Известия вузов. Математика
2011, № 11, с. 58–71

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

С.Н. ТРОНИН

ЕСТЕСТВЕННЫЕ МУЛЬТИПРЕОБРАЗОВАНИЯ МУЛЬТИФУНКТОРОВ

Аннотация. В рамках теории мультикатегорий над вербальными категориями, включающей в себя как обычную теорию категорий, так и теорию операд вместе со значительной частью классической универсальной алгебры, вводится понятие естественных мультипреобразований мультифункторов, благодаря чему категории мультифункторов из одной мультикатегории в другую превращаются в мультикатегории. В частности, любое многообразие алгебр над мультикатегорией обладает естественной мультикатегорной структурой. Далее строится мультикатегорный аналог комма-категорий с аналогичными категорному случаю свойствами. Определяется понятие центра мультикатегории, и показывается, что центрами мультикатегорий являются введенные ранее автором коммутативные операды, и только они. Показано, что коммутативные FSet-операды — это то же самое, что коммутативные алгебраические теории.

Ключевые слова: вербальная категория, мультикатегория, мультифунктор, естественное мультипреобразование, комма-мультикатегория, алгебра над мультикатегорией, центр, коммутативная операда, коммутативная алгебраическая теория.

УДК: 512

Abstract. We continue to develop the theory of multicategories over verbal categories. This theory includes both the usual category theory and the theory of operads, as well as a significant part of the classical universal algebra. We introduce the notion of natural multitransformations of multifunctors, owing to which categories of multifunctors from a multicategory to another one turn into multicategories. In particular, any algebraic variety over a multicategory possesses a natural structure of a multicategory. Furthermore, we construct a multicategory analog of comma-categories with properties similar to the category case. We define the notion of the center of a multicategory and show that centers of multicategories are commutative operads (introduced by us earlier) and only they. We prove that the notion of a commutative FSet-operad coincides with the notion of a commutative algebraic theory.

Keywords: verbal category, multicategory, multifunctor, natural multitransformation, comma-multicategory, algebra over multicategory, center, commutative operad, commutative algebraic theory.

Введение

Частными случаями мультикатегорий, известных также как S-операды (или многосортные операды), являются как операды, так и “обычные” категории. Напомним, что именно

Поступила 21.09.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 10-01-00431а.

сами авторы теории категорий считали основным понятием своей теории. *"Как впервые отметили Эйленберг и Маклейн, категория была определена, чтобы можно было определить функтор, а функтор — чтобы можно было определить естественное преобразование"* ([1], с. 30). Однако тот вариант определения естественного преобразования функторов между мультикатегориями (мультифункторов), который имеется к настоящему моменту, обладает весьма ограниченными возможностями применения. В данной работе предлагается новое определение естественного преобразования (мультипреобразования) мультифункторов, которое, как нам кажется, с бо́льшим основанием может претендовать на роль "правильного обобщения" естественного преобразования функторов. Например, оно сразу же позволяет определить структуру мультикатегории на классе мультифункторов из одной мультикатегории в другую, и даже мультикатегории диаграмм. Сходная идея позволяет определить понятие комма-мультикатегорий.

Опишем содержание работы. В разделе 1 кратко напоминаются определения основных используемых понятий, а именно, вербальных категорий и мультикатегорий над вербальными категориями. В разделе 2 вводится уже упомянутое выше понятие естественного мультипреобразования мультифункторов. Если $A_1, \ldots, A_n$ и B — мультифункторы из мультикатегории R в мультикатегорию K, причем мультикатегории определены над достаточно "богатой" морфизмами вербальной категорией (это на самом деле не слишком обременительное условие), то естественное мультипреобразование оказывается чем-то вроде стрелки вида $A_1 \ldots A_n \to B$, и это дает возможность ввести структуру мультикатегории на классе всех мультифункторов из R в K. Ослабляя определение мультикатегории и мультифунктора, получаем понятия мультиграфа и мультидиаграммы, и аналогичным образом получаем мультикатегорию мультидиаграмм. В разделе 3 строится мультикатегорный аналог коммакатегории ("категория запятой" в русском переводе, [1]). Как и в случае "обычных" категорий, естественные мультипреобразования соответствуют некоторым мультифункторам в комма-мультикатегории. В разделе 4 вводится понятие центра мультикатегории, и показывается, что класс операд, являющихся центрами мультикатегорий, совпадает с классом коммутативных операд, введенных в [2]. Оказывается, далее, что частным случаем коммутативных операд являются коммутативные алгебраические теории ([3], 3.10). Отметим, что мы даем определение коммутативной операды в несколько уточненном по сравнению с [2] виде. На справедливость результатов из [2] это изменение никак не влияет.

Обозначения и определения данной работы соответствуют работам автора [2], [4], [5]. Основные результаты анонсированы в [6].

1. Мультикатегории над вербальными категориями

Нам потребуется информация, содержащаяся в ([5], § 1). Напомним ее в самом сжатом виде, отсылая к [5] за техническими подробностями (см. также [2], [4]).

Пусть S — некоторый класс объектов, S^* — класс всевозможных конечных упорядоченных последовательностей элементов S (слов в алфавите S, или строк из символов алфавита S). В этом классе есть пустая строка e. Элементы S^* будут записываться в виде $\overline{s} = s_1 \ldots s_n \in S^*$, $s_i \in S$, $1 \leq i \leq n$. Черта сверху будет означать элемент из S^*, ее отсутствие — элемент из S.

Напомним [4], что Fset есть категория с объектами вида $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$, морфизмы которой $f : [n] \to [m]$ суть отображения, такие, что $f(i) = 0$ тогда и только тогда, когда $i = 0$. Нам будет также необходима категория P, которая является подкатегорией категории Fset с тем же множеством объектов, что и Fset. Морфизмами P являются всевозможные неубывающие отображения. Напомним, что если $\alpha : [n] \to [m]$ — неубывающее отображение (и морфизм Fset), то α полностью и однозначно опеределяется упорядоченной последовательностью $(n_1, \ldots, n_m)$, где $n_i = |\alpha^{-1}(i)|$. Так как $n = n_1 + \cdots + n_m$, то морфизмы P будут называться *разбиениями*.

Напомним определение категории Fset_S (см. [5]). Ее объекты — элементы S^*, а морфизм из $\bar{t} = t_1 \ldots t_n$ в $\bar{s} = s_1 \ldots s_m$ определен тогда, когда существует морфизм $f : [n] \to [m]$ из Fset такой, что $\bar{t} = \bar{s}f = s_{f(1)} \ldots s_{f(n)}$. Таким образом, $t_i = s_{f(i)}$ для всех i. В этом случае будем говорить, что f *представляет* морфизм Fset_S. Композиция (суперпозиция) морфизмов Fset_S, представленных морфизмами $f : [n] \to [m]$ и $g : [k] \to [n]$ категории Fset, есть морфизм, представленный отображением fg. Если S состоит из одного элемента, то Fset_S и Fset можно отождествить. Отметим одно важное обстоятельство. Если в слове $\bar{s}$ все символы различны, то по морфизму $\bar{t} \to \bar{s}$ из категории Fset_S однозначно определяется морфизм f из категории Fset такой, что $\bar{s}f = \bar{t}$. Это свойство (в справедливости которого легко убедиться) в дальнейшем окажется полезным при доказательстве коммутативности некоторых диаграмм.

