14. Равномерная сходимость последовательностей и рядов функций

Поточечная сходимость последовательностей функций.

Пусть f и f_n $(n \in \mathbb{N})$ — некоторые функции, заданные на множестве $D \subset \mathbb{R}$. Говорят, что последовательность f_n *сходится поточечно* на множестве D, если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для любого $x \in D$. Будем это обозначать $f_n \xrightarrow{D} f$. Перепишем по другому условие поточечной сходимости:

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon). \tag{1}$$

Отметим, что здесь значение N зависит от x и от ε.

Равномерная сходимость последовательностей функций.

Говорят, что последовательность f_n *сходится равномерно* на множестве D, если выполняется следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in D\ \ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon). \tag{2}$$

Здесь значение N зависит от ε, а от x не зависит. Если выполнено условие (2), то будем писать $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$.

Нетрудно понять, что условие (2) сильнее, чем (1), то есть равномерная сходимость влечёт поточечную. Отметим сразу, что обратное неверно: последовательность функций может сходиться поточечно, но не сходиться равномерно.

Приведём эквивалентное (2) условие, но более простое для проверки. Обозначим

$$d_n = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}. \tag{3}$$

Тогда

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff d_n \to 0 \ \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, при исследовании последовательности функций f_n на множестве D на равномерную сходимость надо проделать следующее:

а) Выяснить при каждом $x \in D$ существует ли конечный $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Если при каком-то $x \in D$ такого предела не существует, то последовательность f_n не сходится поточечно на D ни к какой функции, следовательно, не сходится и равномерно. Если же такой предел существует при любом $x \in D$, то обозначаем: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, и можем утверждать, что $f_n \xrightarrow{D} f$.

б) Найти d_n по формуле (3) и выяснить, стремиться ли d_n к нулю при $n \to \infty$.

№2746.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1, \end{cases} = f(x).$$

а) $D=[0,\frac{1}{2}]$.

$$d_n=\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{0\le x\le\frac{1}{2}} x^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$.

б) $D=[0,1]$.

$$d_n=\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{0\le x\le 1}\begin{cases} x^n, & \text{если } 0\le x<1,\\ 0, & \text{если } x=1,\end{cases}=\lim_{x\to 1-0}x^n=1\not\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, равномерной сходимости нет (хотя есть поточечная).

Теорема. *Равномерный предел непрерывных функций есть функция непрерывная.*

Замечание. Из приведенной теоремы сразу следует отсутствие равномерной сходимости в пункте б) номера 2746.

Поточечная и равномерная сходимости функциональных рядов.

Понятия поточечной и равномерной сходимости функционального ряда сводятся к соответствующим понятиям для последовательности частных сумм этого ряда.

Следствие. *Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть непрерывная функция.*

№2769.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(1-x)x^n=\lim_{k\to\infty}\big((1-x)+(1-x)x+\dots+(1-x)x^k\big)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}(1-x^{k+1})=\begin{cases} 1, & \text{если } 0\le x<1,\\ 0, & \text{если } x=1,\end{cases}$$

и, учитывая вышеприведенное следствие, заключаем, что рассматриваемый ряд на отрезке $[0,1]$ сходится неравномерно.