КАЗАН (ИДЕЛ БУЕ) ФЕДЕРАЛЬ УНИВЕРСИТЕТЫ

Н.И. Лобачевский исемендәге математика һәм механика институты

Югары математика һәм математик модельләштерү кафедрасы

И.Б. ГАРИПОВ, Р.М. МАВЛЯВИЕВ, Э.Д. ЗИННАТУЛЛИНА

ГАДИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР ҺӘМ АЛАРНЫҢ СИСТЕМАЛАРЫ

Уку әсбабы

Казан — 2020

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г-20

Н.И. Лобачевский исемендәге математика һәм механика институтының
Укыту-методик комиссиясе карары белән басыла
(4 март, 2020 ел, 5-нче номерлы беркетмә)

Рецензентлар:
физика–математика фәннәре кандидаты,
Н.И. Лобачевский исемендәге математика һәм механика институтының
Югары математика һәм математик модельләштерү кафедрасы доценты
Ф.Ш. Зарипов;
физика–математика фәннәре кандидаты
Филология һәм мәдәниятара багланышлар институты
Билингваль һәм цифрлы белем бирү кафедрасы доценты
Ә.Ф. Галимянов

Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М., Зиннатуллина Э.Д.
Гади дифференциаль тигезләмәләр һәм аларның системалары: уку әсбабы / И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев, Э.Д. Зиннатуллина. — Казан: Казан. ун-ты, 2020. — 91 бит.

Әлеге уку әсбабында "Гади дифференциаль тигезләмәләр һәм аларның системалары" темасы буенча теоретик мәгълүматлар бирелә һәм мисалларның чишү үрнәкләре китерелә. Һәр параграф ахырында мөстәкыйль чишү өчен мисаллар һәм аларга җаваплар бар.

Бу уку әсбабы югары уку йортларында татар телендә белем алучы студентлар өчен тәкъдим ителә.

Кереш

Әлеге уку әсбабы – 44.03.05 Педагогик белем бирү (ике профильле әзерлек) юнәлеше буенча татар телендә белем алучы студентлар өчен тәкъдим ителә. Ул үз эченә «Гади дифференциаль тигезләмәләр һәм аларның системалары» дигән бүлекне ала.

Уку әсбабында күрсәтелгән тема буенча унөч лаборатор дәрес конспекты бирелә. Бу конспектлар **A**, **B**, **C** һәм **D** хәрефләре белән билгеләнелгән дүрт пункттан тора.

A пунктында мәсьәләләр чишү өчен мөһим булган теоретик белешмәләр (билгеләмәләр, теоремалар, формулалар) исбатлауларсыз бирелә.

B пунктында еш очрый торган мисал һәм мәсьәләләр чишүнең төрле ысул һәм алымнары китерелә.

C пунктында мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисал һәм мәсьәләләр бирелә. Аларны сайлаганда әлеге уку әсбабы ахырындагы әдәбият исемлегендә күрсәтелгән төрле чыганаклар файдаланылды.

D пунктында **C** пунктындагы мисал һәм мәсьәләләрнең җаваплары бирелә.

I бүлек

БЕРЕНЧЕ ТӘРТИПТӘГЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

§1. Төп төшенчәләр һәм билгеләмәләр

А. Бәйсез үзгәрешле x ны, билгесез функция y ны һәм аның чыгарылмасы y' ны бәйләүче

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

рәвешендәге тигезләмә *беренче тәртиптәге гади дифференциаль тигезләмә* дип атала.

Әгәр (1) тигезләмәсен

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

рәвешенә китереп булса, ул *чыгарылмага карата чишелгән беренче тәртиптәге гади дифференциаль тигезләмә* дип атала.

(2) дифференциаль тигезләмәсен шулай ук

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3}$$

рәвешендә дә язарга мөмкин. Монда $M(x, y)$ һәм $N(x, y)$ бирелгән функцияләр.

Әгәр $y = \varphi(x)$ функциясе һәм аның чыгарылмаларын дифференциаль тигезләмәнең билгесезе һәм аның чыгарылмалары урынына куйганда бердәйлек килеп чыкса, ул функция *дифференциаль тигезләмәнең чишелеше* дип атала.

Әгәр дифференциаль тигезләмәнең чишелеше ачык булмаган $\Phi(x, y) = 0$ функциясе рәвешендә бирелсә, бу чишелеш *интеграл* дип атала.

Дифференциаль тигезләмәнең чишелеше $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ параметрик тигезләмәләре белән дә бирелергә мөмкин.

Дифференциаль тигезләмә чишелешенең графигы *интеграл кәкре* дип атала.

Дифференциаль тигезләмәнең чишелешен табу процессы ул *тигезләмәне интеграллау* дип атала.

$y' = f(x, y)$ дифференциаль тигезләмәсенең

$$y(x_0) = y_0 \tag{4}$$

башлангыч шартын канәгатьләндерүче чишелешен табу мәсьәләсе *Коши мәсьәләсе* дип атала.

Искәрмә. (4) башлангыч шарты шулай ук

$$y|_{x=x_0} = y_0 \ \text{ яки } \ x = x_0, y = y_0$$

рәвешендә дә бирелергә мөмкин.

Коши мәсьәләсенең геометрик мәгънәсе: барлык интеграл кәкреләр арасыннан (x_0, y_0) ноктасы аша узучысын табарга.

Теорема (Коши-Пикар, Коши мәсьәләсенең булуы һәм бердәнберлеге турында). *$f(x,y)$ функциясе йомык $\overline{D} = \{|x - x_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b\}$ турыпочмагында билгеләнсен һәм ул турыпочмаклыкта түбәндәге ике шартны канәгатьләндерсен:*

1) өзлексез, димәк, $f(x,y)$ функциясе $\overline{D}$ турыпочмагында чикләнгән, ягъни $|f(x,y)| \leq M$ тигезсезлеге үтәлерлек $M > 0$ саны табыла;

2) y аргументы буенча Липшиц шартын канәгатьләндерә, ягъни $\overline{D}$ турыпочмагындагы теләсә нинди $(x, \bar{y})$ и $\left(x, \bar{\bar{y}}\right)$ нокталары өчен

$$|f(x, \bar{\bar{y}}) - f(x, \bar{y})| \leq N|\bar{\bar{y}} - \bar{y}|$$

тигезсезлеге үтәлерлек $N > 0$ саны табыла.

Ул вакытта (2) тигезләмәсенең $L = [x_0 - h, x_0 + h]$ кисемтәсендә билгеләнгән, биредә $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, һәм (4) башлангыч шартын канәгатьләндерүче бердәнбер чишелеше була.

Әгәр бер ирекле даими C санына бәйле булган $y = \varphi(x, C)$ функциясе

1) (2) дифференциаль тигезләмәсен C ның теләсә нинди кыйммәте өчен канәгатьләндерсә;

2) $y(x_0) = y_0$ башлангыч шарты нинди булуга карамастан, $y = \varphi(x, C_0)$ функциясе бу шартны канәгатьләндерерлек C_0 кыйммәте табылса, $y = \varphi(x, C)$ функциясе (2) *дифференциаль тигезләмәсенең гомуми чишелеше* дип атала.

(2) *дифференциаль тигезләмәсенең аерым чишелеше* дип гомуми чишелештә ирекле даими C урынына конкрет кыйммәт ($\pm\infty$ очракларын да кертеп) куеп табылган чишелеш атала.

Коши мәсьәләсенең бердәнберлек шарты бер генә ноктасында да үтәлмәгән чишелеш *үзенчәлекле чишелеш* дип атала. Үзенчәлекле чишелеш гомуми чишелештән ирекле даими C урынына бернинди конкрет кыйммәт ($\pm\infty$ очракларын да кертеп) куелып табыла алмый.

Әгәр (2) дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелеше ачык булмаган $\Psi(x, y, C) = 0$ яки $\psi(x, y) = C$ функциясе рәвешендә бирелсә, бу чишелеш *гомуми интеграл* дип атала.

Гомуми интегралдан ирекле даими C урынына конкрет кыйммәт куеп табылган чишелеш *дифференциаль тигезләмәнең аерым интегралы* дип атала.

Дифференциаль тигезләмәне чишү (интеграллау) – бу тигезләмәнең гомуми чишелешен (интегралын) табу. Әгәр өстәмә рәвештә башлангыч шарт бирелсә, бу шартны канәгатьләндерүче аерым чишелешне яки аерым интегралны табарга кирәк.

B. *Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.*

`1 мисал.` $y = x\int\limits_0^x \sin t^2 dt$ функциясенең $xy' - y = x^2 \sin x^2$ дифференциаль тигезләмәсенең чишелеше булып торуын күрсәтергә.

`Чишү.` Бирелгән функциянең чыгарылмасын исәплик:

$$y' = \int\limits_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2.$$

Моннан, табабыз:

$$xy' - y = x\left(\int\limits_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2\right) - x\int\limits_0^x \sin t^2 dt = x^2 \sin x^2,$$

ягъни, бирелгән функция дифференциаль тигезләмәнең чишелеше булып тора.

`2 мисал.` $y = \operatorname{arctg}(x + y) + C$ тигезлеге белән билгеләнүче $y = \varphi(x)$ функциясенең һәрбер $C \in \mathbb{R}$ өчен

$$(x + y)^2 y' = 1$$

дифференциаль тигезләмәсенең чишелеше булып торуын исбатларга.

`Чишү`. Бирелгән функциягә карата ачык булмаган функцияне дифференциаллау кагыйдәсен кулланып, табабыз:

$$y' = \frac{1+y'}{1+(x+y)^2}.$$

Моннан,

$$y' = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Табылган кыйммәтне бирелгән дифференциаль тигезләмәгә куеп, түбәндәге бердәйлеккә киләбез:

$$(x+y)^2 \frac{1}{(x+y)^2} = 1.$$

C. *Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.*

Күрсәтелгән функцияләр бирелгән дифференциаль тигезләмәләрнең чишелеше (яки интегралы) булып торамы?

1. $xy' = 2y, \quad y = 5x^2.$
2. $(x+y)dx + xdy = 0, \quad y = \frac{C^2-x^2}{2x}.$
3. $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0, \quad y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}.$
4. $xy' - y + x\sqrt{x^2-y^2} = 0, \quad \arcsin\frac{y}{x} = C - x.$
5. $(x+2y)y' = 2x - y, \quad x^2 - xy + y^2 = C^2.$
6. $(x-y+1)y' = 1, \quad y = x + Ce^y.$
7. $y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y = Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}.$
8. $(1+xy)y' + y^2 = 0, \quad x = te^t, \quad y = e^{-t}.$
9. $(xy+1)dx - (x^2+1)dy = 0, \quad y = x + C\sqrt{1+x^2}.$
10. $xy' - y = xe^x, \quad y = x\left(1 + \int \frac{e^x}{x}dx\right).$

§2. Үзгәрешлеләре аерылучан тигезләмәләр

A.

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

рәвешендәге тигезләмә *үзгәрешлеләре аерылган дифференциаль тигезләмә* дип атала. Биредә $M(x)$ – x үзгәрешлесенә генә, $N(y)$ – y үзгәрешлесенә генә бәйле функцияләр.

Бу тигезләмәне буынлап интеграллап, бирелгән тигезләмәнең

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

гомуми интегралын табабыз.

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

рәвешендәге тигезләмә *үзгәрешлеләре аерылучан дифференциаль тигезләмә* дип атала.

Үзгәрешлеләре аерылучан дифференциаль тигезләмәнең гомуми интегралын табу өчен, башта ул тигезләмәне $M_2(x)N_1(y)$ гә бүлеп үзгәрешлеләрне аерабыз:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

һәм буынлап интеграллыйбыз:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Искәрмә. $M_2(x)N_1(y)$ тапкырчыгышына бүлү, $M_2(x)N_1(y) = 0$ тигезлеген канәгатьләндерүче аерым чишелешләрне югалтуга китерергә мөмкин.

$$y' = \varphi(x)\psi(y)$$

рәвешендәге тигезләмә дә *үзгәрешлеләре аерылучан дифференциаль тигезләмә* дип атала.

Бу тигезләмәне чишү өчен, шулай ук үзгәрешлеләрне аерабыз һәм буынлап интеграллыйбыз:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y),$$

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C.$$

Искәрмә. Бу очракта да, $\psi(y)$ функциясенә бүлү, $\psi(y) = 0$ тигезлеген канәгатьләндерүче аерым чишелешләрне югалтуга китерергә мөмкин.

Үзгәрешлеләре аерылучан дифференциаль тигезләмәгә китерелә торган тигезләмәләр.

$$y' = f(ax + by + c)$$

рәвешендәге тигезләмә (монда a, b, c – даими саннар) $z = ax + by + c$ алмаштыруы ярдәмендә үзгәрешлеләре аерылучан дифференциаль тигезләмәгә китерелә.

В. ***Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.***

`1 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0.$$

`Чишү.` Бу тигезләмәне

$$(1 + x)ydx + x(1 - y)dy = 0$$

рәвешендәге үзгәрешлеләре аерылучан тигезләмәгә китерәбез. Тигезләмәнең ике кисәген дә xy ка бүлеп, үзгәрешлеләрне аерабыз:

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0.$$

Соңгы тигезләмәне буынлап интеграллыйбыз:

$$\int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = C.$$

Моннан,

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C,$$

ягъни,

$$\ln|xy| + x - y = C$$

гомуми интегралын табабыз.

$x = 0$, $y = 0$ – үзенчәлекле чишелешләр, чөнки алар гомуми интегралдан ирекле даими C ның бернинди кыйммәте өчен дә табылмыйлар.

`2 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$x^2y^2y' + 1 = y.$$

`Чишү.` Бу тигезләмәне

$$y' = \frac{y-1}{y^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

рәвешендәге үзгәрешлеләре аерылучан тигезләмәгә китерәбез. $y' = \frac{dy}{dx}$ булуын исәпкә алып, тигезләмәнең ике кисәген дә $\frac{y-1}{y^2dx}$ ка бүлеп, үзгәрешлеләрне аерабыз:

$$\frac{y^2}{y-1}dy = \frac{1}{x^2}dx.$$

Соңгы тигезләмәне буынлап интеграллыйбыз:

$$\int \frac{y^2-1+1}{y-1}dy = \int \frac{dx}{x^2} + C.$$

Моннан,

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$$

гомуми интегралын табабыз.

$y = 1$ – үзенчәлекле чишелеш, $x = 0$ һәм $y = 0$ – чишелеш түгел.

`3 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(2y-x)^2} + \frac{1}{2}.$$

`Чишү.` $z = 2y - x$ алмаштыруын кулланабыз. Моннан,

$$z' = 2y' - 1,$$

ягъни,

$$y' = \frac{z'+1}{2}$$

булуын исәпкә алып, барысын да бирелгән дифференциаль тигезләмәгә куйсак,

$$\frac{z'+1}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{z^2} + \frac{1}{2},$$

ягъни,

$$z' = 3\sqrt[3]{z^2}$$

үзгәрешлеләре аерылучан тигезләмәсен табабыз. Ул тигезләмәдә үзгәрешлеләрне аерабыз:

$$\frac{dz}{\sqrt[3]{z^2}} = 3dx.$$

Соңгы тигезләмәне буынлап интеграллыйбыз:

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2}} = \int 3dx + C.$$

Моннан

$$3\sqrt[3]{z} = 3x + 3C,$$

ягъни,

$$\sqrt[3]{z} = x + C$$

гомуми интегралын табабыз. Монда $z = 2y - x$ булуын исәпкә алсак,

$$\sqrt[3]{2y - x} = x + C \ \text{ – гомуми интегралы,}$$

ягъни,

$$y = \frac{(x + C)^3 + x}{2} \ \text{ – гомуми чишелеше}$$

табыла.

`4 мисал.` $y = \varphi(x)$ кәкресе (0,1) ноктасы аша үтә һәм түбәндәге үзлеккә ия: бу кәкренең һәрбер ноктасына үткәрелгән орынмасының почмакча коэффициенты, ягъни орынманың авышу почмагы тангенсы, орыну ноктасы координаталарының икеләтелгән тапкырчыгышына тигез. $y = \varphi(x)$ кәкресен табарга.

`Чишү.` (x, y) – эзләнелгән кәкренең ирекле ноктасы булсын. (x, y) ноктасына үткәрелгән орынманың авышу почмагы тангенсы эзләнелгән функциянең (x, y) ноктасындагы чыгарылмасына, ягъни y' – ка тигез. Шарт буенча, $y' = 2xy$. Би тигезләмәне интеграллап $y = Ce^{x^2}$ гомуми чишелешен табабыз. $y(0) = 1$ булганга, $C = 1$ була. Шулай итеп, $y = e^{x^2}$ – мәсьәлә шартын кәнагатьләндерүче кәкре тигезләмәсе.

C. *Мөстәкыйль чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.*

Түбәндәге дифференциаль тигезләмәләрне чишергә:

1. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0.$
2. $(1 + y^2)dx + xydy = 0.$
3. $y' \sin x - y \cos x = 0, \quad y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$
4. $(1 + y^2)dx = xdy.$
5. $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0.$
6. $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0, \quad y|_{x=0} = 1.$
7. $e^{-y}(1 + y') = 1.$

8. $y\ln y dx + x dy = 0, \quad y|_{x=1} = 1$.

9. $y' = a^{x+y}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$.

10. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$.

Түбәндәге дифференциаль тигезләмәләрне алмаштыру (яңа үзгәрешле кертү) ысулы белән чишәргә:

11. $y' = (x+y)^2$.

12. $y' = (8x+2y+1)^2$.

13. $(2x+3y-1)dx + (4x+6y-5)dy = 0$.

14. $(2x-y)dx + (4x-2y+3)dy = 0$.

15. $y' = \sin(x-y)$.

16. (0,2) ноктасы аша үтүче һәм һәрбер ноктасына үткәрелгән орынмасының почмакча коэффициенты шул ук ноктаның ординатасыннан өч тапкыр зуррак булган кәкрене табарга.

