Секаева Л.Р., Тюленева О.Н.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Казань – 2008

Казанский государственный университет
Кафедра общей математики

Секаева Л.Р., Тюленева О.Н.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Казань – 2008

УДК 512.643, 517.4, 514.742.2
С 28

Печатается по решению
учебно-методической комиссии
механико-математического факультета
Казанского государственного университета
Протокол № 9 от 3 апреля 2008 г.

Секаева Л.Р., Тюленева О.Н.
С 28 Элементы линейной алгебры. Векторная алгебра. – Казань: Казанский государственный университет, 2008. – 52 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов естественнонаучных факультетов КГУ.

УДК 512.643, 517.4, 514.742.2

Оглавление

Глава 1. Элементы линейной алгебры

§ 1. Матрицы и определители

1. Матрицы и действия над ними. *Матрицей* называется система $m \times n$ чисел, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов. Числа этой таблицы называются *элементами матрицы*. Обозначения матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ составляют i-ю строку $(i = 1, 2, ..., m)$ матрицы, элементы $a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{mk}$ – ее k-й столбец $(k = 1, 2, ..., n)$; a_{ik} – элемент, принадлежащий i-й строке и k-му столбцу матрицы; числа i, k называются *индексами элемента*.

Матрицу, имеющую m строк и n столбцов, называют *матрицей размеров* $m \times n$ (читается «m на n»).

Употребляются и более краткие обозначения матрицы размеров $m \times n$: $\left[a_{ik}\right]_{m \times n}$, $\left\|a_{ik}\right\|_{m \times n}$, $\left(a_{ik}\right)_{m \times n}$. Матрицу обозначают также одной заглавной буквой, например:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если необходимо отметить, что матрица A имеет m строк и n столбцов, т. е. необходимо указать ее размеры, то пишут $A_{m \times n}$ или A_{mn}.

Две матрицы $A_{mn} = \left(a_{ik}\right)_{mn}$, $B_{pq} = \left(b_{ik}\right)_{pq}$ называются *равными*, если $p = m$, $q = n$ и $a_{ik} = b_{ik}$ $(i = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n)$; другими словами, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны.

Матрица, состоящая лишь из одной строки, называется *строчной матрицей* или *матрицей-строкой*. Матрица, имеющая лишь один столбец, называется *столбцевой матрицей* или *матрицей-столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

Квадратной называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов $(m = n)$, т. е. матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов).

Элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}$ – второстепенную или побочную диагональ.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

Единичная матрица – это диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Ее обозначение:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Треугольной называется матрица, у которой все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица произвольных размеров, имеющая вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0 \ (i=1,2,...,r)$ называется *ступенчатой* или *квазитреугольной*.

Если в матрице заменить каждую ее строку столбцом с тем же номером, то получится *транспонированная* матрица. Таким образом, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если матрица A имеет размеры $m \times n$, то A^{T} имеет размеры $n \times m$.

Линейными действиями над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число. Сложение и вычитание определяются только для матриц одинаковых размеров.

Суммой матриц $A=(a_{ik})_{mn}$, $B=(b_{ik})_{mn}$ называется такая матрица $C=(c_{ik})_{mn}$, что

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik} \ (i=1,2,...,m; \ k=1,2,...,n),$$

т. е. матрица, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц-слагаемых. Сумма двух матриц A и B обозначается $A+B$.

Разностью $A-B$ *матриц* $A=(a_{ik})_{mn}$, $B=(b_{ik})_{mn}$ называется матрица $D=(d_{ik})_{mn}$, для которой

$$d_{ik}=a_{ik}-b_{ik} \ (i=1,2,...,m; \ k=1,2,...,n).$$

Произведением матрицы $A=(a_{ik})_{mn}$ на число α (или числа α на матрицу A) называется матрица $B=(b_{ik})_{mn}$, для которой

$$b_{ik}=\alpha a_{ik} \ (i=1,2,...,m; \ k=1,2,...,n),$$

т. е. матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число α. Произведение матрицы A на число α обозначается $A\alpha$ или αA.

Произведение матриц определяется для квадратных матриц одного и того же порядка, а также для неквадратных матриц, у которых число столбцов матрицы-множимого равно числу строк матрицы-множителя.

Произведением матрицы $A_{mn}=(a_{ik})_{mn}$ *на матрицу* $B_{nl}=(b_{ik})_{nl}$ называется такая матрица $C_{ml}=(c_{ik})_{ml}$, для которой

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk},$$

т. е. элемент c_{ik} матрицы C_{ml} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A_{mn} на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B_{nl}.

Матрица C_{ml} имеет m строк (как и матрица A_{mn}) и l столбцов (как и матрица B_{nl}). Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB.

Замечание. Из того, что матрицу A можно умножить на B, не следует, что матрицу B можно умножить на A. В общем случае $AB \neq BA$. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными*.

Собственными значениями квадратной матрицы A порядка n называются корни уравнения $|A - \lambda E| = 0$ относительно λ.

1. Найти сумму и разность двух матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}.$$

2. Найти сумму трех матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -8 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Даны три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -7 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найти: 1) $A + B + C$; 2) $A - B - C$; 3) $3A - 2B + C$; 4) $2A + 4B - 3C$.

4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию: 1) $2A - X = O$; 2) $3A + X = O$; 3) $2A + 3X = O$, где O – нулевая матрица.

5. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию: 1) $A + X = E$; 2) $3A - 2X = E$, где E – единичная матрица.

6. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу X, удовлетворяющую условию:
1) $A + X = B$; 2) $B - 2X = 0$; 3) $3A - 0{,}5X = B$.

7. Известно, что $A_{34}B_{45} = C_{ml}$. Чему равны m и l – размеры матрицы C?

8. Известно, что $A_{23}B_{nl} = C_{24}$. Найти n и l.

9. Известно, что $A_{5n}B_{k6} = C_{56}$. Найти зависимость между n и k.

10. Даны матрицы: A_{33}, B_{34}, C_{43}. Существуют ли произведения:
1) AB; 2) BA; 3) BC; 4) CB; 5) AC; 6) CA?

11. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 5 & -4 & -7\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & -5\\ 6 & 4 & -8\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}4\\ 9\\ 6\end{pmatrix}.$$

Существуют ли произведения: 1) AB; 2) BA; 3) BC; 4) CB; 5) CD; 6) DC; 7) AC; 8) CA; 9) BD; 10) DB?

12. Найти произведение AB, если:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}.$$

13. Найти произведения AB и BA матриц:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\\ 0 & -5\end{pmatrix}.$$

14. Доказать, что перестановочны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & -4\end{pmatrix}.$$

15. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4 & 8\\ 2 & 5 & -3 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 9\\ 4 & 6 & -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 9 & 6\\ 5 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Найти элемент матрицы AB, принадлежащий ее четвертой строке и первому столбцу.

16. Даны две матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & 5 & -2\\ 7 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 3 & -2\\ 1 & -5\\ 9 & -7\end{pmatrix}.$$

Найти произведение AB. Существует ли произведение BA?

В задачах **17-26** найти произведение матриц.

17. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$

20. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

21. $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

22. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & -6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$

23. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$

25. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

26. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

В задачах **27-30** записать в матричной форме систему уравнений.

27. $\begin{cases} 3x+4y=7, \\ 5x-2y=3. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1+3x_2=9, \\ 3x_1+2x_2=11. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x+3y+5z=11, \\ 7x+4y-6z=5, \\ 8x-5y+3z=6. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3=9, \\ 5x_1-2x_2+4x_3=7, \\ 6x_1+7x_2-8x_3=5. \end{cases}$

В задачах **31-36** найти произведения AB и BA двух квадратных матриц.

31. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$

32. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

33. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -5\\ 4 & -8 & 7\\ 6 & 1 & -9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

34. $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -7\\ -1 & 6 & -3\\ 2 & -4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ 4 & -2 & -6\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

35. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

36. $A=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$.

В задачах **37**, **38** найти произведения AB и BA двух прямоугольных матриц.

37. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

38. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\\ 1 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

2. Обратная матрица. Ранг матрицы. Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной* квадратной матрице A, если выполняется условие

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

где E – единичная матрица.

Квадратная матрица называется *невырожденной* или *неособенной*, если ее определитель отличен от нуля. Если определитель матрицы равен нулю, она называется *вырожденной* или *особенной*.

Всякая невырожденная матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A.

Рангом матрицы называется наивысший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

В задачах **39-45** выяснить, имеет ли данная матрица обратную.

39. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. **40.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. **41.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. **42.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

43. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. **44.** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. **45.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

В задачах **46-52** выяснить, при каких значениях α существует матрица, обратная данной.

46. $\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. **47.** $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ \alpha & 5 \end{pmatrix}$. **48.** $\begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ \alpha & 9 \end{pmatrix}$. **49.** $\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 8 & \alpha \end{pmatrix}$.

50. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **51.** $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **52.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В задачах **53-65** найти обратную матрицу для данной матрицы.

53. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

54. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

55. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

56. $\begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$.

57. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

58. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{pmatrix}$.

59. $\begin{pmatrix} 9 & 17 & 8 \\ 18 & 34 & 17 \\ 10 & 19 & 8 \end{pmatrix}$.

60. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

61. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

62. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

63. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

64. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

65. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 9 & 4 \\ 5 & 4 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

В задачах **66-77** найти ранг матрицы.

66. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

67. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

68. $\begin{pmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 24 & 23 & 22 \\ 35 & 34 & 33 \end{pmatrix}$.

69. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 10 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

70. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

71. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

72. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 8 & 7 \\ 7 & 19 & 12 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

73. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

74. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

75. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

76. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

77. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Определители второго порядка. *Определителем (детерминантом) второго порядка называется число, обозначаемое символом*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

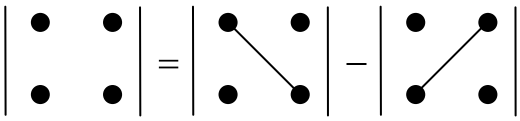
и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются *элементами определителя второго порядка*. Каждый элемент определителя обозначают буквой a с двумя индексами; первый указывает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых находится соответствующий элемент (например, элемент a_{21} принадлежит второй строке и первому столбцу определителя).

Для определителя A употребляются следующие обозначения: $|A|$, Δ, $\det A$, $\det(a_{ik})$.

Вычисление определителя второго порядка иллюстрируется схемой:



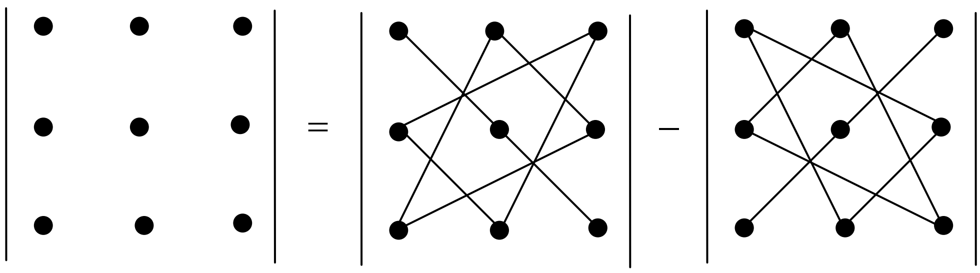
4. Определители третьего порядка. *Определителем (детерминантом) третьего порядка называется число, обозначаемое символом*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \qquad (1)$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (1) берутся со знаком «+», а какие со знаком «–», полезно использовать следующее правило треугольников (или Саррюса), которое символически можно записать так:



(основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

(основания равнобедренных треугольников параллельны побочной диагонали)

Это правило позволяет легко записать формулу (1) и вычислить данный определитель.

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Минор элемента a_{ik} обозначают M_{ik}.

Например, минором элемента a_{11} определителя Δ является определитель второго порядка $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} *определителя* называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+k}$, где $i+k$ – сумма номеров строки и столбца. Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} обозначают A_{ik}. В соответствии с определением $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Например, если элемент a_{21} находится на пересечении второй строки и первого столбца, то для него $i+k = 2+1 = 3$ и алгебраическим дополнением является

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}.$$

5. Свойства определителей:

1. Определитель не изменяется при замене всех его строк соответствующими столбцами.
2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет лишь знак.
3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.
4. Определитель, имеющий две пропорциональные строки (столбца) равен нулю.
5. Множитель, общий для всех элементов некоторой строки (столбца), можно вынести за знак определителя.
6. Определитель равен нулю, если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю.
7. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель.
8. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.
9. Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равен нулю.

Свойство 8 можно выразить, например, формулой:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Данная формула представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки.

Соответствующие знаки, приписываемые при этом минорам элементов определителя, можно задать таблицей:

+	−	+
−	+	−
+	−	+

По аналогии с последней формулой вводятся определители четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix},$$

определители пятого порядка и т. д.

В задачах **78-85**, не раскрывая определителей, доказать справедливость равенств.

78. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 15 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0.$

79. $\begin{vmatrix} -5 & -8 & -9 \\ -5 & -8 & -9 \\ 15 & 18 & 19 \end{vmatrix} = 0.$

80. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}.$

81. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$

82. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$

83. $\begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha b_2 + \beta c_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha b_3 + \beta c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

84. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 + \alpha a_2 & b_1 + \alpha b_2 & c_1 + \alpha c_2 \end{vmatrix} = 0.$

85. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$

В задачах **86-97** вычислить определитель второго порядка.

86. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$. **87.** $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$. **88.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$.

89. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$. **90.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$. **91.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$.

92. $\begin{vmatrix} 51 & 52 \\ 47 & 48 \end{vmatrix}$. **93.** $\begin{vmatrix} 24 & 26 \\ 33 & 35 \end{vmatrix}$. **94.** $\begin{vmatrix} 63 & 62 \\ 75 & 74 \end{vmatrix}$.

95. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$. **96.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$. **97.** $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$.

В задачах **98-101** решить уравнение.

98. $\begin{vmatrix} x & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 0$. **99.** $\begin{vmatrix} x & -2 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 0$.

100. $\begin{vmatrix} x^2 & 3x \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$. **101.** $\begin{vmatrix} x & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = 0$.

В задачах **102-107** вычислить определитель третьего порядка (использовав определение).

102. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **103.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **104.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

105. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. **106.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$. **107.** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

В задачах **108**, **109** вычислить определитель, разложив по элементам первого столбца.

108. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **109.** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$.

В задачах **110**, **111** вычислить определитель, разложив по элементам того ряда, который содержит наибольшее число нулей.

110. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$.

111. $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$.

В задачах **112-127** упростить и вычислить определитель третьего порядка (использовав свойства определителей).

112. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{vmatrix}$.

113. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

114. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

115. $\begin{vmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 24 & 23 & 22 \\ 35 & 34 & 33 \end{vmatrix}$.

Указание. Из первого и второго столбцов вычесть третий.

116. $\begin{vmatrix} 46 & 40 & 30 \\ 57 & 54 & 55 \\ 68 & 65 & 66 \end{vmatrix}$.

117. $\begin{vmatrix} 58 & 63 & 59 \\ 69 & 73 & 71 \\ 77 & 81 & 79 \end{vmatrix}$.

118. $\begin{vmatrix} 132 & 135 & 137 \\ 243 & 244 & 246 \\ 354 & 355 & 357 \end{vmatrix}$.

119. $\begin{vmatrix} 119 & 125 & 122 \\ 428 & 431 & 429 \\ 579 & 582 & 580 \end{vmatrix}$.

120. $\begin{vmatrix} 251 & 125 & 126 \\ 363 & 181 & 182 \\ 574 & 288 & 289 \end{vmatrix}$.

121. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$.

122. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$.

123. $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$.

124. $\begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

125. $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

126. $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$.

Указание. Вынести a за знак определителя, затем из первой и второй строк вычесть третью и вынести $(x-z)$ и $(y-z)$ за знак определителя.

127. $\begin{vmatrix} 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\dfrac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

В задачах **128-133** решить уравнение.

128. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$.

129. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & x \\ 8 & x & 8 \\ x & 2 & x \end{vmatrix} = 0$.

130. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 2 & x \end{vmatrix} = 0$.

131. $\begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ x & x & 1 \\ 9 & 9 & x \end{vmatrix} = 0$.

132. $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 3 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$.

133. $\begin{vmatrix} x & 4 & 5 \\ 3 & -1 & x \\ 3 & x & -1 \end{vmatrix} = 0$.

134. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

В задачах **135-144** вычислить определитель четвертого порядка.

135. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

136. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

137. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

138. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

139. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

140. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

141. $\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$.

142. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

143. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$.

144. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

145. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_1+x_2}{2} & \dfrac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \dfrac{x_1-x_2}{2} & \dfrac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

§ 2. Системы линейных алгебраических уравнений

Линейным алгебраическим уравнением называют уравнение, содержащее переменную только в первой степени и не имеющее произведений переменных.