Далее напомним определение категории P_S (многосортного обобщении категории P). Объекты этой категории — элементы S^*. Морфизмами из $\bar{s} \in S^*$ в $\bar{t} = t_1 \ldots t_m$ (где $t_i \in S$, $1 \leq i \leq m$) являются всевозможные выражения вида $\binom{\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_m}{t_1, \ldots, t_m}$, где $\bar{s}_i$ есть подслова $\bar{s}$, и $\bar{s} = \bar{s}_1 \ldots \bar{s}_m$. Это обозначение аналогично обозначению подстановки: строка $\bar{s}_i$ располагается над символом t_i. Композиция (суперпозиция) морфизмов определяется следующим образом. Если $\alpha = \binom{\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_m}{t_1, \ldots, t_m} \in P_S(\bar{s}, \bar{t})$, $\bar{s}_i = s_{i,1} \ldots s_{i,k_i}$, $1 \leq i \leq m$, где $s_{i,j} \in S$, и $\beta \in P_S(\bar{u}, \bar{s})$, то β имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} \bar{u}_{1,1}, \ldots, \bar{u}_{1,k_1}, \ldots, \bar{u}_{m,1}, \ldots, \bar{u}_{m,k_m} \\ s_{1,1}, \ldots, s_{1,k_1}, \ldots, s_{m,1}, \ldots, s_{m,k_m} \end{smallmatrix} \right)$, где $\bar{u}_{i,j} \in S^*$. Тогда положим $\alpha\beta = \left(\begin{smallmatrix} (\bar{u}_{1,1} \ldots \bar{u}_{1,k_1}), \ldots, (\bar{u}_{m,1} \ldots \bar{u}_{m,k_m}) \\ t_1 \quad , \ldots, \quad t_m \end{smallmatrix} \right)$, где выражения в скобках в верхней строке есть результат приписывания слов друг к другу. Дальнейшие подробности можно найти в [5]. Если класс S состоит из одного элемента, то имеет место изоморфизм категории P_S и категории P из [4]. Если $S = \{s\}$, то объекту $\overbrace{s \ldots s}^{n}$ сопоставляется объект $[n]$, а морфизму $\binom{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m}{s, \ldots, s}$, в котором $\bar{z}_j$ есть строка из n_j экземпляров символа s $(1 \leq j \leq m)$ сопоставляется морфизм P, соответствующий последовательности $(n_1, \ldots, n_m)$. Морфизмы P_S, так же как и P, будем называть *разбиениями*.

И в категории Fset_S, и в категории P_S операция приписывания друг к другу слов-объектов является функтором от двух аргументов, обладающим свойством строгой ассоциативности. Пусть даны морфизмы $f_1 : \bar{u}_1 \to \bar{t}_1$, $f_2 : \bar{u}_2 \to \bar{t}_2$ категории Fset_S. Обозначим результат действия этого функтора на морфизмах через $f_1 \sqcup f_2$. Аналогичную операцию можно определить для морфизмов категории P_S.

Напомним некоторые факты из [4]. Пусть дан морфизм $f : [k] \to [m]$ категории Fset, и пусть $\alpha : [n] \to [m]$ есть разбиение, т. е. неубывающее отображение. Отождествим α с последовательностью $(n_1, \ldots, n_m)$, где $n_i = |\alpha^{-1}(i)|$. В категории Fset существует (категорное) расслоенное произведение $[n] \times_{[m]} [k]$ (предел диаграммы $[n] \xrightarrow{\alpha} [m] \xleftarrow{f} [k]$). При этом $[n] \times_{[m]} [k] = [n_{f(1)} + \ldots + n_{f(k)}]$. Проекция $\pi_2 : [n] \times_{[m]} [k] \to [k]$ является неубывающей сюръекцией, которую можно записать в виде разбиения как $(n_{f(1)}, \ldots, n_{f(k)})$. Объект $[n] \times_{[m]} [k]$ в [4] обозначен через $f^*[n]$, а проекция $\pi_1 : f^*[n] \to [n]$ — через $f^*\alpha$. Явный вид $f^*\alpha$ можно найти в [4], [5].

Определим теперь аналоги всего этого в категориях Fset_S и P_S. Пусть $f : [k] \to [m]$ — морфизм категории Fset. Этим же символом обозначим морфизм $\bar{u} \to \bar{t}$ категории Fset_S, такой, что $\bar{t}f = \bar{u}$. Рассмотрим морфизм $\alpha : \bar{s} \to \bar{t}$ категории P_S. Пусть $\alpha = \binom{\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_m}{t_1, \ldots, t_m}$. Обозначим тем же символом α разбиение $(n_1, \ldots, n_m)$, где n_i есть длина слова $\bar{s}_i$ для каждого i.

Положим $f^*\overline{s} = \overline{s}_{f(1)} \dots \overline{s}_{f(k)}$. Определен морфизм категории P_S из $f^*\overline{s}$ в $\overline{u}$, имеющий вид $\binom{\overline{s}_{f(1)},\dots,\overline{s}_{f(k)}}{u_1\ ,\dots,\ u_k}$. Кроме того, определен морфизм категории Fset_S вида $f^*\overline{s} \to \overline{s}$, представленный морфизмом $f^*\alpha$ категории Fset, который будет также обозначаться через $f^*\alpha$.

Определение 1 ([5])**.** Рассмотрим подкатегорию $W \subseteq \mathrm{Fset}_S$ такую, что $\mathrm{Ob}(W) = \mathrm{Ob}(\mathrm{Fset}_S)$, морфизмы которой удовлетворяют условиям

1) если $f, g \in \mathrm{Mor}(W)$, то $f \sqcup g \in \mathrm{Mor}(W)$;

2) если $f : \overline{u} \to \overline{t}$ есть морфизм из W, то для любого $\alpha \in P_S(\overline{s}, \overline{t})$ имеет место включение $f^*\alpha \in W(f^*\overline{s}, \overline{s})$.

Категорию W с указанными выше двумя свойствами будем называть *вербальной* (или вербальной подкатегорией категории Fset_S).

Напомним ([5], теорема 1.1), что для любого класса объектов S существует взаимно-однозначное соответствие между вербальными подкатегориями категории Fset_S и вербальными подкатегориями категории Fset, так что для вербальных категорий можно не различать многосортный и односортный случаи. Если W есть вербальная подкатегория Fset, то морфизмами соответствующей ей вербальной подкатегории W_S категории Fset_S являются все морфизмы Fset_S, которые представляются морфизмами из W.