17. Орынмасы, орыну ноктасының ординатасы һәм абсциссалар күчәре ярдәмендә төзелгән өчпочмакның мәйданы даими зурлык a^2 ка тигез булган кәкреләрне табарга.

18. Орынмасы, орыну ноктасының ординатасы һәм абсциссалар күчәре ярдәмендә төзелгән өчпочмакның катетлар суммасы даими зурлык b га тигез булган кәкреләрне табарга.

19. Теләсә кайсы орынмасының абсциссалар күчәре белән кисешү ноктасы абсциссасы орыну ноктасы абсциссасыннан ике тапкыр кечкенә булырлык кәкреләрне табарга.

20. Түбәндәге үзлеккә ия булган кәкреләрне табарга: кәкренең ирекле ноктасына үткәрелгән орынма һәм нормальнең абсциссалар күчәренән кистереп алган кисемтәсе озынлыгы $2a$ га тигез.

D. *Җаваплар.*

1. $\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}y = C$. 2. $x^2(1+y^2) = C$. 3. $y = \sin x$. 4. $y = tg\ln Cx$.
5. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$. 6. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1;\ y = 1$.
7. $e^x = C(1-e^{-y})$. 8. $y = 1$. 9. $a^x + a^{-y} = C$. 10. $1 + e^y = C(1+x^2)$.
11. $\operatorname{arctg}(x+y) = x + C$. 12. $8x + 2y + 1 = 2\operatorname{tg}(4x + C)$.
13. $x + 2y + 3\ln|2x+3y-7| = C$. 14. $5x + 10y + C = 3\ln|10x - 5y + 6|$.

15. $x+C=\operatorname{ctg}\left(\frac{y-x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. 16. $y'=3y;\ y=2e^{3x}$.

17. $y'=\pm\frac{y^2}{2a^2};\ (C\pm x)y=2a^2$. 18. $y'=\pm\frac{y}{b-y};\ b\ln y-y=\pm x+C;\ 0<y<b$.

19. $y'=\frac{2y}{x};\ y=Cx^2$.

20. $\left(y'\pm\frac{a}{y}\right)^2=\frac{a^2}{y^2}-1;\ a\ln\left(a\pm\sqrt{a^2-y^2}\right)\mp\sqrt{a^2-y^2}=x+C$.

§3. Бериш тигезләмәләр

А. Әгәр

$$f(tx,ty)=t^k f(x,y)$$

тигезлеге үтәлсә, $f(x,y)$ функциясе k *нчы дәрәҗәдәге бериш функция* дип атала.

Мәсәлән, $f(x,y)=x^3y+x^2y^2$ функциясе өчен,

$$f(tx,ty)=(tx)^3ty+(tx)^2(ty)^2=t^4(x^3y+x^2y^2)=t^4f(x,y).$$

Димәк, ул 4 нче дәрәҗәдәге бериш функция.

$M(x,y)$ һәм $N(x,y)$ функцияләре бер үк дәрәҗәдәге бериш функцияләр булганда,

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

рәвешендәге тигезләмә *бериш дифференциаль тигезләмә* дип атала.

$f(x,y)$ функциясе 0 нче дәрәҗәдәге бериш функция булганда,

$$y'=f(x,y)$$

рәвешендәге тигезләмә *бериш дифференциаль тигезләмә* дип атала.

Искәрмә. Бериш дифференциаль тигезләмәләрне

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

рәвешенә китерергә мөмкин.

Бериш дифференциаль тигезләмәләр $\frac{y}{x}=u$ $(y=ux)$ алмаштыруы ярдәмендә үзгәрешлеләре аерылучан тигезләмәгә китерелә.

Бериш тигезләмәләргә китерелә торган тигезләмәләр.

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

тигезләмәсен карыйк. Монда $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$ бирелгән саннар, һәм $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ дип фараз итәбез. Әгәр $c_1 = c_2 = 0$ булса, бу тигезләмә бериш булыр иде. Әгәр c_1 һәм c_2 нең кимендә берсе 0 гә тигез булмаса, бу тигезләмә

$$\begin{cases} x = \xi + \alpha, \\ y = \eta + \beta \end{cases}$$

алмаштырулары ярдәмендә бериш тигезләмәгә китерелә. Биредә ξ, η – яңа үзгәрешлеләр, α һәм β

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

системасының чишелеше.

Әгәр

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

булса, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ булыр иде, ягъни $a_1 + b_1 = k(a_2 + b_2)$. Ул вакытта бирелгән тигезләмәне

$$y' = f_1\left(a_2x + b_2y\right)$$

рәвешендә язарга мөмкин. Ул үзгәрешлеләре аерылучан тигезләмәгә китерелә.

Кайбер тигезләмәләрне $y = z^\alpha$ алмаштыруы ярдәмендә бериш тигезләмәгә китерергә мөмкин. Гадәттә α саны алдан билгесез була. Аны табу өчен тигезләмәдә $y = z^\alpha$ алмаштыруын кулланабыз. Тигезләмәнең бериш булуын таләп итеп, әгәр мөмкин булса, α санын табабыз. Әгәр моны эшләргә ярамаса, тигезләмә бу юл белән бериш тигезләмәгә китерелми.

B. *Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.*

`1 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$xdy = (x + y)dx.$$

`Чишү.` Ул тигезләмәне

$$(x+y)dx - xdy = 0$$

рәвешендә языйк.

$$M(x,y) = x+y,\ \ M(tx,ty) = tx+ty = t(x+y) = tM(x,y),$$

$$N(x,y) = -x,\ \ N(tx,ty) = -tx = t(-x) = tN(x,y)$$

булганлыктан, $M(x,y)$, $N(x,y)$ – беренче дәрәҗәдәге бериш функцияләр. Димәк, бирелгән тигезләмә бериш дифференциаль тигезләмә. Монда $y = ux$ дип алып, $dy = xdu + udx$ булуын исәптә тотып, y һәм dy урынына табылган кыйммәтләрне куябыз:

$$(x+ux)dx - x(xdu+udx) = 0,$$

ягъни,

$$dx - xdu = 0, \quad x \neq 0.$$

Бу үзгәрешлеләре аерылучан тигезләмә. Ул тигезләмәдә үзгәрешлеләрне аерып һәм буынлап интеграллап,

$$u = \ln|x| - C$$

гомуми интгералын табабыз.

$u = \frac{y}{x}$ булуын исәпкә алып, бирелгән бериш тигезләмәнең

$$y = x(\ln|x| - C)$$

гомуми чишелешен табабыз.

$x = 0$ – үзенчәлекле чишелеш.

`2 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$xy' = y(\ln y - \ln x).$$

`Чишү.` Ул тигезләмәне

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$$

рәвешендә язый к.

$$f(tx,ty)=\frac{ty}{tx}\ln\frac{ty}{tx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}=f(x,y)$$

булганлыктан, $f(x,y)=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ – 0 нче дәрәҗәдәге бериш функция. Димәк, бирелгән тигезләмә бериш дифференциаль тигезләмә. Монда $y=ux$ дип алып, $y'=u'x+u$ булуын исәптә тотып, y һәм y' урынына табылган кыйммәтләрне куябыз:

$$u'x+u=\frac{ux}{x}\ln\frac{ux}{x},$$

ягъни,

$$u'=\frac{u\ln u-u}{x}.$$

Бу үзгәрешлеләре аерылучан тигезләмә. Ул тигезләмәдә үзгәрешлеләрне аерабыз:

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x},$$

һәм буынлап интеграллап

$$\ln u-1=xC,$$

гомуми интегралын табабыз.

$u=\frac{y}{x}$ булуын исәпкә алып, бирелгән бериш тигезләмәнең

$$y=xe^{xC+1}$$

гомуми чишелешен табабыз.

$u(\ln u-1)=0$ тигезлегеннән, $u=0$ яки $u=e$ була. Моннан, $\frac{y}{x}=0$ яки $\frac{y}{x}=e$. Шулай итеп, $y=0$ яки $y=xe$. $y=0$ – чишелеш түгел $(y>0)$, $y=xe$ – аерым чишелеш, чөнки ул гомуми чишелештән ирекле даиминең $C=0$ кыйммәте өчен табыла.

`3 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0.$$

`Чишү.` Ул тигезләмәне

$$y'=-\frac{x+y-2}{x-y+4}$$

рәвешендә языйк. Биредә

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Димәк, бу тигезләмә бериш тигезләмәгә китерелә. Аның өчен

$$\begin{cases} -\alpha - \beta + 2 = 0, \\ \alpha - \beta + 4 = 0 \end{cases}$$

системасын төзибез. Ул системаны чишеп, $\alpha = -1, \ \beta = 3$ тамырларын табабыз һәм

$$x = \xi + \alpha = \xi - 1,$$

$$y = \eta + \beta = \eta + 3$$

дип тамгалыйбыз. Моннан,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\eta + 3)}{d(\xi - 1)} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

булуын исәпкә алсак,

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi - 1 + \eta + 3 - 2}{\xi - 1 - \eta - 3 + 4},$$

ягъни,

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}$$

бериш тигезләмәсен табабыз (мөстәкыйль рәвештә тикшерергә!). $\eta = u\xi$ дип алып, $\eta' = u'\xi + u$ булуын исәптә тотып, η һәм η' урынына табылган кыйммәтләрне куябыз:

$$u'\xi + u = -\frac{\xi + \xi u}{\xi - \xi u},$$

ягъни,

$$u' = -\frac{1 + 2u - u^2}{1 - u} \cdot \frac{1}{\xi}.$$

Бу үзгәрешлеләре аерылучан тигезләмә. Ул тигезләмәдә үзгәрешлеләрне аерып

$$\frac{u - 1}{u^2 - 2u - 1} du = -\frac{d\xi}{\xi},$$

буынлап интеграллап

$$\int \frac{u-1}{u^2-2u-1}du = -\int \frac{d\xi}{\xi} + C,$$

ул тигезләмәнең

$$(u^2-2u-1)\xi^2 = C$$

гомуми интегралын табабыз.

$u = \frac{\eta}{\xi}$ булуын исәпкә алсак,

$$\left(\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2 - 2\frac{\eta}{\xi} - 1\right)\xi^2 = C.$$

Шулай итеп, $x = \xi - 1$, $y = \eta + 3$ тигезлекләреннән табылган ξ һәм η кыйммәтләрен соңгы тигезлеккә куеп, бирелгән бериш тигезләмәнең гомуми интегралын табабыз:

$$(y-3)^2 - 2(y-3)(x+1) - (x+1)^2 = C.$$

`4 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$(x^2y^2-1)dy + 2xy^3dx = 0.$$

`Чишү.` $y = z^\alpha$ алмаштыруын кертәбез. Ул вакытта $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$, монда α – әлеге билгесез сан. y һәм dy өчен булган аңлатмаларны тигезләмәгә куеп, табабыз:

$$(x^2z^{2\alpha}-1)\alpha z^{\alpha-1}dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0.$$

Әгәр $x^2z^{2\alpha}-1$ функциясе бериш булса, ягъни, әгәр $2+2\alpha = 0$, ягъни, $\alpha = -1$ булса, табылган тигезләмә, бәлки, бериш булыр. Тигезләмәдә α урынына -1 не куеп, табабыз:

$$-(x^2z^{-2}-1)z^{-2}dz + 2xz^{-3}dx = 0,$$

ягъни,

$$(z^2-x^2)dz + 2xzdx = 0.$$

Бу бериш тигезләмә. $z = ux$, $dz = udx + xdu$ дип алыйк. Ул вакытта югарыдагы тигезләмә түбәндәге рәвешкә килә:

$$(u^2-1)(udx+xdu) + 2udx = 0.$$

Моннан,

$$u(u^2+1)dx + x(u^2-1)du = 0.$$

Үзгәрешлеләрне аерып, табабыз:

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2-1}{u^3+u}du = 0.$$

Буынлап интегралласак,

$$\ln|x| + \ln|u^2+1| - \ln|u| = \ln C,$$

ягъни,

$$\frac{x(u^2+1)}{u} = C$$

килеп чыга.

$u = \frac{z}{x}$, ә $z = \frac{1}{y}$ булуын исәпкә алып, бирелгән тигезләмәнең гомуми интегралын табабыз:

$$1 + x^2y^2 = Cy.$$

`5 мисал.` Кәкре (1,1) ноктасы аша үтә. Координаталар башлангычыннан кәкренең теләсә нинди орынмасына кадәр ераклык орыну ноктасының абсциссасына тигез. Күрсәтелгән кәкренең тигезләмәсен төзергә.

`Чишү.` (x, y) ноктасы күрсәтелгән $y = y(x)$ кәкресенең ирекле ноктасы булсын. Бу кәкрегә (x, y) ноктасында үткәрелгән орынма координаталар башлангычыннан

$$\frac{|y - xy'|}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

ераклыгында ята. Мәсьәләнең шарты буенча, бу ераклык x ка тигез. Шуңа күрә, күрсәтелгән кәкре

$$\frac{|y - xy'|}{\sqrt{1+(y')^2}} = x$$

тигезләмәсенең чишелеше булып тора. Моннан,

$$y^2 - 2xyy' + x^2(y')^2 = x^2 + x^2(y')^2,$$

ягъни,

$$2xyy' = y^2 - x^2$$

бериш тигезләмәсен табабыз. Аны $y = xu$ дип алып чишәбез:

$$2x^2u(u'x+u) = x^2(u^2-1),$$

$$2xuu' + u^2 + 1 = 0,$$
$$\frac{2u}{u^2+1}du + \frac{dx}{x} = 0,$$
$$\ln(u^2+1) + \ln|x| = \ln C,$$

$$(u^2+1)x = C.$$

u урынына $u = \frac{y}{x}$ дип куеп, табабыз: $y^2 + x^2 = Cx$.

Шарт буенча, кәкре (1,1) ноктасы аша үтә. Димәк, 1 + 1 = С, ягъни, С = 2. Шулай итеп, эзләнелгән кәкренең тигезләмәсе: $x^2 + y^2 = 2x$, ягъни, $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

С. *Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.*

Дифференциаль тигезләмәләрне чишәргә:

1. $xy' = y + x\cos^2\frac{y}{x}$.
2. $(x-y)dx + xdy = 0$.
3. $xy' = y(\ln y - \ln x)$.
4. $x^2dy = (y^2 - xy + x^2)dx$.
5. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.
6. $2x^2y' = x^2 + y^2$.
7. $(4x-3y)dx + (2y-3x)dy = 0$.
8. $(y-x)dx + (y+x)dy = 0$.
9. $x + y - 2 + (1-x)y' = 0$.
10. $(x+y-2)dx + (x-y+4)dy = 0$.
11. $(x+y)dx + (x-y-2)dy = 0$.
12. $2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0$.
13. $(x-y-1)dx + (y-x+2)dy = 0$.
14. $2xy'(x-y^2) + y^3 = 0$.
15. $4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$.
16. $y\left(1 + \sqrt{x^2y^4+1}\right)dx + 2xdy = 0$.
17. $\left(x+y^3\right)dx + 3\left(y^3-x\right)y^2dy = 0$.

18. Түбәндәге үзлеккә ия булган кәкрене табарга: бу кәкре орынмасы Oy күчәрендә кисеп алган кисемтәнең радиус – векторга чагыштырмасы даими санга тигез.

19. Түбәндәге үзлеккә ия булган кәкрене табарга: ординаталар күчәрендә кәкренең нинди дә булса ноктасына үткәрелгән нормаль кисеп алган кисемтәнең озынлыгы бу ноктадан координаталар башлангычына кадәр ераклыкка тигез.

20. Түбәндәге үзлеккә ия булган кәкрене табарга: нинди дә булса ноктасы абсциссасының шул ноктага үткәрелгән нормальнең Oy күчәрендә кисеп алган кисемтә озынлыгына тапкырчыгышы координаталар башлангычыннан шушы ноктага кадәр ераклыкның икеләтелгән квадратына тигез.

D. *Җаваплар.*

1. $\mathrm{tg}\frac{y}{x} = \ln Cx$. 2. $y = x(C - \ln|x|)$. 3. $y = xe^{1+Cx}$. 4. $(x-y)\ln Cx = x$.
5. $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$; $y = x$; $y = -x$. 6. $2x = (x-y)\ln Cx$.
7. $y^2 - 3xy + 2x^2 = C$. 8. $y^2 + 2xy - x^2 = C$. 9. $y = 1 + (x-1)\ln C(x-1)$.
10. $y^2 - 2xy - x^2 - 8y + 4x = C$. 11. $y^2 - 2xy - x^2 + 4y = C$.
12. $y^2 + 3xy + x^2 - 5x - 5y = C$. 13. $(y - x + 2)^2 + 2x = C$. 14. $y^2 = x\ln Cy^2$.
15. $Cx^4 = y^6 + x^3$. 16. $\sqrt{x^2y^4 + 1} = Cx^2y^2 - 1$.
17. $2\mathrm{arctg}\frac{y^3}{x} = \ln\left(x^2 + y^6\right) + C$. 18. $y' = \frac{y - k\sqrt{x^2+y^2}}{x}$; $y = \frac{1}{2}\left(Cx^{1-k} - \frac{1}{C}x^{1+k}\right)$.
19. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2} - y}$; $y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right)$. 20. $y' = \frac{x^2}{(x^2+y^2) - xy}$; $x^2 + y^2 = Cx^4$.

§4. Беренче тәртиптәге сызыкча тигезләмәләр

A.

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1}$$

рәвешендәге дифференциаль тигезләмә *беренче тәртиптәге сызыкча тигезләмә* дип атала.

Әгәр $q \not\equiv 0$ булса, ул *беренче тәртиптәге сызыкча бериш булмаган тигезләмә* дип, ә киресенчә булганда, ягъни

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2}$$

тигезләмәсе *беренче тәртиптәге сызыкча бериш тигезләмә* дип атала.

Даимине вариацияләү ысулы (Лагранж ысулы).

