ГЛАВА 7. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И МАТРИЦЫ

§1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ДЕЙСТВИЯ НАД ОПЕРАТОРАМИ

Пусть $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ — линейные пространства. Будем говорить, что задано *отображение* φ пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbf{Y}$

$$\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

если каждому вектору x из $\mathbf{X}$ поставлен однозначно в соответствие вектор $\varphi(x)$ из $\mathbf{Y}$.

Говорят также, что на пространстве $\mathbf{X}$ задана *функция* φ со значениями в $\mathbf{Y}$.

.

Подчеркнем, что при этом, вообще говоря, не каждый вектор из $\mathbf{Y}$ должен быть результатом отображения некоторого вектора x из $\mathbf{X}$.

.

Отображение φ называется <u>*линейным*</u>, если для любых $x, y \in \mathbf{X}$ и любых α, $\beta \in \mathbb{C}$

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

.

В линейной алгебре в основном рассматриваются линейные отображения. Обычно их называют *линейными операторами* и обозначают большими латинским буквами. Чаще всего, линейные операторы будем называть просто *операторами*.

.

Скобки в обозначениях действия оператора на вектор, если это не приводят к недоразумениям, не пишут. Так, равенство

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

применительно к оператору $\mathcal{A}$ запишется в виде

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{A}x + \beta\mathcal{A}y.$$

.

Из определения линейного отображения сразу вытекает, что

$$\mathcal{A}0 = 0$$

для любого оператора $\mathcal{A}$. Действительно,

$$\mathcal{A}0 = \mathcal{A}(x - x) = \mathcal{A}x - \mathcal{A}x = 0.$$

.

Если оператор действует из пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbf{X}$, то говорят, что он *действует в пространстве* $\mathbf{X}$ или является *преобразованием* пространства $\mathbf{X}$:

$$\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}.$$

.

Приведем примеры операторов.

1) ***Нулевой оператор***. Этот оператор переводит все векторы пространства $\mathbf{X}$ в нулевой вектор пространства $\mathbf{Y}$. Нулевой оператор обозначают символом 0, так что

$$\mathbf{0}x = 0, \quad \mathbf{0} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}, \quad x \in \mathbf{X}, \quad 0 \in \mathbf{Y}.$$

.

2) ***Единичный (тождественный) оператор***. Оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}$, называется единичным, если он оставляет без изменения все векторы пространства $\mathbf{X}$. Единичный оператор будем обозначать через I:

$$Ix = x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}, \quad I : \mathbf{X} \to \mathbf{X}.$$

.

3) *Оператор проектирования.* Пусть линейное пространство X есть прямая сумма подпространств L_1 и L_2:

$$\mathbf{X} = L_1 \dot{+} L_2.$$

Тогда

$$x = x^1 + x^2, \quad x^1 \in L_1,\ x^2 \in L_2, \quad \forall x \in \mathbf{X},$$

причем, векторы x^1 и x^2 однозначно определятся по x.

.

Определим оператор

$$\mathcal{P} : \mathbf{X} \to L_1,$$

полагая

$$\mathcal{P}x = x^1, \quad \forall x \in \mathbf{X},$$

т. е.

$$x = \mathcal{P}x + x^2, \quad \mathcal{P}x \in L_1, \; x^2 \in L_2, \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Говорят, что оператор $\mathcal{P}$ есть оператор <u>***проектирования***</u> пространства X на подпространство L_1 (параллельно подпространству L_2).

.

Если X — евклидово пространство и оно представлено, как ортогональная сумма подпространств L_1 и L_2,

$$\mathrm{X} = L_1 \oplus L_2,$$

то $\mathcal{P}$ называют оператором *ортогонального проектирования*.

.

Докажем, что оператор $\mathcal{P}$ линеен.

Пусть

$$x = \mathcal{P}x + x^2, \quad \mathcal{P}x \in L_1,\ x^2 \in L_2, \quad \forall x \in \mathbf{X},$$

$$y = \mathcal{P}y + y^2, \quad \mathcal{P}y \in L_1,\ y^2 \in L_2, \quad \forall y \in \mathbf{X}.$$

Тогда для любых

$$\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$$

справедливо равенство

$$\alpha x + \beta y = \alpha(\mathcal{P}x + x^2) + \beta(\mathcal{P}y + y^2) = \alpha\mathcal{P}x + \beta\mathcal{P}y + \alpha x^2 + \beta y^2.$$

Вследствие того, что L_1 и L_2 есть подпространства, получаем, что

$$\alpha\mathcal{P}x + \beta\mathcal{P}y \in L_1, \quad \alpha x^2 + \beta y^2 \in L_2,$$

поэтому

$$\mathcal{P}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{P}x + \beta\mathcal{P}y.$$

.