Замечание 1. Условия, определяющие вербальные категории (но не само определение вербальных категорий), можно фактически найти уже в книге [7]. Эти условия являются важной составной частью определения S-операд (мультикатегорий). В литературе повсеместно используется либо случай $W = \Sigma$ (симметрические операды), либо случай тривиальной вербальной категории (несимметрические операды). Общее определение (для односортного случая) было дано в [4], для многосортного — в [5]. Позднее автор познакомился с работой [8], где, по-видимому, была высказана аналогичная идея, хотя и без явно прописанного определения.

Определение 2. *Левый мультиграф* R над вербальной категорией W (или левый W-мультиграф) есть следующий комплекс данных. Во-первых, задан класс объектов (вершин) $S = \mathrm{Ob}(R)$. Далее, для каждого (конечного, в том числе, возможно, пустого) слова $\overline{x} = x_1 \dots x_n$ в алфавите S, и объекта $y \in S$ определено множество $R(\overline{x}, y)$ (возможно, пустое). Элементы $\omega \in R(\overline{x}, y)$ будем называть мультистрелками, и записывать в виде $\omega : \overline{x} \to y$. Далее, для каждого $t \in S$ соответствие $\overline{s} \mapsto R(\overline{s}, t)$ есть контравариантный функтор из категории W_S^{op} (двойственной к категории W_S) в категорию множеств. Его действие обозначается так: если $f \in W_S(\overline{s}, \overline{u})$, $\omega \in R(\overline{s}, t)$, то $R(f)(\omega) = \omega f \in R(\overline{u}, t)$. Отображение $R(f) : R(\overline{s}, t) \to R(\overline{u}, t)$ также будет обозначаться через f.

Определение 3. *Левой мультикатегорией* над вербальной категорией W (или *левой* W*-мультикатегорией*) называется левый W-мультиграф R, в котором для непустых множеств мультистрелок определена операция композиции

$$R(y_1 \dots y_m, z) \times R(\overline{x}_1, y_1) \times \dots \times R(\overline{x}_m, y_m) \longrightarrow R(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, z),$$
$$(\omega, \omega_1, \dots, \omega_m) \mapsto \omega\omega_1 \dots \omega_m = \omega(\omega_1 \dots \omega_m).$$

Здесь $\overline{x}_i = x_{i,1}x_{i,2} \dots x_{i,n_i}$, $\omega_i \in R(\overline{x}_i, y_i)$, $1 \le i \le m$, $\omega \in R(y_1 \dots y_m, z)$.

Операция композиции должна удовлетворять следующим свойствам.

1) (Ассоциативность). Для тех наборов стрелок, для которых композиции существуют (здесь $\overline{\gamma}_i = \gamma_{i,1} \dots \gamma_{i,n_i}$), имеет место равенство

$$(\alpha\beta_1 \dots \beta_m)(\overline{\gamma}_1 \dots \overline{\gamma}_m) = \alpha(\beta_1\overline{\gamma}_1) \dots (\beta_m\overline{\gamma}_m).$$

2) (Существование единиц). Для каждого объекта $x \in S$ в $R(x,x)$ существует стрелка 1_x, и для любой стрелки $\omega \in R(x_1 \dots x_m, y)$ должны выполняться соотношения $\omega 1_{x_1} 1_{x_2} \dots 1_{x_m} = \omega = 1_y \omega$.

3) Если $\omega \in R(s_1 \dots s_m, t)$, $\omega_i \in R(\overline{u}_i, s_i)$, $f_i : \overline{v}_i \to \overline{u}_i$ — морфизмы категории W_S, $1 \leq i \leq m$, то имеет место тождество

$$\omega(\omega_1 f_1) \dots (\omega_m f_m) = (\omega\omega_1 \dots \omega_m)(f_1 \sqcup \dots \sqcup f_m).$$

4) Если $\omega \in R(\overline{s}, t)$, где длина $\overline{s}$ равна k, $\omega_i \in R(\overline{w}_i, u_i)$, $1 \leq i \leq m$, $\overline{u} = u_1 \dots u_m$, $f : \overline{s} \to \overline{u}$ является морфизмом W_S, представленным отображением $f : [k] \to [m]$, $\alpha = \binom{\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_m}{u_1, \dots, u_m}$, $1 \leq i \leq m$, то имеет место тождество

$$(\omega f)\omega_1 \dots \omega_m = (\omega\omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)})(f^* \alpha).$$

Примерами мультикатегорий являются как обычные категории, так и W-операды [4].

Мультикатегории были введены в работе [9], а эквивалентное понятие многосортных (цветных) операд появилось впервые в книге [7]. Из современных работ по мультикатегориям отметим [10]–[12]. На русском языке некоторую информацию по логическим аспектам теории мультикатегорий можно найти в книге [13].

В дальнейшем будут рассматриваться преимущественно левые мультикатегория, и слово "левая", когда оно опущено, будет подразумеваться. Аналогично можно определить (двойственным образом) правые мультиграфы и мультикатегории, где заданы множества мультистрелок вида $R(x, \overline{y})$, и операции композиции $R(y_1, \overline{z}_1) \times \ldots \times R(y_m, \overline{z}_m) \times R(x, y_1 \dots y_m) \to R(x, \overline{z}_1 \dots \overline{z}_m)$. По каждой левой мультикатегории естественным образом можно построить двойственную к ней правую, а по правой — левую. Это, в сущности, та же самая процедура, что и взятие дуальной категории, но в случае мультикатегорий двойственный объект имеет несколько иную природу. Понятие мультикатегории вообще несколько шире понятия категории, так как, например, в случае левых мультикатегорий имеют смысл стрелки (морфизмы), у которых отсутствует объект, играющий роль начала стрелки. Такие стрелки соответствуют константам из сигнатур универсальных алгебр.

2. Естественные мультипреобразования

Определение 4. *Мультифунктор* F из мультикатегории R в мультикатегорию K есть совокупность следующих данных: отображения $F : \mathrm{Ob}(R) \to \mathrm{Ob}(K)$, и определенных для каждого слова $\overline{x} = x_1 \dots x_n$, $x_i \in \mathrm{Ob}(R)$, $1 \leq i \leq n$, и каждого объекта $y \in \mathrm{Ob}(R)$ отображений

$$F(\overline{x}, y) : R(\overline{x}, y) \to K(F(x_1) \dots F(x_n), F(y)),$$

сохраняющих композицию и единичные стрелки, подобно функторам между категориями. Если записывать, как обычно, $F(\overline{x}, y)$ просто как F, то условия, определяющие мультифунктор, выглядят так:

$$F(\omega\omega_1 \dots \omega_m) = F(\omega)F(\omega_1) \dots F(\omega_m), \quad \text{и} \quad F(1_x) = 1_{F(x)}.$$

Допустим, что мультикатегории R и K определены над одной и той же вербальной категорией W (которую можно считать подкатегорией Fset). Тогда можно определить W-*мультифунктор* F как такой мультифунктор, для которого дополнительно выполняется условие $F(\omega f) = F(\omega) f$ для всех ω из R и f из W. Отметим, что в выражении ωf множитель f — это морфизм категории $W^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Ob}(R)}$, а в выражении $F(\omega) f$ множитель f — это очевидным образом определяемый морфизм категории $W^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Ob}(K)}$.

