Министерство образования и науки РФ
Смоленский государственный университет

Системы компьютерной математики и их приложения

Материалы XIX *Международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета Смоленского государственного университета*

Выпуск 19

Смоленск
Издательство СмолГУ
2018

УДК 621.396.218
ББК 32.97
С 409

Печатается по решению редакционно-издательского совета СмолГУ

С 409 **Системы компьютерной математики и их приложения:** материалы XIX Международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета СмолГУ. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. – Вып. 19. – 423 с.
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XIX Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 18–20 мая 2018 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,
продолжающееся издание

2. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 320 с.
3. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1989. 489 с.

Yu.G. Ignatev, I.A. Kokh
Kazan Federal University

QUALITATIVE ANALYSIS AND NUMERICAL INTEGRATION IN CAS MAPLE OF COSMOLOGICAL MODEL BASED ON ASYMMETRICAL SCULAR DUBBLET

Keywords: *phantom scalar fields, asymmetric scalar dubblet, cosmological models, qualitative analysis, numerical simulation, CAS Maple.*

Abstract. *In this article, cosmological models based on asymmetric scalar doublets consisting of classical and phantom scalar fields are investigated on the basis of qualitative and numerical analysis. The presence of phantom scalar field makes it possible to consider classical scalar fields with attraction of the same scalar charged particles, which significantly expands the variety of behaviors of cosmological models. It is show, that cosmological the model, based on asymmetric scalar dubblet, in the case of low interaction has 9 singular points, of which 2 points are attracting, the rest point are ustable saddle. It is show that the presence of even very weak phantom field significantly changes the dynamics of the cosmological model. 2-d or 3-d phase trajectories are constructed by numerical integration in CAS Maple. Special graphic procedures have been created for optimal presentation of 4-d phase portraits.*

Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина
Казанский федеральный университет

УДК 19.711.3+551.5.001.57+517.957

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СКМ MAPLE: АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕДУР ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ И ЕГО ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Ключевые слова: *нелинейные динамические системы, математическое моделирование, качественная теория дифференциальных уравнений, сплайновая* *аппроксимация, численные методы интегрирования, визуализация вычислений, нелинейная механика, космология, системы компьютерной математики.*

Представлены численно-аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем, основанные на применении численных методов интегрирования систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений и методов сплайновой аппроксимации функций в системе компьютерной математики Maple. Описаны инструменты автоматизированной визуализации численных решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усреднения численных решений на основе авторского прикладного пакета программ DifEqTools. Приведены примеры применения этих инструментов к исследованию нелинейных задач механики и космологии.

Нелинейные динамические системы, с математической точки зрения описываемые системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), являются фундаментальной моделью нелинейных процессов, возникающих как в системах частиц (механических системах), так и в сложных системах частиц и полей (электродинамических системах, системах с гравитационным и скалярным взаимодействием). Многие базовые модели гравитации и космологии, несмотря на их существенно полевой характер, часто также сводятся к нелинейным динамическим системам. Простейшим примером таких систем являются все однородные космологические модели. Как известно, до сих пор не существует универсальных математических методов нахождения точных решений нелинейных систем ОДУ, и проблема исследования таких систем в последние годы становится особенно острой в связи с возросшим интересом теоретической физики к нелинейным процессам. В последние 30 лет в связи с исследованием таких систем, например солитонов, растет понимание того, что линейные модели физических процессов являются весьма приближенными, удовлетворительно описывающими реальные явления лишь при достаточно малых временах, то есть линейные модели являются как бы первым членом разложения Тейлора истинных закономерностей природы. К сожалению, математика пока не отвечает на этот вызов времени. Исключением является лишь качественная теория динамических систем, с помощью которой можно получить и классифицировать некоторые асимптотические свойства таких систем.

В этих условиях для исследования нелинейных динамических систем приходится применять различные методы численного интегрирования систем нелинейных ОДУ, то есть неизбежно переходить к методам компьютерного моделирования. Система компьютерной математики (СКМ) Maple хорошо приспособлена к такому моделированию. В ней, помимо большого набора инструментов численного интегрирования есть специальные средства для построения фазовых портретов динамических систем, а также очень хорошо проработанные средства сплайновой экстраполяции, что позволяет совместить численные и аналитические методы исследования динамических систем. Важным обстоятельством является наличие в Maple продвинутого пакета тензорных вычислений. Целью статьи является ознакомление ученых, сталкивающихся с проблемами исследования нелинейных динамических систем, с методами численно-аналитического исследования таких систем в СКМ Maple. Указанные методы реализованы в виде программ авторского пакета DifEqTools, являющегося приложением СКМ Maple 17-2016 [1–2].

