi_{3z}(y,z)\,,0),\end{gathered}$$

то есть решение задачи существует и определяется однозначно.

Перейдем теперь к ситуации на D_2. Роль (2.5) играет уравнение

$$\begin{gathered}b(x,0,z)\,\varphi_{2xz}(x,z) + d(x,0,z)\,\varphi_{2x}(x,z) + g(x,0,z)\,\varphi_{2z}(x,z) + \\ + h(x,0,z)\,\varphi_2(x,z) + B_1(x,z) = \\ = f(x,0,z,\varphi_2(x,z)\,,\lambda(x,0,z)\,,\varphi_{2x}(x,z)\,,\mu(x,0,z)\,\psi_3(y,z)\,, \\ \nu(x,0,z)\,\varphi_{2z}(x,z)\,,\alpha(x,0,z)\,\psi_{2x}(x,z)\,, \\ \beta(x,0,z)\,\varphi_{2xz}(x,z)\,,\gamma(x,0,z)\,\psi_{3z}(y,z)).\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}B_1(x,z) = \psi_{2xz}(x,z) + a(x,0,z)\,\psi_{2x}(x,z) + \\ + c(x,0,z)\,\psi_{2z}(x,z) + e(x,0,z)\,\psi_3(x,z)\,.\end{gathered}$$

Картина определения $\varphi_2(x,z)$ аналогична ситуации на D_1 — здесь тоже можно выделить четыре варианта:

1) $\beta(x,0,z) \equiv 0$, $b(x,0,z) \neq 0$, зависит от $\lambda_1(x)$ и $\lambda_3(z)$;

2) $\beta(x,0,z) \equiv \lambda(x,0,z) \equiv \nu(x,0,z) \equiv 0$, $b(x,0,z) \equiv g(x,0,z) \equiv 0$, $d(x,0,z) \neq 0$, зависит от $\lambda_1(x)$;

3) $\beta(x,0,z) \equiv \lambda(x,0,z) \equiv \nu(x,0,z) \equiv 0$, $b(x,0,z) \equiv d(x,0,z) \equiv 0$, $g(x,0,z) \neq 0$, зависит от $\lambda_3(z)$;

4) $\beta(x,0,z) \equiv \lambda(x,0,z) \equiv \nu(x,0,z) \equiv 0$, $b(x,0,z) \equiv g(x,0,z) \equiv d(x,0,z) \equiv 0$, $h(x,0,z) \neq 0$, $\varphi_2(x,z)$ определяется однозначно.

Наконец, на D_3 уравнение для φ_1 принимает вид

$$\begin{gathered}a(x,y,0)\,\varphi_{1xy}(x,y) + d(x,y,0)\,\varphi_{1x}(x,y) + \\ + e(x,y,0)\,\varphi_{1y}(x,y) + h(x,y,0)\,\varphi_1(x,y) + C_1(x,y) = \\ = f(x,y,0,\varphi_1(x,y)\,,\lambda(x,y,0)\,\varphi_{1x}(x,y)\,,\mu(x,y,0)\,\varphi_{1y}(x,y)\,, \\ \nu(x,y,0)\,\psi_1(x,y)\,,\alpha(x,y,0)\,\varphi_{1xy}(x,y)\,, \\ \beta(x,y,0)\,\psi_{1x}(x,y)\,,\gamma(x,y,0)\,\psi_{1y}(x,y)),\end{gathered}$$

где

$$C_1(x,y)=\psi_{1xy}(x,y)+b(x,y,0)\,\psi_{1x}(x,y)+\\ +c(x,y,0)\,\psi_{1y}(x,y)+g(x,y,0)\,\psi_1(x,y)\,.$$

Аналогично ситуации на D_2 для D_3 приведем только условия, налагаемые на коэффициенты:

1) $\alpha(x,y,0)\equiv 0$, $a(x,y,0)\neq 0$, зависит от $\lambda_1(x)$и $\lambda_2(y)$;

2) $\alpha(x,y,0)\equiv\lambda(x,y,0)\equiv\mu(x,y,0)\equiv 0$, $a(x,y,0)\equiv e(x,y,0)\equiv 0$, $d(x,y,0)\neq 0$ определяется через $\lambda_1(x)$;

3) $\alpha(x,y,0)\equiv\lambda(x,y,0)\equiv\mu(x,y,0)\equiv 0$, $a(x,y,0)\equiv d(x,y,0)\equiv 0$, $e(x,y,0)\neq 0$, $\varphi_1(x,y)$ вычисляется через $\lambda_2(y)$

4) $\alpha(x,y,0)\equiv\lambda(x,y,0)\equiv\mu(x,y,0)\equiv 0$, $a(x,y,0)\equiv d(x,y,0)\equiv e(x,y,0)\equiv 0$, $h(x,y,0)\neq 0$ однозначное определение $\varphi_1(x,y)$.

Обратимся к различным вариантам задачи 2.1, чтобы выяснить возможность и характер их редукции к задаче Гурса для (1.2). Условия типа (1.3) обозначим через Г, а типа (2.3) — через N, причем носители этих условий всегда будем брать в последовательности D_1, D_2, D_3. Если не считать варианты задач, получающихся переменной ролей независимых переменных, то, очевидно, получим три задачи, которые естественно обозначить ГГN, ГNN, NNN. Очевидно, для вариантов ГNN, NNN нужно комбинировать случаи 1)–4) на различных D_k. При этом некоторые из функций λ_k $(k=1,\,2,\,3)$ либо определяются через исходные данные того или иного случая задачи 2.1, либо нет. Могут появиться еще условия согласования, порождаемые соотношениями (1.4). В первом варианте ГГN λ_1 и λ_2 сразу определяются, а на исходные данные требуется наложить условие согласования, порождаемое соотношением $\varphi_1(0,y)=\varphi_3(y,0)$. Поэтому верна

Теорема 2.1. *Вариант ГГN задачи* 2.1 *однозначно разрешим при одном условии согласования.*

В варианте ГNN комбинируются случаи 1)–4) на D_1 и D_2. Обозначим эти комбинации парой индексов, первая цифра которой отвечает случаю из ситуации на D_1, а вторая — на D_2. Если отбросить комбинации, получающиеся переменой ролей D_1 и D_2, то в результате получится

Теорема 2.2. *В случаях* 11, 12, 13, 14, 22, 24 *редукция к задаче* 1.1 *осуществляется с точностью до произвольной функции* $\lambda_2(z)$, *в остальных случаях — однозначно. Условия согласования отсутствуют в комбинациях* 24, 25, 44; *одно такое условие — в* 22; *по два — в* 12, 14, 33; *три — в* 11, 13.

В варианте NNN комбинируются ситуации на D_1, D_2, D_3. Всего существенно различных комбинаций будет 10. Наборы индексов, составленных по указанному для ΓNN правилу, будут трехзначными. Результатом будет

Теорема 2.3. *В случае* 444 *осуществляется однозначная редукция варианта* NNN *к задаче* 1.1. *В случаях* 122, 144, 334 *эта редукция осуществляется с точностью до* $\lambda_3(y)$ *и* $\lambda_2(z)$. *Наконец, в случаях* 111, 112, 113, 114, 133, 134 *редукция осуществляется с точностью до* $\lambda_3(y)$, $\lambda_2(z)$, $\lambda_1(x)$. *Условия согласования отсутствуют в комбинациях* 334, 444*; по два таких условия — в* 122, 134, 144*; три — в* 111, 112, 113, 114, 133.

Поскольку λ_k $(k = 1, 2, 3)$ представляет собой значения искомой функции на ребрах D, то ясно, что, дополняя постановку задачи этими значениями, получим во всех вышеперечисленных вариантах однозначную редукцию к задаче Гурса. В силу теоремы 2.1 это будет означать однозначную разрешимость исходной задачи 2.1 с условиями согласования или без них.

Задачи, подобные изученным в §§ 1–2, исследованы также для квазилинейных аналогов уравнений Бианки в пространствах любого конечного числа измерений [106], [103], [104], а в [58] результаты в обсуждаемом направлении получены для квазилинейного псевдопараболического уравнения

$$U_{xxy} = f\left(x, y, U, U_x, U_y, U_{xy}, U_{xx}\right),$$

частные случаи которого встречаются при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах [214]. Оно содержит в себе уравнение Аллера [226]

$$U_t = \left(aU_x + bU_{xt}\right)_x$$

и Бенждамина-Бона-Махони [136, с. 261]

$$U_t + U_x = \varepsilon\left(3UU_x + \frac{1}{2}U_{xxt}\right), \quad \varepsilon = const > 0.$$

§ 3. Задачи для уравнения Лиувилля

Речь пойдет об уравнении

$$U_{xy} = k \exp U, \quad k = const \neq 0. \tag{3.1}$$

Оно относится к виду (1.5), но известное [10, с. 321] представление решений

$$e^U = \frac{2}{k} \frac{\varphi'(x)\, \psi'(y)}{\left[\varphi(x) + \psi(y)\right]^2}, \tag{3.2}$$

полученное впервые Лиувиллем [232], позволяет строить решение ряда задач в явном виде. При выводе в [10] формулы (3.2) используются функции $\ln \varphi'(x)$, $\ln \psi'(x)$ и $\ln \frac{2}{k}$. Поэтому пока следует считать ее доказанной при условиях

$$k > 0, \quad \varphi'(x) > 0, \quad \psi'(y) > 0. \tag{3.3}$$

Кроме того, там же в рассуждениях участвует $\varphi'''(x)$, которая в процессе преобразований интегрируется, то есть фактически предполагается, что $\varphi \in C^3$. Однако, перечисленные условия могут быть ослаблены, если просто проверить, удовлетворяет ли функция U, определяемая соотношением (3.2), уравнению (3.1).

Действительно, если продифференцировать (3.2) по x, применить к полученному соотношению формулу (3.2), сократить на $\varphi'(x)$, то получим

$$U_x = \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} - \frac{2\varphi'(x)}{\varphi(x) + \psi(y)}.$$

Деление на $\varphi'(x)$ законно, так как в силу $k \neq 0$ и формулы (3.2) обращение φ' в нуль невозможно. Дифференцируя полученное соотношение по y и еще раз учитывая (3.2), имеем

$$U_{xy} = ke^U,$$

то есть U, определяемая из (3.2), удовлетворяет уравнению (3.1). Все проведенные действия законны как при $k > 0$, так и при $k < 0$, и при этом достаточно только, чтобы $\varphi \in C^2$. Аналогично, можно проведенное рассуждение начать с дифференцирования (3.2) по y. Тогда все получится, если $\psi \in C^2$.