Если R и K — мультикатегории с одним объектом, то мультифунктор из R в K — это гомоморфизм операд. Если же R и K — "обычные" категории, то и мультифунктор — это просто функтор между категориями.

Класс мультифункторов из R в K обозначим через $\mathrm{MFun}(R, K)$, а если рассматриваются только W-функторы, то через $\mathrm{MFun}_W(R, K)$. Как правило, далее будут рассматриваться именно W-мультифункторы.

Рассмотрим отображения $\sigma_{n,m} \in \Sigma_{nm}$, определенные для всех натуральных $n, m \geq 1$ следующим образом. Пусть $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Тогда произвольное число из множества $\{1, \ldots, nm\}$ можно однозначно представить в виде $j + (i-1)m$ либо в виде $i + (j-1)n$ для подходящих i, j. Положим $\sigma_{n,m}(i+(j-1)n) = j+(i-1)m$. Тогда для произвольного класса S в категории W_S можно интерпретировать $\sigma_{n,m}$ как морфизм из $x_{1,1} \ldots x_{1,m} \cdots x_{n,1} \ldots x_{n,m}$ в $x_{1,1} \ldots x_{n,1} \ldots x_{1,m} \ldots x_{n,m}$. Действительно, пусть $\overline{v} = v_1 \ldots v_{nm} = x_{1,1} \ldots x_{1,m} \cdots x_{n,1} \ldots x_{n,m}$, так что $x_{i,j} = v_{i+(j-1)n}$. Аналогично, если $\overline{u} = u_1 \ldots u_{nm} = x_{1,1} \ldots x_{n,1} \ldots x_{1,m} \cdots x_{n,m}$, то $x_{i,j} = u_{j+(i-1)m}$. Если $f : \overline{v} \to \overline{u}$ — морфизм из W_S, то должно быть $v_k = u_{f(k)}$. Если $f = \sigma_{n,m}$, $k = i + (j-1)n$, то $u_{\sigma_{n,m}(k)} = u_{j+(i-1)m} = x_{i,j} = v_k$. Очевидно, что $\sigma_{n,1}$ и $\sigma_{1,m}$ — тождественные отображения, и для любых n, m имеет место равенство $\sigma_{n,m} = \sigma_{m,n}^{-1}$.

В оставшейся части работы будут рассматриваться мультикатегории над вербальной категорией W, в множестве морфизмов которой содержатся все биекции $\sigma_{n,m} \in \Sigma_{nm}$, определенные для любых натуральных $n, m \geq 1$. Легко убедиться в том, что это эквивалентно тому, что данная вербальная категория содержит категорию Σ.

Пусть K — мультикатегория над W. Тогда по определению существуют отображения $\sigma_{n,m} : K(x_{1,1} \ldots x_{1,m} \ldots x_{n,1} \ldots x_{n,m}, z) \longrightarrow K(x_{1,1} \ldots x_{n,1} \ldots x_{1,m} \ldots x_{n,m}, z)$, сопоставляющие мультистрелкам ω мультистрелки $\omega\sigma_{n,m}$.

Определение 5. Пусть даны две мультикатегории R и K над вербальной категорией W и мультифункторы $A_1, \ldots, A_n, B : R \longrightarrow K$. Определим *естественное мультипреобразование* (или *мультиморфизм мультифункторов*) λ из строки $\overline{A} = A_1 \ldots A_n$ в B (обозначение $\lambda : \overline{A} \to B$) как следующий комплекс данных. Для любого $x \in \mathrm{Ob}(R)$ задается элемент $\lambda_x \in K(A_1(x) \ldots A_n(x), B)$, и для каждого $\omega \in R(x_1 \ldots x_m, y)$ имеет место равенство

$$\lambda_y A_1(\omega) \ldots A_n(\omega) = B(\omega)\lambda_{x_1} \ldots \lambda_{x_n}\sigma_{n,m}. \tag{1}$$

Равенство (1) можно неформально представлять в виде следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
A_1(x_1)\ldots A_n(x_1)\ldots A_1(x_m)\ldots A_n(x_m) \arrow[r, equal] & A_1(x_1)\ldots A_n(x_1)\ldots A_1(x_m)\ldots A_n(x_m) \arrow[d, "\lambda_{x_1}\ldots\lambda_{x_m}"'] \\
A_1(x_1)\ldots A_1(x_m)\ldots A_n(x_1)\ldots A_n(x_m) \arrow[u, "\sigma_{n,m}"] \arrow[d, "A_1(\omega)\ldots A_n(\omega)"'] & B(x_1)\ldots B(x_m) \arrow[d, "B(\omega)"'] \\
A_1(y)\ldots A_n(y) \arrow[r, "\lambda_y"] & B(y).
\end{tikzcd}$$

Неформальность здесь состоит в том, что стрелка $\sigma_{n,m}$ имеет иную природу, чем все остальные стрелки. Тем не менее, так как умножения справа на $\sigma_{n,m}$ определены, то использование коммутативной диаграммы не приводит к ошибочным выводам и имеет преимущество наглядности.

В случае $n = 1$, $m = 1$ определение естественного мультипреобразования сводится к определению обычного естественного преобразования функторов. В случае $n = 1$ получаем известное определение *естественного преобразования мультифункторов* ([12], определение 2.3.5). Определена категория W-мультифункторов $\mathrm{MFun}(R,K)$ из R в K с мультифункторами в качестве объектов и естественными преобразованиями в качестве морфизмов. Покажем, что на самом деле это W-мультикатегория.

Следующие две леммы можно считать определениями композиции мультиморфизмов и "умножения" мультиморфизма на морфизм вербальной категории.

Лемма 1. *Если $\lambda : B_1 \dots B_n \to C$, $\lambda_i : A_{i,1} \dots A_{i,k_i} \to B_i$, $1 \leq i \leq n$, — мультиморфизмы мультифункторов, то существует мультиморфизм мультифункторов*

$$\varphi = \lambda\lambda_1 \dots \lambda_n : A_{1,1} \dots A_{1,k_i} \dots A_{n,1} \dots A_{n,k_i} \longrightarrow C$$

такой, что для каждого $x \in \mathrm{Ob}(R)$ имеет место равенство $\varphi_x = \lambda_x(\lambda_1)_x \dots (\lambda_n)_x$.