1. Метод Крамера. Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Если хотя бы один из свободных членов $b_i \neq 0$, то система уравнений (1) называется *неоднородной.* Если все члены $b_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, то данная система уравнений называется *однородной* и имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решением системы линейных алгебраических уравнений (1) называется такое множество значений неизвестных $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, ...,\ x_n = c_n$, при которых каждое из уравнений данной системы обращается в тождество.

Система уравнений, имеющая решения, называется *совместной*, а система уравнений, не имеющая решений, – *несовместной*.

Определителем системы уравнений (1) или (2) называется определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных данной системы уравнений, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель неоднородной системы уравнений отличен от нуля, т. е. $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ...,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (3)$$

где $\Delta_i\ (i = 1, 2, ..., n)$ – определитель, полученный из определителя исходной системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Ненулевые решения она имеет тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.

2. Решение систем с помощью обратной матрицы. Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (4)$$

Введем следующие обозначения:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

где A – матрица, составленная из коэффициентов системы (4), X –матрица-столбец из неизвестных (искомая матрица), B – матрица-столбец из свободных членов.

Используя понятие произведения матриц, систему (4) можно записать в виде матричного уравнения

$$AX=B. \qquad (5)$$

Пусть матрица A – неособенная, т. е. $\det A \neq 0$, тогда существует матрица A^{-1}, обратная к матрице A. Умножая обе части уравнения (5) слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}AX=A^{-1}B$, а так как $A^{-1}A=E$, то $EX=A^{-1}B$ или, учитывая, что $EX=X$, так как E – единичная матрица, $X=A^{-1}B$.

Таким образом, чтобы найти неизвестную матрицу X, надо матрицу A^{-1} умножить на матрицу из свободных членов B.

В задачах **146-151** решить методом Крамера или с помощью обратной матрицы системы уравнений.

146. $\begin{cases} 4x_1+3x_2=5, \\ 5x_1+2x_2=8. \end{cases}$ **147.** $\begin{cases} 2x_1+7x_2=8, \\ 6x_1+5x_2=-8. \end{cases}$ **148.** $\begin{cases} 9x_1+2x_2=3, \\ 7x_1-2x_2=13. \end{cases}$

149. $\begin{cases} 3x_1+2x_2=7, \\ 4x_1+3x_2=8. \end{cases}$ **150.** $\begin{cases} 5x_1+9x_2=2, \\ 6x_1+7x_2=10. \end{cases}$ **151.** $\begin{cases} 4x_1+3x_2=1, \\ 8x_1+9x_2=1. \end{cases}$

В задачах **152-154** определить, при каких значениях параметра λ система имеет решения.

152. $\begin{cases} 6\lambda x_1+2x_2=5, \\ 9x_1+3x_2=7. \end{cases}$ **153.** $\begin{cases} \lambda x_1+2x_2=3, \\ 8x_1+4\lambda x_2=9. \end{cases}$ **154.** $\begin{cases} \lambda^2 x_1+3\lambda x_2=4, \\ 3x_1+\lambda x_2=6. \end{cases}$

В задачах **155-168** решить методом Крамера или с помощью обратной матрицы систему уравнений.

155. $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=1, \\ x_1+2x_2+2x_3=2, \\ 2x_1+2x_2+x_3=1. \end{cases}$ **156.** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+2x_3=2. \end{cases}$

157. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5, \\ 3x_1+x_2+2x_3=6, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1. \end{cases}$

158. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=3, \\ 4x_1-2x_2-5x_3=5, \\ 6x_1-x_2+3x_3=1. \end{cases}$

159. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=7, \\ 7x_1+8x_2+9x_3=13. \end{cases}$

160. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=3, \\ 4x_1+2x_2+5x_3=5, \\ 3x_1+4x_2+7x_3=2. \end{cases}$

161. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3-8=0, \\ x_1+5x_2+2x_3-5=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3-3=0. \end{cases}$

162. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-4=0, \\ 2x_1+6x_2+x_3-2=0, \\ 4x_1+8x_2-x_3-2=0. \end{cases}$

163. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=-4, \\ 5x_1-7x_2+8x_3=-7. \end{cases}$

164. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=5, \\ 4x_1-11x_2+10x_3=11. \end{cases}$

165. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 6x_1+3x_2+x_3=-9, \\ 8x_1-4x_2-2x_3=5. \end{cases}$

166. $\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ x_1-2x_2+x_3=1, \\ x_1-2x_3=2. \end{cases}$

167. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+3x_3-3x_4=15, \\ 9x_1+9x_2+4x_3+4x_4=5, \\ 3x_1-3x_2+2x_3-2x_4=15. \end{cases}$

168. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-x_2+4x_3-4x_4=-4, \\ 16x_1+16x_2+x_3+x_4=-6, \\ 16x_1-16x_2+4x_3-4x_4=7. \end{cases}$

3. Метод Гаусса. Пусть дана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+\ldots+a_{3n}x_n=b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \quad (6)$$

Метод последовательного исключения неизвестных, или *метод Гаусса*, применяемый для решения системы (6), состоит в следующем. Предполагая, что $a_{11}\neq 0$ (это всегда можно сделать за счет нумерации уравнений), умножая первое уравнение системы (6) на $-a_{21}/a_{11}$ и прибавляя его ко второму, получаем уравнение, в котором коэффициент при x_1 обращается в нуль. Умножая первое уравнение на $-a_{31}/a_{11}$, и прибавляя результат к третьему, получаем уравнение, также не содержащее члена с x_1. Аналогичным путем преобразуем все остальные уравнения, в результате чего приходим к системе, эквивалентной системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}\,x_2 + \ldots + a'_{2n}\,x_n = b'_2, \\ \quad a'_{32}\,x_2 + \ldots + a'_{3n}\,x_n = b'_3, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a'_{m1}\,x_2 + \ldots + a'_{mn}\,x_n = b'_m, \end{cases} \tag{7}$$

где a'_{ik} $(i = 2,3,...,m; \quad k = 2,3,...,n)$ – некоторые новые коэффициенты.

Предполагая, что $a'_{22} \neq 0$, и оставляя неизменными первые два уравнения системы (7), преобразуем ее так, чтобы в каждом из остальных уравнений коэффициент при x_2 обратился в нуль. Продолжая этот процесс, систему (7) можно привести к одной из следующих систем:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \quad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \quad\quad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = d_3, \\ \quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad c_{nn}x_n = d_n, \end{cases} \tag{8}$$

где c_{ii} $(i = 1,2,...,n)$ – некоторые коэффициенты, $c_{ii} \neq 0$; d_i – свободные члены;

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k, \end{cases} \tag{9}$$

где $k < n$;

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad 0 \cdot x_n = d_k, \end{cases} \tag{10}$$

где $k \leq n$.

Система (8) имеет единственное решение; значение x_n находится из последнего уравнения, значение x_{n-1} – из предпоследнего, значение x_1 – из первого.

Система (9) имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения этой системы можно выразить одно из неизвестных (например, x_k) через остальные $n-k$ неизвестных $(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)$, входящих в это уравнение; из предпоследнего уравнения можно выразить x_{k-1} через эти неизвестные и т. д. В полученных формулах, выражающих $x_1, x_2, ..., x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$, неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ могут принимать любые значения.

Система (10) несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять ее последнему уравнению.

Итак, метод последовательного исключения неизвестных применим к любой системе линейных уравнений. Решая систему этим методом, преобразования совершают не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

В задачах **169-188** решить систему уравнений методом Гаусса.

169. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

170. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

171. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$

172. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 21. \end{cases}$

173. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

174. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

175. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8, \\ 6x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$

176. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

177. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 11, \\ 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$

178. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 12x_4 = 6. \end{cases}$

179. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7, \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6. \end{cases}$

180. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 6. \end{cases}$

181. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

182. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

183. $\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 6 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 + 13x_3 - 8 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 + 5 = 0. \end{cases}$

184. $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -3, \\ 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

185. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 1, \\ 16x_2 - 10x_4 = 21, \\ x_1 + 10x_2 + x_3 + 10x_5 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 - 2x_5 = -1. \end{cases}$

186. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -5, \\ -2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 - 4x_4 + 2x_5 = 11. \end{cases}$

187. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 0, \\ 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 7, \\ x_1 + 2x_3 + 2x_5 = 0, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_6 = -7. \end{cases}$

188. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_6 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_4 - x_6 = 1. \end{cases}$

В задачах **189-202** исследовать систему уравнений и найти ее решение в зависимости от значения параметра α.

189. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = \alpha. \end{cases}$

190. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 6. \end{cases}$

191. $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=3, \\ 2x_1+5x_2-x_3=15, \\ 3x_1+7x_2-5x_3=\alpha. \end{cases}$

192. $\begin{cases} \alpha x_1+x_2+x_3=6, \\ x_1+\alpha x_2+x_3=6, \\ x_1+x_2+\alpha x_3=6. \end{cases}$

193. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ 2x_1+\alpha x_2+x_3=1, \\ 3x_1+x_2+5x_3=3. \end{cases}$

194. $\begin{cases} \alpha x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+\alpha x_2-x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+\alpha x_3=6. \end{cases}$

195. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=5, \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=1, \\ x_1+2x_2+\alpha x_3+5x_4=13, \\ x_1+2x_2+3x_3+\alpha x_4=9. \end{cases}$

196. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ \alpha x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11. \end{cases}$

197. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=3, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 6x_1+9x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 8x_1+12x_2+7x_3+\alpha x_4=9. \end{cases}$

198. $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3, \\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1, \\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9, \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\alpha. \end{cases}$

199. $\begin{cases} \alpha x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ x_1+\alpha x_2+3x_3+2x_4=1, \\ x_1+x_2+x_3+4x_4=1, \\ x_1+x_2+4x_3+x_4=\alpha. \end{cases}$

200. $\begin{cases} \alpha x_1+2x_2+x_3+x_4=1, \\ 3x_1+\alpha x_2+x_3+x_4=2, \\ x_1+4x_2+x_3+x_4=3, \\ 5x_1+x_2+x_3+x_4=4. \end{cases}$

201. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=2, \\ x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5=3, \\ x_1+x_2+x_3-2x_4+x_5=4, \\ x_1+x_2+x_3+x_4-3x_5=\alpha. \end{cases}$

202. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+x_2-x_3-x_4+5x_5=\alpha, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=2, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4+\alpha x_5=7, \\ 4x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=4. \end{cases}$

Глава 2. Векторная алгебра

§ 1. Понятие вектора

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ *называется вектором.*

Буква A означает начало вектора, а буква B – его конец. Вектор также обозначают и одной буквой с черточкой наверху, например, $\vec{a}$. Направление вектора на рисунке указывают стрелкой (рис.1).

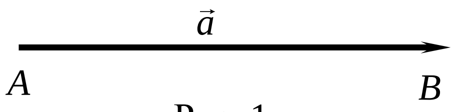


Рис. 1

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$ или просто 0.

Длина вектора обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$. Если $|\vec{a}|=1$, то вектор $\vec{a}$ называется *единичным*.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Нулевой вектор направлен одинаково с любым вектором; длина его равна нулю, т. е. $|\vec{0}|=0$.

Векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называются равными* $(\vec{a}=\vec{b})$, *если они коллинеарны, одинаково направлены и их длины равны.*

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u называется величина $A'B'$ направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ на оси u, где A' – проекция точки A на ось u, а B' – проекция точки B на эту ось. Обозначение: $\text{пр}_u\overrightarrow{AB}$.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u определяется формулой

$$\text{пр}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi, \qquad (1)$$

где φ – угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью u.

Пусть $X=\text{пр}_x\overrightarrow{AB}$, $Y=\text{пр}_y\overrightarrow{AB}$, $Z=\text{пр}_z\overrightarrow{AB}$. Проекции X, Y, Z вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси координат называют его *координатами*. При этом пишут

$$\overrightarrow{AB}=\{X;Y;Z\}.$$

Каковы бы ни были две точки $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$, координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ определяются следующими формулами:

$$X=x_2-x_1,\ Y=y_2-y_1,\ Z=z_2-z_1. \qquad (2)$$

Пусть дан произвольный вектор $\vec{a}=\{X;Y;Z\}$. Формула

$$|\vec{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \qquad (3)$$

выражает длину произвольного вектора через его координаты. Обозначим через α, β, γ углы между вектором $\vec{a}$ и осями координат (рис. 2). Из формул (1) и (3) получаем:

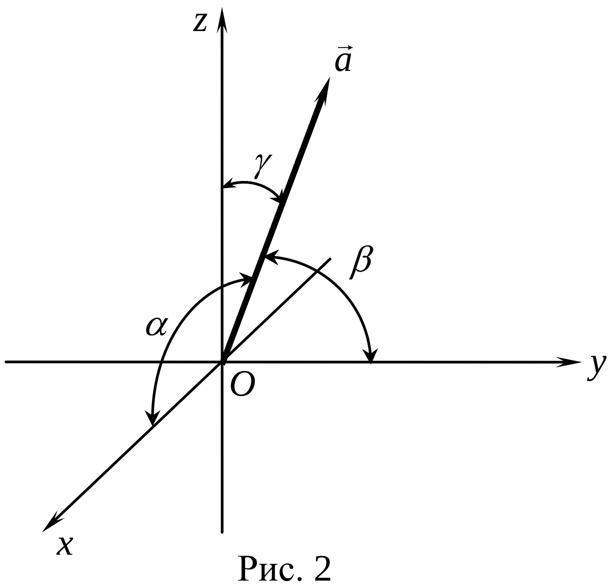


Рис. 2

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \qquad (4)$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

Возводя в квадрат левую и правую части каждого из равенств (4) и суммируя полученные результаты, имеем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (5)$$

т. е. сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна 1.

Радиус-вектором точки M называется вектор, идущий из начала координат в эту точку. Радиус-вектор обозначают $\vec{r}$: $\vec{r} = OM$.

1. Даны точки $A(3;-1;2)$ и $B(-1;2;1)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

2. Даны точки $A(1;2;3)$ и $B(3;-4;6)$. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

3. Найти длину вектора $\vec{a} = \{20;30;-60\}$ и его направляющие косинусы.

4. Даны две координаты вектора: $X = 4$, $Y = -12$. Определить его третью координату Z при условии, $|\vec{a}| = 13$.

5. Определить начало вектора $\vec{a} = \{2;-3;-1\}$, если его конец совпадает с точкой $(1;-1;2)$.

6. Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a} = \{3;-1;4\}$, если его начало совпадает с точкой $M(1;2;-3)$.

7. Вычислить направляющие косинуса вектора $\vec{a} = \{3/13;4/13;12/13\}$.

8. Даны $|\vec{a}| = 2$ и углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

9. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы:

1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$; 2) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$; 3) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

10. Может ли вектор составлять с двумя координатными осями следующие углы: 1) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$; 2) $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$; 3) $\alpha = 150^\circ$, $\gamma = 30^\circ$?

11. Вектор составляет с осями Ox и Oz углы $\alpha = 120^\circ$ и $\gamma = 45^\circ$. Какой угол он составляет с осью Oy?

12. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Вычислить его координаты при условии, что $|\vec{a}| = 2$.

13. Определить координаты точки M, если ее радиус-вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его длина равна 3.

14. Радиус-вектор точки M составляет с осями координат равные острые углы. Определить эти углы, если длина вектора равна $2\sqrt{3}$.

15. Радиус-вектор точки M составляет с осью Ox угол 45° и с осью Oy – угол 60°. Длина его равна 6. Определить координаты точки M, если ее координата Z отрицательна.

16. В точке $A(2;1;-1)$ приложена сила, равная 7. Зная две координаты этой силы $X = 2$ и $Y = -3$, определить направление и конец вектора, изображающего силу.

§ 2. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису

Линейными операциями над векторами называются операции сложения и вычитания векторов и умножения векторов на числа.

Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (правило треугольника) (рис. 3, а).

Разностью $\vec{b} - \vec{a}$ двух векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{a}$ дает вектор $\vec{b}$ (рис. 3, б).

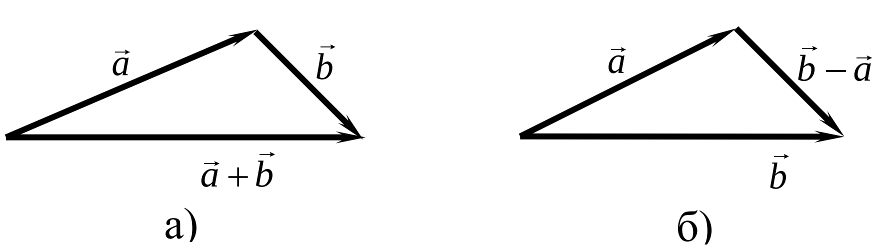


Рис. 3

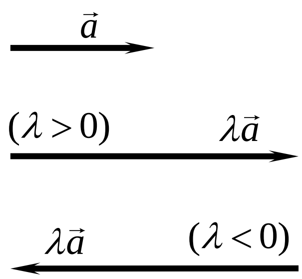


Рис. 4

Произведением $\lambda\vec{a}$ ($\vec{a} \neq 0$ и число $\lambda \neq 0$) называется вектор, который коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет длину, равную $|\lambda||\vec{a}|$, и направление такое же, как и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное, если $\lambda < 0$ (рис. 4).