Из вышеизложенного следует

Лемма. *Представление (3.2) имеет место при любом знаке параметра k и произвольных функциях φ, $\psi \in C^1$, из которых по крайней мере одна должна иметь непрерывную производную второго порядка.*

3.1. Вывод формулы решения задачи Гурса. Итак, пусть $D = \{0 < x < a, \quad 0 < y < b\}$.

Задача 3.1. *Найти функцию $U(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^{(1,1)}\left(\overline{D}\right)$, являющуюся в D решением уравнения (3.1) и удовлетворяющую условиям*

$$U(x,0) = \mu(x), \quad x \in P = [0,a]; \quad U(0,y) = \nu(y), \quad y \in Q = [0,b]. \quad (3.4)$$

Для некоторого упрощения дальнейших формул обозначим

$$\varphi(0) = \lambda, \quad \psi(0) = \rho, \quad U(0,0) = U_0. \quad (3.5)$$

Сопоставляя (3.2) с первым условием (3.4), имеем

$$-\frac{k}{2} e^{\mu(x)} = \psi'(0) \left(\frac{1}{\varphi(x) + \rho}\right)'.$$

Интегрируя это равенство от 0 до x и разрешая полученное соотношение относительно $\varphi(x)$, находим

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\psi'(0) + \rho(\rho+\lambda) k \int\limits_0^x e^{\mu(\xi)} d\xi}{2\psi'(0) - k(\lambda+\rho) \int\limits_0^x e^{\mu(\xi)} d\xi}.$$

Аналогично из второго условия (3.4) и (3.2) выводим

$$\psi(y) = \frac{2\rho\varphi'(0) + \lambda(\rho+\lambda) k \int\limits_0^y e^{\nu(\eta)} d\eta}{2\varphi'(0) - k(\lambda+\rho) \int\limits_0^y e^{\nu(\eta)} d\eta}.$$

Путем сложения этих двух равенств получаем

$$\varphi(x) + \psi(y) = \\ = \frac{4(\lambda+\rho)\varphi'(0)\psi'(0) - (\rho+\lambda)^3 k^2 \int\limits_0^x e^{\mu(\xi)} d\xi \int\limits_0^y e^{\nu(\eta)} d\eta}{\left[2\psi'(0) - \rho k(\lambda+\rho) \int\limits_0^x e^{\mu(\xi)} d\xi\right] \left[2\varphi'(0) - \rho k(\lambda+\rho) \int\limits_0^y e^{\nu(\eta)} d\eta\right]}. \quad (3.6)$$

Для подстановки в (3.2) нам нужны еще функции φ', ψ'. Их получаем путем непосредственного дифференцирования:

$$\varphi'(x) = \frac{2k\psi'(0)(\rho+\lambda)^2 e^{\mu(x)}}{\left[2\psi'(0) - k(\lambda+\rho)\int\limits_0^x e^{\mu(\xi)}d\xi\right]^2},$$

$$\psi'(y) = \frac{2k\varphi'(0)(\rho+\lambda)^2 e^{\nu(y)}}{\left[2\varphi'(0) - k(\lambda+\rho)\int\limits_0^y e^{\nu(\eta)}d\eta\right]^2}. \tag{3.7}$$

Из (3.6)–(3.7) следует

$$\frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x)+\psi(y)]^2} = \frac{2k^2(\lambda+\rho)^4 e^{\mu(x)+\nu(y)}\varphi'(0)\psi'(0)}{\left[4(\lambda+\rho)\varphi'(0)\psi'(0) - (\lambda+\rho)^3 k^2 \int\limits_0^x e^{\mu(\xi)}d\xi \int\limits_0^y e^{\nu(\eta)}d\eta\right]^2}. \tag{3.8}$$

Остается подставить полученную конструкцию в правую часть (3.2). Учитывая, что из той же формулы (3.2) следует

$$\varphi'(0)\psi'(0) = \frac{k}{2}(\lambda+\rho)^2 e^{U_0},$$

и, проводя в числителе и знаменателе сокращения одинаковых множителей, находим

$$\exp U(x,y) = \frac{4\exp(\mu(x)+\nu(y)+U_0)}{\left[2\exp U_0 - k\int\limits_0^x \exp\mu(\xi)d\xi \int\limits_0^y \exp\nu(\eta)d\eta\right]^2}. \tag{3.9}$$

Полученная формула и есть решение сформулированной задачи Гурса. Обратим внимание на то, что константы λ, ρ из (3.5) естественным образом исчезли. Для окончательного обоснования формулы (3.9) следует, очевидно, предполагать, что для $k>0$ исходные данные задачи удовлетворяют условию

$$k\int\limits_0^x \exp\mu(\xi)d\xi \int\limits_0^y \exp\nu(\eta)d\eta < 2\exp U_0. \tag{3.10}$$

В случае $k<0$ знаменатель в (3.9) строго положителен, вследствие чего неравенство (3.10) оказывается ненужным.

И еще отметим, что сформулированные в лемме условия гладкости на $\varphi(x)$, $\psi(y)$ будут обеспечены, если обе функции $\mu(x)$, $\nu(y)$ непрерывны, а хотя бы одна из них имеет еще и непрерывную производную.

3.2. Другие случаи задания граничных условий. Совершенно аналогично вышеизложенному могут быть рассмотрены варианты задачи Гурса, когда область D располагается в других квадрантах, продолжая совпадать одним из своих углов с началом координат: во втором квадранте $a < 0$, $b > 0$, третьем $a < 0$, $b < 0$, четвертом $a > 0$, $b < 0$. Граничные значения при этом пусть задаются на сторонах D, прилегающих к точке $(0, 0)$. Если обозначим эти варианты (включая связанные с первым квадрантом) как Γ_i, где i — номер квадранта, то получается восемь случаев, естественным образом объединяющихся в четверки Γ_i $(k > 0)$ и Γ_i $(k < 0)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Решения всех указанных задач даются формулой (3.9), только при этом следует еще учитывать, что интегралы-сомножители от положительных подынтегральных функций в знаменателе данной формулы имеют отрицательные значения в тех случаях, когда они берутся по убывающему аргументу. От этого обстоятельства, как и от знака параметра k, зависит наличие или отсутствие неравенства (3.10) в условиях разрешимости того или иного варианта задачи Γ_i.

Принимая во внимание все здесь сказанное, можем утверждать, что имеет место

Теорема 3.1. *Пусть $\mu(x) \in C[0, a]$, $\nu(y) \in C[0, b]$ и хотя бы одна из этих функций принадлежит по своему аргументу классу C^1. Тогда задачи Γ_1 $(k > 0)$, Γ_2 $(k < 0)$, Γ_3 $(k > 0)$, Γ_4 $(k < 0)$ разрешимы при дополнительном условии* (3.10), *а Γ_1 $(k < 0)$, Γ_2 $(k > 0)$, Γ_3 $(k < 0)$, Γ_4 $(k > 0)$ разрешимы без этого условия. Во всех случаях решения записываются по формуле* (3.9).

3.3. Задача с первой нормальной производной в граничных условиях. Здесь и далее (в п.п. 3.4–3.5) мы ограничиваемся случаями, связанными с видоизменениями задачи Γ_1 $(k > 0)$. Заинтересовавшемуся читателю нетрудно будет распространить получаемые результаты на варианты, связанные с задачами Γ_1 $(k > 0)$ Γ_i $(i = 2, 3, 4)$ как для положительного, так и отрицательного параметра k.

Задача 3.2. *Найти функции $U \in C(\overline{D}) \cap C^{(0,1)}(D \cup P) \cap C^{(1,0)}(D \cup Q) \cap C^{(1,1)}(D)$, являющиеся в D решением уравнения* (3.1) *и условиям, получаемым из* (3.4) *заменой, по крайней мере, одного значения искомой функции значением ее нормальной производной из набора*

$$U_y(x, 0) = \mu_1(x), x \in P, \quad U_x(0, y) = \nu_1(y), y \in Q, \tag{3.11}$$

где $\mu_1(x)$, $\nu_1(y)$ — заданные функции, непрерывно дифференцируемые на P и Q соответственно.

Если сопоставим буквенные значения Γ и N наличию в задаче с нормальными производными условий вида (3.4) и (3.11) соответственно, то получим три варианта данной задачи: ΓN, $N\Gamma$, NN. Ниже мы более четко сформулируем эти три варианта и исследуем их путем редукции к задаче Гурса. При этом нам понадобятся производные U_x, U_y, вычисляемые с помощью (3.9). А именно, продифференцировав (3.9) по y и поделив левую и правую часть полученного равенства соответственно на левую и правую часть (3.9), найдем

$$U_y\left(x,y\right)=\nu'\left(y\right)+\frac{2k\exp\nu\left(y\right)\int\limits_0^x\exp\mu\left(\xi\right)d\xi}{2\exp U_0-k\int\limits_0^x\exp\mu\left(\xi\right)d\xi\int\limits_0^y\exp\nu\left(\eta\right)d\eta}. \tag{3.12}$$

Аналогично получается формула

$$U_x\left(x,y\right)=\mu'\left(x\right)+\frac{2k\exp\mu\left(x\right)\int\limits_0^y\exp\nu\left(\eta\right)d\eta}{2\exp U_0-k\int\limits_0^x\exp\mu\left(\xi\right)d\xi\int\limits_0^y\exp\nu\left(\eta\right)d\eta}. \tag{3.13}$$

Обратимся теперь к указанным вариантам.