Иң элек сызыкча бериш дифференциаль тигезләмәнең чишелешен табыйк. Ул үзгәрешлеләре аерылучан тигезләмә. Аның гомуми чишелеше

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Биредә C ирекле даими. (1) сызыкча бериш булмаган дифференциаль тигезләмәсенең гомуми чишелешен

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{3}$$

рәвешендә эзлибез. Ләкин монда $C(x)$ ны әлегә билгесез ниндидер функция дип фараз итәбез.

Моннан

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

y һәм y' нең табылган кыйммәтләрен (1) тигезләмәсенә куеп, табабыз:

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Димәк,

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Монда C – ирекле даими. $C(x)$ ның табылган кыйммәтен (3) функциясенә куеп, (1) тигезләмәсенең гомуми чишелешен

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx} =$$

$$= Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

рәвешендә табабыз.

Бернулли ысулы.

(1) сызыкча бериш булмаган дифференциаль тигезләмәсенең гомуми чишелешен

$$y = uv \tag{4}$$

рәвешендә эзлибез. Биредә $u = u(x)$ һәм $v = v(x)$ – әлегә билгесез функцияләр. Моннан,

$$y = u'v + uv'.$$

y һәм y' нең табылган кыйммәтләрен (1) тигезләмәсенә куеп, табабыз:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \tag{5}$$

Шулай итеп, $u = u(x)$ һәм $v = v(x)$ билгесез функцияләренә карата бер тигезләмә килеп чыкты. Билгесез икәү булганлыктан, берсен теләсә ничек сайлый алабыз. Мәсәлән, $v = v(x)$ функциясен

$$v' + p(x)v = 0$$

булырлык итеп табабыз. $v = v(x)$ функциясе итеп бу тигезләмәнең теләсә нинди бер аерым чишелешен алабыз. $u = u(x)$ функциясен, табылган $v = v(x)$ кыйммәтен (5) тигезләмәсенә куеп табабыз. Ахырда, (1) тигезләмәсенең гомуми чишелешен табу өчен $y = uv$ формуласын кулланырга кирәк була.

Бернулли тигезләмәсе.

$$y' + p(x)y = q(x)y^m$$

рәвешендәге дифференциаль тигезләмә *Бернулли дифференциаль тигезләмәсе* дип атала. Биредә $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, $m \neq 1$, чөнки $m = 0$ яки $m = 1$ очрагында ул тигезләмә сызыкча тигезләмәгә кайтарып калдырыла.

Бу тигезләмә $z = y^{1-m}$ алмаштыруы ярдәмендә беренче тәртиптәге сызыкча тигезләмәгә китерелеп чишелә.

Искәрмә. Бернулли дифференциаль тигезләмәсе чишелешен сызыкча тигезләмә очрагындагы кебек, $y = uv$ рәвешендә дә эзләргә мөмкин.

Риккати тигезләмәсе.

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

яки

$$y' + q(x)y = p(x)y^2 + r(x)$$

рәвешендәге дифференциаль тигезләмә *Риккати тигезләмәсе* дип атала. Гомуми очракта бу тигезләмәне квадратураларда чишеп булмый (ягъни, чишелешне элементар функцияләрдән интеграл алу гамәле аша күрсәтеп булмый).

Ләкин бу тигезләмәнең бер y_1 аерым чишелешен белгән очракта,

$$y = y_1 + z$$

алмаштыруы ярдәмендә Риккати тигезләмәсе Бернулли тигезләмәсенә китерелә.

В. ***Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.***

`1 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y' + 2xy = 2x.$$

`Чишү.` Бу сызыкча бериш булмаган тигезләмә. Башта

$$y' + 2xy = 0$$

сызыкча бериш тигезләмәсен чишәбез:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy, \quad \frac{dy}{y} = -2xdx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int 2xdx + C, \quad \ln|y| = -x^2 + C,$$

$$\ln|y| = \ln Ce^{-x^2}.$$

Моннан,

$$y = Ce^{-x^2}$$

гомуми чишелешен табабыз. Биредә C – иреклe даими. Бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәнең гомуми чишелешен

$$y = C(x)e^{-x^2}$$

рәвешендә эзлибез. Биредә $C(x)$ әлегә билгесез функция. Моннан,

$$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}.$$

y һәм y' нең табылган кыйммәтләрен сызыкча бериш булмаган тигезләмәгә куеп, табабыз:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2x,$$

$$C'(x)e^{-x^2} = 2x, \quad C'(x) = 2xe^{x^2}.$$

Димәк,

$$C(x) = \int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C.$$

Монда C – ирекле даими. Шулай итеп, бирелгән бериш булмаган сызыкча дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелеше

$$y = \left(e^{x^2} + C\right) e^{-x^2}$$

рәвешендә була.

`2 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y' + 2xy = 2x.$$

`Чишү.` Бирелгән дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелешен $y = uv$ рәвешендә эзлибез. Моннан,

$$y = u'v + uv'.$$

y һәм y' нең табылган кыйммәтләрен ул тигезләмәгә куеп, табабыз:

$$u'v + uv' + 2xuv = 2x,$$

$$u'v + u(v' + 2xv) = 2x.$$

$v = v(x)$ билгесез функциясен

$$v' + 2xv = 0$$

тигезләмәсеннән табабыз:

$$v' = -2xv, \quad \frac{dv}{v} = -2xdx, \quad \ln|v| = -x^2 + C, \quad v = e^{-x^2}.$$

Монда $C = 1$ дип алабыз.

$u = u(x)$ функциясен

$$u'v = 2x$$

тигезләмәсен чишеп табабыз:

$$u'e^{-x^2} = 2x, \quad u' = 2xe^{x^2}, \quad u = e^{x^2} + C.$$

Шулай итеп, бирелгән тигезләмәнең гомуми чишелеше

$$y = uv = \left(e^{x^2} + C\right) e^{-x^2}$$

рәвешендә табыла.

`3 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y' - \frac{1}{x} y = -\frac{1}{x} y^2.$$

`Чишү.` Бу Бернулли дифференциаль тигезләмәсе. Ул тигезләмәне

$$y' y^{-2} - \frac{1}{x} y^{-1} = -\frac{1}{x}$$

рәвешендә язып, $z = y^{-1}$ алмаштыруын кулланабыз. Моннан,

$$z' = -y^{-2} y'.$$

z һәм z' нең кыйммәтләрен Бернулли тигезләмәсенә куйсак,

$$-z' - \frac{1}{x} z = -\frac{1}{x}$$

сызыкча тигезләмәсен табабыз. (Мөстәкыйль рәвештә чишәргә!)

`4 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y' = -\frac{1}{x} y^2 + \left(2 + \frac{1}{x}\right) y - x.$$

`Чишү.` $y_1 = x$ функциясе бирелгән Риккати дифференциаль тигезләмәсенең аерым чишелеше. Димәк,

$$y = x + z$$

дип алабыз. Моннан,

$$y' = 1 + z'.$$

Ул вакытта,

$$1 + z' = -\frac{1}{x}(x + z)^2 + \left(2 + \frac{1}{x}\right)(x + z) - x,$$

$$1 + z' = -\frac{1}{x}(x^2 + 2xz + z^2) + \left(2x + 2z + 1 + \frac{z}{x}\right) - x,$$

$$1 + z' = -x - 2z - \frac{z^2}{x} + 2x + 2z + 1 + \frac{z}{x} - x,$$

$$z' = -\frac{z^2}{x} + \frac{z}{x}.$$

Димәк, бирелгән Риккати тигезләмәсе

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{z^2}{x}$$

Бернулли тигезләмәсенә китерелә. (Мөстәкыйль рәвештә чишәргә!)

C. *Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.*

Дифференциаль тигезләмәләрне чишәргә:

1. $y' + 2y = e^{-x}$.

2. $x^2 + xy' = y, \quad y|_{x=1} = 0$.

3. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

4. $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

5. $y' \cos x - y \sin x = 2x, \quad y|_{x=0} = 0$.

6. $xy' - 2y = x^3 \cos x$.

7. $y' - y\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos^3 x}, \quad y|_{x=0} = 0$.

8. $y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$.

9. $\left(2x - y^2\right) y' = 2y$.

10. $y' + y \cos x = \cos x, \quad y|_{x=0} = 1$.

11. $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$.

12. $\left(e^{-\frac{y^2}{2}} - xy\right) dy - dx = 0$.

Бернулли дифференциаль тигезләмәләрен чишәргә:

13. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

14. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

15. $y' + 2xy = y^2e^{x^2}$.

16. $\left(x^3 + e^y\right) y' = 3x^2$.

17. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$.

18. Түбәндәге үзлеккә ия булган кәкреләрне табарга: кәкренең теләсә кайсы ноктасына үткәрелгән орынма Oy күчәрендә озынлыгы орыну ноктасы абсциссасының квадратына тигез булган кисемтә кисеп ала.

19. Түбәндәге үзлеккә ия булган кәкреләрне табарга: кәкренең теләсә нинди ноктасына үткәрелгән орынма Oy күчәрендә озынлыгы орыну ноктасы координаталарының ярым суммасына тигез булган кисемтә кисеп ала.

20. Түбәндәге үзлеккә ия булган кәкреләрне табарга: орынмасы, абсциссалар күчәре һәм координаталар башлангычыннан орыну ноктасына үткәрелгән кисемтә белән чикләнүче өчпочмакның мәйданы a^2 ка тигез булган даими зурлык.

D. ***Җаваплар.***

1. $y = Ce^{-2x} + e^{-x}$. 2. $y = x - x^2$. 3. $y = \left(C + x^2\right) e^{x^2}$. 4. $y = (C + x)\, e^{-x^2}$

5. $y = \frac{x^2}{\cos x}$. 6. $y = Cx^2 + x^2 \sin x$. 7. $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. 8. $y = \left(C + x^3\right) \ln x$.

9. $x = Cy - \frac{y^2}{2}$. 10. $y = 1$. 11. $x = \frac{C}{y} + y \ln y$. 12. $x = (C + y)e^{-\frac{y^2}{2}}$.

13. $y^{-2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$. 14. $y = \left(\frac{C + \ln\cos x}{x} + \mathrm{tg} x\right)^2$. 15. $y = \frac{e^{-x^2}}{C-x}$.

16. $x^3 e^{-y} = C + y$. 17. $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$.

18. $y' - \frac{y}{x} = -x$; $y = Cx - x^2$; $y - xy' = x^2$. 19. $y - xy' = \frac{x+y}{2}$ $y = C\sqrt{x} - x$;

20. $x' - \frac{x}{y} = \frac{2a^2}{y^2}$ $xy = a^2 + Cy^2$.

§5. Тулы дифференциаллардагы дифференциаль тигезләмәләр

A.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

рәвешендәге дифференциаль тигезләмәне карыйк. Әгәр бу тигезләмәнең сул кисәге ниндидер ике үзгәрешле $u = u(x, y)$ функциясенең тулы дифференциалы булса, ягъни

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y) \tag{2}$$

тигезлеге үтәлсә, (1) рәвешендәге дифференциаль тигезләмә *тулы дифференциаллардагы тигезләмә* дип атала.

Шулай итеп, тулы дифференциаллардыгы дифференциаль тигезләмәне

$$du(x,y) = 0$$

рәвешендә язарга мөмкин. Димәк, ул тигезләмәнең гомуми интегралы

$$u(x,y) = C$$

рәвешендә була.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

шарты үтәлгәндә (2) тигезлеге үтәлерлек $u = u(x, y)$ функциясе табыла, ягъни (1) тигезләмәсе тулы дифференциаллардагы тигезләмә була.

Шулай итеп, (1) тигезләмәсен чишү өчен

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

тулы дифференциалы (1) тигезләмәсенең уң кисәгенә тигез булырлык $u = u(x, y)$ функциясен табарга кирәк.

Интеграллау тапкырлаучысы.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

дифференциаль тигезләмәсе тулы дифференциаллардагы тигезләмә булмаса да, кайбер очракта

$$\mu(x, y)(M(x, y)dx + N(x, y)dy) = 0$$

тигезләмәсе тулы дифференциаллардагы дифференциаль тигезләмә булырлык $\mu = \mu(x, y)$ функциясен табып була. Бу $\mu = \mu(x, y)$ функциясе *интеграллау тапкырлаучысы* дип атала.

Интеграллау тапкырлаучысын табуның гомуми ысуллары юк. Ләкин кайбер аерым очракларда табарга мөмкин. Мәсәлән, интеграллау тапкырлаучысы бер үзгәрешлегә генә бәйле булсын. Әгәр $\mu = \mu(x)$ булса, аны

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

тигезлегеннән табалар. Ләкин монда тигезлекнең уң кисәгендәге функция x үзгәрешлесенә генә бәйле булырга тиеш. Әгәр $\mu = \mu(y)$ булса, аны

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$$

тигезлегеннән табалар. Ләкин монда тигезлекнең уң кисәгендәге функция y үзгәрешлесенә генә бәйле булырга тиеш.

Кайбер очракта тулы дифференциаллардагы дифференциаль тигезләмәне чишү өчен билгеле булган

$$d(xy) = ydx + xdy, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad f(x)dx = dF(x)$$

формулаларын кулланып, тулы дифференциаллар аерып алу һәм алмаштыру ысулларын да кулланырга мөмкин.

В. ***Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.***

`1 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$(x+y)dx+(x+2y-e^y)dy=0.$$

`Чишү.` Табабыз:

$$xdx+2ydy+(ydx+xdy)-e^ydy=0,$$

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right)+d(y^2)+d(xy)-de^y=0,$$

$$d\left(\frac{x^2}{2}+y^2+xy-e^y\right)=0,$$

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+y^2+xy-e^y.$$

Шулай итеп,

$$\frac{x^2}{2}+y^2+xy-e^y=C$$

бирелгән дифференциаль тигезләмәнең гомуми интегралы.

`2 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$(x+y)dx+(x+2y-e^y)dy=0.$$

`Чишү.` Биредә

$$M(x,y)=x+y, \quad N(x,y)=x+2y-e^y,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=1.$$

Шулай итеп, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ тигезлеге үтәлә, ягъни бирелгән тигезләмә тулы дифференциаллардагы дифференциаль тигезләмә. Димәк, ул тигезләмәнең сул кисәге ниндидер $u(x,y)$ функциясенең тулы дифференциалы. Бу $u(x,y)$ функциясе өчен

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x+2y-e^y.$$

Бу тигезлекләрнең беренчесендә y ны даими дип карап, x буенча интеграллап табабыз:

$$u(x,y)=\int(x+y)dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{2}+xy+\varphi(y).$$

$\varphi(y)$ функциясен табу өчен, соңгы тигезлекне y буенча дифференциаллыйбыз:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y)\right)'_y = x + \varphi'(y).$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ кыйммәтен исәпкә алганда,

$$x + \varphi'(y) = x + 2y - e^y,$$

ягъни,

$$\varphi'(y) = 2y - e^y.$$

Моннан ,

$$\varphi(y) = \int (2y - e^y)dy = y^2 - e^y + C$$

була. Шулай итеп,

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - e^y + C,$$

һәм бирелгән дифференциаль тигезләмәнең гомуми интегралы

$$\frac{x^2}{2} + y^2 + xy - e^y = C$$

рәвешендә була.

`3 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$(x^5 - 3y^2)dx + 2xydy = 0.$$

`Чишү.` Монда

$$M(x, y) = x^5 - 3y^2, \quad N(x, y) = 2xy,$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y.$$

Димәк, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, ягъни, ул тулы дифференциаллардагы дифференциаль тигезләмә түгел.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-6y - 2y}{2xy} = -\frac{4}{x}$$

булуын исәпкә алып, бирелгән дифференциаль тигезләмәнең x ка гына бәйле интеграллау тапкырлаучысы бар, дигән нәтиҗә ясыйбыз. Ул интеграллау тапкырлаучысын исәплик:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = -\frac{4}{x}, \quad \mu = \frac{1}{x^4}.$$

Монда гомумилекне бозмыйча, $C = 1$ дип алабыз.

Табылган интеграллау тапкырлаучысын бирелгән дифференциаль тигезләмәгә тапкырлап,

$$\frac{x^5-3y^2}{x^4}dx+\frac{2xy}{x^4}dy=0$$

тулы дифференциаллардагы дифференциаль тигезләмәсен табабыз. (Мөстәкыйль рәвештә чишәргә!)

С. ***Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.***

Дифференциаль тигезләмәләрне чишәргә:

1. $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0.$
2. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0.$
3. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0.$
4. $\left(3x^2\mathrm{tg}y-\frac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(\frac{x^3}{\cos^2 y}+4y^3+\frac{3y^2}{x^2}\right)dy=0.$
5. $\left(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx=\frac{x^2+y^2}{xy^2}dy.$
6. $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0.$
7. $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0.$
8. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)dy=0.$
9. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0.$
10. $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

Дифференциаль тигезләмәләрне интеграллау тапкырлаучысы табу яки тулы дифференциал булеп алу һәм алмаштыру ысулы белән чишәргә:

11. $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0.$
12. $(x^2+y)dx-xdy=0.$
13. $(x+y^2)dx-2xydy=0.$
14. $(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0.$
15. $(x^4\ln x-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0.$
16. $(x+\sin x+\sin y)dx+\cos ydy=0.$
17. $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0.$
18. $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0.$
19. $(x^2+y^2+1)dx-2xydy=0.$
20. $xdx+ydy+x(xdy-ydx)=0.$

D. ***Җаваплар.***

1. $x^4+x^2y^2+y^4=C$. 2. $x^3+3x^2y^2+y^4=C$. 3. $\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\frac{x}{y}=C$.
4. $x^3\mathrm{tg}y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=C$. 5. $x^3y+x^2-y^2=Cxy$. 6. $\frac{\sin^2 x}{y}+\frac{x^2+y^2}{2}=C$.
7. $x^3+y^3-xy+y^2-x^2=C$. 8. $y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x=C$.
9. $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$. 10. $x\sin y-y\cos x+\ln|xy|=C$.
11. $xy^2-2x^2y-2=Cx$; $\mu=\frac{1}{x^2}$. 12. $x-\frac{y}{x}=C$; $\mu=\frac{1}{x^2}$.
13. $x\ln|x|-y^2=Cx$; $\mu=\frac{1}{x^2}$. 14. $5\mathrm{arctg}x+2xy=C$; $x=0$; $\mu=\frac{1}{1+x^2}$.
15. $y^3+x^3(\ln x-1)=Cx^2$; $\mu=\frac{1}{x^4}$.
16. $2e^x\sin y+2e^x(x-1)+e^x(\sin x-\cos x)=C$; $\mu=e^x$.
17. $x^2-\frac{7}{y}-3xy=C$; $\mu=\frac{1}{y^2}$. 18. $\left(x+y^2\right)^2C=x-y^2$; $\mu=\frac{1}{(x+y^2)^3}$.
19. $1+y^2-x^2=Cx$; $\mu_1=\frac{1}{x^2}$; $\mu_2=\frac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$.
20. $y-1=C\sqrt{x^2+y^2}$; $\mu=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$.

