Заочные электронные конференции

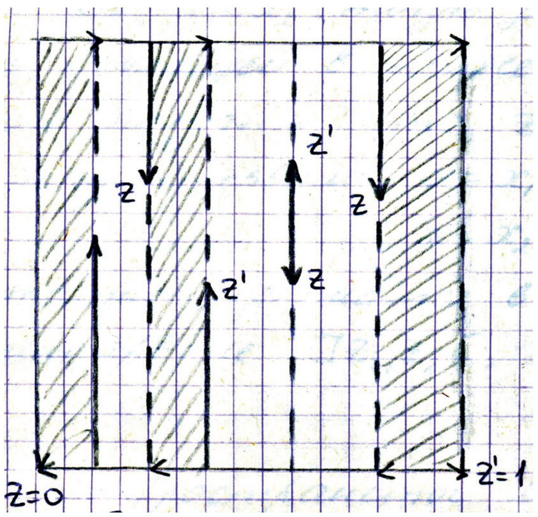
Физико-математические науки

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИ УПОРЯДОЧЕННОГО КВАДРАТА

Миронова Ю.Н.

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Елабужский институт, Елабуга, e-mail: mironovajn@mail.ru

При изучении общей топологии возникает необходимость рассматривать некоторые простые примеры топологических пространств, обладающие определенными свойствами. Наряду с такими топологическими пространствами, как стрелка, две стрелки, ковер Серпинского, можно рассмотреть топологическое пространство – лексикографически упорядоченный квадрат (см. рисунок).



Лексикографически упорядоченный квадрат

1. Описание пространства.

Напомним определение нашего пространства.

Рассмотрим на плоскости *OXY* замкнутый квадрат со сторонами, параллельными осям координат и вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) и упорядочим множество всех точек $z = (x, y)$, $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ этого квадрата в лексикографическом порядке, то есть:

$$(x, y) < (x', y'), \text{ если } x < x' \text{ или}$$

$$\text{если } x = x' \text{ и } y < y'.$$

Полученные в результате такого упорядочения порядковые интервалы и полуинтервалы [0, α[и] β, 1] образуют базу нашего пространства *Q*.

Эти интервалы имеют следующий вид: пусть даны $z_1 < z_2$, $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$, причем $x_1 < x_2$, тогда для любой точки *z*, лежащей в полосе $0 \le y \le 1, x_1 < x < x_2$, мы получим, что $z_1 < z < z_2$.

Полуинтервалы $x = x_1, y_1 < y \le 1$ и $x = x_2, 0 \le y \le y_2$ также содержатся в порядковом интервале $]z_1, z_2[$, если $y_1 \ne 1, y_2 \ne 0$.

2. Пространство является линейно упорядоченным и содержит наибольший и наименьший элемент.

Напомним, что

Определение 1. Множество *X* называется частично упорядоченным, если в нём установлено отношение порядка, удовлетворяющее условию транзитивности: если $x < x'$ и $x' < x''$, то $x < x''$.

Определение 2. Если в данном частично упорядоченном множестве *X* отношение порядка установлено для любых двух различных элементов, то частично упрядоченное множество называется линейно упорядоченным

Теорема 1. Лексикографически упорядоченный квадрат *Q* является линейно упорядоченным множеством.

Определение 3. Если в данном упорядоченном множестве $a < x < b$, то говорят, что элемент *x* лежит между элементами *a* и *b*. Множество всех элементов *x*, лежащих между элементами *a* и *b*, называется интервалом]*a*, *b*[упорядоченного множества *X*.

Обозначим в пространстве *Q* точку (0, 0) символом 0, точку (1, 1) – символом 1, а любой элемент $(x_1, x_2) \in Q$ – символом *x*, тогда открытыми множествами в *Q* являются $]x, y[, [0, x), (x, 1]$, где $\mathbf{0} \le x \le \mathbf{1}$, $\mathbf{0} \le y \le \mathbf{1}$ и всевозможные их пересечения.

Определение 4. Если элемент *a* частично упорядоченного множества *X* таков, что $a \le x \forall x \in X$, то *a* – первый (наименьший) элемент множества *X*.

Аналогичное определение даётся для наибольшего элемента.

В пространстве *Q* наименьшим элементом является **0**, а наибольшим – **1**.

То есть в пространстве *Q* имеются наименьший и наибольший элементы.

3. База топологии пространства *Q*.

Интервалы и полуинтервалы [**0**, ∞ [и] β, **1**] образуют базу некоторой топологии на *Q*.

Имеется следующая теорема:

Теорема. Пусть *X* – множество, *B* – система его подмножеств. *B* является базой некоторой топологии на *X*, если выполняются условия:

а. $\cup B = X$ (система *B* является покрытием *X*);

b. $\forall x \in X$ и $\forall U$,

$V \in B : x \in U \bigcap V \; \exists W \in B : x \in WU \bigcap V$.