Вариант ΓN. Второе соотношение (3.11) в силу (3.13) записывается в виде

$$\mu'\left(0\right)+k\int\limits_0^y\exp\nu\left(\eta\right)d\eta=\nu_1\left(y\right) \tag{3.14}$$

откуда

$$k\exp\nu\left(y\right)=\nu_1'\left(y\right). \tag{3.15}$$

Таким образом, приходим к задаче Гурса с заменой второго условия (3.4) на (3.15). Конечно, должно выполняться условие согласования $\mu\left(0\right)=\nu\left(0\right)$ из (3.4). Очевидно, оно превращается в

$$\nu_1'\left(0\right)=k\exp\mu\left(0\right). \tag{3.16}$$

Подставляя граничные значения получившейся задачи в формулу (3.9), находим

$$\exp U(x,y)=\frac{4\nu_1'(y)\exp\left[\mu(x)+\mu(0)\right]}{k\left(2\exp\mu(0)-\left[\nu_1(y)-\nu_1(0)\right]\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi\right)^2}. \tag{3.17}$$

Конечно, при выводе (3.17) следует учитывать наличие условия типа (3.10), которое превращается в

$$[\nu_1(b) - \nu_1(0)] \int\limits_0^a \exp\mu(\xi) d\xi < 2\exp\mu(0). \tag{3.18}$$

Поскольку мы использовали (3.15), то полученный результат может быть сформулирован так: если $\mu(x) \in C(P)$, $\nu_1(y) \in C^1(Q)$, $\nu_1'(y) > 0$ и выполнены условия (3.16), (3.18), то единственное решение варианта ΓN рассматриваемой задачи дается формулой (3.17).

Вариант $N\Gamma$. Здесь рассуждения аналогичны. Вместо (3.13) надо воспользоваться формулой (3.12) и из соотношения, играющего роль (3.14), получить

$$\exp\mu(x) = \frac{\mu_1'(x)}{k}. \tag{3.19}$$

Требование (3.16) заменяется на

$$\mu_1'(0) = k\exp\nu(0), \tag{3.20}$$

а вместо (3.18) получится

$$[\mu_1(a) - \mu_1(0)] \int\limits_0^b \exp\nu(\eta) d\eta < 2\exp\nu(0). \tag{3.21}$$

Решение запишется в виде

$$\exp U(x,y) = \frac{4\mu_1'(x)\exp[\nu(y)+\nu(0)]}{k\left(2\exp\nu(0) - [\mu_1(x)-\mu_1(0)]\int\limits_0^y \exp\nu(\eta)d\eta\right)^2}. \tag{3.22}$$

Наконец, в случае NN следует использовать для подстановки в (3.9) обе формулы (3.15) и (3.19), что приводит к решению

$$\exp U(x,y) = \frac{4\mu_1'(x)\,\nu_1'(y)}{k\sqrt{\mu_1'(0)\,\nu_1'(0)}\left(2 - \frac{[\mu_1(x)-\mu_1(0)][\nu_1(y)-\nu_1(0)]}{\sqrt{\mu_1'(0)\nu_1'(0)}}\right)^2}. \tag{3.23}$$

Здесь учтено, что в силу (3.16), (3.20) $\mu_1'(0)\,\nu_1'(0) \neq 0$, а также, что из $\mu(0) = \nu(0)$ следует $\mu_1'(0) = \nu_1'(0)$. Неравенство (3.10) приобретает вид

$$[\mu_1(a) - \mu_1(0)]\,[\nu_1(b) - \nu_1(0)] < 2k. \tag{3.24}$$

Из вышеизложенного следует

Теорема 3.2. *Если производные от функций* $\mu_1(x), \nu_1(y)$ *положительны и подчиняются условиям* (3.16), (3.20) *и* (3.18), (3.21), *то варианты* ΓN *и* $N\Gamma$ *разрешимы. Вариант* NN *разрешим при условиях* $\mu_1'(0) = \nu_1'(0) \neq 0$ *и* (3.24). *Во всех вариантах решение единственно и дается формулами* (3.17), (3.22) *и* (3.23).

3.4. Комбинация граничных значений искомой функции и ее нормальной производной.

Задача 3.3. *Найти в* D *решение уравнения* (3.1), *удовлетворяющее условию* $U(0,0) = 0$ *и соотношениям*

$$\begin{gathered} U_y(x,0) + h_1(x) \exp U(x,0) = \omega_1(x), h_1(x) \in C[0,a], h_1(x) > 0, \\ U_x(0,y) + h_2(y) \exp U(0,y) = \omega_2(y), h_2(y) \in C[0,b], h_2(y) > 0. \end{gathered} \tag{3.25}$$

С учетом (3.9), (3.12), (3.13) соотношения (3.27) записываются в виде следующих интегральных уравнений для определения $\mu(x)$, $\nu(y)$:

$$\begin{aligned} &\nu'(0) + k\int\limits_0^x [\exp \mu(\xi)]\, d\xi + h_1(x) \exp \mu(x) = \omega_1(x), \quad x \in P, \\ &\mu'(0) + k\int\limits_0^y [\exp \nu(\eta)]\, d\eta + h_2(y) \exp \nu(y) = \omega_2(y), \quad y \in Q. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Здесь учтено, что в силу постановки задачи $U_0{=}U(0,0) = 0$.

Обозначив

$$\theta_1(x) = \int\limits_0^x \exp \mu(\xi) d\xi, \tag{3.27}$$

перепишем первое уравнение (3.26) так

$$\theta_1' + \frac{k}{h_1(x)}\theta_1 = f_1(x), \tag{3.28}$$

$$f_1(x) = \frac{\omega_1(x) - \omega_1(0) + h_1(0)}{h_1(x)}, \quad x \in P. \tag{3.29}$$

Решением линейного уравнения (3.28) является

$$\theta_1(x) = \int\limits_0^x f_1(t) \exp\Big(k\int\limits_x^t \frac{d\xi}{h_1(\xi)}\Big) dt. \tag{3.30}$$

Мы учли, что в силу (3.27) $\theta_1(0) = 0$.

Из (3.27) и (3.30) вычисляем

$$\exp \mu(x) = f_1(x) - \frac{k}{h_1(x)} \int\limits_0^x f_1(t) \exp\Big(k \int\limits_x^t \frac{d\xi}{h_1(\xi)}\Big) dt. \tag{3.31}$$

Аналогично из второго уравнения (3.26) находим

$$\exp \nu(y) = f_2(y) - \frac{k}{h_2(y)} \int\limits_0^y f_2(\tau) \exp\Big(k \int\limits_y^\tau \frac{d\eta}{h_2(\eta)}\Big) d\tau, \tag{3.32}$$

$$f_2(y) = \frac{\omega_2(y) - \omega_2(0) + h_2(0)}{h_2(y)}, \quad y \in Q. \tag{3.33}$$

Полагая в (3.31), (3.32) $x = 0$, $y = 0$, имеем

$$f_1(0) = f_2(0) = 1. \tag{3.34}$$

При этом формулы (3.29), (3.33) принимают вид

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{\omega_1(x) - \omega_1(0) + h_1(0)}{h_1(x)}, \quad x \in P, \\ f_2(y) &= \frac{\omega_2(y) - \omega_2(0) + h_2(0)}{h_2(y)}, \quad y \in Q. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Далее из (3.31), (3.32) видно, что правые части в этих соотношениях должны быть неотрицательны. Посмотрим, что это означает для f_k ($k = 1$, 2). Введем функцию

$$H(z) = \int\limits_0^z \frac{k}{h_1(\xi)} d\xi.$$

Так как $h_1(x) > 0$, то $H'(x) > 0$ и $H(x)$ строго возрастает. Поэтому для последнего слагаемого в (3.31) (без знака “$-$”) имеем

$$F(x) = \frac{k}{h_1(x)} \int\limits_0^x f_1(t) \exp(H(t) - H(x)) dt \leqslant H'(x) \int\limits_0^x f_1(t)\, dt.$$

Если $f_1(x)$ не убывает на $[0, a]$, то для правой части получаем оценку сверху в виде $kxf_1(x)\, H'(x)$. Учитывая, что для неотрицательности правой части (3.31) достаточно, чтобы $xkh_1^{-1} \leqslant 1$. Это условие будет заведомо выполнено, если

$$h_1(x) \geqslant ak. \tag{3.36}$$

Аналогично получается, что неравенство

$$h_2(y) \geqslant bk, \tag{3.37}$$

достаточно для неотрицательности правой части (3.32), если при этом $f_2(y)$ не убывает на $[0,b]$. Нам остается обеспечить неубывание $f_1(x)$, $f_2(y)$. В силу (3.35), (3.29) и (3.33) это достигается при

$$\begin{aligned} &h_1(x)\,\omega_1'(x) - h_1'(x)\left[\omega_1(x) - \omega_1(0) + h_1(0)\right] \geqslant 0, \quad x \in P, \\ &h_2(y)\,\omega_2'(y) - h_2'(y)\left[\omega_2(y) - \omega_2(0) + h_2(0)\right] \geqslant 0, \quad y \in Q. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Наконец, нам нужно еще, чтобы выполнялось условие (3.10), в котором надо положить $U_0 = 0$. Из (3.31)–(3.32) очевидно, что $\exp\mu(x) \leqslant f_1(x), \quad \exp\nu(y) \leqslant f_2(y)$. Поэтому для (3.10) достаточно выполнения неравенства

$$k\int_0^a f_1(\xi)\,d\xi \int_0^b f_2(\eta)\,d\eta < 2. \tag{3.39}$$

Введя обозначения

$$m_1 = \int_0^a \frac{\omega_1(\xi) - \omega_1(0)}{h_1(\xi)}d\xi, \quad n_1 = \int_0^b \frac{\omega_2(\eta) - \omega_2(0)}{h_2(\eta)}d\eta,$$

$$m_2 = \int_0^a \frac{h_1(0)}{h_1(\xi)}d\xi, \quad n_2 = \int_0^b \frac{h_2(0)}{h_2(\eta)}d\eta,$$

перепишем (3.39) в форме

$$k\left(m_1 + m_2\right)\left(n_1 + n_2\right) < 2. \tag{3.40}$$

На основании вышеизложенного имеет место

Лемма. *Пусть h_1, $\omega_1 \in C^1[0,a]$, h_2, $\omega_2 \in C^1[0,b]$, а также выполняются условия* (3.36)–(3.38) *и* (3.40). *Тогда решение задачи существует, единственно и дается формулами* (3.9), (3.31), (3.32) *в предположении, что в* (3.31)–(3.32) *подставлены значения* (3.32).