§6. Лагранж һәм Клеро тигезләмәләре

A. Лагранж тигезләмәсе.

$$y=\varphi(y')x+\psi(y')$$

рәвешендәге билгесез функциягә карата чишелгән дифференциаль тигезәләмә *Лагранж тигезләмәсе* дип атала. Биредә $\varphi(y')\not\equiv y'$ һәм $\psi(y')$ бирелгән дифференциалланучы функцияләр. Шулай итеп, Лагранж тигезләмәсендә y үзгәрешлесе, коэффициентлары y' ка бәйле булган x тан сызыкча функция булып тора.

Лагранж дифференциаль тигезләмәсен чишү өчен $y'=p$ дип алсак, ул

$$y=\varphi(p)x+\psi(p) \tag{1}$$

рәвешендә язылa. Бу дифференциаль тигезләмәнең ике кисәген дә x буенча дифференциаллыйбыз һәм килеп чыккан тигезләмәгә y' урынына p куябыз. Ул вакытта тигезләмә

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)x}{\varphi(p)-p}=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

рәвешендәге беренче тәртиптәге сызыкча тигезләмәгә китерелә. Монда аргумент p, ә билгесез функция x. Ул дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелеше $x=f(p,C)$ булсын. x ның табылган кыйммәтен (1) дифференциаль тигезләмәсенә куйсак, Лагранж тигезләмәсенең чишелешен

$$\begin{cases} x = f(p, C), \\ y = \varphi(p) f(p, C) + \psi(p) \end{cases}$$

системасы ярдәмендә параметрик рәвештә табабыз. Әгәр бу системада p параметрыннан котыла алсак, Лагранж дифференциаль тигезләмәсенең гомуми интегралы

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

рәвешендә була.

Искәрмә. Лагранж дифференциаль тигезләмәсенең

$$y = \varphi(p_0)x + \psi(p_0)$$

рәвешендәге (аерым яки үзенчәлекле) чишелешләре булырга мөмкин. Монда p_0 –

$$\varphi(p) - p = 0$$

тигезләмәсенең тамыры.

Клеро тигезләмәсе.

$$y = xy' + \psi(y')$$

рәвешендәге билгесез функциягә карата чишелгән дифференциал тигезләмә *Клеро тигезләмәсе* дип атала.

Лагранж тигезләмәсендә $\varphi(y') = y'$ булса, Клеро тигезләмәсенә киләбез.

Клеро тигезләмәсен чишү өчен $y' = p$ дип алабыз. Ул вакытта,

$$y = px + \psi(p). \tag{2}$$

Бу дифференциаль тигезләмәнең ике кисәген дә x буенча дифференциаллыйбыз һәм килеп чыккан тигезләмәгә y' урынына p куябыз. Ул вакытта тигезләмә

$$p'(x + \psi'(p)) = 0$$

рәвешенә килә.

1) Әгәр $p' = 0$ булса, $p = C$ була. Бу кыйммәтне (2) тигезләмәсенә куеп, Клеро тигезләмәсенең гомуми чишелешен табабыз:

$$y = xC + \psi(C).$$

Димәк, Клеро тигезләмәсенең гомуми чишелеше бу тигезләмәдә y' не иректле даими C белән алмаштырып табыла.

2) Әгәр $x + \psi'(p) = 0$, ягъни, $x = -\psi'(p)$ булса, тагын бер

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases}$$

параметрик рәвештәге (үзенчәлекле) чишелеше табыла.

Чыгарылмага карата чишелми торган беренче тәртиптәге дифференциаль тигезләмәләр.

Әгәр

$$F(x, y, y') = 0$$

дифференциаль тигезләмәсен

$$y' = f(x, y)$$

рәвешендә язып булмаса, ул *чыгарылмага карата чишелми торган беренче тәртиптәге дифференциаль тигезләмә* дип атала. Лагранж һәм Клеро тигезләмәләре чыгарылмага карата чишелми торган тегезләмәләр.

Мондый тигезләмәләрнең мөһим аерым очрагы булып

$$(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + ... + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0$$

тигезләмәсе тора. Ул *беренче тәртиптәге n нчы дәрәҗә дифференциаль тигезләмә* дип атала.

Бу тигезләмәне чишкәндә, аны y' ка карата чишәргә тырышалар. Мәсәлән, ниндидер D өлкәсендә ул тигезләмә чикле сандагы

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ m)$$

рәвешендәге тигезләмәләргә китерелсен. Бу тигезләмәләрнең барлык чишелешләре D өлкәсендә беренче тәртиптәге n нчы дәрәҗә дифференциаль тигезләмәнең дә чишелеше була.

Бу чыгарылмага карата чишелгән тигезләмәләрнең гомуми интеграллары

$$\Phi_k(x, y) = C \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ m)$$

булсын.

Бу гомуми интегралларның берләшмәсе (җыелмасы) беренче тәртиптәге n нчы дәрәҗә дифференциаль тигезләмәнең гомуми интегралы дип атала.

Кайбер очракта гомуми интегралларны

$$(\Phi_1(x, y) - C)\ (\Phi_2(x, y) - C) ... (\Phi_m(x, y) - C) = 0$$

тигезлеге ярдәмендә язалар.

Чыгарылмага карата чишелми торган тигезләмәләрнең аерым очраклары булып шулай ук аргументка карата чишелгән

$$x = \varphi(y, y')$$

һәм билгесез функциягә карата чишелгән

$$y = \varphi(x, y')$$

тигезләмәләре тора. Ул тигезләмәләрне чишү өчен $y' = p$ алмаштыруын кулланалар.

В. ***Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.***

`1 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y = xy'^2 + y'^2.$$

`Чишү.` Бу Лагранж дифференциаль тигезләмәсе. Әгәр $y' = p$ дип алсак, ул

$$y = xp^2 + p^2$$

рәвешендә языла. Бу дифференциаль тигезләмәнең ике кисәген дә x буенча дифференциаллыйбыз:

$$y' = p^2 + x2pp' + 2pp' \quad \left(p' = \frac{dp}{dx}\right),$$

ягъни,

$$y' = p^2 + (2xp + 2p)p'.$$

$y' = p$ булуын исәпкә алсак,

$$p = p^2 + (2xp + 2p)p'.$$

Әгәр $p - p^2 \neq 0$ дип алсак, соңгы тигезләмә

$$\frac{1}{p'} = \frac{2xp + 2p}{p - p^2},$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{2x + 2}{1 - p},$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p - 1} = \frac{2}{1 - p}$$

рәвешен ала. Бу беренче тәртиптәге сызыкча дифференциаль тигезләмә. Аның гомуми чишелеше

$$x = \frac{C_1}{(p - 1)^2} - 1.$$

Аны $y = xp^2 + p^2$ тигезләмәсенә куеп, бирелгән Лагранж тигезләмәсенең гомуми чишелешен параметрик рәвештә табабыз:

$$x = \frac{C_1}{(p - 1)^2} - 1, \quad y = \frac{C_1 p^2}{(p - 1)^2}.$$

p параметрын юкка чыгарсак, гомуми чишелеш

$$y = (\sqrt{x + 1} + C)^2$$

рәвешендә языла. $p - p^2 = 0$ тигезләмәсеннән p ның ике кыйммәтен табабыз:

$$p = 0, \quad p = 1.$$

Бу кыйммәтләрне $y = xp^2 + p^2$ тигезләмәсенә куеп, бирелгән Лагранж тигезләмәсенең ике

$$y = 0, \quad y = x + 1$$

чишелешен табабыз. Аларның беренчесе үзенчәлекле чишелеш, икенчесе аерым чишелеш.

`2 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y = xy' - \frac{y'^2}{2}.$$

`Чишү`. Бу Клеро дифференциаль тигезләмәсе. Әгәр $y' = p$ дип алсак, ул

$$y = xp - \frac{p^2}{2}$$

рәвешендә языла. Бу дифференциаль тигезләмәнең ике кисәген дә x буенча дифференциаллыйбыз:

$$y' = p + xp' - \frac{2pp'}{2} \quad \left(p' = \frac{dp}{dx}\right),$$

ягъни,

$$y' = p + (x - p)p'.$$

$y' = p$ булуын исәпкә алсак,

$$p = p + (x - p)p',$$

ягъни,

$$(x - p)p' = 0.$$

Әгәр $p' = 0$ булса, $p = C$ була. Бу кыйммәтне Клеро тигезләмәсенә куеп,

$$y = xC - \frac{C^2}{2}$$

гомуми чишелешен табабыз.

Әгәр $x-p = 0$, ягъни $x = p$ булса, $\begin{cases} x = p, \\ y = px - \frac{p^2}{2} \end{cases}$ яки $y = \frac{x^2}{2}$ чишелешен табабыз.

`3 мисал`. Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y'^2 + (y^2 - 1)y' - y^2 = 0.$$

`Чишү`. Бу тигезләмә ике

$$y' = 1, \quad y' = -y^2$$

тигезләмәләренә таркала ($y' = t$ дип алсак, t га карата квадрат тигезләмә табабыз). Ул тигезләмәләрнең гомуми интеграллары

$$y = x + C, \quad y = \frac{1}{x + C}.$$

Чынлап та,

$$-\frac{dy}{y^2} = dx,$$

$$\frac{1}{y} = x + C.$$

Шулай итеп,

$$(y - x - C)\left(y - \frac{1}{x + C}\right) = 0$$

– бирелгән тигезләмәнең гомуми интегралы. $y = 0$ – шулай ук чишелеш.

C. *Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.*

Дифференциаль тигезләмәләрне чишәргә:

1. $y = 2xy' + \ln y'$.
2. $y = x(1 + y') + y'^2$.
3. $y = 2xy' + \sin y'$.
4. $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$.
5. $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$.
6. $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$.
7. $y = xy' + y'^2$.
8. $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$.
9. $y = xy' + a\sqrt{1 + y'^2}$.
10. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

D. *Җаваплар.*

1. $\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, \\ y = \frac{2C}{p} - \ln p - 2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = 2(1 - p) + Ce^{-p}, \\ y = \left(2(1 - p) + Ce^{-p}\right)(1 + p) + p^2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{\cos p}{p^2} - \frac{\sin p}{p}, \\ y = \frac{2C}{p} - \frac{2\cos p}{p} - \sin p, \end{cases}$ $y = 0$. 4. $\begin{cases} x = \frac{Cp^2+2p-1}{2p^2(p-1)}, \\ y = \frac{Cp^2+2p-1}{2(p-1)} - \frac{1}{p}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \frac{C}{p^3} - 2e^p\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right), \\ y = \frac{3C}{2p^2} - 2e^p\left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}\right). \end{cases}$ 6. $y = xC + \frac{a}{C^2}$; $4y^3 = 27ax^2$.

7. $y = xC + C^2$; $y = -\frac{x^2}{4}$. 8. $y = xC - \frac{C-1}{C}$; $(y + 1)^2 = 4x$.
9. $y = xC + a\sqrt{1 + C^2}$; $x^2 + y^2 = a^2$. 10. $x = yC + C^2$; $xy = \pm a^2$.

II бүлек

ЮГАРЫ ТӘРТИПТӘГЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

§7. Төп төшенчәләр һәм билгеләмәләр.

Тәртибен кечерәйтергә мөмкин булган тигезләмәләр

А.

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

рәвешендәге тигезләмә *n нчы тәртиптәге дифференциаль тигезләмә* дип атала. Әгәр $n \geq 2$ булса, ул *югары тәртиптәге тигезләмә* дип атала.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{2}$$

рәвешендәге тигезләмә *n нчы тәртиптәге чыгарылмага карата чишелгән дифференциаль тигезләмә* дип атала.

n нчы тәртипкәчә дифференциалланучы һәм (1) (яки (2)) тигезләмәсенә куйганда аны бердәйлеккә әйләндерүче функция *бу дифференциаль тигезләмәнең чишелеше* дип атала.

(2) дифференциаль тигезләмәсенең

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{3}$$

башлангыч шартларын канәгатьләндерүче чишелешен табу мәсьәләсе *Коши мәсьәләсе* дип атала.

Теорема (Коши-Пикар, Коши мәсьәләсенең булуы һәм бердәнберлеге турында). *Әгәр f функциясе өзлексез булса һәм y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ аргументлары буенча Липшиц шартын канәгатьләндерсә, x_0 ноктасының ниндидер тирәлегендә (2) дифференциаль тигезләмәсенең (3) башлангыч шартларын канәгатьләндерүче бердәнбер чишелеше була.*

Әгәр n ирекле даимигә бәйле булган $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ функциясе

1) (2) дифференциаль тигезләмәсен C_1, C_2, ..., C_n ның теләсә нинди кыйммәте өчен канәгатьләндерсә;

2) (3) башлангыч шартлары нинди булуга карамастан,
$y = \varphi(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, ..., C_n^{(0)})$ функциясе бу шартны канәгатьләндерерлек $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$, ..., $C_n^{(0)}$ кыйммәтләре табылса, $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ функциясе *(2) дифференциаль тигезләмәсенең гомуми чишелеше* дип атала.

Гомуми чишелештә ирекле даимиләр урынына конкрет кыйммәтләр ($\pm\infty$ очракларын да кертеп) куеп табылган чишелеш (2) *дифференциаль тигезләмәсенең аерым чишелеше* дип атала.

Коши мәсьәләсенең бердәнберлек шарты бер генә ноктасында да үтәлмәгән чишелеш *үзенчәлекле чишелеш* дип атала.

Әгәр (2) дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелеше ачык булмаган

$$\Psi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$$

функциясе рәвешендә бирелсә, бу чишелеш *гомуми интеграл* дип атала.

Гомуми интегралда ирекле даими C_1, C_2, ..., C_n урынына конкрет кыйммәтләр куеп табылган чишелеш *дифференциаль тигезләмәнең аерым интегралы* дип атала.

Тәртибен кечерәйтергә мөмкин булган тигезләмәләрнең кайбер төрләрен карыйк.

1) $y^{(n)} = f(x)$ ***рәвешендәге дифференциаль тигезләмләр.***

Бу дифференциаль тигезләмәләрне бер-бер артлы n мәртәбә интеграллау гамәле башкарып чишәләр.

2) ***Билгесез функция кермәгән, һәм билгесез функция һәм аның берничә чыгарылмасы кермәгән тигезләмәләр.***

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0 \quad (1 \le k < n) \tag{0.1}$$

рәвешендәге тигезләмә $k = 1$ булганда *билгесез функция кермәгән дифференциаль тигезләмә*, $k > 1$ булганда *билгесез функция һәм аның берничә чыгарылмасы кермәгән дифференциаль тигезләмә* дип атала, ә $k = n$ булганда алда каралган очракка кайтарып калдырыла.

Бу дифференциаль тигезләмәнең тәртибен

$$y^{(k)} = z$$

алмаштыруы ярдәмендә k берәмлеккә кечерәйтәләр. Ул вакытта тигезләмә

$$F(x, z, z', z'', ..., z^{(n-k)}) = 0$$

рәвешен ала. Бу дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелеше

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

рәвешендәге функция булсын. $y^{(k)} = z$ булуын исәпкә алсак, ягъни

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

тигезлеген k мәртәбә интегралласак, бирелгән дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелешен табыла.

3) *Аргумент кермәгән тигезләмәләр.*

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

рәвешендәге тигезләмә *аргумент кермәгән тигезләмә* дип атала.

Бу дифференциаль тигезләмәнең тәртибен бер берәмлеккә кечерәйтү өчен

$$y' = p = \frac{dy}{dx}, \quad p = p(y)$$

дип алалар.

4) *Билгесез функция һәм аның чыгарылмасына карата бериш дифференциаль тигезләмәләр.*

Биредә

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

дифференциаль тигезләмәсенең сул кисәге $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ га карата бериш функция булган очрак, ягъни

$$F(x, ty, ty', ty'', ..., ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})$$

очрагы карала.

Бу дифференциаль тигезләмәнең тәртибен бер берәмлеккә кечерәйтү өчен, $\frac{y'}{y} = z$, ягъни, $y' = yz$ дип алабыз.

B. *Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.*

`1 мисал`. Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y''' = \cos x.$$

Чишү. Бер-бер артлы 3 мәртәбә интеграллап, табабыз:

$$y'' = \int \cos x dx = \sin x + C_1,$$

$$y' = \int (\sin x + C_1) dx = -\cos x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int (-\cos x + C_1 x + C_2) dx = -\sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

2 мисал. Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$2y' + y''^2 = 2xy''.$$

Чишү. Бу билгесез функция кермәгән дифференциаль тигезләмә. Ул тигезләмәнең тәртибен кечерәйтү өчен

$$y' = z$$

дип алабыз. Моннан,

$$y'' = z'.$$

Табылган кыйммәтләрне бирелгән дифференциаль тигезләмәгә куеп

$$2z + z'^2 = 2xz',$$

ягъни,

$$z = xz' - \frac{z'^2}{2}$$

тигезләмәсен табабыз. Ул Клеро тигезләмәсе. Аның гомуми чишелеше

$$z = xC_1 - \frac{C_1^2}{2}.$$

Димәк, $y' = z$ булуын исәпкә алсак,

$$y' = xC_1 - \frac{C_1^2}{2}.$$

Моннан,

$$y = \int \left(xC_1 - \frac{C_1^2}{2} \right) dx = C_1 \frac{x^2}{2} - \frac{C_1^2}{2} x + C_2.$$

Бу бирелгән дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелеше.