На рисунке 4 изображен случай $|\lambda| > 1$.

Если $\lambda = 0$ или $\vec{a} = 0$, то произведение $\lambda\vec{a}$ считается равным нулевому вектору.

Имеют место следующие две основные теоремы о проекциях векторов.

Теорема 1. *Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось, т. е.* $\text{пр}_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{пр}_u\vec{a}_1 + \text{пр}_u\vec{a}_2$.

Следствие 1. Если $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то $\vec{a} + \vec{b} = \{X_1 + X_2;\ Y_1 + Y_2;\ Z_1 + Z_2\}$.

Теорема 2. *При умножении вектора* $\vec{a}$ *на число* λ *его проекция на ось также умножается на это число, т. е.* $\text{пр}_u\lambda\vec{a} = \lambda\text{пр}_u\vec{a}$.

Следствие 2. Если $\vec{a} = \{X; Y; Z\}$, то $\lambda\vec{a} = \{\lambda X; \lambda Y; \lambda Z\}$ для любого числа λ.

Признаком коллинеарности двух векторов $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ является пропорциональность их координат

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}.$$

Любые два неколлинеарных вектора могут быть базисом на плоскости. Через них могут быть выражены все остальные векторы плоскости.

Любые три некомпланарных вектора могут быть базисом в трехмерном пространстве.

Чаще всего в качестве *базиса* выбирается тройка взаимно ортогональных единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, причем $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, вектор $\vec{i}$ лежит на оси Ox, вектор $\vec{j}$ – на оси Oy, вектор $\vec{k}$ – на оси Oz, и каждый из них направлен на своей оси в положительную сторону. Этот базис легко увязывается с декартовой системой координат.

Любой вектор $\vec{a}$ может быть разложен по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, т. е. представлен в виде $\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, где X, Y, Z – координаты вектора $\vec{a}$.

Правило параллелограмма. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм (рис. 5), то сумма $\vec{a} + \vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю

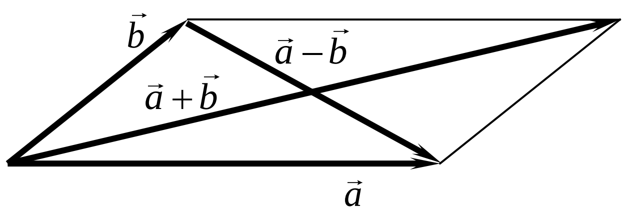


Рис. 5

этого параллелограмма, идущий из общего начала; разность $\vec{a}-\vec{b}$ есть вектор, совпадающий с другой диагональю, идущий из конца $\vec{b}$ в конец $\vec{a}$.

17. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\vec{a}|=5$ и $|\vec{b}|=12$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

18. Даны $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ и $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Вычислить $|\vec{a}-\vec{b}|$.

19. Даны $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$ и $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. Вычислить $|\vec{a}+\vec{b}|$.

20. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60^\circ$, причем $|\vec{a}|=5$ и $|\vec{b}|=8$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

21. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=120^\circ$, причем $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=5$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

22. Доказать, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Указание. Воспользоваться правилом параллелограмма.

23. Доказать, что $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Указание. Воспользоваться последовательным применением правила треугольника при сложении многих векторов.

24. На трех векторах $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ построен параллелепипед. Указать те его вектор-диагонали, которые соответственно равны $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}$.

25. В треугольнике ABC сторону AB точками M и N разделим на три равные части: $AM=MN=NB$. Найти вектор $\overrightarrow{CM}$, если $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$.

26. Радиусами-векторами вершин треугольника ABC являются $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$. Найти радиус-вектор $\vec{r}$ точки M пересечения медиан треугольника.

27. В треугольнике ABC прямая AM является биссектрисой угла BAC, причем точка M лежит на стороне BC. Найти $\overrightarrow{AM}$, если $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

28. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $3\vec{a}$; 2) $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\dfrac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

29. По сторонам OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (рис. 6). Выразить через $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BA}$, если длина $OA=3$ и $OB=4$.

30. Пусть на рис. 6 M – середина BC и N – середина AC. Определить векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$ при $OA=3$ и $OB=4$.

31. В прямоугольнике $OACB$ (рис. 6) M и N – середины сторон BC и AC. Разложить вектор $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ по векторам $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{ON}=\vec{b}$.

Указание. В условие $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ подставить выражения $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ через $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и сравнить коэффициенты слева и справа при $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

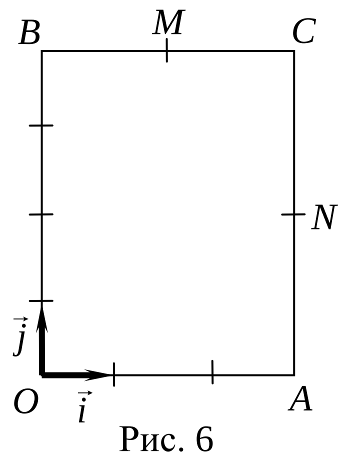


Рис. 6

32. На плоскости Oxy построить векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}=2\vec{i}+6\vec{j}$. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

33. Проверить аналитически и геометрически векторные тождества:

1) $\vec{a}+\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; 2) $\vec{a}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$.

34. Даны два вектора: $\vec{a}=\{3;-2;6\}$ и $\vec{b}=\{-2;1;0\}$. Определить проекции на координатные оси следующих векторов:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a}+3\vec{b}$; 6) $\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$.

35. Дан правильный шестиугольник $OABCDE$ со стороной $OA=3$. Обозначив единичные векторы направлений $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ через $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$, установить зависимость между ними (например, рассмотрением трапеции $OABC$). Выразить затем через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

36. В равнобедренной трапеции $OACB$ (рис. 7) угол $BOA=60^\circ$, $OB=BC=CA=2$, M и N – середины сторон BC и AC. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы направлений $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

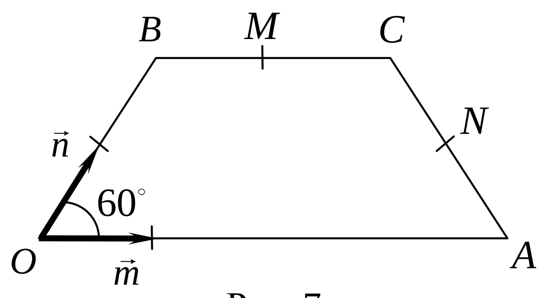


Рис. 7

37. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}=\{2;-1;3\}$ и $\vec{b}=\{-6;3;-9\}$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

38. Определить, при каких значениях α, β векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ и $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарны.

39. Дано разложение вектора $\vec{c}$ по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$: $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$. Определить разложение по этому же базису вектора $\vec{d}$, параллельного вектору $\vec{c}$ и противоположного с ним направления, при условии, что $\left|\vec{d}\right| = 75$.

§ 3. Скалярное произведение векторов

1. Определение скалярного произведения. *Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол не определен и скалярное произведение по определению полагают равным нулю.*

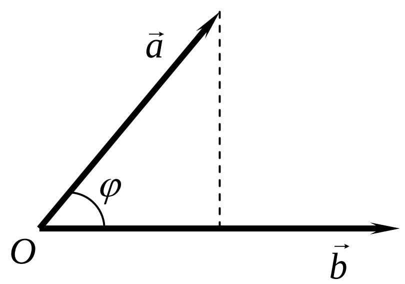


Рис. 8

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Итак,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 8).

Так как $|\vec{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{b}}\, \vec{a}$, $\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{a}}\, \vec{b}$, то можно записать

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \text{пр}_{\vec{b}}\, \vec{a} = |\vec{a}|\, \text{пр}_{\vec{a}}\, \vec{b}.$$

2. Основные свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (свойство перестановочности сомножителей).
2. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ (свойство сочетательности относительно умножения на число).
3. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (свойство распределительности суммы векторов).
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ (скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$).
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$, и, обратно, $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$.

Из свойств 4 и 5 для базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ непосредственно получаем следующие равенства:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0.$$

3. Выражение скалярного произведения через координаты векторов.

Теорема. *Если векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *заданы своими координатами* $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$, $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$, *то их скалярное произведение определяется формулой*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2. \qquad (1)$$

Из теоремы вытекают два важных следствия.