4) ***Умножение матрицы на вектор***. Пусть $A(m \times n)$ — прямоугольная матрица. Поставим в соответствие каждому вектору $x \in \mathbb{C}^n$ вектор $y \in \mathbb{C}^m$ при помощи равенства

$$y = Ax.$$

Операция умножения матрицы на вектор — линейная операция, поэтому это соотношение определяет линейный оператор, действующий из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$.

.

Полезно отметить, что если в пространстве $\mathbf{X}_n$ фиксирован некоторый базис

$$\{e^j\}_{j=1}^n,$$

то определяя линейный оператор $\mathcal{A}$, достаточно описать его действие на векторы базиса, так как для любого вектора

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j e^j$$

имеем

$$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^n \xi_j \mathcal{A} e^j.$$

.

Действия над операторами. Пусть

$$\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

$$\mathcal{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — линейные операторы, α, β — числа. Оператор

$$\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

определяемый соотношением

$$(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x = \alpha(\mathcal{A}x) + \beta(\mathcal{B}x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X},$$

называется *линейной комбинацией операторов* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

.

Пусть

$$\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

$$\mathcal{B} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z},$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — линейные операторы. Оператор

$$\mathcal{BA} : \mathbf{X} \to \mathbf{Z},$$

определяемый соотношением

$$\mathcal{BA}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X},$$

называется *произведением операторов* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

.

<u>Упражнение.</u> Показать, что отображения

$$\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}, \quad \mathcal{B}\mathcal{A}$$

есть линейные операторы.

§3. ОПЕРАТОР РАЗЛОЖЕНИЯ ПО БАЗИСУ

Пусть $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$. Определим оператор, действующий из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbf{X}_n$ при помощи соотношения

$$x = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n,$$

подробнее,

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \cdots + \xi_n e^n.$$

Очевидно, что так определенный оператор линеен. Будем обозначать этот оператор через

$$\mathcal{E} : \mathbb{C}^n \to \mathbf{X}_n.$$

.

Поскольку $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис, то каждому $x \in \mathbf{X}_n$ однозначно соответствует $\xi \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k.$$

Это соответствие порождает <u>***оператор разложения по базису***</u>, действующий из $\mathbf{X}_n$ в $\mathbb{C}^n$. Обозначим этот оператор через

$$\mathcal{E}^{-1} : \mathbf{X}_n \to \mathbb{C}^n.$$

.

Непосредственно из определения операторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^{-1}$ вытекает:

$$\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}\xi = \xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n,$$

$$\mathcal{E}\mathcal{E}^{-1}x = x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

т. е. операторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{-1}$ взаимно обратны.

§6. МАТРИЦА ОПЕРАТОРА

Пусть дан линейный оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m.$$

Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ базис

$$\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n,$$

а в пространстве $\mathbf{Y}_m$ — базис

$$\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m.$$

Представим каждый вектор

$$\mathcal{A}e^i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

в виде разложения по базису $\mathcal{Q}_m$:

$$\mathcal{A}e^i = a_{1i}^{(eq)} q^1 + a_{2i}^{(eq)} q^2 + \cdots + a_{mi}^{(eq)} q^m, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(eq)} & a_{12}^{(eq)} & \ldots & a_{1n}^{(eq)} \\ a_{21}^{(eq)} & a_{22}^{(eq)} & \ldots & a_{2n}^{(eq)} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}^{(eq)} & a_{m2}^{(eq)} & \ldots & a_{mn}^{(eq)} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A_{eq} называют ***матрицей оператора*** $\mathcal{A}$. Она однозначно определяется оператором $\mathcal{A}$ и базисами $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$.

.

Соотношения

$$\mathcal{A}e^i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{(eq)} q^j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

можно записать более кратко

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{Q}_m A_{eq}.$$

Действительно,

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \left\{\mathcal{A}e^i\right\}_{i=1}^{n}, \quad \mathcal{Q}_m A_{eq} = \left\{\sum_{j=1}^{m} q^j a_{ji}^{(eq)}\right\}_{i=1}^{n}.$$

Пусть

$$x = \mathcal{E}_n \xi \in \mathbf{X}_n, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Представим $y = \mathcal{A}x$ в виде разложения по базису:

$$y = \mathcal{A}x = \mathcal{Q}_m \eta \in \mathbf{Y}_m, \quad \eta \in \mathbb{C}^m.$$

Тогда, используя

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{Q}_m A_{eq}.$$

получим

$$\mathcal{Q}_m \eta = \mathcal{A}x = \mathcal{A}\mathcal{E}_n \xi = \mathcal{Q}_m A_{eq} \xi,$$

следовательно,

$$\eta = A_{eq} \xi.$$

Эта формула показывает, как связаны коэффициенты разложения векторов x и $\mathcal{A}x$ по базисам пространств $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$.