Указанным в лемме условиям можно придать более обозримый вид, если ввести дополнительные предположения о функциях, участвующих в постановке задачи. Например, пусть $h_1(x) \equiv \lambda_1 = const > 0$, $h_2(y) \equiv \lambda_2 = const > 0$, а $\omega_1(x), \omega_2(y)$ — неубывающие функции. Тогда (3.38) принимают вид $\lambda_1\omega_1'(x) \geqslant 0$, $\lambda_2\omega_2'(y) \geqslant 0$, и, очевидно, выполняются. Далее видим, что $m_2 = a$, $n_2 = b$, а для m_1, n_1 имеют место оценки $m_1 \leqslant \frac{a}{\lambda_1}\left[\omega_1(a) - \omega_1(0)\right]$, $\quad n_1 \leqslant \frac{b}{\lambda_2}\left[\omega_2(b) - \omega_2(0)\right]$. Поэтому (3.40) превращается в

$$abk\left[1 + \frac{\omega_1(a) - \omega_1(0)}{\lambda_1}\right]\left[1 + \frac{\omega_2(b) - \omega_2(0)}{\lambda_2}\right] < 2. \tag{3.41}$$

Что касается неравенств (3.36), (3.37), то они имеют место, если $\lambda_1 \geqslant ak$, $\lambda_2 \geqslant bk$.

Из перечисленных обстоятельств следует

Теорема 3.3. *Если $h_1(x) \equiv \lambda_1 \geqslant ak$, $h_2(y) \equiv \lambda_2 \geqslant bk$, а $\omega_1, \omega_2 \in C^1$ не убывают на отрезках своего определения и при этом имеет место оценка* (3.41)*, то задача* 3.3 *однозначно разрешима в явном виде.*

3.5. Задача с вторыми нормальными производными.

Задача 3.4. *Найти функции $U \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^{(0,2)}(D \cup P) \cap C^{(2,0)}(D \cup Q) \cap C^{(2,2)}(D)$, являющиеся в D решением уравнения* (3.1) *и условиям, получаемым из* (3.4) *заменой, по крайней мере, одного значения искомой функции значением из набора*

$$U_{yy}(x,0) = \mu_2(x), x \in P, \quad U_{xx}(0,y) = \nu_2(y), y \in Q, \tag{3.42}$$

где $\mu_2(x)$, $\nu_2(y)$ — заданные функции, дважды непрерывно дифференцируемые на P и Q соответственно.

Если сопоставим буквенные значения Γ и N наличию в задаче с нормальными производными условий вида (3.4) и (3.42) соответственно, то получим, как и во второй главе, три варианта данной задачи: ΓN, $N\Gamma$, NN.

Вариант ΓN. *Он заключается в отыскании функции U, являющейся решением уравнения* (3.1) *и удовлетворяющей условиям*

$$U(x,0) = \mu(x), \quad x \in P, \quad U_{xx}(0,y) = \nu_2(y), y \in Q. \tag{3.43}$$

Имеем (см. (3.13))

$$U_x(x,y) = \mu'(x) + \frac{2k\exp\mu(x)\int\limits_0^y \exp\nu(\eta)d\eta}{2\exp U_0 - k\int\limits_0^x \exp\mu(\xi)d\xi\int\limits_0^y \exp\nu(\eta)d\eta}.$$

Продифференцируем по x, получим

$$U_{xx}(x,y)=\mu''(x)+\frac{2k\mu'(x)\exp\mu(x)\int\limits_0^y\exp\nu(\eta)d\eta}{2\exp U_0-k\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi\int\limits_0^y\exp\nu(\eta)d\eta}+$$
$$+\frac{2k^2\exp 2\mu(x)\left(\int\limits_0^y\exp\nu(\eta)d\eta\right)^2}{\left(2\exp U_0-k\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi\int\limits_0^y\exp\nu(\eta)d\eta\right)^2}.$$

Из $U_{xx}\left(0,y\right)=\nu_2\left(y\right)$, следует

$$\nu_2\left(y\right)=\mu''\left(0\right)+k\mu'\left(0\right)\int\limits_0^y\exp\nu\left(\eta\right)d\eta+\frac{1}{2}k^2\Big(\int\limits_0^y\exp\nu\left(\eta\right)d\eta\Big)^2. \qquad (3.44)$$

Полагая здесь $y=0$, находим

$$\nu_2\left(0\right)=\mu''\left(0\right). \qquad (3.45)$$

Дифференцируя (3.44), получим

$$\nu_2'\left(y\right)=k\mu'\left(0\right)\exp\nu\left(y\right)+k^2\exp\nu\left(y\right)\int\limits_0^y\exp\nu\left(\eta\right)d\eta.$$

Здесь также при $y=0$ имеем

$$\nu_2'\left(0\right)=k\mu'\left(0\right)\exp\nu\left(0\right)=k\mu'\left(0\right)\exp\mu\left(0\right). \qquad (3.46)$$

Обозначим $Q\left(y\right)=\int\limits_0^y\exp\nu\left(\eta\right)d\eta$, тогда (3.44) принимает вид

$$\nu_2\left(y\right)=\mu''\left(0\right)+k\mu'\left(0\right)Q\left(y\right)+\frac{1}{2}k^2Q^2\left(y\right), \qquad (3.47)$$

или, учитывая (3.46) и значение $\mu\left(0\right)=U_0$, перепишем (3.47) в форме

$$k^2Q^2\left(y\right)+2\nu_2'\left(0\right)Q\left(y\right)\exp\left(-U_0\right)+2\left[\nu_2\left(0\right)-\nu_2\left(y\right)\right]=0. \qquad (3.48)$$

Соотношение (3.48) представляет собой обычное квадратное уравнение с дискриминантом

$$D=4\nu'^2_2\left(0\right)\exp\left(-2U_0\right)-8k^2\left[\nu_2\left(0\right)-\nu_2\left(y\right)\right].$$

Поскольку по смыслу функции $Q(y)$ она должна быть вещественной, следует полагать $D \geqslant 0$. Решение уравнения (3.48) дается формулой

$$Q_{1,2}(y) = \frac{-\nu_2'(0)\exp(-U_0) \pm \sqrt{\left[\nu_2'(0)\exp(-U_0)\right]^2 - 2k^2\left[\nu_2(0) - \nu_2(y)\right]}}{k^2}. \tag{3.49}$$

Пусть $D = \left[\nu_2'(0)\exp(-U_0)\right]^2 - 2k^2\left[\nu_2(0) - \nu_2(y)\right] = 0$, то есть

$$\nu_2'(0)\exp(-U_0) = k\sqrt{2\left[\nu_2(0) - \nu_2(y)\right]}. \tag{3.50}$$

Если считать, что $\nu_2(y) \neq const$, то условие (3.50) не может быть выполнено, ибо тогда правая часть в этом условии есть функция, а левая — константа. Если же $\nu_2(y) = const$, то получаем $\nu_2(0) \equiv \nu_2(y)$, и следовательно

$$\nu_2'(0) = 0. \tag{3.51}$$

Из (3.43), (3.45) имеем

$$Q(y) \equiv Q_1(y) \equiv Q_2(y) \equiv 0,$$

что означает

$$Q(y) = \int\limits_0^y \exp\nu(\eta)d\eta \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество, получаем противоречивое соотношение

$$\exp\nu(y) \equiv 0.$$

Таким образом, случай $D = 0$ не может быть реализован. Поэтому остается полагать $D > 0$, или

$$2k^2\left[\nu_2(0) - \nu_2(y)\right] < \left[\nu'{}_2(0)\exp(-\mu(0))\right]^2. \tag{3.52}$$

Из введенного ранее обозначения $Q(y) = \int\limits_0^y \exp\nu(\eta)d\eta$, имеем $Q'(y) = \exp\nu(y)$. С другой стороны, дифференцирование (3.49) дает

$$Q_{1,2}'(y) = \pm\frac{\nu_2'(y)}{\sqrt{\left[\nu_2'(0)\exp(-\mu(0))\right]^2 - 2k^2\left[\nu_2(0) - \nu_2(y)\right]}}.$$

Поэтому

$$\exp\nu(y) = \pm\frac{\nu_2'(y)}{\sqrt{\left[\nu_2'(0)\exp(-U_0)\right]^2 - 2k^2\left[\nu_2(0) - \nu_2(y)\right]}}. \tag{3.53}$$

Таким образом, получается два различных значения $\nu(y)$. Подставляя полученные граничные значения в формулу (3.9), находим два решения задачи

$$\exp U(x,y) = \\ = \frac{4\nu_2'(y)\exp[\mu(x)+\mu(0)]}{N(y)\left(2\exp\mu(0)-\frac{1}{k}\left[-\nu_2'(0)\exp(-\mu(0))+N(y)\right]\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi\right)^2}, \quad (3.54)$$

$$\exp U(x,y) = \\ = -\frac{4\nu_2'(y)\exp[\mu(x)+\mu(0)]}{N(y)\left(2\exp\mu(0)-\frac{1}{k}\left[-\nu_2'(0)\exp(-\mu(0))-N(y)\right]\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi\right)^2}, \quad (3.55)$$

где

$$N(y)=\sqrt{\left[\nu_2'(0)\exp(-\mu(0))\right]^2-2k^2\left[\nu_2(0)-\nu_2(y)\right]}.$$

Конечно, при выводе (3.54) следует учитывать наличие условия типа (3.10), которое превращается в

$$\frac{1}{k}(N(b)-\nu_2'(0)\exp(-\mu(0)))\int\limits_0^a\exp\mu(\xi)d\xi<2\exp\mu(0). \quad (3.56)$$

В решении же (3.55) необходимо учитывать условие

$$-\frac{1}{k}(N(b)-\nu_2'(0)\exp(-\mu(0)))\int\limits_0^a\exp\mu(\xi)d\xi<2\exp\mu(0). \quad (3.57)$$

Очевидно, в (3.54), (3.55) следует полагать, что $\nu_2\in C^1[0,b]$, а также $\mu\in C^2[0,a]$, ибо этого включения требует (3.44) и предшествующая ей формула.