Следствие 1. *Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов* $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ *и* $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$ *является равенство*

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0. \qquad (2)$$

Следствие 2. *Угол между векторами* $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ *и* $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$ *определяется равенством*

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \qquad (3)$$

40. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ и векторы образуют угол $\varphi=\pi/3$.

41. Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$. Определить $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ и $\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}$.

42. Даны векторы $\vec{a}=\{4;-2;-4\}$, $\vec{b}=\{6;-3;2\}$. Вычислить:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$; 3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$; 4) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$.

43. Даны векторы $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

44. Вычислить $\left(5\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

45. Определить угол между векторами $\vec{a}=\{1;2;3\}$ и $\vec{b}=\{6;4;-2\}$.

46. Определить угол между векторами $\vec{a}=\{2;-4;4\}$ и $\vec{b}=\{-3;2;6\}$.

47. Определить, при каком значении m векторы $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-m\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

48. Раскрыть скобки в выражении:

$$\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)\cdot\vec{j}+\left(\vec{j}-2\vec{k}\right)\cdot\vec{k}+\left(\vec{i}-2\vec{k}\right)^2.$$

49. Раскрыть скобки в выражениях:

$$1)\ \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2;\quad 2)\ \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2.$$

Выяснить геометрический смысл полученных формул.

50. Даны точки $A(3;3;-2)$, $B(0;-3;4)$, $C(0;-3;0)$ и $D(0;2;-4)$. Построить векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$ и найти $\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}$.

51. Даны точки $A(a;0;0)$, $B(0;0;2a)$ и $C(a;0;a)$. Построить векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{AB}$ и найти угол между ними.

52. На плоскости дан треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(2a;0)$ и $B(a;-a)$. Найти угол, образованный стороной OB и медианой OM этого треугольника.

53. Найти угол между биссектрисами углов xOy и yOz.

54. Из вершины квадрата проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

55. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=-2\vec{j}+\vec{k}$.

56. Вычислить: 1) $\left(\vec{m}+\vec{n}\right)^2$, если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы с углом между ними 30°; 2) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$, если $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right|=4$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 135°.

57. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, лежащие в одной плоскости, причем $|\vec{a}|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $|\vec{c}|=5$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60° и угол между $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – 60°. Построить вектор $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ и вычислить его модуль по формуле $|\vec{u}|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)^2}$.

58. Показать, что угол между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\left(\vec{a}\perp\vec{b}\right)$, определяется формулой

$$\cos\varphi=\pm\frac{|\vec{a}|^2-\left|\vec{b}\right|^2}{|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2}.$$

59. Найти работу A силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$, если $\left|\vec{F}\right|=2$, $|\vec{s}|=5$, а угол φ между векторами $\vec{F}$ и $\vec{s}$ равен $\pi/6$.

Указание. Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{s}$, то работа A этой силы определяется по формуле $A=\vec{F}\cdot\vec{s}=\left|\vec{F}\right||\vec{s}|\cos\varphi$.

60. Вычислить, какую работу A производит сила $\vec{F}=\{3;-5;2\}$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\vec{s}=\{2;-5;-7\}$.

61. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$; 5) $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$; 6) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$; 7) $\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)^2$.

62. Проекции перемещения $\vec{s}$ движущейся точки на оси координат равны $s_x = 2$ м, $s_y = 1$ м, $s_z = -2$ м. Проекции действующей силы $\vec{F}$ на оси координат равны $F_x = 50$ Н, $F_y = 40$ Н и $F_z = 30$ Н. Вычислить работу A силы $\vec{F}$ и угол между силой $\vec{F}$ и перемещением $\vec{s}$.

§ 4. Векторное произведение

1. Определение векторного произведения. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Тройка векторов называется *упорядоченной*, если указано, какой из них считается первым, какой – вторым, какой – третьим. Например, в записи $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ вектор $\vec{a}$ считается первым, $\vec{b}$ – вторым, $\vec{c}$ – третьим; в записи $(\vec{b};\vec{c};\vec{a})$ вектор $\vec{b}$ – первый, $\vec{c}$ – второй, $\vec{a}$ – третий.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой*, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, который определяется тремя условиями:

1) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ образуют правую тройку векторов (рис. 9).

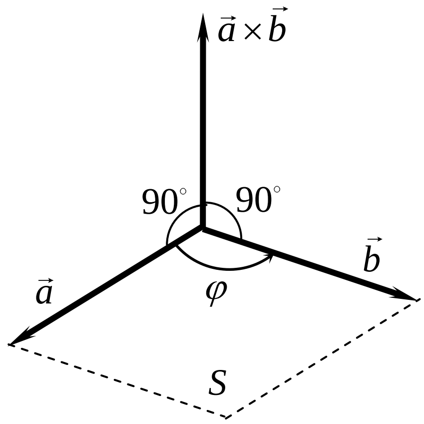


Рис. 9

2. Основные свойства векторного произведения:

1. $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарные векторы.

2. Длина векторного произведения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна площади S параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 9).

3. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (*свойство антиперестановочности сомножителей*).

4. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ (*свойство сочетательности по отношению к скалярному множителю*).

5. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (*свойство распределительности относительно суммы векторов*).

Согласно определению и свойствам 1 и 3 векторного произведения, для базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ получаем следующие равенства:

$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{j}=0,\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{k}=0.$$

Вообще произведение любых двух смежных векторов в последовательности

$$\overset{\longrightarrow\ +}{\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\ \vec{i}\ \vec{j}}\atop{-\ \longleftarrow}$$

дает следующий вектор со знаком «+», а в обратной последовательности – со знаком «–».

3. Выражение векторного произведения через координаты векторов.

Теорема. *Если векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *заданы своими координатами* $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$, $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$, *то векторное произведение вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ *определяется формулой*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{\square}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,$$

а площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

63. Определить и построить вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, если: 1) $\vec{a}=3\vec{i}$, $\vec{b}=2\vec{k}$; 2) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$; 3) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{j}+2\vec{k}$. Найти в каждом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

64. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$ и $C(4;5;-2)$.

65. Построить параллелограмм на векторах $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$ и вычислить его площадь и высоту.

66. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k})-\vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$;

2) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}+(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}$;

3) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b})$;

4) $2\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})+3\vec{j}\cdot(\vec{i}\times\vec{k})+4\vec{k}\cdot(\vec{i}\times\vec{j})$.

67. Доказать, что $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{b}$.

68. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$.

69. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, образующие угол 30°.

70. Построить треугольник с вершинами $A(1;-2;8)$, $B(0;0;4)$ и $C(6;2;0)$. Вычислить его площадь и высоту BD.

71. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{k}-\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

72. Даны векторы $\vec{a}=\{2;3;5\}$ и $\vec{b}=\{1;2;1\}$. Найти координаты векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$.

73. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.

74. Доказать тождество $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.

75. Доказать, что $(\vec{a}\times\vec{b})^2\le\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$. В каком случае здесь буде знак равенства?

76. Даны векторы $\vec{a}=\{3;-1;-2\}$ и $\vec{b}=\{1;2;-1\}$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\vec{a}\times\vec{b}$; 2) $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$; 3) $(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$.

77. Даны точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ и $C(3;2;1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$; 2) $(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})\times\overrightarrow{CB}$.

78. Сила $\vec{F}=\{3;2;-4\}$ приложена к точке $A(2;-1;1)$. Определить моменты этой силы относительно начала координат.

Указание. Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, приложенную к какой-нибудь точке M, а вектор $\overrightarrow{OM}$ идет из некоторой точки O в точку M, то вектор $\overrightarrow{OM}\times\vec{F}$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки O.

79. Сила $\vec{F}=\{2;-4;5\}$ приложена к точке $M(4;-2;3)$. Определить момент этой силы относительно точки $A(3;2;-1)$.

80. Сила $\vec{F}=\{3;4;-2\}$ приложена к точке $C(2;-1;-2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

81. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a}=\{2;-2;1\}$ и $\vec{b}=\{2;3;6\}$.

82. Даны векторы $\vec{a}=\{2;-3;1\}$, $\vec{b}=\{-3;1;2\}$ и $\vec{c}=\{1;2;3\}$. Вычислить $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ и $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

§ 5. Смешанное произведение трех векторов

1. Определение и геометрический смысл смешанного произведения. *Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т. е.*

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Следующая теорема выражает геометрический смысл смешанного произведения.

Теорема 1. *Смешанное произведение $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая, со знаком «–», если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – левая $\left(V=\pm\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$. Если же $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$.*

Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V_{\text{пир}}=\pm\frac{1}{6}\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

Следствие. *Из теоремы легко выводится тождество*

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}, \tag{1}$$

т. е. знаки «$\cdot$» и «$\times$» в смешанном произведении можно менять местами.