.

Из равенства

$$\eta = A_{eq}\xi.$$

вытекает, что если матрица A_{eq} оператора $\mathcal{A}$ известна, то по заданному вектору

$$x \in \mathbf{X}_n$$

вектор

$$y = \mathcal{A}x \in \mathbf{Y}_m$$

можно построить следующим образом.

.

1) Найти вектор

$$\xi \in \mathbb{C}^n$$

коэффициентов разложения x по базису $\mathcal{E}_n$. Это можно представить в операторном виде:

$$\xi = \mathcal{E}^{-1} x.$$

.

2) **Умножив матрицу A_{eq} на вектор ξ, получить вектор**

$$\eta = A_{eq}\xi \in \mathbb{C}^m$$

коэффициентов разложения элемента

$$y = \mathcal{A}x \in \mathbf{Y}_m$$

по базису $\mathcal{Q}_m$.

.

3) Вычислить элемент y по найденному вектору η, что опять можно записать в операторной форме:

$$y = \mathcal{Q}\eta.$$

.

Итак, используя операторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{Q}$, порожденные базисами $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$, соотношение

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{Q}_m A_{eq}$$

можно представить в следующих эквивалентных формах:

$$A_{eq} = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}, \quad \text{или} \quad \mathcal{A} = \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1}.$$

Поясним, что

$$A_{eq}\xi = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}\xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n, \qquad \mathcal{A}x = \mathcal{Q} A_{eq}\mathcal{E}^{-1}x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

.

Равенства

$$A_{eq} = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}$$

иллюстрируют следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_n & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathbf{Y}_m \\ \mathcal{E}\big\uparrow & & \big\downarrow\mathcal{Q}^{-1} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow[A_{eq}]{} & \mathbb{C}^m \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{X}_n & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathbf{Y}_m \\ \mathcal{E}^{-1}\big\downarrow & & \big\uparrow\mathcal{Q} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow[A_{eq}]{} & \mathbb{C}^m \end{array}$$

.

Если в пространствах $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ фиксированы некоторые базисы $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{Q}_m$, то всякому линейному оператору

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m,$$

однозначно соответствует матрица

$$A_{eq} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$$

оператора $\mathcal{A}$ в этих базисах.

.

Наоборот, всякой матрице

$$A(m \times n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$$

однозначно соответствует оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m,$$

определяемый по формуле

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q} A \mathcal{E}^{-1}.$$

.

Если

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n,$$

то

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n A_e,$$

или

$$A_e = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E},$$

где A_e — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$.

.

Отметим два случая, когда матрица оператора не зависит от выбора базиса:

Нулевой оператор. Его матрица в любом базисе нулевая.

Тождественный оператор I. Его матрица, как видно из

$$I\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n I,$$

единичная матрица I при любом выборе базиса $\mathcal{E}_n$.

.

Из определения матрицы оператора сразу же вытекает, что для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ и для любых α, $\beta \in \mathbb{C}$

$$(\alpha A + \beta B)_{eq} = \alpha A_{eq} + \beta B_{eq},$$

т. е. линейным операциям на операторами соответствуют линейные операции над их матрицами.

.

Действительно, рассмотрим линейную комбинацию операторов

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m,$$

$$(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x = \alpha(\mathcal{A}x) + \beta(\mathcal{B}x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

Умножим обе части этого равенства слева на оператор разложения по базису $\{q^k\}_{k=1}^m$ пространства $\mathbf{Y}_m$ и используем представление

$$x = \mathcal{E}\xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Тогда

$$\mathcal{Q}^{-1}(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})\mathcal{E}\xi = \alpha\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}\xi + \beta\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{E}\xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n.$$

.

Теперь из

$$\mathcal{Q}^{-1}(\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B})\mathcal{E}\xi=\alpha\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}\xi+\beta\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{E}\xi\quad\forall\,\xi\in\mathbb{C}^n,$$

и соотношений вида

$$A_{eq}=\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}$$

сразу же вытекает, что

$$(\alpha A+\beta B)_{eq}=\alpha A_{eq}+\beta B_{eq},$$

т. е. линейным операциям на операторами соответствуют линейные операции над их матрицами.

.

Аналогичное при определенных условиях справедливо и для произведения операторов. Пусть

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m, \quad \mathcal{B} : \mathbf{Y}_m \to \mathbf{Z}_p$$

есть линейные операторы.