Клеро тигезләмәсенең $z = \frac{x^2}{2}$ үзенчәлекле чишелеше дә бар. Аңа

$$y' = \frac{x^2}{2}$$

тигезләмәсе тиңдәш була. Шуңа күрә,

$$y = \frac{x^3}{3} + C$$

шулай ук бирелгән дифференциаль тигезләмәнең (үзенчәлекле) чишелеше була, биредә C – ирекле даими.

`3 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$(1+y^2)yy'' = (3y^2-1)y'^2.$$

`Чишү.` Бу аргумент кермәгән дифференциаль тигезләмәгә. Ул тигезләмәнең тәртибен кечерәйтү өчен

$$y' = p, \quad p = p(y)$$

дип алабыз. Моннан,

$$y'' = \frac{dp}{dy}p.$$

Табылган кыйммәтләрне бирелгән дифференциаль тигезләмәгә куеп

$$(1+y^2)y\frac{dp}{dy}p = (3y^2-1)p^2, \quad p \neq 0,$$

ягъни,

$$(1+y^2)y\frac{dp}{dy} = (3y^2-1)p$$

тигезләмәсен табабыз. Бу үзгәрешлеләре аерылучан тигезләмә. Моннан

$$\frac{dp}{p} = \frac{3y^2-1}{(1+y^2)y}dy,$$

$$\ln|p| = 2\ln|1+y^2| - \ln|y| + \ln|C_1|,$$

ягъни,

$$\frac{py}{(1+y^2)^2} = C_1.$$

Димәк, $y' = p$ булуын исәпкә алсак,

$$\frac{yy'}{(1+y^2)^2} = C_1.$$

Кабат интеграллап табабыз:

$$\frac{-1}{2(1+y^2)} = C_1x + C_2.$$

Бу бирелгән дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелеше.

Әгәр $p = 0$ булса, $y' = p$ булуын исәпкә алып, табабыз:

$$y = C.$$

Биредә C – ирекле даими. Бу функция шулай ук бирелгән дифференциаль тигезләмәнең чишелеше була.

`4 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$$

`Чишү.` Бу дифференциаль тигезләмәнең сул кисәге y, y', y'' ка карата бериш функция булган очрак, чөнки

$$F(x, ty, ty', ty'') = xtyty'' + x(ty')^2 - tyty' =$$

$$= t^2(xyy'' + xy'^2 - yy') = t^2F(x, y, y', y'')$$

тигезлеге үтәлә.

Ул тигезләмәнең тәртибен түбәнәйтү өчен

$$\frac{y'}{y} = z$$

дип алабыз. Моннан,

$$y' = yz,$$

$$y'' = y(z^2 + z').$$

Табылган кыйммәтләрне бирелгән дифференциаль тигезләмәгә куябыз:

$$xy^2(z^2 + z') + xy^2z^2 - y^2z = 0.$$

Соңгы тигезләмәне y^2 ка бүлеп, рәвешүзгәртүләрдән соң

$$z' - \frac{z}{x} = -2z^2$$

Бернулли тигезләмәсенә киләбез. Аның гомуми чишелеше

$$z = \frac{x}{x^2 + C_1}.$$

Димәк, $\frac{y'}{y} = z$ булуын исәпкә алсак,

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + C_1}.$$

Кабат интеграллап, табабыз:

$$\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{x^2 + C_1},$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x^2 + C_1| + \ln|C_2|,$$

$$y = C_2\sqrt{x^2 + C_1}.$$

Бу – бирелгән дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелеше.

Бирелгән тигезләмәнең гомуми чишелештән табылмый торган

$$y = C$$

рәвешендәге чишелеше дә бар, биредә C – ирекле даими.

C. *Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.*

Дифференциаль тигезләмәләрне чишәргә:

1. $x^2y'' = y'^2$. 2. $y^3y'' = 1$.

3. $y'' = 2yy'$. 4. $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

5. $yy'' = y'^2 - y'^3$. 6. $2yy'' = y^2 + y'^2$.

7. $y''^2 + y' = xy''$. 8. $xy''' = y'' - xy''$.

9. $y'' = e^y$. 10. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.

11. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.

12. $\left(x^2 + 1\right)\left(y'^2 - yy''\right) = xyy'$.

13. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$.

14. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$.

15. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.

16. $yy'' = 2xy', \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 0,5$.

17. $2y''' - 3y'^2 = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1.$

18. $x^2y'' - 3xy' = \frac{6y^2}{x^2} - 4y, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4.$

19. $y''' = 3yy', \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 4,5.$

20. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y', \quad y(-1) = \frac{\pi}{6}, \quad y'(-1) = 2.$

D. *Җаваплар.*

1. $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x + 1| + C_2;\ 2y = x^2 + C;\ y = C.$
2. $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2.$
3. $y = C_1tg\,(C_1x + C_2);\ \ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right| = 2C_1x + C_2;\ y(C - x) = 1;\ y = C.$
4. $y = C_1\,(x - e^{-x}) + C_2.$ 5. $y + C_1 \ln|y| = x + C_2;\ y = C.$
6. $y = C_1\,[1 \pm \operatorname{ch}(x + C_2)];\ y = Ce^{\pm x}.$ 7. $y = C_1\frac{x^2}{2} - C_1^2 + C_2;\ y = \frac{x^3}{12} + C.$
8. $y = C_1(x + 2)e^{-x} + C_2x + C_3.$
9. $e^y \sin^2(C_1x + C_2) = 2C_1^2;\ e^y \operatorname{sh}^2(C_1x + C_2) = 2C_1^2;\ e^y(x + C)^2 = 2.$
10. $3C_1y = (x - C_1)^3 + C_2;\ y = C - x^2;\ y = C.$ 11. $y = C_2e^{C_1x^2}.$
12. $y = C_2\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{C_1}.$ 13. $y^2 = C_1x^3 + C_2.$ 14. $y = C_2\,|x|^{C_1 - \frac{1}{2}\ln|x|}.$
15. $\ln C_2y = 4x^{\frac{5}{2}} + C_1x.$ 16. $(3 - x)y^5 = 8(x + 2).$ 17. $y(x + 2) = -x - 6.$
18. $(1 - \ln x)^2\,y = x^2.$ 19. $y = 3\operatorname{th}^2\frac{x\sqrt{3}}{2} - 2.$ 20. $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2x + 2.$

§8. n нчы тәртиптәге сызыкча дифференциаль тигезләмәләр

A.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

рәвешендәге тигезләмә *n нчы тәртиптәге сызыкча дифференциаль тигезләмә* дип атала. Монда $a_1(x)$, ..., $a_{n-1}(x)$, $a_n(x)$, $f(x)$ билгеле бер аралыкта билгеләнгән функцияләр.

Әгәр (1) тигезләмәсендә $f(x) \not\equiv 0$ булса, ул *сызыкча бериш булмаган дифференциаль тигезләмә (СББДТ)* дип, ә $f(x) \equiv 0$ булса, ягъни,

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{2}$$

тигезләмәсе *сызыкча бериш дифференциаль тигезләмә (СБДТ)* дип атала.

Әгәр y_1, y_2, ..., y_n функцияләре өчен X аралыгында

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \ ... + \alpha_n\,y_n = 0 \tag{3}$$

бердәйлеге үтәлерлек кимендә бер нольгә тигез булмаган α_1, α_2, ..., α_n саннары табылса, бирелгән функцияләр X аралыгында *сызыкча бәйле функци-*

ялəр дип аталалар. Киресенчə булганда, ягъни (3) тигезлеге $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ булганда гына үтəлгəндə, ул функциялəр X аралыгында *сызыкча бəйсез функциялəр* дип аталалар.

Əгəр y_1, y_2, ..., y_n функциялəренең $(n-1)$ нче тəртипкə кадəр чыгарылмалары булса,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

билгелəгече *Вронский билгелəгече* яки *вронскиан* дип атала. Вронский билгелəгечен $W(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ дип тə тамгалыйлар.

Теорема 1. *Əгəр y_1, y_2, ..., y_n функциялəре бирелгəн аралыкта сызыкча бəйле булсалар, аларның Вронский билгелəгече ул аралыкның барлык нокталарында нольгə тигез була.*

Искəрмə. y_1, y_2, ..., y_n функциялəренең сызыкча бəйле булуының югарыдагы кирəкле шарты җитəрлек түгел.

Нəтиҗə. Əгəр бирелгəн аралыкның кимендə бер ноктасында y_1, y_2, ..., y_n функциялəренең Вронский билгелəгече нольгə тигез булмаса, ул функциялəр бу аралыкта сызыкча бəйсез булалар.

Теорема 2. *Əгəр бирелгəн аралыкның кимендə бер ноктасында (2) СБДТ нең y_1, y_2, ..., y_n аерым чишелешлəренең Вронский билгелəгече нольгə тигез булса, ул функциялəр бу аралыкта сызыкча бəйле булалар.*

Нəтиҗə 1. Əгəр (2) СБДТ нең y_1, y_2, ..., y_n аерым чишелешлəре сызыкча бəйсез булсалар, аларның вронский билгелəгече бирелгəн аралыкның бер ноктасында да нольгə тигез булмый.

Нəтиҗə 2. Əгəр (2) СБДТ нең y_1, y_2, ..., y_n аерым чишелешлəренең вронский билгелəгече бирелгəн аралыкның бер ноктасында нольгə тигез булса (булмаса), ул бу аралыкның һəр ноктасында да нольгə тигез була (булмый).

(2) СБДТ нең теләсә нинди n сызыкча бәйсез чишелешләре системасы *фундаменталь система* дип атала.

Теорема 3. *Әгәр $y_1, y_2, ..., y_n$ функцияләре (2) СБДТ се чишелешләренең фундаменталь системасын тәшкил итсәләр,*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ ... + C_n\, y_n \tag{4}$$

функциясе (монда $C_1, C_2, ..., C_n$ – ирекле даимиләр) ул тигезләмәнең гомуми чишелеше була.

Коэффициентлары даими булган сызыкча бериш дифференциаль тигезләмәләр нең гомуми рәвеше

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{5}$$

Биредә a_i $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ – даими саннар.

Бу дифференциаль тигезләмәнең аерым чишелешен $y = e^{kx}$ рәвешендә эзлибез. y ны һәм аның чыгарылмаларын (5) тигезләмәсенә куеп, n нчы дәрәҗә алгебраик тигезләмә табабыз:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{6}$$

(6) тигезләмәсе *(5) дифференциаль тигезләмәсенең характеристик тигезләмәсе* дип, ә аның тамырлары *характеристик тигезләмәнең тамырлары* дип атала.

$k_1,\ k_2,\ ...,\ k_n$ – (6) характеристик тигезләмәсенең тамырлары булсын. Монда төрле очрак булырга мөмкин:

1) характеристик тигезләмәнең барлык тамырлары реаль һәм төрле.

Ул вакытта (5) тигезләмәсе чишелешләренең фундаменталь системасын

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \quad ..., \quad y_n = e^{k_n x}$$

функцияләре тәшкил итә. Димәк, (5) тигезләмәсенең гомуми чишелеше

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + ... + C_n e^{k_n x}$$

рәвешендә була.

2) характеристик тигезләмәнең барлык тамырлары реаль һәм аларның кайберләре кабатлы. Мәсәлән, k_1 – характеристик тигезләмәнең $m < n$ кабатлы тамыры булсын, ягъни $k_1 = k_2 = ... = k_m$, ә калган характеристик тамырлары реаль һәм төрле булсын.

Ул вакытта (5) тигезләмәсе чишелешләренең фундаменталь системасын

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = xe^{k_1 x}, \quad y_3 = x^2 e^{k_1 x}, \quad ..., \quad y_m = x^{m-1} e^{k_1 x},$$

$$y_{m+1} = e^{k_{m+1} x}, \quad ..., \quad y_n = e^{k_n x}$$

функцияләре тәшкил итә. Димәк, (5) тигезләмәсенең гомуми чишелеше

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + ... + C_m x^{m-1}) e^{k_1 x} + C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + ... + C_n e^{k_n x}$$

рәвешендә була.

3) характеристик тигезләмәнең тамырлары арасында комплекс тамырлар бар. Мәсәлән, $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, ә калган характеристик тамырлар реаль һәм төрле булсын.

Ул вакытта (5) тигезләмәсе чишелешләренең фундаменталь системасын

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_3 = e^{k_3 x}, \quad ..., \quad y_n = e^{k_n x}$$

функцияләре тәшкил итә. Димәк, (5) тигезләмәсенең гомуми чишелеше

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_3 e^{k_3 x} + ... + C_n e^{k_n x}$$

рәвешендә була.

4) характеристик тигезләмәнең тамырлары арасында кабатлы комплекс тамырлар бар. Мәсәлән, $k_1 = \alpha + i\beta$ – характеристик тигезләмәнең m кабатлы тамыры булсын, димәк, $k_2 = \alpha - i\beta$ дә характеристик тигезләмәнең m кабатлы тамыры була. Калган характеристик тамырлар реаль һәм төрле булсын. Ул вакытта (5) тигезләмәсе чишелешләренең фундаменталь системасын

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_3 = xe^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_4 = xe^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_5 = x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_6 = x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad ...,$$

$$y_{2m-1} = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_{2m+1} = e^{k_{2m+1} x}, \quad ..., \quad y_n = e^{k_n x}$$

функцияләре тәшкил итә. Димәк, (5) тигезләмәсенең гомуми чишелеше

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3xe^{\alpha x}\cos\beta x + C_4xe^{\alpha x}\sin\beta x+$$

$$+C_5x^2e^{\alpha x}\cos\beta x+C_6x^2e^{\alpha x}\sin\beta x+...+C_{2m-1}x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x+C_{2m}x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x+$$

$$+C_{2m+1}e^{k_{2m+1}x} + ... + C_ne^{k_nx}$$

рәвешендә була.

B. *Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.*

`1 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

`Чишү.` Тиңдәшле характеристик тигезләмә түбәндәге рәвештә була:

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0.$$

Аның тамырларын табабыз: $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = 3$. Бу тамырлар реаль һәм төрле булганга, чишелешләрнең фундаменталь системасы 1, e^{-x}, e^{3x} рәвешендә була, ә гомуми чишелеш түбәндәгечә языла:

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}.$$

`2 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

`Чишү.` Тиңдәшле характеристик тигезләмә түбәндәге рәвештә була:

$$k^3 + 2k^2 + k = 0.$$

Аның тамырлары: $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = -1$ реаль, ләкин -1 – ике кабатлы тамыр. Шуңа күрә, чишелешләрнең фундаменталь системасы 1, e^{-x} ,xe^{-x} рәвешендә була, ә гомуми чишелеш түбәндәгечә языла:

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}.$$

`3 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0.$$

`Чишү.` Тиңдәшле характеристик тигезләмә түбәндәге рәвештә була:

$$k^3 + 4k^2 + 13k = 0.$$

Аның тамырлары $k_1 = 0$, $k_{2,3} = -2 \pm 3i$. Шуңа күрә, чишелешләрнең фундаменталь системасы 1, $e^{-2x}\cos 3x$, $e^{-2x}\sin 3x$ рәвешендә була, ә гомуми чишелеш түбәндәгечә языла:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x}\cos 3x + C_3 e^{-2x}\sin 3x.$$

`4 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

`Чишү.` Тиңдәшле характеристик тигезләмә түбәндәге рәвештә була:

$$k^4 + 4k^3 + 8k^2 + 8k + 4 = 0.$$

Аның ике кабатлы тамырлары $k_{1,2} = k_{3,4} = -1 \pm i$ – комлекс саннар. Шуңа күрә чишелешләрнең фундаменталь системасы $e^x \cos x$, $e^x \sin x$, $xe^x \cos x$, $xe^x \sin x$ рәвешендә була, ә гомуми чишелеш түбәндәгечә языла:

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + C_3 x e^x \cos x + C_4 x e^x \sin x.$$

`5 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y^V + y^{IV} - 2y''' - y'' - y' + 2 = 0.$$

`Чишү.` Тиңдәшле характеристик тигезләмә

$$k^5 + k^4 - 2k^3 - k^2 - k + 2 = 0$$

рәвешендә була. Аны чишеп,

$$k^5 - k^4 + 2k^4 - 2k^3 - k^2 + k - 2k + 2 = 0,$$

$$(k + 2)(k - 1)^2(k^2 + k + 1) = 0,$$

$$k_1 = 2, k_2 = k_3 = 1, k_{4,5} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

характеристик тамырларын табабыз. Шуңа күрә,

$$e^{2x}, \quad e^{x}, \quad xe^{x}, \quad e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

функцияләре бирелгән тигезләмә чишелешләренең фундаменталь системасын тәшкил итәләр. Димәк, гомуми чишелешне

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}+C_3xe^{x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_5\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

рәвешендә табабыз.

C. *Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.*

Дифференциаль тигезләмәләрне чишәргә:

1. $y''+y'-2y=0.$
2. $y''+4y'+3y=0.$
3. $y''-2y'=0.$
4. $2y''-5y'+2y=0.$
5. $y''-4y'+5y=0.$
6. $y''+2y'+10y=0.$
7. $y''+4y=0.$
8. $y''-2y'+y=0.$
9. $4y''+4y'+y=0.$
10. $y'''-8y=0.$
11. $y^{IV}-y=0.$
12. $y^{IV}+4y=0.$
13. $y^{VI}+64y=0.$
14. $y^{V}-6y^{IV}+9y'''=0.$
15. $y^{V}-10y'''+9y'=0.$
16. $y^{IV}+2y''+y=0.$
17. $y'''-3y''+3y'-y=0.$
18. $y'''-y''-y'+y=0.$
19. $y^{IV}-5y''+4y=0.$
20. $y^{V}+8y'''+16y'=0.$

D. *Җаваплар.*

1. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$. 2. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$. 3. $y=C_1+C_2e^{2x}$.
4. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{\frac{x}{2}}$. 5. $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.
6. $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. 7. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.
8. $y=e^{x}\left(C_1+C_2x\right)$. 9. $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1+C_2x\right)$.
10. $y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)$.
11. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.
12. $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$.
13. $y=e^{x\sqrt{3}}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x+e^{-x\sqrt{3}}\left(C_5\cos x+C_6\sin x\right)$.
14. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+e^{3x}\left(C_4+C_5x\right)$.

15. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}$.
16. $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$. 17. $y = e^x \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right)$.
18. $y = e^x (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x}$. 19. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$.
20. $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x$.

§9. n нчы тәртиптәге сызыкча бериш булмаган дифференциаль тигезләмәләрне даимиләрне вариацияләү ысулы (Лагранж ысулы) белән чишү

А.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

рәвешендәге n нчы тәртиптәге сызыкча дифференциаль тигезләмә һәм аңа тиңдәш

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

n нчы тәртиптәге сызыкча бериш дифференциаль тигезләмә бирелсен.

Әгәр (2) СБДТ нең

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ ... + C_n\, y_n$$

гомуми чишелеше (монда C_1, C_2, ..., C_n – ирекле даимиләр) билгеле булса, (1) СББДТ нең гомуми чишелешен даимиләрне вариацияләү ысулы (Лагранж ысулы) белән табарга мөмкин.

Бу очракта (1) СББДТ нең гомуми чишелешен

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ ... + C_n(x)\, y_n \qquad (3)$$

рәвешендә эзлибез. Монда $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ ниндидер функцияләр дип фараз итәбез. Ул функцияләрне

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ ... + C_n'(x)\, y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ ... + C_n'(x)\, y_n' = 0, \\ ...., \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ ... + C_n'(x)\, y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ ... + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

системасыннан табабыз. Мәсәлән, $C_i'(x) = \varphi_i(x)$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ булсын. Ул вакытта

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + C_i \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n).$$

Биредә C_i ирекле даимиләр. Бу кыйммәтләрне (3) функциясенә куйсак, (1) СББДТ нең гомуми чишелеше табыла:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ ... + C_n(x)\, y_n +$$

$$+ y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx + \ ... + \ y_n \int \varphi_n(x)dx = y_1 + \bar{y}.$$

B. *Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.*

`1 мисал`. Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Чишү. Тиңдәш СБДТ $y''+y = 0$ рәвешендә була. Аның $\lambda^2+1 = 0$ характеристик тигезләмәсенең $\lambda_{1,2} = \pm i$ комплекс тамырлары бар. Димәк, чишелешләрнең фундаменталь системасы $\cos x$, $\sin x$ рәвәшендә була һәм СБДТ нең гомуми чишелеше түбәндәгечә языла:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Бирелгән СББДТ нең гомуми чишелешен

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x \tag{4}$$

рәвешендә эзлибез. Монда $C_1(x)$, $C_2(x)$ – билгесез функцияләр. Аларны табу өчен

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

системасын төзибез. Бу системаны чишәбез:

$$C_1'(x) = -tg\, x, \quad C_2'(x) = 1.$$

Интеграллап, табабыз:

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1, \quad C_2(x) = x + C_2.$$

$C_1(x)$ һәм $C_2(x)$ аңлатмаларын (4) кә куеп, бирелгән тигезләмәнең гомуми чишелешен табабыз:

$$y = (\ln|\cos x| + C_1)\cos x + (x + C_2)\sin x.$$

C. ***Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.***

Дифференциаль тигезләмәләрне даимиләрне вариацияләү ысулы (Лагранж ысулы) белән чишәргә:

1. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.
2. $y'' - y' = \frac{1}{e^x+1}$.
3. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.
4. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$.
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$.
6. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$.
7. $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$.
8. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$.
9. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.
10. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.
11. $y'' + 4y = 2\mathrm{tg}x$.
12. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.
13. $y'' - y = \frac{e^x}{e^x+1}$.
14. $y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}$.
15. $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

D. ***Җаваплар.***

1. $y = (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\sin x$. 2. $y = C_1 e^x + C_2 + (e^x + 1)\ln(1 + e^{-x})$.
3. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{\cos 2x}{2\cos x}$. 4. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{3}{4}\cos x\sqrt{\mathrm{ctg}x}$.
5. $y = (C_1 + C_2 x)e^x - e^x\ln\sqrt{1+x^2} + xe^x\mathrm{arctg}x$.
6. $y = (C_1 - x)e^{-x}\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)e^{-x}\sin x$.
7. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{\cos 2x}{\sin x}$. 8. $y = C_1 e^x + C_2 - \cos e^x$.
9. $y = e^x(x\ln|x| + C_1 x + C_2)$. 10. $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.
11. $y = \sin 2x\ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$.
12. $y = e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C_1 + C_2 x\right)$.
13. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\left(xe^x + 1 - \ln(e^x+1)(e^x + e^{-x})\right)$.
14. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + 1 - x + x\ln|x|$.
15. $y = C_1 + C_2\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{\cos x} + \cos x\ln|\cos x| + \sin x(-\mathrm{tg}x + x)$.

§10. Коэффициентлары даими булган n нчы тәртиптәге сызыкча бериш булмаган дифференциаль тигезләмәләрне билгесез коэффициентлар ысулы белән чишү

A. Коэффициентлары даими булган сызыкча бериш булмаган

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{1}$$

дифференциаль тигезләмәсе һәм аңа тиңдәш сызыкча бериш

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2}$$

дифференциаль тигезләмәсе бирелсен.

Сызыкча бериш булмаган тигезләмәнең гомуми чишелеше аңа тиңдәш бериш дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелеше y_1 һәм бериш булмаган дифференциаль тигезләмәнең аерым чишелеше $\bar{y}$ ның суммасы була:

$$y = y_1 + \bar{y}.$$

Әгәр сызыкча бериш дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелеше табылса, сызыкча бериш булмаган дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелешен даимиләрне вариацияләү ысулы белән табарга мөмкин. Ләкин даимиләрне вариацияләү ысулы еш кына зур исәпләүләргә китерә.

Коэффициентлары даими булган сызыкча бериш булмаган дифференциаль тигезләмәнең уң кисәге

1) $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$;

2) $f(x) = e^{\alpha x}(P^{(1)}_{m_1}(x)\cos\beta x + P^{(2)}_{m_2}(x)\sin\beta x)$

рәвешендә булганда, ул дифференциаль тигезләмәнең аерым чишелеше $\bar{y}$ ны билгесез коэффициентлар ысулы белән табалар. Монда $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $P_m(x)$ – m нчы дәрәҗәдәге күпбуын, $P^{(1)}_{m_1}(x)$, $P^{(2)}_{m_2}(x)$ – берсе m нчы дәрәҗәдәге, ә икенчесе m нан зур булмаган дәрәҗәдәге күпбуыннар.

Беренче очракта аерым чишелешне

$$\bar{y} = x^{\lambda} e^{\alpha x} Q_m(x)$$

рәвешендә, ә икенче очракта

$$\bar{y} = x^{\lambda} e^{\alpha x}(Q^{(1)}_m(x)\cos\beta x + Q^{(2)}_m(x)\sin\beta x)$$

рәвешендә эзлиләр. Монда λ – беренче очракта α санының, ә икенче очракта $\alpha \pm i\beta$ санының характеристик тигезләмәнең ничә кабатлы тамыры булуын күрсәтә (әгәр ул саннар характеристик тигезләмәнең тамыры булмаса, $\lambda = 0$ дип алалар), $Q_m(x)$, $Q_m^{(1)}(x)$, $Q_m^{(2)}(x)$ – коэффициентлары билгесез булган m нчы дәрәҗәдәге күпбуыннар: $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$.

Билгесез коэффициентларны табу өчен $\bar{y}$ аерым чишелешен (1) тигезләмәсенә куябыз. Килеп чыккан тигезлектә тиңдәш буыннар алдындагы коэффициентларны тигезләп, билгесез коэффициентларга карата сызыкча тигезләмәләр системасы төзибез. Ул системаны чишеп, билгесез коэффициентларны табабыз.

В. ***Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.***

`1 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 e^x.$$

`Чишү.` Бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәгә тиңдәш

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

бериш тигезләмәсенең гомуми чишелешен табыйк. Аның характеристик тигезләмәсе

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

рәвешендә була. Аны чишеп,

$$k_1 = 2, k_2 = 3$$

характеристик тамырларын табабыз. Шуңа күрә,

$$e^{2x}, e^{3x}$$

функцияләре бирелгән тигезләмә чишелешләренең фундаменталь системасын тәшкил итәләр. Димәк, сызыкча бериш тигезләмәнең гомуми чишелеше

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

рәвешендә була.

Бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәнең уң кисәге

$$f(x) = x^2e^x = e^{\alpha x}P_m(x)$$

рәвешендә булганлыктан, $\alpha = 1$, $m = 2$ була. $\alpha = 1$ саны характеристик тигезләмәнең тамыры булмаганлыктан, бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәнең аерым чишелешен

$$\bar{y} = e^x(Ax^2 + Bx + C)$$

рәвешендә эзлибез. Моннан,

$$\bar{y}' = e^x(Ax^2 + Bx + C + 2Ax + B) = e^x(Ax^2 + (2A + B)x + C + B),$$

$$\bar{y}'' = e^x(Ax^2 + (2A + B)x + C + B + 2Ax + 2A + B) =$$

$$= e^x(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B + C).$$

$\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ кыйммәтләрен бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәгә куеп, табабыз:

$$e^x(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B + C) - 5e^x(Ax^2 + (2A + B)x + C + B)+$$

$$+6e^x(Ax^2 + Bx + C) = x^2e^x,$$

$$e^x(2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2A - 3B + 2C) = x^2e^x,$$

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2A - 3B + 2C = x^2.$$

Соңгы тигезлекнең ике кисәгендәге x ның берүк дәрәҗәләре алдындагы коэффициентларны тигезләп

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2B - 6A = 0, \\ 2A - 3B + 2C = 0 \end{cases}$$

системасын табабыз. Моннан,

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = \frac{7}{4}.$$

Димәк, бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәнең аерым чишелеше

$$\bar{y} = e^x \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)$$

функциясе була. Ә ул тигезләмәнең гомуми чишелеше

$$y = y_1 + \bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + e^x \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right).$$

`2 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y'' - 5y' + 6y = (2x - 1)e^{3x}.$$

`Чишү.` Бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәнең уң кисәге

$$f(x) = (2x - 1)e^{3x} = e^{\alpha x}P_m(x)$$

рәвешендә булганлыктан, $\alpha = 3$, $m = 1$ була. $\alpha = 3$ саны характеристик тигезләмәнең гади тамыры булганлыктан, бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәнең аерым чишелешен

$$\bar{y} = e^{3x}x(Ax + B) = e^{3x}(Ax^2 + Bx)$$

рәвешендә эзлибез. Моннан,

$$\bar{y}' = e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B) = e^{3x}(3Ax^2 + (2A + 3B)x + B),$$

$$\bar{y}'' = e^{3x}(9Ax^2 + 3(2A + 3B)x + 3B + 6Ax + 2A + 3B) =$$

$$= e^{3x}(9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B).$$

$\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ кыйммәтләрен бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәгә куеп, табабыз:

$$e^{3x}(9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B) - 5e^{3x}(3Ax^2 + (2A + 3B)x + B) +$$

$$+6e^{3x}(Ax^2 + Bx) = (2x - 1)e^{3x},$$

$$e^x(2Ax + 2A + B) = (2x - 1)e^{3x},$$

$$2Ax + 2A + B = 2x - 1.$$

Соңгы тигезлекнең ике кисәгендәге x ның берүк дәрәҗәләре алдындагы коэффициентларны тигезләп

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ 2A + B = -1 \end{cases}$$

системасын табабыз. Моннан,

$$A = 1, \quad B = -3.$$

Димәк, бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәнең аерым чишелеше

$$\bar{y} = e^{3x}(x^2 - 3x)$$

функциясе була. Ә ул тигезләмәнең гомуми чишелеше

$$y = y_1 + \bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^{3x}(x^2 - 3x).$$

`3 мисал.` Дифференциаль тигезләмәне чишәргә:

$$y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7\sin x).$$

`Чишү.` Бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәгә тиңдәш

$$y'' + y' - 2y = 0$$

бериш тигезләмәсенең гомуми чишелешен табыйк. Аның характеристик тигезләмәсе

$$k^2 + k - 2 = 0$$

рәвешендә була. Аны чишеп,

$$k_1 = -2, \quad k_2 = 1$$

характеристик тамырларын табабыз. Шуңа күрә,

$$e^{-2x}, \quad e^x$$

функцияләре бирелгән тигезләмә чишелешләренең фундаменталь системасын тәшкил итәләр. Димәк, сызыкча бериш тигезләмәнең гомуми чишелеше

$$y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

рәвешендә була. Бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәнең уң кисәге

$$f(x) = e^x(\cos x - 7\sin x) = e^{\alpha x}(P_{m_1}^{(1)}(x)\cos\beta x + P_{m_2}^{(2)}(x)\sin\beta x)$$

рәвешендә булганлыктан, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ була. $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ саны характеристик тигезләмәнең тамыры булмаганлыктан, бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәнең аерым чишелешен

$$\bar{y} = e^x(A\cos x + B\sin x)$$

рәвешендә эзлибез. Моннан,

$$\bar{y}' = e^x(A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x) =$$

$$= e^x((A + B)\cos x + (B - A)\sin x).$$

$$\bar{y}'' = e^x((A + B)\cos x + (B - A)\sin x - (A + B)\sin x + (B - A)\cos x) =$$

$$= e^x(2B\cos x - 2A\sin x).$$

$\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ кыйммәтләрен бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәгә куеп, табабыз:

$$e^x(2B\cos x - 2A\sin x) + e^x((A + B)\cos x + (B - A)\sin x) -$$

$$-2e^x(A\cos x + B\sin x) = e^x(\cos x - 7\sin x),$$

$$e^x((-A + 3B)\cos x + (-3A - B)\sin x) = e^x(\cos x - 7\sin x),$$

$$(-A + 3B)\cos x + (-3A - B)\sin x = \cos x - 7\sin x.$$

Соңгы тигезлекнең ике кисәгендәге $\cos x$ һәм $\sin x$ алдындагы коэффициентларны тигезләп,

$$\begin{cases} -A + 3B = 1, \\ -3A - B = -7 \end{cases}$$

системасын табабыз. Моннан,

$$A = 2, \quad B = 1.$$

Димәк, бирелгән сызыкча бериш булмаган тигезләмәнең аерым чишелеше

$$\bar{y} = e^x(2\cos x + \sin x)$$

функциясе була. Ә ул тигезләмәнең гомуми чишелеше

$$y = y_1 + \bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + e^x(2\cos x + \sin x).$$

C. ***Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.***

Дифференциаль тигезләмәләрне билгесез коэффициентлар ысулы белән чишәргә:

1. $y'' + 2y' + 2 = 0.$
2. $y'' + 9y - 9 = 0.$
3. $y''' + y'' = 1.$
4. $5y''' - 7y'' - 3 = 0.$
5. $y^{IV} - 6y''' + 6 = 0.$
6. $3y^{IV} + y''' = 2.$
7. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 1.$
8. $y'' - 4y' + 4y = x^2.$
9. $y'' + 8y' = 8x.$
10. $y'' - 2ky' + k^2 y = e^x \left(k \neq 1\right).$
11. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x.$
12. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x.$
13. $y'' - 2y' + y = x^3.$
14. $y^{IV} + y'' = x^2 + x.$
15. $y'' + y = x^2 \sin x.$
16. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x.$
17. $y''' - y = \sin x.$
18. $y^{IV} - 2y'' + y = \cos x.$
19. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \cos 2x.$
20. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \left(\sin x + 2\cos x\right).$

D. ***Җаваплар.***

1\. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - x.$ 2. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 1.$
3\. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{x^2}{2}.$ 4. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\frac{7}{5}x} - \frac{3}{14}x^2.$
5\. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{6x} + \frac{x^3}{6}.$ 6. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-\frac{x}{3}} + \frac{x^3}{3}.$
7\. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(C_3 + C_4 x\right) e^x + 1.$ 8. $y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}.$
9\. $y = C_1 + C_2 e^{-8x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}.$ 10. $y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}.$

11. $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \left(x^2 + 3x + 1\right).$

12. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^2}{4} e^x.$

13. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x + x^3 + 6x^2 + 18x + 24.$

14. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2.$

15. $y = \left(C_1 + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{6}\right) \cos x + \left(C_2 + \frac{x^2}{4}\right) \sin x.$

16. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x} + \left[\left(6 - x^2\right) \cos x + 4x \sin x\right] e^{-x}.$

17. $y = C_1 e^x + \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} (\cos x - \sin x).$

18. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x + (C_3 + C_4 x)\, e^{-x} + \frac{1}{4} \cos x$

19. $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) e^x - \frac{e^x}{8} \sin 2x.$

20. $y = \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x + x \sin x\right) e^{2x}$

III бүлек

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР СИСТЕМАСЫ

§11. Дифференциаль тигезләмәләрнең нормаль системасы һәм аны юк итү ысулы белән чишү

А.

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

рәвешендәге система *беренче тәртиптәге гади дифференциаль тигезләмәләр системасы* дип атала. Биредә y_1, y_2, ..., y_n – x үзгәрешлесеннән бәйле билгесез функцияләр.

Чыгарылмага карата чишелгән

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{1}$$

системасы *дифференциаль тигезләмәләрнең нормаль системасы* дип атала.

(1) дифференциаль тигезләмәләр системасына кергән дифференциаль тигезләмәләр саны ул *системаның тәртибе* дип атала. Мәсәлән, (1) ул беренче тәртиптәге гади дифференциаль тигезләмәләрнең n нчы тәртиптәге нормаль системасы.

Өзлексез дифференциалланучы һәм бу системага кергән тигезләмәләрнең һәрберсен бердәйлеккә әйләндерүче n функция:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ..., \quad y_n = \varphi_n(x)$$

(1) *дифференциаль тигезләмәләр системасының чишелеше* дип атала.

