УДК: 519.174

Обобщение формулы Матиясевича

Э.Ю. Лернер[1)], С.А. Мухамеджанова[2)]

1) eduard.lerner@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

2) samukhamedzhanova@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Аннотация

С помощью техники фейнмановских амплитуд обобщена формула Матиясевича, выражающая хроматический многочлен произвольного графа через линейную комбинацию потоковых многочленов подграфов исходного графа. В статье представлена формула, выражающая потоковый многочлен через линейную комбинацию хроматических многочленов стянутых графов.

Ключевые слова: хроматический многочлен, потоковый многочлен, преобразование Фурье, фейнмановские амплитуды, координатное и импульсное представления.

В 1977 г. Ю.В. Матиясевич вывел формулу, выражающую хроматический многочлен произвольного графа через линейную комбинацию потоковых многочленов подграфов исходного графах [1]. При выводе этой формулы неявно использовалась техника преобразования Фурье (ПФ) над кольцом $\mathbb{Z}_m$ по модулю m. Применяемая техника ПФ хорошо известна в теории фейнмановских амплитуд (ФА) над вещественным и p-адическим полями [2]. Мы разовьем эту теорию для случая кольца $\mathbb{Z}_m$. Суммирования по переменным во всех формулах ниже будут вестись по элементам этого кольца.

Пусть $f(\cdot)$ — произвольная чётная функции из $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}$, так называемый пропагатор. Для связного графа $G = (V, E)$ (вакуумная) ФА в координатном представлении с пропагатором f имеет вид:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{G,f}(m) = \frac{1}{m} \sum_{x_v, v \in V} \prod_{\ell \in E} f(x_{i(\ell)} - x_{o(\ell),})$$

где $i(\ell), o(\ell)$ — два конца ребра ℓ. Пусть δ — дельта-функция (символ Кронекера на $\mathbb{Z}_m$), а ε — матрица инцидентности графа G:

$$\delta(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \neq 0; \\ 1, & \text{если } z = 0, \end{cases} \qquad \varepsilon_{\ell v} = \begin{cases} +1, & \text{если } \ell \text{ выходит в } v; \\ -1, & \text{если } \ell \text{ входит из } v; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $\Delta(x) = 1 - \delta(x)$. Заметим, что “ненормированная” ФА в координатном представлении $m\widetilde{\mathcal{F}}_{G,\Delta}(m)$ совпадает с хроматическим многочленом графа $P_G(m)$.

Фейнмановская амплитуда в импульсном представлении определяется формулой:

$$\mathcal{F}_{G,f} = \sum_{k_\ell, \ell \in E} \prod_{\ell \in E} f(k_\ell) \prod_v \delta(\sum_\ell \varepsilon_{\ell v} k_\ell)$$

Заметим, что при $f(k) = \Delta(k)$ ФА в импульсном представлении совпадает с потоковым многочленом $F_G(m)$.

Преобразование Фурье произвольной функции $f(k)$ задается формулой $\widehat{f}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_m}\exp(2\pi ikx/m)f(k)$. Представим основные результаты работы.

Теорема о связи вакуумных ФА в координатном и импульсном представлении. *Имеют место соотношения:*

$$\mathcal{F}_{G,f} \equiv \frac{1}{m^{|V|-1}}\widetilde{\mathcal{F}}_{G,\widehat{f}}\ , \qquad \widetilde{\mathcal{F}}_{G,f} \equiv \frac{1}{m^{|E|-|V|+1}}\mathcal{F}_{G,\widehat{f}}\ .$$

На основе этой теоремы мы выведем, в частности, формулу "обратную" к формуле Матиясевича.

Теорема о выражении $F_G(m)$ через линейную комбинацию $P_{G/H}(m)$. *Пусть множество вершин V разбито на части $V_1, V_2, \ldots, V_k$ (k — произвольно) так, что подграфы $H(V_i)$, включающие в себя все ребра G с концами в множестве V_i, связны. Обозначим через H объединение подграфов $H(V_i)$. Имеет место формула:*

$$F_G(m) = \frac{(-1)^{|E|}}{m}\sum_H P_{G/H}(m)(1-m)^{|E(H)|},$$

где G/H обозначает стягивание графа G по H.

Заметим, что в работе [3] получено выражение для потокового многочлена через линейную комбинацию хроматических многочленов подграфов (а не стянутых графов). Выражение в последней теореме более естественно, его обобщение на случай матроидов совпадает с обобщением на случай матроидов формулы Матиясевича.

Список литературы

[1] Матиясевич Ю. В. *Об одном представлении хроматического многочлена* // Дискретный анализ. – 1977. – Т. 31. – С. 61–70.

[2] Лернер Э. Ю. *Фейнмановские интегралы от p-адического аргумента в импульсном пространстве. II. Явные формулы* // ТМФ. – 1995. – Т. 104. – № 3. – С. 371–392.

[3] Bychkov B., Kazakov A., Talalaev D. *Functional Relations on Anisotropic Potts Models: from Biggs Formula to the Tetrahedron Equation* // SIGMA. – 2021. – V. 17,– 035.

Generalization of the Matiyasevich formula

E.Yu. Lerner, S.A. Mukhamedzhanova

Abstract

The Matiyasevich formula is known as a formula, that expresses chromatic polynomial of an arbitrary graph through a linear combination of flow polynomials of subgraphs of the original graph. Using the Feynman amplitudes technique, the Matiyasevich formula was generalized. The article presents a formula expressing a flow polynomial through a linear combination of chromatic polynomials of constricted graphs.

Keywords: chromatic polynomial, flow polynomial, Fourier transformation, Feynman amplitudes, coordinate and momentum representations.