В силу тождества (1) смешанные произведения $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ и $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ можно обозначить более простым символом $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

2. Выражение смешанного произведения через координаты векторов.

Теорема 2. *Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ заданы своими координатами*

$$\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\},\ \vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\},\ \vec{c}=\{X_3;Y_3;Z_3\},$$

то смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ определяется формулой:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

или

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=X_1\begin{vmatrix} Y_2 & Z_2 \\ Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}+Y_1\begin{vmatrix} Z_2 & X_2 \\ Z_3 & X_3 \end{vmatrix}+Z_1\begin{vmatrix} X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{vmatrix}. \tag{2'}$$

83. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}=\{1;-1;1\}$, $\vec{b}=\{1;1;1\}$ и $\vec{c}=\{2;3;4\}$.

84. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$ и $D(3;7;2)$.

85. Построить пирамиду с вершинами $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$ и $C(1;2;4)$ и вычислить ее объем, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

86. Построить параллелепипед на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{k}$ и вычислить его объем. Правой или левой будет связка векторов $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$?

87. Показать, что векторы $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ компаланарны, и разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

88. Показать, что точки $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$ и $D(5;0;-6)$ лежат в одной плоскости.

89. Показать, что:

1) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left[\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\times\vec{b}\right]=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$;

2) $\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\left[\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right)\right]=3\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

90. Построить пирамиду с вершинами $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$ и $D(2;3;8)$, вычислить ее объем и высоту, опущенную на грань ABC.

91. Построить векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, показать, что они компланарны, и разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

92. Определить, какой является тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (правой или левой), если:

1) $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{j}$; 2) $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j}$;

3) $\vec{a} = \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{k}$; 4) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$;

5) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{j}$; 6) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$.

93. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

94. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

95. Доказать, что $|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}| \le |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$. В каком случае здесь может иметь место знак равенства?

96. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если:

1) $\vec{a} = \{2;3;-1\}$, $\vec{b} = \{1;-1;3\}$, $\vec{c} = \{1;9;-11\}$;

2) $\vec{a} = \{3;-2;1\}$, $\vec{b} = \{2;1;2\}$, $\vec{c} = \{3;-1;-2\}$;

3) $\vec{a} = \{2;-1;2\}$, $\vec{b} = \{1;2;-3\}$, $\vec{c} = \{3;-4;7\}$.

97. Показать, что точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

98. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ и $D(4;1;3)$.

99. Даны вершины тетраэдра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

100. Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

Ответы

Глава 1. Элементы линейной алгебры

1. $A+B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 11 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -3 & -13 & 15 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & -9 & -6 \\ 1 & -2 & -13 \end{pmatrix}$.

4. 1) $\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -9 & 18 \\ -18 & 27 \end{pmatrix}$.

5. 1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -11 & 15 \end{pmatrix}$.

7. $m=3,\ l=5$.

8. $n=3,\ l=4$.

9. $n=k$.

10. 1) Да; 2) нет; 3) да.

11. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) нет; 7) нет; 8) нет; 9) да;10) нет.

13. $AB=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ -13 & 6 & -5 \\ -20 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

15. 49.

16. BA не существует.

17. (-1) (матрица состоит из одного элемента).

19. $\begin{pmatrix} -9 & -10 \\ -13 & -14 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} -22 & 10 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$.

34. $AB=\begin{pmatrix} 18 & -11 & -24 \\ 14 & -11 & -48 \\ -6 & 6 & 33 \end{pmatrix}$.

35. $AB=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

36. $AB=\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

39. Да.

40. Нет.

41. Нет.

42. Да.

43. Нет.

44. Нет.

45. Да.

46. $\alpha \neq 1$.

47. $\alpha \neq 2$.

48. $\alpha \neq \pm 6$.

49. $\alpha \neq \pm 4$.

50. $\alpha \neq 1$.

51. $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

53. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

54. $\begin{pmatrix} 5/2 & -3 \\ -3/2 & 2 \end{pmatrix}$.

55. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

56. $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$.

57. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

61. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

62. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

66. 3.

67. 2.

68. 2.

73. 2.

74. 2.

75. 2.

77. 5.

86. 26.

87. -6.

88. 0.

89. 9.

90. -38.

91. 7.

92. 4.

93. -18.

94. 12.

95. 1.

96. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

97. 0.

98. $x=2$.

99. $x_1=-2$, $x_2=2$.

100. $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=3$.

101. $x_1=0$, $x_2=2$.

102. -4.

103. -5.

104. 18.

105. 5.

106. 20.

107. -22.

108. -10.

109. $4a$.

110. $-2b^2$.

111. $-2x$.

112. 6.

113. -9.

115. 0.

116. -396.

117. 48.

118. 444.

119. -453.

120. 168.

121. $-4a^3$.

122. $(x-y)(y-z)(x-z)$.

123. amn.

124. $\sin(\beta-\alpha)$.

125. 1.

126. $4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

127. $a(x-z)(y-z)(y-x)$.

128. $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-3$.

129. $x_1=-4,\ x_2=1,\ x_3=4$.

130. $x_1=3,\ x_2=-\sqrt{2},\ x_3=\sqrt{2}$.

131. $x_1=-3,\ x_2=-2,\ x_3=3$.

132. $x_1=2,\ x_{2,3}=-1\pm\sqrt{8}$.

133. $x_1=-1,\ x_{2,3}=(1\pm\sqrt{109})/2$.

134. 1) $x>7/2$; 2) $-6<x<-4$.

135. 15.

136. -18.

137. 12.

138. -6.

139. 48.

140. 0.

141. $(b+c+d)(b-c-d)(b-c+d)(b+c-d)$.

142. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

143. $(a+b+c+d)(a-b+c-d)[(a-c)^2+(b-d)^2]$.

144. $(be-cd)^2$.

146. $(2;-1)$.

147. $(-3;2)$.

148. $(1;-3)$.

149. $(5;-4)$.

150. $(4;-2)$.

151. $(1/2;-1/3)$.

152. $\lambda \neq 1$.

153. $\lambda \neq -2$, $\lambda \neq 2$.

154. $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -3$, $\lambda \neq 3$.

155. $(-2/5;3/5;3/5)$.

156. $(-1/4;3/4;3/4)$.

157. $(1;-1;2)$.

158. $(1;2;-1)$.

159. $(2;1;-1)$.

160. $(1;-2;1)$.

161. $(2;1;-1)$.

162. $(3;-1;2)$.

163. $(3;2;-1)$.

164. $(-2;1;3)$.

165. $(-0,2;-4,5;5,7)$.

166. $(8/7;-1/7;-3/7)$.

167. $(2;-1;1;-2)$.

168. $(2/15;-9/15;17/120;159/120)$.

169. $(1;2;-1)$.

170. $(3;2;1)$.

171. $(1/2;1/3;-1/4)$.

172. $(4;-1;-1)$.

173. $x_1 = (10x_3 + 16)/7$, $x_2 = (8x_3 + 3)/7$, где x_3 может принимать любые действительные значения.

174. $(1/2;1/4;-1/2)$.

175. $(1;3;0;-2)$.

176. $(1;2;-1;3)$.

177. $(1;1;1;1)$.

178. $(1/2;1/3;-1/2;1/4)$.

179. $x_1 = (5/2) - (3/4)x_4$, $x_2 = (5/2) - (3/4)x_4$, $x_3 = -4 + (5/2)x_4$, где x_4 – любое.

180. $x_1 = (2/3) - (2/3)x_3 + x_4$, $x_2 = (4/3) - (5/3)x_3 - 2x_4$, где x_3, x_4 –любые.

181. $(0;0;0;0)$.

182. $x_1 = (29/24)x_4$, $x_2 = -(7/6)x_4$, $x_3 = -(23/24)x_4$, где x_4 – любое.

183. Система несовместна.

184. $(1;2;-3;4)$.

185. $(19/20;-1/8;1/20;-23/10;9/40)$.

186. $(23/25;2/25;29/25;-23/5;-21/5)$.

187. $(0;-3;0;3;0;-2)$.

188. $(3/8;1/8;1/4;-1/2;-1/2;0)$.

189. Система имеет решение при любом α: $x_1 = -(5/2) + \alpha/4$, $x_2 = 5 - \alpha/2$, $x_3 = -(\alpha+2)/4$.

191. Система имеет решение при любом α: $x_1 = (9\alpha - 111)/2$, $x_2 = (99 - 7\alpha)/4$, $x_3 = (\alpha - 9)/4$.