Вариант NГ. *Найти функцию U, являющуюся решением уравнения* (3.1) *и удовлетворяющую условиям*

$$U_{yy}(x,0)=\mu_2(x), \quad x\in P, \quad U(0,y)=\nu(y), \quad y\in Q. \quad (3.58)$$

Здесь рассуждения аналогичны предыдущему случаю. Имеем

$$U_y(x,y)=\nu'(y)+\frac{2k\exp\nu(y)\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi}{2\exp U_0-k\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi\int\limits_0^y\exp\nu(\eta)d\eta},$$

а, следовательно,

$$U_{yy}(x,y)=\nu''(y)+\frac{2k\nu'(y)\left[\exp\nu(y)\right]\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi}{2\exp U_0-k\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi\int\limits_0^y\exp\nu(\eta)d\eta}+$$

$$+\frac{2k^2\left[\exp 2\nu(y)\right]\left(\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi\right)^2}{\left(2\exp U_0-k\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi\int\limits_0^y\exp\nu(\eta)d\eta\right)^2}.$$

Учитывая, что $U_{yy}(x,0)=\mu_2(x)$, имеем

$$\mu_2(x)=\nu''(0)+k\nu'(0)\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi+\frac{1}{2}k^2\Big(\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi\Big)^2. \qquad (3.59)$$

Полагая здесь $x=0$, находим

$$\mu_2(0)=\nu''(0). \qquad (3.60)$$

Дифференцируя (3.59), получим

$$\mu_2'(x)=k\nu'(0)\exp\mu(x)+k^2\left[\exp\mu(x)\right]\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi.$$

Полагая опять $x=0$ имеем

$$\mu_2'(0)=k\nu'(0)\exp\mu(0). \qquad (3.61)$$

Обозначим $R(x)=\int\limits_0^x\exp\mu(\xi)d\xi$, тогда (3.59) принимает вид

$$\mu_2(x)=\nu''(0)+k\nu'(0)R(x)+\frac{1}{2}k^2R^2(x). \qquad (3.62)$$

Учитывая (3.60), (3.61), перепишем (3.62) в форме

$$k^2R^2(x)+2\mu_2'(0)R(x)\exp(-U_0)+2\left[\mu_2(0)-\mu_2(x)\right]=0. \qquad (3.63)$$

Дискриминант этого уравнения есть

$$D=4{\mu'}_2^2(0)\exp(-2U_0)-8k^2\left[\mu_2(0)-\mu_2(x)\right],$$

а корни вычисляются по формуле

$$R_{1,2}\left(x\right)=\frac{-\mu_2'\left(0\right)\exp\left(-U_0\right)\pm\sqrt{\left[\mu_2'\left(0\right)\exp\left(-U_0\right)\right]^2-2k^2\left[\mu_2\left(0\right)-\mu_2\left(x\right)\right]}}{k^2}. \tag{3.64}$$

По соображениям, аналогичным изложенным в предыдущем варианте, отбрасываем возможность $D<0$ и убеждаемся в невозможности реализации $D=0$, так что остается полагать $D>0$, то есть

$$2k^2\left[\mu_2\left(0\right)-\mu_2\left(x\right)\right]<\left[\mu'{}_2\left(0\right)\exp\left(-\nu\left(0\right)\right)\right]^2. \tag{3.65}$$

Используя введенное ранее обозначение $R\left(x\right)=\int\limits_0^x\exp\mu\left(\xi\right)d\xi$, имеем $R'\left(x\right)=\exp\mu\left(x\right)$. С другой стороны, продифференцируем (3.64)

$$R_{1,2}'(x)=\pm\frac{\mu_2'(x)}{\sqrt{\left[\mu_2'(0)\exp(-\nu(0))\right]^2-2k^2\left[\mu_2(0)-\mu_2(x)\right]}}$$

и получим формулу

$$\exp\mu(x)=\pm\frac{\mu_2'(x)}{\sqrt{[\mu_2'(0)\exp(-\nu(0)]^2-2k^2[\mu_2(0)-\mu_2(x)]}}, \tag{3.66}$$

играющую роль (3.53).

Подставляя полученные граничные значения в формулу (3.9), опять находим два решения задачи

$$\exp U(x,y)=$$
$$=\frac{4\mu_2'(x)\exp\left[\nu(y)+\nu(0)\right]}{M(x)\left(2\exp v(0)-\frac{1}{k}\left[-\mu_2'(0)\exp(-\nu(0))+M(x)\right]\int\limits_0^y\exp\nu(\eta)d\eta\right)^2}, \tag{3.67}$$

$$\exp U(x,y)=$$
$$=-\frac{4\mu_2'(x)\exp\left[\nu(y)+\nu(0)\right]}{M(x)\left(2\exp v(0)-\frac{1}{k}\left[-\mu_2'(0)\exp(-\nu(0))-M(x)\right]\int\limits_0^y\exp\nu(\eta)d\eta\right)^2}, \tag{3.68}$$

где

$$M(x)=\sqrt{[\mu_2'(0)\exp(-\nu(0))]^2-2k^2[\mu_2(0)-\mu_2(x)]}.$$

Вместо (3.56) получится

$$\frac{1}{k}(M\,(a) - \mu_2'\,(0)\exp\,(-\nu\,(0)))\int\limits_0^b \exp\nu\,(\eta)d\eta < 2\exp\nu\,(0),$$

а вместо (3.57)

$$-\frac{1}{k}\{M\,(a) - \mu_2'\,(0)\exp\,(-\nu\,(0))\}\int\limits_0^b [\exp\nu\,(\eta)]\,d\eta < 2\exp\nu\,(0).$$

Конечно, надо, подобно предыдущему случаю, полагать, что $\mu_2 \in C^1\,[0,a]$, $\nu \in C^2\,[0,b]$.

Вариант NN**.** Здесь мы приходим к двум парам случаев определения граничных значений. Первая из этих пар порождается знаками $\pm$ из (3.53), а вторая — этими же знаками из (3.66). Комбинируя каждый вариант первой пары с вариантами из второй, получим четыре решения задачи

$$\exp U\,(x,y) = \frac{F_i}{H}, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{3.69}$$

$$F_1 = 4\mu_2'\,(x)\,\nu_2'\,(y)\exp\mu\,(0),$$
$$F_2 = -4\mu_2'\,(x)\,\nu_2'\,(y)\exp\mu\,(0),$$
$$F_3 = -4\mu_2'\,(x)\,\nu_2'\,(y)\exp\mu\,(0),$$
$$F_4 = 4\mu_2'\,(x)\,\nu_2'\,(y)\exp\mu\,(0).$$

Учитывая, что из (3.53) нет возможности определить $\nu\,(0)$, а из (3.66) не определяется $\mu\,(0)$, будем считать, в решении задачи NN, их произвольными постоянными. Неравенство (3.10) приобретает вид

$$(M(a) - \mu_2'(0)\exp(-\nu(0)))(N(b) - \nu_2'(0)\exp(-\mu(0))) < 2k^3[\exp(-\mu(0))]. \tag{3.70}$$

Из вышеизложенного следует

Теорема 3.4. *Если производные от функций* $\mu_2\,(x)$, $\nu_2\,(y)$ *подчиняются условиям* (3.46), (3.52), (3.61), (3.65) *и* (3.56), (3.57)*, то варианты* ΓN*,* $N\Gamma$ *и* NN *разрешимы. В вариантах* ΓN*,* $N\Gamma$ *решение дается формулами* (3.54)*,* (3.55) *и* (3.67)*,* (3.68)*, в случае* NN *решение определяется с точностью до произвольной постоянной* U_0 *и дается формулами* (3.69) *при выполнении условия* (3.70)*.*

3.6. Некоторые “лиувиллеподобные” уравнения. Прием, использованный для доказательства того, что функция U, задаваемая соотношением (3.2) удовлетворяет при $\varphi \in C^2$, или $\psi \in C^2$ уравнению (3.1), можно применить к более общим соотношениям, чем (3.2).

1) Рассмотрим вместо (3.2) соотношение

$$e^{g(V)} = \frac{2}{k}\frac{\varphi'(x)\,\psi'(y)}{[\varphi(x)+\psi(y)]^2}. \tag{3.71}$$

Применяя только что указанные рассуждения, приходим к уравнению вида

$$g'(V)\,V_{xy} + g''(V)\,V_xV_y = ke^{g(V)}. \tag{3.72}$$

Это означает, что функция V, определяемая с помощью (3.71), удовлетворяет уравнению (3.72).

2) Если вместо (3.71) возьмем

$$f(V)\,e^V = \frac{2}{k}\frac{\varphi'(x)\,\psi'(y)}{[\varphi(x)+\psi(y)]^2},$$

то получим аналогичным образом уравнение

$$\left[\frac{f'(V)}{f(V)}+1\right]V_{xy} + \frac{f'(V)}{f(V)} = kf(V)\,e^V.$$

3) Применяя ту же процедуру, можно убедиться, что решением уравнения

$$\frac{\partial^n V}{\partial x_1\ldots\partial x_n} = k\exp V$$

является функция, определяемая соотношением

$$e^V = \frac{(-1)^n\,n!\varphi_1'(x_1)\ldots\varphi_n'(x_n)}{[\varphi_1(x_1)+\cdots+\varphi_n(x_n)]^n},$$

где хотя бы одна из $\varphi_k(x_k) \in C^2$. Здесь в рассуждении нужно использовать еще математическую индукцию.

4) Пусть еще

$$e^V - \omega(x,y) = \frac{2}{k[\varphi(x)+\psi(y)]^2}.$$

Здесь обсуждаемая процедура приводит к уравнению

$$V_{xy} + \frac{\omega_y}{\omega-1}V_x = ke^V + \frac{\omega_{xy}}{1-\omega}.$$

Понятно, что следует предполагать $\omega(x,y) \neq 1$.

Очевидно, число подобных примеров можно сколь угодно увеличивать.

В заключение отметим, что изложенный в § 3 материал основан на источниках [106], [64].

Литература

1. Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф. Функционально-дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14, № 5. — С. 771–797.

2. Андреев А. А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 5. — С. 1126–1128.

3. Андреев А. А., Саушкин И. Н. Об аналоге задачи Трикоми для одного модельного уравнения с инволютивным отклонением в бесконечной области // Вестник СамГТУ. Сер. “Физ.-мат. науки”. — 2005. — Вып. 34. — С. 10–16.

4. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Задача Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными // Вестник СамГТУ. Сер. “Физ.-мат. науки”. — 2011. — № 3. — С. 35–41.

5. Ахиев С. С. Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных начально-краевых задач математической физики. — Баку: Азербайджанский ун-т. — 1988. — 58 с.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1973. — 294 с.

7. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 185, № 3. — С. 739–740.

8. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

9. Бицадзе А. В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений в частных производных // Матем. моделирование. — 1994. — Т. 6, № 6. — С. 22–31.

10. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1982. — 336 с.

11. Бондаренко Б. А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных. — Ташкент: Фан, 1987. — 146 с.

12. Буллаф Р., Кодри Ф. и др. Солитоны. — М.: Мир, 1983. — 408 с.

13. Бурмистров Б. Н. О некоторых краевых задачах типа задачи Франкля для систем уравнений первого порядка смешанного типа. Автореф. дисс. . . . канд. физ.-мат. наук. — Казань, 1970. — 10 с.