Важнейшим этапом численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем является визуализация численных результатов компьютерного моделирования. Визуализация математической модели позволяет не только выявить основные закономерности описываемого ею процесса, но и обнаружить некоторые детали, недоступные выявлению аналитическими методами исследования. В этой статье мы будем рассматривать инструменты исследования так называемых *обобщенно-механических* систем [2], описываемых системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [3]:

$$y_i^{(n_i)} = F_i(y_1,...,y_N, y_1',...,y_N', y_1'',...,y_N'',...,y_1^{(n_1-1)},\ldots,y_1^{(n_N-1)},t);\ (i=\overline{1,N}), \qquad (1)$$

где $y^{(n)} = d^n y/dt^n$ – обозначение n-й производной функции $y(t)$ по независимой переменной *t,* временной переменной[2], а F_i – непрерывно-дифференцируемые функции своих переменных. Будем в дальнейшем полагать выполненными начальные условия для системы (1):

$$y_i^{(k)}(t)\Big|_{t=t_0} = C_i^k\ ;\ (k=\overline{1,n_i-1};\ i=\overline{1,N}), \qquad (2)$$

соответствующие задаче Коши, где C_i^k – начальные значения производных k-го порядка функций $y_i(t)$. Ясно, что путем известных преобразований, которые автоматически выполняет представленный ранее пакет программ DifEq [4][3], система (2) преобразуется к стандартной нормальной системе (вообще говоря, неавтономной) обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

[2] Хотя это может быть и не обязательно физическое время.
[3] как и расширенный пакет DifEqTools.

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n, t) \quad (i = \overline{1,n}) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(t) \tag{3}$$

с начальными условиями Коши

$$(x^1(t_0), \dots, x^n(t_0)) = (x^1_{(0)}, \dots, x^n_{(0)}) \Rightarrow \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_{(0)}. \tag{4}$$

Поэтому все функции $y_i(t)$ и их производные до $n_i - 1$ порядка включительно являются *динамическими переменными*:

$$y_1(t), ..., y_N(t), y_1'(t), ..., y_N'(t), y_1''(t), ..., y_N''(t), ..., \overset{(n_1-1)}{y_1}(t), \dots, \overset{(n_N-1)}{y_1}(t).$$

Представленный пакет DifEqTools позволяет в автоматическом режиме решать следующие задачи:

1) выводить графики зависимости одной из динамических переменных от временной переменной, $x^i(t)$ на заданном интервале $t \in [t_1, t_2]$;

2) выводить графики двумерных фазовых траекторий вида $[x^i(t), x^k(t)]$ на заданном интервале временной переменной $t \in [t_1, t_2]$;

3) выводить трехмерные графики фазовой траектории вида $[x^i(t), x^k(t), x^l(t)]$ на заданном интервале временной переменной $t \in [t_1, t_2]$;

4) выводить графики зависимости заданной функции динамических переменных от временной переменной, $f(x^1(t), \dots x^N(t))$ на заданном интервале $t \in [t_1, t_2]$;

5) выводить графики зависимости интегралов и производных от заданных функций динамических функций по временной переменной на заданном интервале $t \in [t_1, t_2]$;

6) выводить графики двумерных фазовых траекторий двух заданных функций динамических переменных от временной переменной, $[f_1(x^1(t), \dots x^N(t)), f_2(x^1(t), \dots x^N(t))]$, на заданном интервале временной переменной $t \in [t_1, t_2]$;

7) выводить графики трехмерных фазовых траекторий трех заданных функций динамических переменных от временной переменной, $[f_1(x^1(t), \dots x^N(t)), f_2(x^1(t), \dots x^N(t)), f_3(x^1(t), \dots x^N(t))]$, $[x^i(t), x^k(t)]$ на заданном интервале временной переменной $t \in [t_1, t_2]$;

8) выводить динамические графики для всех указанных случаев.

9) автоматизировать вывод средних значений заданных функций динамических переменных, а также осциляции этих функций и их средне-квадратичные значения.

Последние возможности являются особенно ценными при численном моделировании нелинейных быстропеременных процессов. Заметим, что пакет программ предусматривает автоматизированную разметку координатных осей соответствено именам выводимых функций. При этом начала и концы фазовых траекторий автоматически помечаются соответствующими маркерами. Приведем несколько примеров автоматизированного вывода фазовых траекторий нелинейных динамических систем.

Пример 1. Динамическая визуализация существенно нелинейной трехмерной динамической системы, описываемой системой уравнений:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{dy}{dt}-x^3;\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dx}{dt}-y^3;\ \frac{d^2z}{dt^2}=0 \qquad (5)$$

с начальными условиями

$$x(0)=0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1,\ \mathrm{y}(0)=0,\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=1,\ \mathrm{z}(0)=0,\ \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}=1. \qquad (6)$$

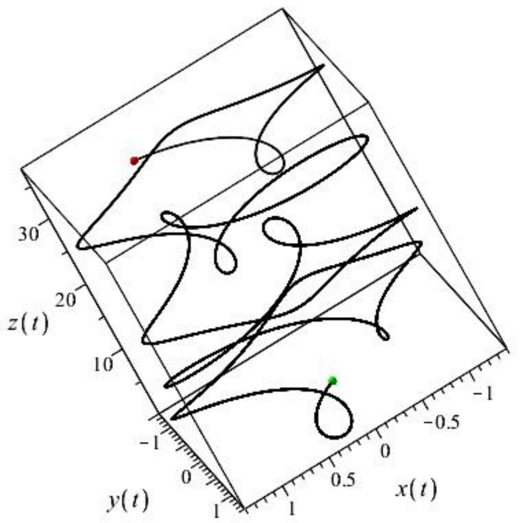

Рис. 1. Заключительный кадр анимационной картины 3-мерной проекции фазового портрета динамической системы (5) на подпространство V3 (x,y,z)