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_m, y$ — объекты R, $\overline{x} = x_1 \dots x_m$, $\omega \in R(\overline{x}, y)$. Положим $\overline{B} = B_1 \dots B_n$, $\overline{A}_i = A_{i,1} \dots A_{i,k_i}$, $\overline{B}(y) = B_1(y) \dots B_n(y)$, $\overline{B}(\overline{x}) = \overline{B}(x_1) \dots \overline{B}(x_m)$, $B_i(\overline{x}) = B_i(x_1) \dots B_i(x_m)$, $\overline{B}[\overline{x}] = B_1(\overline{x}) \dots B_n(\overline{x})$. Тогда морфизм $\sigma_{n,m}$, входящий в определение мультипреобразования λ, в категории W_S^{op} (где $S = \mathrm{Ob}(K)$) можно представлять как стрелку $\sigma_{n,m} : \overline{B}(\overline{x}) \to \overline{B}[\overline{x}]$, и по условию

$$\lambda_y B_1(\omega) \dots B_n(\omega) = (C(\omega)\lambda_{x_1} \dots \lambda_{x_m})\sigma_{n,m}.$$

Чтобы добиться компактной записи, обозначим строку $\lambda_{x_1} \dots \lambda_{x_m}$ через $\lambda_{\overline{x}}$, а строку $B_1(\omega) \dots B_n(\omega)$ — через $\overline{B}(\omega)$. Аналогичные обозначения будут использоваться для $\overline{A}_i$. В частности, условие того, что λ_i является естественным мультипреобразованием, записывается в виде

$$(\lambda_i)_y \overline{A}_i(\omega) = (B_i(\omega)(\lambda_i)_{\overline{x}})\sigma_{k_i,m}.$$

Здесь $\sigma_{k_i,m}$ можно мыслить как морфизм W_S^{op}, т. е. стрелку $\overline{A}_i(\overline{x}) \to \overline{A}_i[\overline{x}]$. Положим $k = k_1 + \dots + k_n$, и пусть $\sigma_{k,m}$ обозначает стрелку (морфизм W_S^{op}) $\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n(\overline{x}) \to \overline{A}_1[\overline{x}] \dots \overline{A}_n[\overline{x}]$. Отметим, что $\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n(\overline{x}) = \overline{A}_1(x_1) \dots \overline{A}_n(x_1) \dots \overline{A}_1(x_m) \dots \overline{A}_n(x_m)$.

Соотношение, которое необходимо доказать, таково:

$$\varphi_y(\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n)(\omega) = (C(\omega)\varphi_{x_1} \dots \varphi_{x_m})\sigma_{k,m}. \tag{2}$$

Здесь $\varphi_y = \lambda_y(\lambda_1)_y \dots (\lambda_n)_y$, $\varphi_{x_i} = \lambda_{x_i}(\lambda_1)_{x_i} \dots (\lambda_n)_{x_i}$. Проделаем вычисления, пользуясь свойствами мультикатегории и определением естественного мультипреобразования для λ и λ_i:

$$\begin{aligned}
\lambda_y(\lambda_1)_y \dots (\lambda_n)_y(\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n)(\omega) &= \lambda_y((\lambda_1)_y\overline{A}_1(\omega)) \dots ((\lambda_n)_y\overline{A}_n(\omega)) = \\
&= \lambda_y((B_1(\omega)(\lambda_1)_{\overline{x}})\sigma_{k_1,m}) \dots ((B_n(\omega)(\lambda_n)_{\overline{x}})\sigma_{k_n,m}) = \\
&= ((\lambda_y B_1(\omega) \dots B_n(\omega))(\lambda_1)_{\overline{x}} \dots (\lambda_n)_{\overline{x}})(\sigma_{k_1,m} \sqcup \dots \sqcup \sigma_{k_n,m}) = \\
&= ((C(\omega)\lambda_{\overline{x}})\sigma_{n,m})(\lambda_1)_{\overline{x}} \dots (\lambda_n)_{\overline{x}})(\sigma_{k_1,m} \sqcup \dots \sqcup \sigma_{k_n,m}) = \\
&= ((C(\omega)\lambda_{\overline{x}})(\lambda_1 \dots \lambda_n)_{x_1} \dots (\lambda_1 \dots \lambda_n)_{x_m})((\sigma_{n,m})^*\alpha)(\sigma_{k_1,m} \sqcup \dots \sqcup \sigma_{k_n,m}) = \\
&= (C(\omega)\varphi_{x_1} \dots \varphi_{x_m})((\sigma_{n,m})^*\alpha)(\sigma_{k_1,m} \sqcup \dots \sqcup \sigma_{k_n,m}).
\end{aligned}$$

Здесь $(\lambda_1 \dots \lambda_n)_{x_i} = (\lambda_1)_{x_i} \dots (\lambda_n)_{x_i}$, $\alpha = \binom{\overline{A}_1(x_1), \dots, \overline{A}_1(x_m), \dots, \overline{A}_n(x_1), \dots, \overline{A}_n(x_m)}{B_1(x_1), \dots, B_1(x_m), \dots, B_n(x_1), \dots, B_n(x_m)}$.

Сравнивая последнее полученное выражение с (2), видим, что утверждение леммы будет доказано, как только удастся установить равенство морфизмов $\sigma_{k,m} = ((\sigma_{n,m})^*\alpha)(\sigma_{k_1,m} \sqcup \dots \sqcup \sigma_{k_n,m})$ в категории W_S^{op}. Это равносильно следующему равенству в категории W_S:

$$\sigma_{k,m} = (\sigma_{k_1,m} \sqcup \dots \sqcup \sigma_{k_n,m})((\sigma_{n,m})^*\alpha). \tag{3}$$

Левая и правая части (3) — это стрелки вида

$$A_{i,1}(x_1)\dots A_{i,k_i}(x_1)\dots A_{i,1}(x_m)\dots A_{i,k_i}(x_m)\longrightarrow \\ \longrightarrow A_{i,1}(x_1)\dots A_{i,1}(x_m)\dots A_{i,k_i}(x_1)\dots A_{i,k_i}(x_m). \quad (4)$$

Остается заметить, что в категории W_S для “достаточно большого” S, в котором содержатся все символы $A_{i,j}(x_l)$, и все они различны, имеется ровно один морфизм вида (4). Отсюда следует равенство (3) для таких W_S, а следовательно, и для W (ввиду наличия естественным образом определяемого “забывающего” функтора $W_S \to W$), а следовательно, и для всех W_S. □