14. Бурмистров Б. Н. Решение задачи Коши методом Римана для системы уравнений первого порядка с вырождением на границе // Тр. семинара по краевым задачам. — Казанский ун-т, 1971. — Вып. 8. — С. 41–54.

15. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948. — 296 с.

16. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.

17. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 2. — С. 280–285.

18. Водахова В. А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А. М. Нахушева // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 1. — С. 163–166.

19. Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я., Быстрова О. К., Захаров В. Н. Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применения. — Самара: Самарский ун-т, 1995. — 76 с.

20. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.

21. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 4. — М.-Л.: ГТТИ, 1933. — 276 с.

22. Джохадзе О. М. Задача типа Дарбу для уравнения третьего порядка с доминирующими младшими членами // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 4. — С. 523–535.

23. Джохадзе О. М. Задача типа Дарбу в трехгранном угле для уравнения третьего порядка гиперболического типа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 3. — С. 22–30.

24. Джохадзе О. М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Матем. заметки. — 2003. — Т. 74, вып. 4. — С. 517–528.

25. Джохадзе О. М. Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 1. — С. 58–68.

26. Джохадзе О. М. О трехмерной обобщенной задаче Гурса и связанные с ней общие двумерные интегральные уравнения Вольтерры первого рода // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 3. — С. 385–394.

27. Джохадзе О., Мидодашвили Б. Пространственные гиперболические уравнения высокого порядка с доминированными младшими членами // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 6. — С. 25–34.

28. Джураев Т. Д. Об уравнениях смешанно-составного типа // Изв. АН Узбекской ССР. Серия физ.-мат. науки. — 1961. — № 6. — С. 3–14.

29. Джураев Т. Д. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанно-составного типа // Сибирский матем. журнал. — 1963. — Т. 4, № 4. — С. 775–787.

30. Джураев Т. Д., Попёлек Я. О канонических видах уравнений с частными производными третьего порядка // Успехи матем. наук. — 1989. — Т. 44, вып. 4. — С. 237–238.

31. Елубаев С. Е. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // Сибирский матем. журнал. — 1961. — Т. 2, № 4. — С. 510–519.

32. Елубаев С. Е. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка с двумя независимыми переменными // Вестник АН Казахской ССР. — 1962. — № 6. — С. 54–62.

33. Жамалов Р. С. Смешанная задача для одного эволюционного уравнения // Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. — Новосибирск, 1988. — С. 126–130.

34. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Учен. зап. Казанского ун-та. — 1962. — Т. 122, кн. 3. — С. 3–16.

35. Жегалов В. И. Об одной системе уравнений смешанного типа высшего порядка // Изв. вузов. Математика. — 1975. — № 6. — С. 25–35.

36. Жегалов В. И. Одновременное обобщение задач Трикоми и Геллерстедта // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск, 1981. — С. 58–61.

37. Жегалов В. И. Исследование краевых задач со смещением для уравнений смешанного типа. Дисс. . . . докт. физ.-мат. наук. — Казанский ун-т, 1987. — 297 с.

38. Жегалов В. И. Трехмерный аналог задачи Гурса // Неклассические задачи и уравнения смешанного типа. — Новосибирск, 1990. — С. 94–98.

39. Жегалов В. И. Связь граничных значений задачи Гурса с нормальными производными // Тез. докл. всесоюзной конф. “Условно-корректные задачи матем. физики и анализа”. — Новосибирск, 1992. — С. 192.

40. Жегалов В. И. Вариант трехмерной краевой задачи со смещениями // Тезисы докл. междунар. конференции “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы матем. биологии, информатики и физики”. — Нальчик, 1996. — С. 37.

41. Жегалов В. И., Севастьянов В. А. Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 10. — С. 1429–1430.

42. Жегалов В. И., Севастьянов В. А. Задача Гурса в n-мерном пространстве / Сибирский матем. журнал. — Новосибирск, 1997. — 4 с. — Деп. в ВИНИТИ 08.07.97, № 2290–В97.

43. Жегалов В. И. Структура решений одного уравнения в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1997, Т. 33. — № 2. — С. 1704–1705.

44. Жегалов В. И. О трехмерной функции Римана // Сибирский матем. журнал. — 1997. — Т. 38, № 5. — С. 1074–1079.

45. Жегалов В. И., Котухов М. П. Об интегральных уравнениях для функции Римана // Изв. вузов. Математика. — 1998. — № 1. — С. 26–30.

46. Жегалов В. И., Зомот Н. Х. Х. Линейная характеристическая задача для системы уравнений в частных производных первого порядка / Казанский ун-т. — Казань, 1998. — 20 с. — Деп. в ВИНИТИ 10.02.98, № 394–В98.

47. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 10. — С. 73–76.

48. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Трехмерные характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 6. — С. 833–836.

49. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной // Изв. вузов. Математика. — 2001. — № 11. — С. 77–81.

50. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. — Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. — 226 с.

51. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 1. — С. 93–97.

52. Жегалов В. И., Миронов А. Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. — 2002. — № 5. — С. 23–30.

53. Жегалов В. И. К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций // Неклассические уравнения матем. физики. — Новосибирск, 2002. — С. 73–79.

54. Жегалов В. И. Об одной граничной задаче для уравнения в частных производных третьего порядка // Тр. междунар. научн. конф. “Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы”. — Стерлитамак, 2003. — Т. 1. — С. 119–123.

55. Жегалов В. И. О случаях разрешимости гиперболических уравнений в квадратурах // Изв. вузов. Математика. — 2004. — № 7. — С. 47–52.

56. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Краевая задача со смещениями в R^3 // Материалы III междунар. конференции “Нелокальные краевые задачи

и родственные проблемы матем. биологии, информатики и физики". — Нальчик, 2006. — С. 118–120.

57. Жегалов В. И., Кощеева О. А. Понижение порядка одного класса уравнений с частными производными // Докл. РАН. — 2006. — Т. 406, № 5. — С. 593–597.

58. Жегалов В. И., Хакимова Г. Р. Характеристические граничные задачи для квазилинейного псевдопараболического уравнения третьего порядка // Тр. междунар. научн. конф. "Современные методы физ.-мат.наук". — Орел, 2006. — Т. 1. — С. 54–57.

59. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Трехмерная нелокальная задача с нормальными производными в граничных условиях // Известия РАЕН. Дифференц. уравнения. — Рязань: Рязанский ун-т, 2006. — № 11. — С. 86–87.

60. Жегалов В. И., Сайгушева Е. А. Об одном классе линейных неоднородных уравнений // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2007. — Т. 36. — С. 79–80.

61. Жегалов В. И., Миронова Л. Б. Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными // Изв. вузов. Математика. — 2007. — № 3. — С. 12–21.

62. Жегалов В. И. Решение уравнений Вольтерры с частными интегралами с помощью дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 7. — С. 874–882.

63. Жегалов В. И. Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. — 2008. — № 8. — С. 70–72.

64. Жегалов В. И., Кунгурцев А. А. О характеристических граничных задачах для уравнения Лиувилля // Изв. вузов. Математика. — 2008. — № 11. — С. 40–47.

65. Жегалов В. И., Миронов А. Н. К пространственным граничным задачам для гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 364–371.

66. Жегалов В. И., Тихонова О. А. Каскадное интегрирование уравнений Бианки третьего порядка. Препринт № 10-01 НИИММ им. Н.Г. Чеботарева. — Казанский ун-т, 2010. — 41 с.

67. Жегалов В. И. О разрешимости в квадратурах одной гиперболической системы уравнений с частными производными // Тр. всероссийской научн. конф. с междунар. участием “Дифференциальные уравнения и их приложения”. — Уфа, 2011. — С. 61–64.

68. Жегалов В. И., Сарварова И. М. Об одном подходе к решению интегральных уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 7. — С. 28–36.

69. Жибер А. В. Инварианты Лапласа и интегрируемые уравнения лиувиллевского типа // Вестник УГАТУ. — 2001. — № 2. — С. 38–44.

70. Жибер А. В., Старцев С. Я. Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений // Матем. заметки. — 2003. — Т. 74, вып. 6. — С. 848–857.

71. Жибер А. В., Михайлова Ю. Г. О гиперболических системах уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа // Тр. ин-та математики и механики. Екатеринбург. — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 74–83.

72. Жибер А. В., Михайлова Ю. Г. Алгоритм построения общего решения n-компонентной гиперболической системы уравнений с нулевыми инвариантами Лапласа и краевые задачи // Уфимский матем. журнал. — 2009. — Т. 1, № 3. — С. 28–45.

73. Забрейко П. П., Кошелев А. И. и др. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 448 с.

74. Забрейко П. П., Калитвин А. С., Фролова Е. В. Об интегральных уравнениях с частными интегралами в пространстве непрерывных функций // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38. № 4. — С. 538–546.

75. Зайцев В. Ф., Полянин А. В. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1993. — 462 с.

76. Зайцев В. Ф., Полянин А. В. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.

77. Зарубин А. Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Учебное пособие. — Орел: Орловский ун-т, 1997. — 225 с.

78. Зомот Н. Х. Х. Условия разрешимости одной характеристической задачи / Казанский ун-т. — Казань, 1997. — 17 с. — Деп. в ВИНИТИ 04.04.97, № 1089–В97.

79. Зомот Н. Х. Х. Случаи явного решения одной трехмерной задачи Гурса / Казанский ун-т. — Казань, 1998. — 9 с. — Деп. в ВИНИТИ 10.02.98, № 393–В98.

80. Зомот Н. Х. Х. Линейная характеристическая задача в четырехмерном евклидовом пространстве / Казанский ун-т. — Казань, 1998. — 43 с. — Деп. в ВИНИТИ 30.03.98, № 900–В98.

81. Зомот Н. Х. Х. Общая линейная характеристическая задача для системы уравнений в частных производных первого порядка. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Казанский ун-т, 1998. — 113 с.

82. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1. — М.: Наука. — 1981. — 544 с.

83. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 2. — М.: Наука. — 1984. — 640 с.

84. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

85. Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи матем. наук. — 1992. — Т. 47, вып. 4. — С. 83–144.

86. Ибрагимов Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. — Нижний Новгород: Нижегородский ун-т, 2007. — 421 с.

87. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 291, № 3. — С. 534–539.

88. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках // Матем. моделирование. — 1990. — Т. 2, № 8. — С. 139–156.