Условия *a* и *b* этой теоремы выполняются для наших интервалов и полуинтервалов. Следовательно, множество всех порядковых интервалов образуют базу некоторой топологии на *Q*.

4. Существование системы мощности *c* попарно не пересекающихся интервалов. Несепарабельность.

Рассмотрим интервалы вида $I_x = \{z = (x, y) | 0 < y < 1\}, 0 \le x \le 1$. Это вертикальные интервалы. Здесь *x* пробегает множество всех действительных чисел на [0, 1], то есть множество мощности *c* Для любых $x_1 \ne x_2$ имеем $I_{x_1} \bigcap I_{x_2} = \varnothing$. Интервалы являются открытыми множествами в *Q*.

То есть доказано существование системы не пересекающихся открытых множеств мощности *c*.

Докажем теперь несепарабельность *Q*. Напомним, что

Определение 5. $A \subset X$ – всюду плотное множество, если $[A] = X$.

Определение 6. *X* – сепарабельно, если в *X* существует счетное всюду плотное множество.

Рассмотрим произвольное всюду плотное множество $A \subset Q$. В любом из наших интервалов I_x имеется по крайней мере одна из точек множества *A*. Следовательно, мощность множества *A* не менее, чем континуум.

Следовательно, пространство *Q* несепарабельно.

5. Хаусдорфовость.

Определение 7. Хаусдорфовым топологическим пространством называется множество, в котором выделены некоторые подмножества, называемые открытыми множествами пространства, так что при этом выполняются следующие условия:

1^0. Всё пространство и пустое множество открыты.

2^0. Сумма любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

3^0. Ко всяким двум различным точкам *x* и *y* пространства имеются два непересекающихся множества *Ox* и *Oy*, содержащих соответственно эти точки.

Докажем хаусдорфовость нашего пространства *Q*.

Свойства 1^0 и 2^0 следуют из того, что *Q* – топологическое пространство.

Докажем свойство 3^0.

Пусть даны точки $z_1(x_1, y_1)$, $z_2(x_2, y_2)$, $z_1 \ne z_2$. Тогда $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2, y_1 < y_2$.

А) Пусть $x_1 = x_2$, тогда существует *x* такой, что $x_1 < x < x_2$, например, $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, тогда $Oz_1 = [0, z)$, $Oz_2 = (z, 1]$, где $z = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Множества Oz_1, Oz_2 открыты, $Oz_1 \bigcap Oz_2 = \varnothing$, $z_1 \epsilon Oz_1$, $z_2 \epsilon Oz_2$.

В) Пусть $x_1 = x_2$, тогда $y_1 < y_2$, следовательно, $z = \left(x_1, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$, и мы снова получаем $Oz_1 = [0, z)$, $Oz_2 = (z, 1]$.

Таким образом, пространство *Q* – хаусдорфово пространство.

Эти и другие свойства пространства *Q* можно изучать на семинарах по общей топологии в университетах.

Список литературы

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: «Наука», 1977.
2. Пасынков Б.А. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы. – М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Миронова Ю.Н. О τ-псевдокомпактных отображениях // Сибирский математический журнал. Май-июнь 2001. – Том 42, № 3. – С. 634–644.
4. Миронова Ю.Н. О псевдокомпактных, счетно компактных, локально бикомпактных отображениях и k-отображениях // Сибирский математический журнал. – Новосибирск, 2002. – Том 43, № 5.– С. 1115–1129.
5. Миронова Ю.Н. Псевдокомпактность и счетная компактность непрерывных отображений. Монография. – М., ИЦ ГОУ МГТУ «СТАНКИН», 2006. – 76 с.
6. Миронова Ю.Н. Пример курсовой работы по общей топологии // Метрическая геометрия поверхностей и многогранников: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова, Москва; 18–21 августа 2010 г.: Сборник тезисов. – М.: МАКС Пресс, 2010. – С. 105.
7. Миронова Ю.Н. Топологические свойства лексикографически упорядоченного квадрата. // Физико-математическое образование: проблемы и перспективы. Материалы научно-методической конференции, посвященной 60-летнему юбилею физико-математического факультета. – Елабуга: Изд-во ЕИ КФУ, 2013. – С. 113–115.
8. Миронова Ю.Н. Свойства лексикографически упорядоченного квадрата. // Научный электронный архив. (27.02.2014, 3 стр.) URL: http://econf.rae.ru/article/8270 (дата обращения: 27.02.2014).
9. Mironova Yu.N. τ-pseudocompact mappings. // Siberian Mathematical Journal. – 2001. – T. 42. № 3. – C. 537–545.
10. Mironova Yu.N. On pseudocompact, countably compact locally bicompact mappings, and k-mappings. // Siberian Mathematical Journal. – 2002. – T. 43. № 5. – C. 899–909.