Лемма 2. *Если $\lambda : A_{f(1)}\dots A_{f(k)} \to B$ — мультиморфизм мультифункторов, и $f \in W([k],[n])$, то существует мультиморфизм мультифункторов $\lambda f : A_1\dots A_n \to B$ такой, что для каждого $x \in \mathrm{Ob}(R)$ имеет место равенство $(\lambda f)_x = (\lambda_x)f$. Здесь $(\lambda_x)f$ есть образ λ_x при отображении $K(A_{f(1)}(x)\dots A_{f(k)}(x), B(x)) \to K(A_1(x)\dots A_n(x), B(x))$ (обозначаемом также через f), которое существует по определению мультикатегории K над вербальной категорией W.*

Доказательство. Пусть $\omega : \overline{x} = x_1\dots x_m \to y$ — мультистрелка из R. Положим $\alpha = \binom{A_1(\overline{x}),\dots,A_n(\overline{x})}{A_1(y),\dots,A_n(y)}$. Проверим определение естественного мультипреобразования:

$$(\lambda f)_y A_1(\omega)\dots A_n(\omega) = (\lambda_y f)A_1(\omega)\dots A_n(\omega) = (\lambda_y A_{f(1)}(\omega)\dots A_{f(k)}(\omega))(f^*\alpha) = \\ = ((B(\omega)\lambda_{x_1}\dots\lambda_{x_m})\sigma_{k,m})(f^*\alpha) = (B(\omega)\lambda_{x_1}\dots\lambda_{x_m})((f^*\alpha)\sigma_{k,m}).$$

Здесь $(f^*\alpha)\sigma_{k,m}$ — морфизм из W_S, где $S = \mathrm{Ob}(K)$. С другой стороны,

$$(B(\omega)(\lambda f)_{x_1}\dots(\lambda f)_{x_m})\sigma_{n,m} = (B(\omega)\lambda_{x_1}\dots\lambda_{x_m})(f\sqcup\dots\sqcup f)\sigma_{n,m} = \\ = (B(\omega)\lambda_{x_1}\dots\lambda_{x_m})(\sigma_{n,m}(f\sqcup\dots\sqcup f)).$$

Здесь $\sigma_{n,m}(f\sqcup\dots\sqcup f)$ рассматривается уже как морфизм W_S. Сравнивая, делаем вывод, что утверждение леммы будет доказано, если установить следующее равенство морфизмов категории W_S:

$$(f^*\alpha)\sigma_{k,m} = \sigma_{n,m}(\overbrace{f\sqcup\dots\sqcup f}^{m}). \quad (5)$$

Это равенство доказывается с помощью тех же соображений, что применялись в конце доказательства предыдущей леммы, с учетом того, что и левая и правая части (5) суть морфизмы из $A_{f(1)}(x_1)...A_{f(k)}(x_1)...A_{f(1)}(x_m)...A_{f(k)}(x_m)$ в $A_1(x_1)...A_1(x_m)...A_n(x_1)...A_n(x_m)$. □

Теорема 1. *Пусть даны мультикатегории R и K, определенные над вербальной категорией W. Тогда определена мультикатегория $\mathrm{MFun}_W(R,K)$ над вербальной категорией W, объектами которой являются мультифункторы из R в K, а мультистрелками — естественные мультипреобразования.*

Доказательство. Основные трудности уже преодолены в двух предыдущих леммах. Проверка свойств мультикатегории происходит “пообъектно”, и легко следует из свойств мультикатегории K. Например, равенство $(\lambda f)\lambda_1\dots\lambda_n = (\lambda\lambda_{f(1)}\dots\lambda_{f(k)})(f^*\alpha)$ есть следствие равенств $(\lambda f)_x(\lambda_1)_x\dots(\lambda_n)_x = (\lambda_x(\lambda_{f(1)})_x\dots(\lambda_{f(k)})_x)(f^*\alpha)$, справедливых для всех объектов $x \in \mathrm{Ob}(R)$. Примерно так же производятся и остальные проверки. □

Из всего вышесказанного видно, что структура категории на $\mathrm{MFun}_W(R,K)$ является частью структуры мультикатегории.

Определение 6. Пусть Γ есть W-мультиграф, а K — W-мультикатегория. *Мультидиаграмма* D типа Γ в мультикатегории K определяется почти так же, как W-мультифунктор из Γ в K (если бы Γ была мультикатегорией), за исключением тех пунктов определения 4, которые связаны с наличием в Γ композиции мультистрелок и единиц. Определение *мультиморфизма* мультидиаграмм дословно повторяет определение 5 естественного мультипреобразования мультифункторов.

Дословно повторяя доказательства лемм 1, 2 и теоремы 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Существует W-мультикатегория K^Γ, объектами которой являются мультидиаграммы типа Γ в мультикатегории K, и если $D_1, \ldots, D_n$, D_0 — такие мультидиаграммы, то мультистрелки из $D_1 \ldots D_n$ в D_0 — это в точности мультиморфизмы мультидиаграмм.*

Попытка сразу же ввести пределы и копределы мультидиаграмм наталкивается на невозможность определить диагональный мультифунктор $\Delta : K \to K^\Gamma$ без дополнительных предположений.

3. Комма-мультикатегории

Построим мультикатегорный аналог комма-категории. Термин "комма-категория" (калька со стандартного английского названия) позаимствован из книги [14]. Пусть даны мультикатегории R, K, Q, определенные над одной и той же вербальной категорией W, содержащей все морфизмы $\sigma_{n,m}$, и пусть даны W-мультифункторы $F_1, \ldots, F_n : R \to K$ и $G : Q \to K$. Определим *комма-мультикатегорию* $(F_1 \ldots F_n \downarrow G)$ следующим образом. Объектами этой мультикатегории будут тройки (x, λ, y), где $x \in \mathrm{Ob}(R)$, $y \in \mathrm{Ob}(Q)$, а $\lambda \in K(F_1(x) \ldots F_n(x), G(y))$, т. е. это мультистрелка вида $F_1(x) \ldots F_n(x) \to G(y)$. Для краткости время от времени будем также называть объектами $(F_1 \ldots F_n \downarrow G)$ только мультистрелки λ, считая, что объекты x и y можно определить, зная λ.

