Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 517.98

ОБ АДДИТИВНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЯХ

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Доказана аддитивность регулярных l-аддитивных отображений $T : \mathscr{K} \to [0, +\infty]$ наследственного конуса $\mathscr{K}$ в пространстве измеримых функций на пространстве с мерой. Построены примеры l-аддитивных не d-аддитивных отображений T. Установлена монотонность l-аддитивных отображений $T : \mathscr{K} \to [0, +\infty]$. Построены примеры d-аддитивных не монотонных отображений T.

Пусть $(S, +)$ — коммутативная полугруппа с сокращением. Для отображения $T : \mathscr{K} \to S$ доказана эквивалентность условий аддитивности и l-аддитивности. Доказано, что l-субаддитивное сильно регулярное 2-однородное отображение T субаддитивно. Все результаты являются новыми даже в случае конуса $\mathscr{K} = L_\infty^+$.

Ключевые слова: пространство с мерой, измеримая функция, аддитивное отображение, конус, вес, монотонное отображение, полугруппа с сокращением, векторная решетка.

Введение

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — векторное пространство (классов эквивалентности) измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Для $f, g \in \mathfrak{M}$ полагаем $fg = 0$, если $\mu\{\omega \in \Omega : f(\omega)g(\omega) \neq 0\} = 0$.

Пусть $\mathscr{E}$ — векторное подпространство $\mathfrak{M}$. Функционал $F : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ называется *дизъюнктно аддитивным*, если $f, g \in \mathscr{E}$ и $fg = 0 \Rightarrow F(f+g) = F(f) + F(g)$. При выполнении дополнительных условий в [1–6] получены интегральные представления таких функционалов.

В теории интегрирования важную роль играют неограниченные отображения $T : L_\infty^+ \to [0, +\infty]$. В случае локализуемого пространства с мерой в [7] для нормальных аддитивных однородных T и в [8] для нормальных монотонных субаддитивных однородных T получены представления через нормальные ограниченные линейные функционалы на L_∞.

Пусть $\mathscr{K}$ — наследственный конус в $\mathfrak{M}^+$, т. е. 1) $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $f \in \mathscr{K} \Rightarrow \lambda f \in \mathscr{K}$; 2) $f, g \in \mathscr{K} \Rightarrow f + g \in \mathscr{K}$; 3) $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathfrak{M}^+$ и $g \leq f \Rightarrow g \in \mathscr{K}$. Для $f, g \in \mathscr{K}$ функции $f \vee g$ и $f \wedge g$ определяются формулами

$$(f \vee g)(\omega) = \max\{f(\omega), g(\omega)\}, \quad (f \wedge g)(\omega) = \min\{f(\omega), g(\omega)\} \quad (\omega \in \Omega)$$

соответственно. Имеем $f \vee g$, $f \wedge g \in \mathscr{K}$ и

$$f \vee g + f \wedge g = f + g. \tag{1}$$

Отображение $T : \mathscr{K} \to [0, +\infty]$ называется *l-аддитивным* (т. е. решеточно-аддитивным (lattice-additive)), если

$$T(f \vee g) + T(f \wedge g) = T(f + g) \quad \text{для всех } f, g \in \mathscr{K};$$