(1) дифференциаль тигезләмәләр системасының

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \quad ..., \quad y_n(x_0) = y_n^{(0)} \tag{2}$$

башлангыч шартларын канәгатьләндерүче чишелешен табу мәсьәләсе *Коши мәсьәләсе* дип атала.

Теорема (Пикар). *Әгәр (1) дифференциаль тигезләмәләр системасының уң кисәгендәге f_i $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ функцияләре өзлексез һәм $y_1, y_2, ..., y_n$ аргументлары буенча Липшиц шартын канәгатьләндерсәләр, x_0 ноктасының ниндидер тирәлегендә (1) дифференциаль тигезләмәләр системасының (2) башлангыч шартларын канәгатьләндерүче бердән-бер чишелеше була.*

Әгәр n ирекле даимигә бәйле булган

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases}$$

n функциядән торган система өчен түбәндәге шартлар үтәлсә:

1) C_i $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ ирекле даимиләренең теләсә кайсы кыйммәтләре өчен (1) дифференциаль тигезләмәләр системасын канәгатьләндерсә,

2) C_i $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ билгесез даимиләргә карата чишелсә:

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ C_2 = \psi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_n = \psi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases}$$

ягъни (2) башлангыч шартлары нинди булуга карамастан,

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, ..., C_n^{(0)}), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, ..., C_n^{(0)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, ..., C_n^{(0)}) \end{cases}$$

функцияләре бу шартларны канәгатьләндерерлек $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, ..., C_n^{(0)}$ кыйммәтләре табылса, ул система – (1) дифференциаль тигезләмәләр системасының гомуми чишелеше дип атала.

Гомуми чишелештә ирекле даимиләр урынына конкрет кыйммәтләр ($\pm\infty$ очракларын да кертеп) куеп табылган чишелеш (1) *дифференциаль тигезләмәләр системасының аерым чишелеше* дип атала.

Коши мәсьәләсенең бердәнберлек шарты бер генә ноктасында да үтәлмәгән чишелеш *үзенчәлекле чишелеш* дип атала.

(1) дифференциаль тигезләмәләрнең n нчы тәртиптәге нормаль системасын **юк итү ысулы** белән чишергә мөмкин. Аның асылы (1) системасын бер n нчы тәртиптәге гади дифференциаль тигезләмәгә китерүдән тора. Аның өчен (1) дифференциаль тигезләмәләрнең нормаль системасының бер тигезләмәсен, мәсәлән, беренчесен x буенча дифференциаллыйбыз:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Бу тигезлеккә $\frac{dy_i}{dx}$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ чыгарылмалары урынына (1) системасындагы кыйммәтләрен куябыз:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}f_2 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n,$$

яки, кыскача

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Бу тигезлекне кабат x буенча дифференциаллап һәм $\frac{dy_i}{dx}$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ чыгарылмалары урынына (1) системасындагы кыйммәтләрен куеп,

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

тигезлеген табабыз. Шул рәвешле дәвам итеп,

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

системасын табабыз. Беренче $(n-1)$ тигезләмәдән y_2, y_3, ..., y_n функцияләрен табабыз:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}) \end{cases} \tag{3}$$

һәм табылган кыйммәтләрне соңгы тигезләмәгә куябыз:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', ..., y_n^{(n-1)}).$$

Шулай итеп, y_1 функциясенә карата n нчы тәртиптәге тигезләмә килеп чыга.

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

ул тигезләмәнең гомуми чишелеше булсын. Бу функцияне $(n-1)$ мәртәбә дифференциаллап (3) системасы тигезләмәләренә куйсак, y_2, y_3, ..., y_n функцияләрен табыбыз:

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_3 = \psi_3(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}.$$

B. *Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.*

`1 мисал.` Коши мәсьәләсен чишәргә:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases}$$

$$x(0) = 6, \quad y(0) = -2.$$

`Чишү.` Системаның икенче тигезләмәсеннән табабыз:

$$x = -3y - \frac{dy}{dt}. \tag{4}$$

Моннан,

$$\frac{dx}{dt} = -3\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Табылган x һәм $\frac{dx}{dt}$ кыйммәтләрен бирелгән системаның беренче тигезләмәсенә куеп,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

тигезләмәсен табабыз. Ул икенче тәртиптәге сызыкча бериш тигезләмә. Аның гомуми чишелеше булып

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t}$$

функциясе тора. Бу функцияне (4) кә куеп, табабыз:

$$x = -4C_1e^t - 2C_2e^{-t}.$$

Шулай итеп, бирелгән ситемасының гомуми чишелеше

$$x = -4C_1e^t - 2C_2e^{-t}, \quad y = C_1e^t + C_2e^{-t} \tag{5}$$

рәвешендә табыла.

Системаның бирелгән башлангыч шартларны канәгатьләндерүче аерым чишелешен табыйк. Аның өчен гомуми чишелешне башлангыч шартларга куябыз. Ул вакытта C_1 һәм C_2 гә карата

$$\begin{cases} 6 = -4C_1 - 2C_2, \\ -2 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

системасы табыла.

Бу системаның чишелеше $C_1 = -1$ һәм $C_2 = -1$. Табылган C_1 һәм C_2 кыйммәтләрен (5) кә куеп, Коши мәсьәләсенең чишелешен табабыз:

$$x = 4e^t + 2e^{-t}, \quad y = -e^t - e^{-t}.$$

`2 мисал.` Коши мәсьәләсен чишәргә:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{y-t}, \\ y' = 1 - \frac{1}{x}, \end{cases}$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

`Чишү`. Беренче дифференциаль тигезләмәне буынлап дифференциаллыйбыз:

$$x'' = \frac{-(y'-1)}{(y-t)^2}.$$

Бу тигезлеккә y' чыгарылмасы урынына системасындагы кыйммәтне (икенче тигезләмәдән) куябыз:

$$x'' = \frac{-\left(1-\frac{1}{x}-1\right)}{(y-t)^2} = \frac{1}{x(y-t)^2}.$$

Шулай итеп,

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{y-t}, \\ x'' = \frac{1}{x(y-t)^2} \end{cases}$$

системасын табабыз.

Беренче тигезләмәдән y функциясен табып

$$y = \frac{1}{x'} + t,$$

табылган кыйммәтне икенче тигезләмәгә куйсак, x функциясенә карата 2 нче тәртиптәге

$$x'' = \frac{(x')^2}{x}$$

тигезләмәсе килеп чыга. Бу аргумент кермәгән икенче тәртиптәге дифференциаль тигезләмә. Аның гомуми чишелеше

$$x = C_2 e^{C_1 t}.$$

Бу чишелешне дифференциаллап ($x' = C_2 C_1 e^{C_1 t}$), $y = \frac{1}{x'} + t$ тигезләмәсенә куйсак,

$$y = \frac{1}{x'} + t = \frac{1}{C_2 C_1 e^{C_1 t}} + t$$

табыла.

Шулай итеп, бирелгән дифференциаль тигезләмәләр системасының гомуми чишелеше

$$\begin{cases} x = C_2 e^{C_1 t}, \\ y = \frac{1}{C_2 C_1 e^{C_1 t}} + t \end{cases}$$

була.

$x(0) = 1$, $y(0) = -1$ башлангыч шартларын исәпкә алып, табабыз:

$$\begin{cases} x(0) = C_2 e^{C_1 0} = C_2 = 1, \\ y(0) = \frac{1}{C_2 C_1 e^{C_1 0}} + 0 = \frac{1}{C_2 C_1} = -1. \end{cases}$$

Моннан,

$$\begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 = -1. \end{cases}$$

Шулай итеп, бирелгән дифференциаль тигезләмәләр системасының $x(0) = 1$, $y(1) = -1$ башлангыч шартларын канәгатьләндерүче аерым чишелеше:

$$\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t - e^{t}. \end{cases}$$

C. ***Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.***

Дифференциаль тигезләмәләр системаларын юк итү ысулы белән чишәргә:

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -9y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t, \\ \frac{dy}{dt} = x - t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0, \; x(0) = 1, \; y(0) = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y, \; x(0) = -2, \; y(0) = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + z, \\ \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = -x + z. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt} + \frac{dy}{dt} + x = 0, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = x^2 + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt} + x, \ x(0) = 1, \ x'(0) = 1, \ y(0) = 0. \end{cases}$

D. *Жаваплар.*

1. $\begin{cases} x = 3C_1 \cos 3t - 3C_2 \sin 3t, \\ y = C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = C_1e^t - C_2e^{-t} + t - 1, \\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} - t + 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = (\sin t - 2\cos t)e^{-t}, \\ y = e^{-t} \cos t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}, \\ y = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + \cos t. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ y = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ z = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t, \\ y = C_1 \sin t - C_2 \cos t + C_3e^t, \\ z = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3e^t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t, \\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = C_1 + C_2t + C_3t^2, \\ y = -(C_1 + 2C_3)t - C_2\frac{t^2}{2} - C_3\frac{t^3}{3} + C_4. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t} - e^{2t}. \end{cases}$

§12. Дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш системалары

А.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}$$

яки, кыскача

$$y_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x)y_i + f_k(x) \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ n) \tag{1}$$

рәвешендәге система *сызыкча система* дип атала. Биредә $a_{ki}(x)$, $f_k(x)$ $(k = 1,\ 2,\ ...,\ n,\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ – ниндидер аралыкта билгеләнгән функцияләр.

Әгәр (1) системасында $f_k(x) \not\equiv 0$ $(k = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ булса, ул *дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш булмаган системасы* (ДТСББС) дип, ә киресенчә булганда $(f_k(x) \equiv 0\ (k = 1,\ 2,\ ...,\ n))$, ягъни

$$y_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x)y_i \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ n) \tag{2}$$

системасы *дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш системасы* (ДТСБС) дип атала.

(2) дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш системасының n чишелеше бирелсен:

$$\begin{array}{l} y_{11},\ y_{12},\ ...,\ y_{1n}\ \ (1 \text{ нче чишелеш}), \\ y_{21},\ y_{22},\ ...,\ y_{2n}\ \ (2 \text{ нче чишелеш}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n1},\ y_{n2},\ ...,\ y_{nn}\ \ (n \text{ нчы чишелеш}). \end{array} \tag{3}$$

Әгәр (2) дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш системасының n чишелешләр системасы өчен X аралыгында

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{ik} \equiv 0 \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ n)$$

тигезлекләре үтәлерлек кимендә бер нольгә тигез булмаган α_1, α_2, ..., α_n саннары табылса, бирелгән чишелешләр системасы $[a, b]$ кисемтәсендә *сызыкча бәйле* дип атала. Киресенчә булганда, ягъни бу тигезлекләр $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ булганда гына үтәлгәндә, ул чишелешләр системасы $[a, b]$ кисемтәсендә *сызыкча бәйсез* дип атала.

(3) чишелешләре ярдәмендә

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

билгеләгече төзибез. Ул билгеләгеч *Вронский билгеләгече* яки *вронскиан* дип атала.

Теорема 1. *(2) ДТСБС ның (3) n чишелешләр системасы $[a, b]$ кисемтәсендә сызыкча бәйсез булсын өчен аның вронскианы $W(x)$ $[a, b]$ кисемтәсенең кимендә бер ноктасында нольгә тигез булмавы кирәк һәм шул җитә.*

(2) ДТСБС ның (3) n чишелешләр системасы $[a, b]$ кисемтәсендә сызыкча бәйсез булса, ул чишелешләр системасы $[a, b]$ кисемтәсендә *чишелешләрнең фундаменталь системасы* дип атала.

Теорема 2. *Әгәр (2) ДТСБС ның (3) n чишелешләр системасы чишелешләрнең фундаменталь системасын тәшкил итсәләр, (2) ДТСБС ның гомуми чишелеше*

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik} \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ n)$$

рәвешендә була. Биредә C_i $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ – ирекле даимиләр.

Коэффициентлары даими булган дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш системасын карыйк

$$y_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} y_i \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ n). \tag{4}$$

Биредә a_{ki} $(k = 1,\ 2,\ ...,\ n,\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ – бирелгән саннар.

Коэффициентлары даими булган ДТБСС чишү өчен юк итү ысулыннан тыш, Эйлер ысулы да кулланыла. Бу ысул түбәндәгедән тора. (4) системасының аерым чишелешен

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \quad ..., \quad y_n = \gamma_n e^{\lambda x} \tag{5}$$

рәвешендә эзлибез. Биредә γ_1, γ_2, ..., γ_n саннарының кимендә берсе нольгә тигез түгел. (5) функцияләрен (4) системасына куеп табабыз:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + ... + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + ... + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ .... \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Бу бериш системаның ноль булмаган чишелешләре булсын өчен, аның билгеләгече нольгә тигез булырга тиеш:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & ... & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{..} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

(7) тигезләмәсе (6) *дифференциаль тигезләмәләр системасының характеристик тигезләмәсе* дип, ә аның тамырлары *характеристик тигезләмәнең тамырлары* дип атала. Һәр характеристик тамырга (5) рәвешендәге кимендә бер чишелеш туры килә. Монда төрле очрак булырга мөмкин:

1) характеристик тигезләмәнең барлык тамырлары реаль һәм төрле;

2) характеристик тигезләмәнең тамырлары төрле, ләкин араларында комплекс тамырлар бар;

3) характеристик тигезләмәнең тамырлары арасында реаль һәм комплекс кабатлы тамырлар бар.

Бу очракларны аерым карыйк.

1) (7) характеристик тигезләмәсенең үзара тигез булмаган n реаль тамыры $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ булсын. Ул вакытта

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + ... + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda_i)\gamma_2 + ... + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + ... + (a_{nn} - \lambda_i)\gamma_n = 0, \end{cases}$$

системасын чишеп, ноль булмаган

$$\gamma_1 = \gamma_{i1}, \quad \gamma_2 = \gamma_{i2}, \quad ..., \quad \gamma_n = \gamma_{in}, \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$$

чишелешләрен табабыз. Бу кыйммәтләрне һәм λ_i не (5) функцияләренә куеп, λ_i гә тиңдәш булган (4) системасының аерым чишелешләрен табабыз:

$$y_{i1} = \gamma_{i1}e^{\lambda_i x}, \quad y_{i2} = \gamma_{i2}e^{\lambda_i x}, \quad ..., \quad y_{in} = \gamma_{in}e^{\lambda_i x} \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n).$$

Характеристик тигезләмәнең барлык $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ тамырларына тиңдәш чишелешләрен табып, чишелешләрнең фундаменталь системасын төзибез:

$$\begin{array}{llll} \gamma_{11}e^{\lambda_1 x}, & \gamma_{12}e^{\lambda_1 x}, & ..., & \gamma_{1n}e^{\lambda_1 x}, \\ \gamma_{21}e^{\lambda_2 x}, & \gamma_{22}e^{\lambda_2 x}, & ..., & \gamma_{2n}e^{\lambda_2 x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{n1}e^{\lambda_n x}, & \gamma_{n2}e^{\lambda_n x}, & ..., & \gamma_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{array}$$

Бу вакытта (4) системасының гомуми чишелеше

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i \gamma_{ik} e^{\lambda_i x} \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ n)$$

рәвешендә була.

2) $\alpha + i\beta$ комплекс саны характеристик тигезләмәнең тамыры булса, $\alpha - i\beta$ комплекс саны да ул тигезләмәнең тамыры була. $\alpha + i\beta$ – характеристик тигезләмәнең тамырына (4) системасының

$$y_1 = \gamma_1 e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad ..., \quad y_n = \gamma_n e^{(\alpha+i\beta)x}$$

аерым чишелеше тиңдәш була. Монда $\gamma_1,\ \gamma_2,\ ...,\ \gamma_n \in \mathbb{C}$.

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{21}, \quad \gamma_2 = \gamma_{12} + i\gamma_{22}, \quad ..., \quad \gamma_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n}$$

дип алып,

$$y_1 = (\gamma_{11} + i\gamma_{21})e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2 = (\gamma_{12} + i\gamma_{22})e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad ...,$$

$$y_n = (\gamma_{12} + i\gamma_{22})e^{(\alpha+i\beta)x}$$

чишелешен табабыз. Аның реаль һәм уйланма кисәген аерып,

$$y_{11} = e^{\alpha x}(\gamma_{11}\cos\beta x - \gamma_{21}\sin\beta x), \quad y_{21} = e^{\alpha x}(\gamma_{11}\sin\beta x + \gamma_{21}\cos\beta x),$$

$$y_{12} = e^{\alpha x}(\gamma_{12}\cos\beta x - \gamma_{22}\sin\beta x), \quad y_{22} = e^{\alpha x}(\gamma_{12}\sin\beta x + \gamma_{22}\cos\beta x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{1n} = e^{\alpha x}(\gamma_{1n}\cos\beta x - \gamma_{2n}\sin\beta x), \quad y_{2n} = e^{\alpha x}(\gamma_{1n}\sin\beta x + \gamma_{2n}\cos\beta x)$$

аерым чишелешләре табыла.

$\alpha - i\beta$ комплекс саны яңа сызыкча бәйсез чишелеш бирми.

3) λ_1 – характеристик тигезләмәнең k кабатлы тамыры булсын. Ул реаль дә, комплекс та булырга мөмкин. Ул вакытта (4) тигезләмәсенең гомуми чишелешен

$$y_1 = P_{k-1}^{(1)}(x)e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = P_{k-1}^{(2)}(x)e^{\lambda_1 x}, \quad ..., \quad y_n = P_{k-1}^{(n)}(x)e^{\lambda_1 x} \qquad (8)$$

рәвешендә эзлибез. Биредә $P_{k-1}^{(i)}(x)$ – $(k-1)$ нче дәрәҗәдәге әлегә билгесез күпбуыннар. Ул күпбуыннарның коэффициентларын табу өчен (8) функцияләрен (4) системасына куябыз. Уң һәм сул яктагы охшаш буыннар янындагы коэффициентларны тигезләсәк, билгесез коэффициентларга карата сызыкча алгебраик тигезләмәләр системасы килеп чыга. Ул системаның гомуми чишелешен табабыз, ягъни барлык билгесез коэффициентларны k коэффициенты аша күрсәтәбез. Чиратлап, ирекле коэффициентларның берсен 1 гә, калганнарын 0 гә тигезләп, λ_1 гә тиңдәш булган сызыкча бәйсез k аерым чишелешен табабыз.