Пусть даны объекты $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что $\lambda_i : F_1(x_i) \ldots F_n(x_i) \to G(y_i)$, $1 \le i \le m$. Определим мультистрелку $\lambda_1 \ldots \lambda_m \to \lambda$ как пару мультиморфизмов (ω, ξ) мультикатегории K, где $\omega : \overline{x} \to x$, $\xi : \overline{y} \to y$, $\overline{x} = x_1 \ldots x_m$, $\overline{y} = y_1 \ldots y_m$. При этом должно быть выполненным условие

$$G(\xi)\lambda_1 \ldots \lambda_m \sigma_{n,m} = \lambda F_1(\omega) \ldots F_n(\omega). \tag{6}$$

Обозначим, как и выше, последовательности (строки) символов $F_1(x_i) \ldots F_n(x_i)$ через $\overline{F}(x_i)$, а строки $F_j(x_1) \ldots F_j(x_m)$ через $F_j(\overline{x})$. Тогда свойство пары (ω, ξ) быть мультиморфизмом равносильно коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} \overline{F}(x_1) \ldots \overline{F}(x_m) \arrow[r, "\lambda_1 \ldots \lambda_m"] \arrow[d, equal] & G(y_1) \ldots G(y_m) \arrow[rr, "G(\xi)"] & & G(y) \\ \overline{F}(x_1) \ldots \overline{F}(x_m) & F_1(\overline{x}) \ldots F_1(\overline{x}) \arrow[l, "\sigma_{n,m}"'] \arrow[rr, "F_1(\omega) \ldots F_n(\omega)"] & & F_1(x) \ldots F_n(x). \arrow[u, "\lambda"'] \end{tikzcd} \tag{7}$$

Определим теперь операцию композиции мультистрелок комма-мультикатегории. Пусть даны объекты $\lambda_{i,j} : \overline{F}(x_{i,j}) \to G(y_{i,j})$, где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k_i$. Положим $\overline{\lambda}_i = \lambda_{i,1} \ldots \lambda_{i,k_i}$, $\overline{x}_i = x_{i,1} \ldots x_{i,k_i}$, $\overline{y}_i = y_{i,1} \ldots y_{i,k_i}$. Пусть $(\omega_i, \xi_i) : \overline{\lambda}_i \to \lambda_i$ — морфизмы $(F_1 \ldots F_n \downarrow G)$, т. е. для них имеют место тождества вида (6). Положим

$$(\omega, \xi)(\omega_1, \xi_1) \ldots (\omega_m, \xi_m) = (\omega\omega_1 \ldots \omega_m, \xi\xi_1 \ldots \xi_m). \tag{8}$$

Далее, пусть дан морфизм вербальной категории $f \in W(k,m)$ и мультиморфизм $(F_1...F_n, G)$, имеющий вид $(\omega, \xi) : \lambda_{f(1)} \dots \lambda_{f(k)} \to \lambda$. Здесь λ и λ_i имеют тот же смысл, что и выше, $\omega : x_{f(1)} \dots x_{f(k)} \to x$, $\xi : y_{f(1)} \dots y_{f(k)} \to y$. Тогда положим

$$(\omega, \xi)f = (\omega f, \xi f). \tag{9}$$

Теорема 3. *Введенные выше операции превращают* $(F_1 \dots F_n \downarrow G)$ *в* W*-мультикатегорию.*

Доказательство. Прежде всего необходимо установить, что соотношения (8) и (9) задают морфизмы $(F_1 \dots F_n \downarrow G)$, т. е. для них выполнено равенство, выражаемое коммутативной диаграммой вида (7).

Рассмотрим соотношение (8) и пусть $\widetilde{\omega} = \omega\omega_1 \dots \omega_m$, $\widetilde{\xi} = \xi\xi_1 \dots \xi_m$. Покажем, что пара $(\widetilde{\omega}, \widetilde{\xi})$ есть мультистрелка вида $\overline{\omega}_1 \dots \overline{\omega}_m \to \lambda$. Положим $k = k_1 + \dots + k_m$. Соотношение вида (6), которое надо проверить, в данном случае таково:

$$\lambda \overline{F}(\widetilde{\omega}) = (G(\widetilde{\xi})\overline{\lambda}_1 \dots \overline{\lambda}_m)\sigma_{n,k}. \tag{10}$$

Преобразуем левую часть (10), используя то, что пары (ω, ξ) и (ω_i, ξ_i) удовлетворяют соотношениям вида (6). В дальнейших выкладках $\alpha = \binom{F_1(\overline{x}_1),\dots,F_1(\overline{x}_m),\dots,F_n(\overline{x}_1),\dots,F_n(\overline{x}_m)}{F_1(x_1),\dots,F_1(x_m),\dots,F_n(x_1),\dots,F_n(x_m)}$:

$$\begin{aligned}
\lambda \overline{F}(\widetilde{\omega}) = (\lambda \overline{F}(\omega))F_1(\overline{\omega}) \dots F_n(\overline{\omega}) &= ((G(\xi)\overline{\lambda})\sigma_{n,m})F_1(\overline{\omega}) \dots F_n(\overline{\omega}) = \\
&= ((G(\xi)\lambda_1 \dots \lambda_m)\overline{F}(\omega_1) \dots \overline{F}(\omega_m))((\sigma_{n,m})^*\alpha) = \\
&= (G(\xi)(\lambda_1 \overline{F}(\omega_1)) \dots (\lambda_m \overline{F}(\omega_m)))((\sigma_{n,m})^*\alpha) = \\
&= (G(\xi)(G(\xi_1)\overline{\lambda}_1\sigma_{n,k_1})(G(\xi_m)\overline{\lambda}_m\sigma_{n,k_m}))((\sigma_{n,m})^*\alpha) = \\
&= ((G(\xi)G(\xi_1) \dots G(\xi_m))\overline{\lambda}_1 \dots \overline{\lambda}_m)(\sigma_{n,k_1} \sqcup \dots \sqcup \sigma_{n,k_m})((\sigma_{n,m})^*\alpha).
\end{aligned}$$

Здесь выражение $(\sigma_{n,k_1} \sqcup \dots \sqcup \sigma_{n,k_m})((\sigma_{n,m})^*\alpha)$ представляет собой композицию морфизмов в категории W_S^{op}. Следовательно, равенство (10) будет доказано, как только для подходящего S в категории W_S будет установлено тождество:

$$((\sigma_{n,m})^*\alpha)(\sigma_{n,k_1} \sqcup \ldots \sqcup \sigma_{n,k_m}) = \sigma_{n,k}. \tag{11}$$

Чтобы доказать это соотношение, достаточно убедиться, что и левая, и правая части (11) определены, и представляют собой морфизмы из $\overline{F}(x_{1,1}) \dots \overline{F}(x_{1,k_1}) \dots \overline{F}(x_{m,1}) \dots \overline{F}(x_{m,k_m})$ в $F_1(\overline{x}_1) \dots F_1(\overline{x}_m) \dots F_n(\overline{x}_1) \dots F_n(\overline{x}_m)$. Это производится непосредственной проверкой.