Пример 2. Уравнение стандартной космологической модели со скалярным полем

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Phi(\tau)=-\sqrt{3}\sqrt{\pi}\sqrt{\Lambda+8\pi\left(\left(\frac{d}{d\tau}\Phi(\tau)\right)^2+\Phi(\tau)^2\right)}\frac{d}{d\tau}\Phi(\tau)-\Phi(\tau).$$

Ниже показаны фазовые диаграммы для стандартной космологической модели, основанной на массивном скалярном поле $\Phi(\tau)$, где τ – безразмерное космологическое время, измеренное в единицах комптоновского времени $t_c = \frac{1}{m}$, где m – масса квантов скалярного поля, Λ – космологическая постоянная.

На рисунке 2 видно, как простой метод интегрирования rkf45 может приводить к принципиальным ошибкам при больших временах эволюции космологической модели ($\tau = 10^4$). Фазовая траектория, полученная этим методом, приближается к квадрату, при этом «квадрат» еще и поворачивается с течением времени. Следующий пример (см. Рис. 3) показывает, как применение более точного метода Рунге-Кудта 7-8 порядков приводит к правильному результату, подкрепляемому качественной теорией дифференциальных уравнений [5].

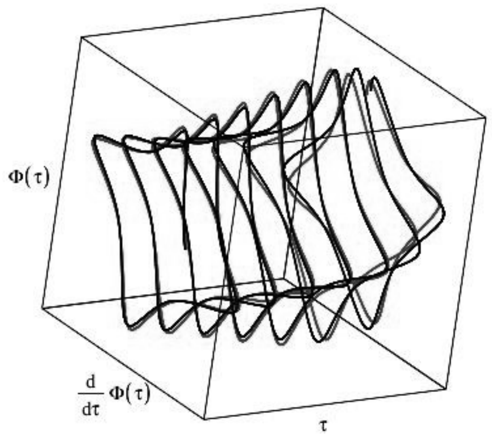

Рис. 2. Метод Рунге-Кутта-Фелберга 4-5 порядка

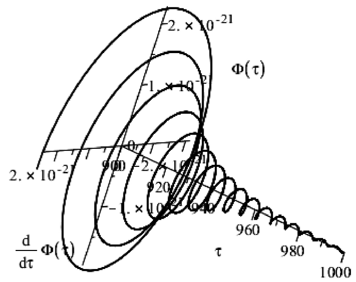

Рис. 3. Метод Рунге-Кутта 7-8 порядка

Выводы. Таким образом, пакет DifEqTools позволяет автоматизировать исследование нелинейных динамических систем любого порядка и построение их фазовых портретов в любых проекциях. При этом предусмотрены возможности автоматизированного построения динамических моделей этих систем. Отметим, что этот процесс требует больших затрат времени даже на достаточно мощных компьютерах. Для решения проблемы оптимизации этого процесса пакет DifEqTools может использовать сплайновую аппроксимацию численных решений дифференциальных уравнений. Таким образом, в руках ученого оказывается мощный инструмент для всестороннего исследования нелинейных динамических систем.

Литература

1. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программный комплекс численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple. [Пакет программ] // http://www.stfi.ru/ru/software.html.
2. Свидетельство № 2017616336 Российская Федерация. Программный комплекс численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина; заявитель и правообладатель ФГАО ВО Каз. фед. ун-т. № 2017613415; заявл. 17.04.2017; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 06.06.2017. [1] с.
3. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Численно-аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple. III. Визуализация нелинейных динамических систем и приложения к механике и космологии // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. Вып. 3(20). С. 28-54.
4. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. Averaging of the equations of the standard model over rapid oscillations // Russian Physics Journal. 2017. Vol. 60, No. 7. P. 1173-1181.
5. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Численно-аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем В СКМ Maple. II. Автоматизация математического анализа нелинейных математических моделей // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. Вып. 2. С. 74-83.

Yu.G. Ignat'ev, A.R. Samigullina
Kazan Federal University

NUMERICAL-ANALYTICAL METHODS OF MATHEMATICAL MODELING OF THE NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS IN SCM MAPLE: AUTOMATION OF NUMERICAL SOLUTION AND ITS VISUALIZATION PROCEDURES

Keywords: *nonlinear dynamical systems, mathematical modeling, qualitative theory of differential equations, spline approximation, numerical integration methods, computational visualization, nonlinear mechanics, cosmology, computer mathematics systems.*

Abstract. *Numerical analytical methods for mathematical modeling of nonlinear dynamical systems based on the application of numerical methods for integrating systems of ordinary nonlinear differential equations and methods of spline approximation of functions in the system of computer mathematics Maple are described. The tools for automated visualization of numerical solutions of systems of nonlinear ordinary differential equations and averaging numerical solutions on the basis of the author's application package of DifEqTools programs are described too. Examples of the application of these tools to the study of nonlinear problems in mechanics and cosmology are given.*