Әгәр λ_1 реаль булса, югарыда төзелгән k аерым чишелеш реаль була. Әгәр $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ комплекс булса, k аерым чишелеш шулай ук комплекс була һәм алардан реаль һәм уйланма өлешләрен аерып алып $2k$ сызыкча бәйсез аерым чишелеш төзибез.

B. ***Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.***

`1 мисал.` Дифференциаль тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$$

`Чишү.` Бирелгән системаның аерым чишелешен

$$y = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad z = \gamma_2 e^{\lambda x}$$

рәвешендә эзлибез. Моннан,

$$\begin{cases} (2-\lambda)\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 + (4-\lambda)\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Шулай итеп,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ягъни,

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

характеристик тигезләмәсен төзибез. Аның тамырлары

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5.$$

$\lambda_1 = 1$ булганда

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Моннан, $\gamma_2 = -\gamma_1$. γ_1 не үзебез сайлыйбыз, мәсәлән, $\gamma_1 = 1$. Ул вакытта $\gamma_2 = -\gamma_1 = -1$. Шулай итеп,

$$y = e^x, \quad z = -e^x$$

– беренче чишелеш.

$\lambda_2 = 5$ булганда

$$\begin{cases} -3\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - 3\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Моннан, $\gamma_2 = 3\gamma_1$. γ_1 не үзебез сайлыйбыз, мәсәлән, $\gamma_1 = 1$. Ул вакытта $\gamma_2 = 3\gamma_1 = 3$. Шулай итеп,

$$y = e^{5x}, \quad z = 3e^{5x}$$

– икенче чишелеш.

Ул функцияләр чишелешләрнең фундаменталь системасын төзиләр. Шуңа күрә, гомуми чишелеш

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}, \\ z = -C_1 e^x + 3C_2 e^{5x} \end{cases}$$

рәвешендә була.

`2 мисал.` Дифференциаль тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$$

`Чишү.` Бирелгән системаның аерым чишелешен

$$y = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad z = \gamma_2 e^{\lambda x}$$

рәвешендә эзлибез. Моннан,

$$\begin{cases} (2 - \lambda)\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + (2 - \lambda)\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Шулай итеп,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ягъни,

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

характеристик тигезләмәсен төзибез. Аның тамырлары

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

$\lambda_1 = 2 + i$ булганда

$$\begin{cases} -i\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Моннан, $\gamma_2 = -i\gamma_1$. γ_1 не үзебез сайлыйбыз, мәсәлән, $\gamma_1 = 1$. Ул вакытта $\gamma_2 = -i$. Шулай итеп,

$$y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i\sin x),$$

$$z = -ie^{(2+i)x} = -ie^{2x}(\cos x + i\sin x) = e^{2x}(\sin x - i\cos x)$$

аерым комплекс чишелешләр. Алардан реаль һәм уйланма кисәкләрен аерып алып, икешәр аерым реаль чишелешләр табабыз:

$$y_1 = e^{2x}\cos x, \quad y_2 = e^{2x}\sin x,$$

$$z_1 = e^{2x}\sin x, \quad z_1 = -e^{2x}\cos x.$$

Бу функцияләр чишелешләрнең фундаменталь системасын төзиләр. Шуңа күрә, гомуми чишелеш

$$\begin{cases} y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x), \\ z = e^{2x}(C_1\sin x - C_2\cos x) \end{cases}$$

рәвешендә була.

3 мисал. Дифференциаль тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} x_t' = -4x + 2y + 5z, \\ y_t' = 6x - y - 6z, \\ z_t' = -8x + 3y + 9z. \end{cases}$$

Чишү.

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ -8 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ягъни,

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

характеристик тигезләмәсенең

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

тамырларын табабыз.

Башта $\lambda_1 = 2$ гади характеристик тамырына тиңдәш

$$x = \gamma_1 e^{2x}, \quad y = \gamma_1 e^{2x}, \quad z = \gamma_3 e^{2x}$$

рәвешендәге аерым чишелешне табыйк. γ_1, γ_2, γ_3 саннарын

$$\begin{cases} -6\gamma_1 + 2\gamma_2 + 5\gamma_3 = 0, \\ 6\gamma_1 - 3\gamma_2 - 6\gamma_3 = 0, \\ -8\gamma_1 + 3\gamma_2 + 7\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

системасыннан табабыз:

$$\begin{cases} 2\gamma_1 - \gamma_2 - 2\gamma_3 = 0, \\ -6\gamma_1 + 2\gamma_2 + 5\gamma_3 = 0, \\ -8\gamma_1 + 3\gamma_2 + 7\gamma_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\gamma_1 - \gamma_2 - 2\gamma_3 = 0, \\ -\gamma_2 - \gamma_3 = 0, \\ -\gamma_2 - \gamma_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_1 = \frac{\gamma_2 + 2\gamma_3}{2}, \\ \gamma_2 = -\gamma_3. \end{cases}$$

γ_3 не үзебез сайлыйбыз, мәсәлән, $\gamma_3 = 2$. Ул вакытта $\gamma_2 = -\gamma_3 = -2$, $\gamma_1 = \frac{\gamma_2 + 2\gamma_3}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$. Шулай итеп, бу очракта аерым чишелеш

$$x_1 = e^{2x}, \quad y_1 = -2e^{2x}, \quad z_1 = 2e^{2x}$$

рәвешендә була.

Хәзер $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ кабатлы характеристик тамырына тиңдәш ике сызыкча бәйсез чишелеш төзик. (8) формуласы нигезендә, аңа

$$x = (At + B)e^t, \quad y = (Ct + D)e^t, \quad z = (Et + F)e^t \tag{9}$$

рәвешендәге чишелеш җавап бирә. A, B, C, D, E, F коэффициентларын бирегән системага куеп, табабыз:

$$\begin{cases} At + A + B = (-4A + 2Cy + 5E)t - 4A + 2Cy + 5E, \\ Ct + C + D = (6A - C - 6E)t + 6A - C - 6E, \\ Et + E + F = (-8A + 3C + 9E)t - 8A + 3C + 9E. \end{cases}$$

t алдындагы коэффициентларны һәм иректе буыннарны үзара тигезләп,

$$\begin{cases} A = -4A + 2Cy + 5E, \\ A + B = -4A + 2Cy + 5E, \\ C = 6A - C - 6E, \\ C + D = 6A - C - 6E, \\ E = -8A + 3C + 9E, \\ E + F = -8A + 3C + 9E \end{cases}$$

системасын табабыз. Моннан,

$$A = E, \quad C = 0, \quad B = E + F, \quad D = 3E,$$

шуның өстенә E һәм F ирекле. Димәк, (9) чишелеше

$$x = (Et + E + F)e^t, \quad y = 3Ee^t, \quad z = (Et + F)e^t$$

рәвешен ала. $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ кабатлы характеристик тамырына тиңдәш сызыкча бәйсез чишелешләр итеп

$$\begin{cases} x_2 = (t + 1)e^t, \; y_2 = 3e^t, \; z_2 = te^t, \\ x_3 = e^t, \qquad\quad y_3 = 0, \qquad z_3 = e^t, \end{cases}$$

чишелешләрен алырга мөмкин. Шулай итеп, бирелгән системаның гомуми чишелеше

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + (C_2t + C_2 + C_3)e^t, \\ y = -C_1e^{2t} + 3C_2e^t, \\ z = 2C_1e^{2t} + (C_2t + C_3)e^t \end{cases}$$

рәвешендә була.

C. ***Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.***

Дифференциаль тигезләмәләр системаларын чишәргә:

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - 8y = 0, \\ \frac{dy}{dt} - x - y = 0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x + 5y = 0, \\ \frac{dy}{dt} - x - y = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 3x, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 5x - 3y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 3x + y = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + z - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} = y - x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

$$13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases} \qquad 14. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y - 2z - 3x, \\ \frac{dy}{dt} = z + x, \\ \frac{dz}{dt} = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$$

D. *Җаваплар.*

1. $x = C_1e^t + C_2e^{5t},\ \ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.$
2. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t},\ \ y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}.$
3. $x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t},\ \ y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}.$
4. $x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t),\ \ y = e^{2t}\left[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\right].$
5. $x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t),\ \ y = e^t\left(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t\right).$
6. $x = (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t,\ \ y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t.$
7. $x = (C_1 + C_2t)e^{3t},\ \ y = \left(C_1 + C_2 + C_2t\right)e^{3t}.$
8. $x = (C_1 + C_2t)e^t,\ \ y = \left(2C_1 - C_2 + 2C_2t\right)e^t.$
9. $x = (C_1 + 2C_2t)e^{-t},\ \ y = \left(C_1 + C_2 + 2C_2t\right)e^{-t}.$
10. $x = (C_1 + 3C_2t)e^{2t},\ \ y = \left(C_2 - C_1 - 3C_2t\right)e^{2t}.$
11. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t},\ \ y = C_1e^t - 3C_3e^{-t},\ \ z = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}.$
12. $x = C_1 + 3C_2e^{2t},\ \ y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t},\ \ z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}.$
13. $x = C_2e^{2t} + C_3e^{3t},\ \ y = C_1e^t + C_2e^{2t},\ \ z = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}.$
14. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t},\ \ y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t},\ \ z = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}.$
15. $x = C_1e^t + C_3e^{-t},\ \ y = C_1e^t + C_2e^{2t},\ \ z = 2C_2e^{2t} - C_3e^{-t}.$

§13. Дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш булмаган системалары

A. Дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш булмаган

$$y'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x)y_i + f_k(x) \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ n) \tag{1}$$

системасы һәм аңа тиңдәш дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш

$$y'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x) y_i \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ n) \tag{2}$$

системасы бирелсен.

(1) дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш булмаган системасының гомуми чишелешен табу өчен аңа тиңдәш (2) дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш системасының y_{1k} гомуми чишелеше белән, (1) дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш булмаган системасының

$$\bar{y}_1, \quad \bar{y}_2, \quad ..., \quad \bar{y}_n$$

аерым чишелешенең бер системасы билгеле булу җитә. Ул вакытта (1) дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш булмаган системасының гомуми чишелеше

$$y_k = y_{1k} + \bar{y}_k = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik} + \bar{y}_k (k = 1,\ 2,\ ...,\ n) \tag{3}$$

рәвешендә була.

Әгәр (2) дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш системасының гомуми чишелеше билгеле булса, (1) дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш булмаган системасының гомуми чишелешен даимиләрне вариацияләү ысулы (Лагранж ысулы) белән табарга мөмкин. Бу ысул нигезендә (1)дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш булмаган системасының гомуми чишелешен

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_{ik} \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ n) \tag{4}$$

рәвешендә эзлибез. Монда $C_i(x)$ $(k = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ – әлегә билгесез функцияләр. Ул функцияләр

$$\sum_{i=1}^{n} C'_i(x) y_{ik} = f_k(x) (k = 1,\ 2,\ ...,\ n)$$

системасыннан табылалар. Ул системаның чишелеше

$$C'_i(x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$$

функцияләре булсын. Моннан,

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + C_i \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n).$$

Биредә C_i $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ – ирекле даимиләр. C_i $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ ның бу кыйммәтләрен (4) тигезлегенә куеп,

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik} + \sum_{i=1}^{n} y_{ik} \int \varphi_i(x)dx = y_{1k} + \bar{y}_k \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ n)$$

(1) дифференциаль тигезләмәләрнең сызыкча бериш булмаган системасының гомуми чишелешен табабыз.

B. ***Мисал һәм мәсьәләләр чишү үрнәкләре.***

`1 мисал.` Дифференциаль тигезләмәләр системаларын чишәргә:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases} \tag{5}$$

`Чишү.` (5) ДТСББС на тиңдәш

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \tag{6}$$

ДТСБС карыйк. Аның характеристик тигезләмәсе

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ягъни,

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

ә характеристик тигезләмәнең тамырлары

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

$$\begin{cases} -\lambda m_1 + m_2 = 0, \\ m_1 - \lambda m_2 = 0 \end{cases}$$

системасында башта $\lambda = 1$, аннары $\lambda = -1$ дип алып табабыз : $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ һәм $m_1 = 1$, $m_2 = -1$. Шулай итеп, (6) ДТСБС ның чишелешләренең фундаменталь системасы

$$\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix},$$

ә гомуми чишелеше

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

(5) ДТСББС ның гомуми чишелешен

$$x = C_1 (t) e^t + C_2 (t) e^{-t}, \quad y = C_1 (t) e^t - C_2 (t) e^{-t} \tag{7}$$

рәвешендә эзлибез. Монда $C_1(t)$ һәм $C_2(t)$ функцияләрен табу өчен

$$\begin{cases} C_1^{'}(t)e^t + C_2^{'}(t)e^{-t} = 0, \\ C_1^{'}(t)e^t - C_2^{'}(t)e^{-t} = \frac{1}{t^2} + \ln t \end{cases}$$

системасын төзибез. Бу системаның чишелешләре

$$C_1^{'}(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right), \quad C_2^{'}(t) = -\frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right).$$

Интеграллап, табабыз:

$$C_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t} + \ln t\right) + \tilde{C}_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t} - \ln t\right) + \tilde{C}_2.$$

Монда $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ – ирекле даимиләр.

$C_1(t)$ һәм $C_2(t)$ табылган кыйммәтләрен (7) тигезлекләренә куеп (5) системасының гомуми чишелешен табабыз:

$$x = \tilde{C}_1 e^t + \tilde{C}_2 e^{-t} - \ln t, \quad y = \tilde{C}_1 e^t - \tilde{C}_2 e^{-t} - \frac{1}{t}.$$

С. *Мөстәкыйль рәвештә чишү өчен мисаллар һәм мәсьәләләр.*

Дифференциаль тигезләмәләр системаларын чишәргә:

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \mathrm{tg}^2 t - 1, \\ \\ \frac{dy}{dt} = -x + \mathrm{tg} t. \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x, \\ \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t-1}, \\ \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t-1}. \end{cases} \qquad 4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases} \qquad 6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x - y = -e^{2t}, \\ \\ \frac{dy}{dt} + 3x - 2y = 6e^{2t}. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \\ \frac{dy}{dt} = -y - 2x + \cos t + \sin t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}. \end{cases} \qquad 9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y + \frac{1}{t} - 4\ln t, \\ \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + \frac{1}{t}. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3e^{2t}, \\ \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + e^{2t}. \end{cases}$$

D. ***Җаваплар.***

1. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + tgt,\ \ y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2.$

2. $x = C_1e^t + 2C_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t}\mathrm{arctg}e^t,$

$y = C_1e^t + 3C_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 3e^{2t}\mathrm{arctg}e^t.$

3. $x = C_1 + 2C_2e^{-t} + 2e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right|,\ \ y = -2C_1 - 3C_2e^{-t} - 3e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right|.$

4. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln\left|\cos t\right|,$

$y = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + 2\cos t\ln\left|\cos t\right| + 2t\sin t.$

5. $x = (C_1 + 2C_2t - 8t^{\frac{5}{2}})e^t,\ \ y = (C_1 + 2C_2t - C_2 - 8t^{\frac{5}{2}} + 10t^{\frac{3}{2}})e^t.$

6. $x = \frac{8}{3}e^{2t} + 2C_1e^t + C_2e^{-t},\ \ y = \frac{29}{3}e^{2t} + 3C_1e^t + C_2e^{-t}.$

7. $x = (1-t)\cos t - \sin t,\ \ y = (t-2)\cos t + t\sin t.$

8. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + \cos t\ln\left|\cos t\right| + t\sin t,$

$y = -C_1\sin t + C_2\cos t - \sin t\ln\left|\cos t\right| + t\cos t.$

9. $x = (C_1 + C_2(1+t))e^{2t} + \ln t$, $y = -(C_1 + C_2 t)e^{2t} + \ln t$,

10. $x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} - e^{2t}$, $y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} - e^{2t}$.

Кушымта

Төп интеграллар таблицасы

$$1. \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad (k \neq -1);$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \left(\int e^x dx = e^x + C \right);$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C \quad \left(\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \right);$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C \quad \left(\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \right);$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \left(\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \right);$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad \left(\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \right);$$

$$8. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$12. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$13. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Аныксыз интегралда алмаштыру (яңа үзгәрешле кертү) формуласы

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt.$$

Аныксыз интегралда кисәкләп интеграллау формуласы

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Әдәбият

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – СПб. : Лань, 2011. – 304 с. URL: http://e.lanbook.com/book/1542

2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – М. : Физматлит, 2000. – 400 с.
URL: http://e.lanbook.com/book/2363

3. Гарипов И.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб.-методич. пособие / И.Б. Гарипов, Н.В. Зайцева, Р.М. Мавлявиев. - Казань: Казан. ун-т, 2018. - 49 с.

4. Демидович Б.П. Дифференциальные уравнения : учебное пособие / Б.П. Демидович, В.П. Моденов. – СПб.: Лань, 2019. – 280 с.
URL: https://e.lanbook.com/book/115196

5. Ильин А.М. Уравнения математической физики / А.М. Ильин. – М. : Физматлит, 2009. – 192 с. URL: http://e.lanbook.com/book/2181

6. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. 4-е изд., исправ. / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е изд., доп. / Н.М. Матвеев. – СПб.: Изд-во «Лань», 2003. – 832 с.

8. Пантелеев А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, К.А. Рыбаков. – М.: Логос, 2010. – 384 с.

9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том II / В.И. Смирнов. – Пред. Л.Д. Фаддеева, пред. и прим. Е.А. Грининой. – 24-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 848 с. URL: https://new.znanium.com/read?pid=350203

10. Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.А. Треногин. – М. : Физматлит, 2009. – 312 с. URL: http://e.lanbook.com/book/2341

11. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.