192. Система несовместна при $\alpha = -2$. Если $\alpha = 1$, то $x_1 = 6 - x_2 - x_3$, где x_2, x_3 – любые.

195. Система несовместна при $\alpha \neq 4$. Если $\alpha = 4$, то $x_1 = -3 - 2x_2 - x_4$, $x_3 = 4 - x_4$, где x_2, x_4 – любые.

196. Если $\alpha = 8$, то $x_2 = 2x_1 - 2x_4 + 4$, $x_3 = 3 - 2x_4$, где x_1, x_4 – любые. Если $\alpha \neq 8$, то $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$, где x_4 – любое.

197. Если $\alpha \neq 8$, то $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $x_1 = 2 - 1{,}5x_2$, где x_2 – любое. Если $\alpha = 8$, то $x_1 = 2 - 1{,}5x_2 + x_4$, где x_2, x_4 – любые.

198. Система несовместна при $\alpha \neq 0$. Если $\alpha = 0$, то $x_1 = -(5x_3 + 13x_4 + 3)/2$, $x_2 = -(7x_3 + 19x_4 + 7)/2$, x_3, x_4 – любые.

199. Если $\alpha \neq 1$, то $x_1 = -1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = (4\alpha + 2)/15$, $x_4 = (7 - \alpha)/15$. Если $\alpha = 1$, то $x_1 = 1 - x_2 - 5x_4$, $x_3 = x_4$, где x_2, x_4 – любые.

Глава 2. Векторная алгебра

1. $\overrightarrow{AB}=\{-4;3;-1\}$, $\overrightarrow{BA}=\{4;-3;1\}$.

2. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=7$; $\cos\alpha=2/7$, $\cos\beta=-6/7$, $\cos\gamma=3/7$.

3. $|\vec{a}|=70$; $\cos\alpha=2/7$, $\cos\beta=3/7$, $\cos\gamma=-6/7$.

4. $Z=\pm 3$.

5. $(-1;2;3)$.

6. $N(4;1;1)$.

7. $\cos\alpha=3/13$, $\cos\beta=4/13$, $\cos\gamma=12/13$.

8. $X=\sqrt{2}$, $Y=1$, $Z=-1$.

9. 1) Может; 2) не может; 3) может.

10. 1) Не может; 2) может; 3) не может.

11. 60° или 120°.

12. $\vec{a}=\{1;-1;\sqrt{2}\}$ или $\vec{a}=\{1;-1;-\sqrt{2}\}$.

13. $M_1\left(\sqrt{3};\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$.

14. $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=1/\sqrt{3}$.

15. $M\left(3\sqrt{2};3;-3\right)$.

16. Конец $B(4;-2;5)$ или $B_1(4;-2;-7)$; $\cos\alpha=2/7$, $\cos\beta=-3/7$, $\cos\gamma=\pm 6/7$.

17. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=13$.

18. $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=22$.

19. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=20$.

20. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{129}\approx 11{,}4$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7$.

21. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{19}\approx 4{,}4$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7$.

25. $\overrightarrow{CM}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.

Решение. Имеем $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$. Следовательно, $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{3}$. Так как $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}$, то $\overrightarrow{CM}=\vec{a}+\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{3}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.

26. $\vec{r}=\dfrac{\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3}{3}$.

Решение. Имеем $\overrightarrow{BC}=\vec{r}_3-\vec{r}_2$; $\overrightarrow{BD}=\dfrac{\vec{r}_3-\vec{r}_2}{2}$ (D – середина стороны BC); $\overrightarrow{AB}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}=\dfrac{\vec{r}_3-\vec{r}_2}{2}+\vec{r}_2-\vec{r}_1=\dfrac{\vec{r}_2+\vec{r}_3-2\vec{r}_1}{2}$; $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, поэтому $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\vec{r}_2+\vec{r}_3-2\vec{r}_1}{3}$; $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\vec{r}_1+\overrightarrow{AM}=\dfrac{\vec{r}_2+\vec{r}_3-2\vec{r}_1}{3}+\vec{r}_1=\dfrac{\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3}{3}$.

27. $\overrightarrow{AM}=\dfrac{|\vec{b}|\vec{c}+|\vec{c}|\vec{b}}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}$.

31. $\vec{c}=\dfrac{2}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

32. $\vec{c}=2\vec{b}-2\vec{a}$.

34. 1) $\{1;-1;6\}$; 2) $\{5;-3;6\}$; 3) $\{6;-4;12\}$; 4) $\{1;-1/2;0\}$; 5) $\{0;-2;12\}$; 6) $\{3;-5/3;2\}$.

35. $\vec{m}+\vec{p}=\vec{n}$, $\overrightarrow{OB}=3(\vec{m}+\vec{n})$, $\overrightarrow{BC}=3(\vec{n}-\vec{m})$, $\overrightarrow{EO}=3(\vec{m}-\vec{n})$, $\overrightarrow{OD}=3(2\vec{n}-\vec{m})$, $\overrightarrow{DA}=6(\vec{m}-\vec{n})$.

36. $\overrightarrow{AC}=2(\vec{n}-\vec{m})$, $\overrightarrow{OM}=2\vec{n}+\vec{m}$, $\overrightarrow{ON}=3\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{MN}=2\vec{m}-\vec{n}$.

37. Вектор $\vec{b}$ длиннее вектора $\vec{a}$ в три раза; они направлены в противоположные стороны.

38. $\alpha=4$, $\beta=-1$.

39. $\vec{d}=-48\vec{i}+45\vec{j}-36\vec{k}$.

40. 6.

41. $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=4\sqrt{2}/3$.

42. 1) 22; 2) -200; 3) 129; 4) 41.

43. $m=4$.

44. 13.

45. $\varphi=\arccos 2/7$.

46. $\varphi=\arccos 5/21$.

47. $m=-6$.

48. 2.

49. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ (теорема косинусов);

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$ (свойство диагоналей параллелограмма).

50. -6.

51. $\varphi=\arccos 1/\sqrt{10}$.

52. $\cos\varphi = 2/\sqrt{5} = 0{,}894$; $\varphi \approx 26^\circ 37'$.

53. 60°.

54. $\varphi = \arccos 0{,}8$.

55. 90°.

56. 1) $2+\sqrt{3}$; 2) 40.

57. $|\vec{u}| = 7$.

59. $A = 5\sqrt{3}$.

60. 17.

61. 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) -61; 6) 37; 7) 73.

62. 80 Дж, $\cos\varphi = 4\sqrt{2}/15$.

63. $\vec{a}\times\vec{b}$ равно: 1) $-6\vec{j}$; 2) $-2\vec{k}$; 3) $6\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$. Площадь равна: 1) 6; 2) 2; 3) $2\sqrt{22}$.

64. $24{,}5$.

65. $\sqrt{21}$ кв. ед., $h = \sqrt{4{,}2}$.

66. 1) $2\left(\vec{k} - \vec{i}\right)$; 2) $2\vec{a}\times\vec{c}$; 3) $\vec{a}\times\vec{c}$; 4) 3.

68. $50\sqrt{2}$.

69. $1{,}5$.

70. $S = 7\sqrt{5}$, $BD = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

71. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{5}$, $S = \sqrt{6}$.

72. $\vec{a}\times\vec{b} = \{-7;3;1\}$.

73. $S = 49$.

75. В случае перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

76. 1) $\{5;1;7\}$; 2) $\{10;2;14\}$; 3) $\{20;4;28\}$.

77. 1) $\{6;-4;-6\}$; 2) $\{-12;8;12\}$.

78. $\{2;11;7\}$.

79. $\{-4;3;4\}$.

80. 15; $\cos\alpha = 2/3$, $\cos\beta = -2/15$, $\cos\gamma = 11/15$.

81. $\sin\varphi = 5\sqrt{17}/21$.

82. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \{-7;14;-7\}$; $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \{10;13;19\}$.

83. 4.

84. 20.

85. $\mathrm{V} = 14$, $s = 6\sqrt{3}$, $h = 7\sqrt{3}/3$.

86. $V = 51$, левая.

87. $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

90. $V = 14$, $h = \sqrt{14}$.

91. $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

92. 1) Правая; 2) левая; 3) левая; 4) правая; 5) векторы компланарны; 6) левая.

93. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 24$.

94. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm 27$.

95. В том случае, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ взаимно перпендикулярны.

96. 1) Компланарны; 2) не компланарны; 3) компланарны.

98. 3.

99. 11.

100. $D_1(0;8;0)$; $D_2(0;-7;0)$.