89. Ильин В. А., Моисеев Е. И. О единственности решения смешанной задачи с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 5. — С. 656–661.

90. Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

91. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

92. Карамышев Ф. И. Краевая задача для системы дифференциальных уравнений смешанного типа // Сибирский матем. журнал. — 1961. — Т. 2, № 4. — С. 537–546.

93. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1979. — 384 с.

94. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 5. — С. 584–592.

95. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 9. — С. 1166–1179.

96. Кожанов А. И. Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сибирский журнал индустр. матем. — 2003. — Т. 7, вып. 1. — С. 51–60.

97. Кожанов А. И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестник СамГТУ. Сер. “Физ.-мат. науки.” — 2003. — Вып. 30. — С. 63–69.

98. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 6. — С. 763–773.

99. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.

100. Котухов М. П. О некоторых дифференциальных свойствах решений одного уравнения в частных производных // Изв. вузов. Математика. — 1996. — № 5. — С. 59–62.

101. Кощеева О. А. Об условиях понижения порядка линейных уравнений со старшими частными производными // Изв. вузов. Математика. — 2007. — № 6. — С. 45–54.

102. Кощеева О. А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве // Изв. вузов. Математика. — 2008. — № 9. — С. 40–46.

103. Кунгурцев А. А. Характеристические задачи с нормальными производными для одного четырехмерного гиперболического уравнения // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань, 2005. — Т. 30. — С. 91–93.

104. Кунгурцев А. А. Об одном n-мерном варианте задачи Гурса // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань, 2005. — Т. 31. — С. 83–85.

105. Кунгурцев А. А. Об одном гиперболическом уравнении в трехмерном пространстве // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 3. — С. 76–80.

106. Кунгурцев А. А. Задачи с нормальными производными в граничных условиях для нелинейных гиперболических уравнений. Дисс. …канд. физ.-мат. наук. — Казанский ун-т, 2008. — 120 с.

107. Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И. Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 392 с.

108. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: 1973. — 408 с.

109. Миронов А. Н. О построении функции Римана для одного уравнения в n-мерном пространстве // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 7. — С. 78–80.

110. Миронов А. Н. О связи граничных значений задачи Гурса с нормальными производными третьего порядка // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 10. — С. 23–26.

111. Миронов А. Н. Задачи типа Гурса с нормальными производными в граничных условиях. Дисс. …канд. физ.-мат. наук. — Казанский ун-т, 1999. — 148 с.

112. Миронов А. Н. О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 12. — С. 1698–1701.

113. Миронов А. Н. О методе Римана для одного уравнения четвертого порядка со старшей частной производной // Вестник СамГТУ. Сер. “Математическая”. — 2003. — Вып. 22. — С. 190–194.

114. Миронов А. Н. К задаче Коши в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 6. — С. 844–847.

115. Миронов А. Н. О методе Римана решения задачи Коши // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 2. — С. 34–44.

116. Миронов А. Н. Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в R^n // Сибирский матем. журнал. — 2006. — Т. 47, № 3. — С. 584–594.

117. Миронов А. Н. К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вестник СамГТУ. Сер. "Физ.-мат. науки". — 2007. — № 2. — С. 27–32.

118. Миронов А. Н. О построении функций Римана для двух уравнений со старшими частными производными // Вестник СамГТУ. Сер. "Физ.-мат. науки". — 2008. — № 2. — С. 49–59.

119. Миронов А. Н. Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 8. — С. 1144–1149.

120. Миронов А. Н. О функции Римана для одного уравнения в n-мерном пространстве // Изв. вузов. Математика. — 2010. — № 3. — С. 23–27.

121. Миронов А. Н. О построении функции Римана для одного уравнения со старшей частной производной пятого порядка // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 2. — С. 266–272.

122. Миронов А. Н. Применение метода Римана к факторизованному уравнению в n-мерном пространстве // Изв. вузов. Математика. — 2012. — № 1. — С. 54–60.

123. Миронов А. Н. Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, вып. 3. — С. 389–400.

124. Миронов А. Н. О некоторых классах уравнений Бианки четвертого порядка с постоянными отношениями инвариантов Лапласа // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 12. — С. 1572–1581.

125. Миронова Л. Б. О характеристических задачах для одной системы с кратными характеристиками в трехмерном пространстве / Елабужский гос. пед. ун-т. — Елабуга, 2005. — 21 с. — Деп. в ВИНИТИ 20.07.05, № 1059–В2005.

126. Миронова Л.Б. Линейные системы уравнений с кратными старшими частными производными. Дисс. ...канд. физ.-мат. наук. — Казанский ун-т, 2005. — 140 с.

127. Миронова Л. Б. О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 1. — С. 34–39.

128. Миронова Л. Б. О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными // Вестник СамГТУ. Сер. "Физ.-мат. науки". — 2006. — Вып. 43. — С. 31–37.

129. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 8. — С. 1094–1100.

130. Мокейчев В. С. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. — Казань: Казанск. ун-т, 1985. — 422 с.

131. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 352 с.

132. Мышкис А. Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи матем. наук. — 1977. — Т. 32, вып. 2. — С. 173–202.

133. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Т. 1. — Л-М.: ГТТИ, 1934. — 330 с.

134. Нахушев А. М. О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 1. — С. 44–59.

135. Нахушев А. М. О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, № 1. — С. 92–101.

136. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995. — 301 с.

137. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006. — 287 с.

138. Нахушев А. М. Некоторые факты из теории краевых задач со смещением // Вестник СамГТУ. Сер. "Математическая". — 2006. — № 45. — С. 9–31.

139. Нахушева З. А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанных типов дифференциальных уравнений. — Нальчик: КБНЦ РАН, 2011. — 196 с.

140. Невоструев Л. М. Задача Неймана для общего уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9, № 2. — С. 320–324.

141. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн. физики. — 1960.— № 3. — С. 126–145.

142. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

143. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 693 с.

144. Плещинская И. Е. Граничные задачи для систем уравнений смешанного типа, приводимые к задаче Гильберта. Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Куйбышев, 1979. — 15 с.

145. Плещинская И. Е. Задача со смещениями для одной системы уравнений смешанного типа с частными производными // Тр. семинара по краевым задачам. — Казанский ун-т, 1983. — Вып. 19. — С. 145–155.

146. Плещинская И. Е. Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 9. — С. 1634–1637.

147. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1970. — 332 с.

148. Пулькина Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. — Самара: Самарский ун-т, 2012. — 194 с.

149. Репин О. А., Шувалова Т. В. Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 6. — С. 848–851.

150. Сабитов К. Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. — М.: Высшая школа, 2005. — 670 с.

151. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т.16., № 11. — С. 1925–1935.

152. Салахитдинов М. С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. — Ташкент: Universitet, 2005. — 224 с.

153. Севастьянов В. А. О методе И.Н. Векуа решения интегральных уравнений типа Вольтерра / Казанский ун-т. — Казань, 1997. — 9 с. — Деп. в ВИНИТИ 24.04.97, № 1373–В97.

154. Севастьянов В. А. Существование и единственность решения одного многомерного интегрального уравнения / Казанский ун-т. — Казань 1997. — 6 с. — Деп. в ВИНИТИ 05.06.97, № 1848–В97.

155. Севастьянов В. А. Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 5. — С. 69–73.

156. Севастьянов В. А. Вариант метода Римана для одного дифференциального уравнения в n-мерном евклидовом пространстве. Дисс. …канд. физ.-мат. наук. — Казанский ун-т, 1997. — 127 с.

157. Севастьянов В. А. Об одном случае задачи Коши // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 12. — С. 1706–1707.

158. Сербина Л. И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. — М.: Наука, 2007. — 167 с.

159. Сердюкова С. И. Экзотическая асимптотика для линейного гиперболического уравнения // Докл. РАН. — 2003. — Т. 389. — № 3. — С. 305–309.

160. Скубачевский А. Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач // Матем. сборник. — 1982. — Т. 117. — № 3. — С. 548–558.

161. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — Т. 26. — С. 3–132.

162. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. II // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — Т. 33. — С. 3–179.

163. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 297, № 3. — С. 547–552.

164. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. — М.: Наука, 1983. — 432 с.

165. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 468 с.

166. Теут О. М. Задача Коши для одной системы гиперболического типа // Учен. зап. Казанского ун-та. — 1962. — Т. 122, кн. 3. — С. 54–72.

167. Тихонова О. А. Понижение порядка и решение в квадратурах дифференциальных уравнений со старшей частной производной. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Казанский ун-т, 2010. — 123 с.

168. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: ИЛ, 1957. — 443 с.

169. Уткина Е. А. К характеристическим задачам для псевдопараболических уравнений третьего и четвертого порядка / Казанский ун-т. — Казань, 1999. — 31 с. — Деп. в ВИНИТИ 29.01.99, № 277–В99.

170. Уткина Е. А. К решению одной задачи Гурса / Казанский ун-т. — Казань, 1999. — 35 с. — Деп. в ВИНИТИ 26.02.99, № 578–В99.

171. Уткина Е. А. О явной редукции характеристических задач с нормальными производными высокого порядка к задаче Гурса / Казанский ун-т. — Казань, 1999. — 27 с. — Деп. в ВИНИТИ 17.03.99, № 818–В99.

172. Уткина Е. А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка / Дифференц. уравнения. — Минск, 1999. — 13 с. — Деп. в ВИНИТИ 28.06.99, № 2059–В99.

173. Уткина Е. А. Новые варианты характеристических задач для псевдопараболических уравнений. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Казанск. ун-т, 1999. — 140 с.

174. Уткина Е. А. Об одной трехмерной задаче Гурса // Вестник СамГТУ. Сер. “Физ.-мат. науки”. — 2001. — Вып. 12. — С. 30–35.

175. Уткина Е. А. К задачам с условиями на характеристиках для общего псевдопараболического уравнения // Вестник СамГТУ. Сер. “Математическая”. — 2003. — № 2. — С. 217–223.

176. Уткина Е. А. О задачах Гурса с дополнительными нормальными производными в краевых условиях // Изв. вузов. Математика. — 2004. — № 3. — С. 61–65.

177. Уткина Е. А. Вариант метода Римана в четырехмерном евклидовом пространстве // Вестник СамГТУ. Сер. “Математическая”. — 2004. — № 3. — С. 63–80.

178. Уткина Е. А. Задача Гурса для одного n-мерного уравнения // Вестник СамГТУ. Спец. выпуск. — 2004. — С. 64–67.