Будем считать, что в пространствах

$$\mathbf{X}_n, \quad \mathbf{Y}_m, \quad \mathbf{Z}_p$$

заданы базисы

$$\{e^k\}_{k=1}^n, \quad \{q^k\}_{k=1}^m, \quad \{r^k\}_{k=1}^p.$$

Покажем, что тогда

$$(BA)_{er} = B_{qr}A_{eq}.$$

.

Действительно, применяя формулы вида

$$A_{eq} = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E},$$

получим

$$(BA)_{er} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{E} =$$

$$= \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}B_{qr}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E} = B_{qr}A_{eq}.$$

Важно, что здесь при определении матриц операторов $\mathcal{A}$ и B использовался один и тот же базис $\{q^k\}_{k=1}^{m}$. В дальнейшем указанное согласование всегда предполагается выполненным.

Примеры. 1) Определим оператор $\mathcal{A} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ по формуле

$$\mathcal{A}x = (x_2, x_1, x_3 + x_4, x_4), \qquad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4.$$

Построим матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе. Имеем

$$\mathcal{A}i^1 = \mathcal{A}(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0, 0) = i^2,$$

$$\mathcal{A}i^2 = \mathcal{A}(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) = i^1,$$

$$\mathcal{A}i^3 = \mathcal{A}(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 1, 0) = i^3,$$

$$\mathcal{A}i^4 = \mathcal{A}(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1) = i^3 + i^4,$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

2) В трехмерном линейном пространстве $\mathbf{Q}_2$ всех полиномов степени не выше двух с комплексными коэффициентами определим оператор $\mathcal{T}$ при помощи соотношения

$$\mathcal{T} q_2(z) = q_2(z+h), \quad q_2 \in \mathbf{Q}_2.$$

Здесь h — фиксированное комплексное число (сдвиг). Построим матрицу оператора $\mathcal{T}$, принимая за базис пространства $\mathbf{Q}_2$

$$\varphi_0(z) \equiv 1, \quad \varphi_1(z) = z, \quad \varphi_2(z) = z^2.$$

.

Имеем $\varphi_0(z) \equiv 1$, $\varphi_1(z) = z$, $\varphi_2(z) = z^2$,

$$\mathcal{T}\varphi_0(z) = \varphi_0(z+h) = 1 = \varphi_0,$$

$$\mathcal{T}\varphi_1(z) = \varphi_1(z+h) = z + h = h\varphi_0 + \varphi_1,$$

$$\mathcal{T}\varphi_2 = \varphi_2(z+h) = (z+h)^2 = z^2 + 2zh + h^2 = h^2\varphi_0 + 2h\varphi_1 + \varphi_2,$$

следовательно, матрица оператора $\mathcal{T}$ **есть**

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Поэтому, если

$$q_2(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2,$$

то

$$\mathcal{T} q_2(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2,$$

где

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + h a_1 + h^2 a_2 \\ a_1 + 2h a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

.

Матрица оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$$

определяется заданием базисов пространств $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m$. Выясним, как она изменяется при изменении базисов.

.

Пусть наряду с базисами

$$\{e^k\}_{k=1}^n, \quad \{q^k\}_{k=1}^m$$

заданы базисы

$$\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n, \quad \{\widetilde{q}^k\}_{k=1}^m,$$

и им соответствует матрица $A_{\widetilde{e}\widetilde{q}}$.

.

Имеем

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1},$$

$$A_{\widetilde{e}\widetilde{q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{A} \widetilde{\mathcal{E}}.$$

Следовательно,

$$A_{\widetilde{e}\widetilde{q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1} \widetilde{\mathcal{E}}.$$

.

Будем считать известными матрицы T, R перехода к новым базисам, так что

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T, \quad \widetilde{\mathcal{Q}}_m = \mathcal{Q}_m R.$$

Значит, для любого $\xi \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n \xi = \mathcal{E}_n T \xi,$$

поэтому

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} T,$$

откуда получаем, что

$$\mathcal{E}^{-1} \widetilde{\mathcal{E}} = T, \quad \text{аналогично}, \quad \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{Q} = R^{-1}.$$

.

Итак,

$$A_{\widetilde{e}\widetilde{q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}\widetilde{\mathcal{E}}.$$

Кроме того,

$$\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\mathcal{Q} = R^{-1}, \quad \mathcal{E}^{-1}\widetilde{\mathcal{E}} = T.$$

Таким образом,

$$A_{\widetilde{e}\widetilde{q}} = R^{-1}A_{eq}T.$$

.

В важном частном случае, когда $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$, получаем

$$A_{\widetilde{e}} = T^{-1} A_e T.$$

Квадратные матрицы B, C связанные соотношением

$$B = D^{-1} C D,$$

где D — невырожденная матрица, называют ***подобными***.

Таким образом, матрицы одного и того же оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

в разных базисах подобны.