179. Уткина Е. А. О повышении порядка нормальных производных в граничных условиях одной пространственной задачи Гурса // Известия РАЕН. Дифференц. уравнения. — Рязань: Рязанский ун-т, 2004. — № 8. — С. 92–97.

180. Уткина Е. А. Об одной неклассической задаче для псевдопараболического уравнения // Вестник КГПУ. — 2004. — № 2. — С. 25–31.

181. Уткина Е. А. Об одном дифференциальном уравнении со старшей частной производной в трехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 5. — С. 697–701.

182. Уткина Е. А. К общему случаю задачи Гурса // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 8. — С. 57–62.

183. Уткина Е. А. О задачах со смещениями в граничных условиях для двух уравнений с частными производными // Учен. зап. Казанского ун-та. Сер. “Физ.-мат. науки”. — 2006. — Т. 148, кн. 3. — С. 76–82.

184. Уткина Е. А. Об одном обобщении интегральных уравнений Вольтерра // Вестник ТГГПУ. — 2006. — № 7. — С. 90–93.

185. Уткина Е. А. Об одном уравнении с сингулярными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 9. — С. 67–70.

186. Уткина Е. А. Повышение порядка нормальных производных в граничных условиях задачи Гурса // Изв. вузов. Математика. — 2007. — № 3. — С. 79–83.

187. Уткина Е. А. Об одном применении метода каскадного интегрирования // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 4. — С. 566–569.

188. Уткина Е. А. Об одном уравнении в частных производных третьего порядка с сингулярными коэффициентами // Вестник СамГТУ. Сер. “Математическая”. — 2007. — № 5. — С. 110–113.

189. Уткина Е. А. Об одной трехмерной нелокальной задаче для уравнения четвертого порядка // Вестник СамГТУ. Сер. “Математическая”. — 2007. — № 6. — С. 110–115.

190. Уткина Е. А. Вариант метода Римана в четырехмерном евклидовом пространстве // Вестник СамГУ. Естественнонаучная сер. — 2008. — №8/2. — С. 212–221.

191. Уткина Е. А. Об одной краевой задаче со смещениями в четырехмерном пространстве // Изв. вузов. Математика. — 2009. — № 3. — С. 50–55.

192. Уткина Е. А. Задача Неймана для одного уравнения четвертого порядка // Вестник СамГТУ. Сер. “Физ.-мат. науки”. — 2009. — № 2. — С. 84–95.

193. Уткина Е. А. Задача со смещениями для трехмерного уравнения Бианки // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 4. — С. 535–539.

194. Уткина Е. А. Задача Дирихле для одного трехмерного уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная сер. — 2010. — № 2. — С. 84–95.

195. Уткина Е. А. О единственности решения полуинтегральной задачи для одного уравнения четвертого порядка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная сер. — 2010. — № 4. — С. 98–102.

196. Уткина Е. А. Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 4. — С. 400–404.

197. Уткина Е. А. Теорема единственности решения одной задачи Дирихле // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 5. — С. 62–67.

198. Уткина Е. А. Характеристические граничные задачи для линейных уравнений высокого порядка со старшими частными производными. Дисс. …д-ра физ.-мат. наук. — Казанский (Приволжский) федеральный ун-т, 2011. — 263 с.

199. Уткина Е. А. Задача с условиями на всей границе нехарактеристической области для одного уравнения четвертого порядка // Докл. РАН. — 2011. — Т. 439, № 5. — С. 597–599.

200. Фаге М. К. Дифференциальные уравнения с чистосмешанными производными и главным членом // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, № 5. — С. 780–783.

201. Фаге М. К. Задача Коши для уравнения Бианки // Матем. сборник. — 1958. — Т. 45, № 3. — С. 281–322.

202. Фаге М. К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1958. — Т. 7. — С. 227–268.

203. Фаге М. К., Нагнибида Н. И. Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. — Новосибирск: Наука, 1987. — 290 с.

204. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: Наука, 1969. — 800 с.

205. Франкль Ф. И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикл. матем. и мех. — 1956. — Т. 20, № 2. — С. 196–202.

206. Харибегашвили С. С. Об одной граничной задаче для гиперболического уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 280, № 6. — С. 1313–1316.

207. Харибегашвили С. С. Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического типа. Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук. — Тбилиси, 1986. — 31 с.

208. Хейли Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 422 с.

209. Чекмарев Т. В. Решение гиперболической системы двух дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями // Изв. вузов. Математика. — 1959. — № 6. — С. 220–228.

210. Чекмарев Т. В. Решение в квадратурах задач Коши и Гурса для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. записки Горьковского ун-та. — 1967. — Вып. 80. — С. 63–69.

211. Чекмарев Т. В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 9. — С. 1614–1622.

212. Чекмарев Т. В. Системы уравнений смешанного типа. — Нижний Новгород: Нижегородский гос. техн. ун-т, 1995. — 199 с.

213. Чуриков Ф. С., Мащенко И. П. Построение функции Римана для уравнения $u_{xy} + \varphi(x)\psi(y)u = 0$ // Научн. труды Краснодарского политехн. ин-та. — 1970. — Вып. 30. — С. 19–25.

214. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 4. — С. 689–699.

215. Шхануков М. Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 265, № 6. — С. 1327–1330.

216. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка и экстремальных свойствах их решений // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 267, № 3. — С. 567–570.

217. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

218. Appel J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro-Differential equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 c.

219. Bateman H. Logarithmic solutions of Bianchi's equation // Proc. USA Acad. — 1933. — V. 19. — P. 852–854.

220. Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl. Sc. fis., mat. e natur. (5). — 1895. — V. 4. — P. 89–99, 133–142.

221. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. equations. — 1972. — V. 12, № 3. — P. 559–565.

222. Copson E. T. On the Riemann-Green function // J. Rat. Mech. Anal. — 1958. — V. 1. — P. 324–348.

223. Cotton E. Sur les invariants differentiels de quelques equations lineaires aux derives partielles du second ordre // Annales Scietifique de l'Ecole Normale Superieure. — 1900. — V. 17. — P. 211–244.

224. Easwaran S. On the positive definitenes of polivibrating operators of Mangeron // Bull. cl. sci. Acad. Roy. Belg. — 1973. — V. 59, № 7. — P. 563–569.

225. Easwaran S. Mangeron's polyvibrating operators and their eigenvalues // Bull. cl. sci. Acad. Roy. Belg. — 1973. — V. 59, № 10. — P. 1011–1015.

226. Hallaire M. Le potential efficace de l'eau dans le sol an regime de dessechement // L'eau et production vegetale. — Paris: Institut National de la Recherche Agronomique. — 1964. — № 9. — P. 27–62.

227. Holmgren E. Sur les systemes lineaires aux derivees partielles du premier ordre // Arkiv för matematik, astronomy och fysik. — 1910. — Band 6, № 2. — P. 1–10.

228. Ibragimov N. H. Laplace type invariants for parabolic equations // Nonlinear Dynamics. — 2002. — T. 28, № 2. — P. 125–133.

229. Kiguradze T. On the correctness of Dirichlet problem in a characteristic rectangle for fourth order linear hyperbolic equations // Georgian mathematical journal. — 1999. — V. 6, № 5. — P. 447–470.

230. Kiguradze T., Lakshmikanthem V. On the Dirichlet problem for fourth-order linear hyperbolic equation // Nonlinear Anal. — 2002. — V. 49, № 2. — P. 197–219.

231. Laplace S. P. Recherches sur le calcul integral aux differences partielles // Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris. — 1773. — V. 77. — P. 5–68. Reprinted in: P. S. Laplace's oevres complètes. — V. IX. — Gauthier-Villars. — Paris, 1893. – P. 5–68; english translation: New-York, 1966.

232. Liouville J. Sur l'equation aux differences partielles $d^2 \log \lambda / dudv \pm \lambda / 2a^2 = 0$ // J. Math. Pures et Appliqees (Paris). — 1853. — 18(1). — P. 71–72.

233. Mangeron D. New methods for determining solution of mathematical models governing polyvibrating phenomena. I. // Bul. Inst. politehn. Jasi. Sectia 1. — 1968. — V. 14, № 1–2. — P. 433–436.

234. Mangeron D., Oguztoreli M. N. Darboux problem for a polyvibrating equation: solutions as F-function // Proc. Nat. Acad. USA. — 1970. — V. 67, № 3. — P. 1488–1492.

235. Niccoletti O. Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. (5). — 1895. — V. 4. — P. 330–337.

236. Ni Xingtang. Boundary value problem with three characteristic supports for linear totally hiperbolic equation of the third order // Kexue tongbao. — 1980. — V. 25, № 5. — P. 361–369.

237. Oguztoreli M. N. Boundary value problem for Mangerons equation. I. // Bul. Inst. politehn. Jasi. Sectia 1. — 1973. — V. 19, № 3. — P. 81–85.

238. Petren L. Extension of Laplace's method to the equation $\sum\limits_{i=0}^{n-1} A_{1i}\left(x,y\right)\frac{\partial^{i+1}z}{\partial x\partial y^i}+\sum\limits_{i=0}^{n} A_{0i}\left(x,y\right)\frac{\partial^{i}z}{\partial y^i}=0$ // Archives of ALGA. — 2006. — V. 3. — P. 13–31.

239. Radochova V. Die Lösing der partiellen Differentialgleihung $u_{xxtt} = A(t,x)u_{xx}+B(t,x)u_{tt}$ mit gewissen Nebenbedinungen // Cas. pestov. mat. — 1973. — V. 98, № 4. — S. 389–399.

240. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the support of solutions of pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc. — 1977. — V. 63, № 1. — P. 77–81.

241. Rundell W. The construction of solutions to pseudoparabolic equations in noncilindrical domains // J. Different. equations. — 1978. — V. 27, № 3. — P. 394–404.

242. Rundell W. The Stefan Problem for a pseudo-heat equation // Indiana Univ. Math. J. — 1978. — V. 27, № 5. — P. 739–750.

243. Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — V. 76, № 2. — P. 253–257.

244. Utkina E. A. On a partial differential equationin 4-dimensional Euclidean space // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2005. — V. 18. — P. 151–175.

245. Zhegalov V. I. Relation between the Boundary Values of Goursat Problem and the Normal Derivatives // Conditionally Well-Posed Problems. — Moscow: TVP Sc. Publ. — 1994. — P. 346–349.