Покажем, что соотношение (9) также определяет мультистрелку из $(F_1 \dots F_n \downarrow G)$, т. е. $(\omega, \xi)f$ удовлетворяет соотношению вида (6). Будем использовать обозначения и соглашения, которые были введены перед (9). Таким образом, дано равенство $\lambda F_1(\omega) \dots F_n(\omega) = (G(\xi)\lambda_{f(1)} \dots \lambda_{f(k)})\sigma_{n,k}$, и необходимо показать, что имеет место равенство

$$\lambda F_1(\omega f) \dots F_n(\omega f) = (G(\xi f)\lambda_1 \dots \lambda_m)\sigma_{n,m}. \tag{12}$$

Заметим, что функторы F_i и G по условию таковы, что $F_i(\omega f) = F_i(\omega)f$ и $G(\xi f) = G(\xi)f$. Пользуясь этим, преобразуем левую часть (12):

$$\begin{aligned}
\lambda F_1(\omega f) \dots F_n(\omega f) = (\lambda(F_1(\omega)f) \dots (F_n(\omega)f) = \lambda F_1(\omega) \dots F_n(\omega))(f \sqcup \dots \sqcup f) = \\
= ((G(\xi)\lambda_{f(1)} \dots \lambda_{f(k)})\sigma_{n,k})(f \sqcup \dots \sqcup f).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что (12) будет следствием равенства морфизмов категории W_S:

$$(f \sqcup \dots \sqcup f)\sigma_{n,k} = \sigma_{n,m}(f^*\beta). \tag{13}$$

Здесь $\beta = \binom{\overline{F}(x_1),\dots,\overline{F}(x_m)}{G(y_1),\dots,G(y_m)}$. Тождество (13) проверяется так же, как и аналогичные тождества выше.

Теперь, поскольку операции (8) и (9) определены корректно, все свойства, которым должна удовлетворять W-мультикатегория $(F_1 \dots F_n \downarrow G)$, легко следуют из свойств мультикатегорий R и Q. □

Как и в случае комма-категорий, для комма-мультикатегории $(F_1 \dots F_n \downarrow G)$ определены мультифункторы проекций: $R \xleftarrow{\pi_R} (F_1 \dots F_n \downarrow G) \xrightarrow{\pi_Q} Q$ такие, что $\pi_R(x, \lambda, y) = x$, $\pi_R(\omega, \xi) = \omega$, и аналогично для π_Q. Рассмотрим случай, когда $Q = R$. В этом случае вместо π_R будем писать π_1, а вместо π_Q — π_2.

Теорема 4. *Существует взаимно-однозначное соответствие между естественными мультипреобразованиями* $\lambda : F_1 \dots F_n \to G$ *и мультифункторами* $\Lambda : R \to (F_1 \dots F_n \downarrow G)$ *такими, что* $\pi_1\Lambda = \pi_1\Lambda = \mathrm{id}_R$.

Доказательство. Пусть дано естественное мультипреобразование $\lambda : F_1 \dots F_n \to G$. Построим соответствующий ему мультифунктор $\Lambda : R \to (F_1 \dots F_n \downarrow G)$. Действие на объектах таково: если $x \in \mathrm{Ob}(R)$, то $\Lambda(x) = (x, \lambda_x, x)$, где $\lambda_x : F_1(x) \dots F_n(x) \to G(x)$ — мультистрелка, существующая по определению λ. Если $\omega : x_1 \dots x_m \to y$ — мультистрелка из R, то положим $\Lambda(\omega) = (\omega, \omega)$. Легко убедиться, что коммутативная диаграмма вида (7), существующая по определению естественного мультипреобразования λ, превращается в коммутативную диаграмму вида (7), где $\xi = \omega$. Проверка того, что Λ есть мультифунктор (и даже W-мультифунктор) теперь легко следует из определений.

Обратно, если дан мультифунктор Λ со свойством $\pi_1\Lambda = \pi_2\Lambda = \mathrm{id}_R$, то его действие на объектах должно иметь вид $\Lambda(x) = (x, \lambda_x, x)$, причем λ_x есть мультистрелка вида $\lambda_x : F_1(x) \dots F_n(x) \to G(x)$, определенная для каждого $x \in \mathrm{Ob}(R)$. Из тех же условий на Λ следует, что для $\omega : x_1 \dots x_m \to y$ значением $\Lambda(\omega)$ будет пара (ω, ω). Отсюда вытекает, что существует коммутативная диаграмма вида (7), и, таким образом, семейство $\{\lambda_x \mid x \in \mathrm{Ob}(R)\}$ является естественным мультипреобразованием. □

С помощью комма-мультикатегорий можно дать следующее определение сопряженности для мультифункторов. Пусть R и K — мультикатегории над одной и той же вербальной категорией W, $A : R \to K$, $B : K \to R$ — W-мультифункторы и n — натуральное число. Назовем A *n-сопряженным справа к B* (и, соответственно, B — *n-сопряженным слева к A*), если существует изоморфизм мультикатегорий $(\overbrace{A \dots A}^{n} \downarrow \mathrm{id}_K) \cong (\overbrace{\mathrm{id}_R \dots \mathrm{id}_R}^{n} \downarrow B)$, коммутирующий с проекциями комма-мультикатегорий на R и K. При $n = 1$ получаем обычное определение сопряженных функторов. Общий случай требует отдельного исследования.

4. Коммутативные операды

Пусть дана W-мультикатегория R, и $A : R \to R$ — любой W-мультифунктор. Подмультикатегория мультикатегории $\mathrm{MFun}_W(R, R)$ с единственным объектом A является W-операдой. Назовем ее *операдой эндоморфизмов* мультифунктора A. Можно показать, что те операды, которые сейчас называются операдами эндоморфизмов, являются весьма частными случаями этой конструкции. Однако рассмотрим здесь другой частный случай.

Определение 7. *Центром* мультикатегории R будет называться операда эндоморфизмов тождественного мультифунктора из R в R.

Название мотивировано известным определением центра категории ([15], гл. II, § 2.2). Из доказываемой далее теоремы 5 следует, что это название согласуется с термином "коммутативная операда", введенным в [2] (так как "центры" должны быть "коммутативными"). Однако дадим сейчас определение коммутативной операды в несколько ином, по сравнению с [2], виде. Обоснованием такого изменения служат теоремы 5 и 6.

Определение 8. Пусть Z — операда над некоторой вербальной категорией W такой, что $\Sigma \subseteq W$. Назовем операду Z *коммутативной*, если для любых $\lambda \in Z(n)$, $\omega \in Z(m)$ имеет место тождество

$$\lambda \overbrace{\omega \dots \omega}^{n} = (\omega \overbrace{\lambda \dots \lambda}^{m}) \sigma_{n,m}. \tag{14}$$

Замечание 2. Сейчас нам понадобится понятие алгебры над операдой (над произвольной вербальной категорией), определение которого можно найти в [4], [5]. Пусть A — алгебра над коммутативной операдой Z, $\overline{a}_i = a_{i,1} \dots a_{i,m}$, $a_{i,j} \in A$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Тогда из (14) следует

$$\lambda(\omega \overline{a}_1) \dots (\omega \overline{a}_n) = \omega(\lambda a_{1,1} \dots a_{n,1}) \dots (\lambda a_{1,m} \dots a_{n,m}).$$

Это равенство можно представить в следующем виде. Обозначим действие элемента операды $\lambda \in Z(n)$ на элементы $a_1, \dots, a_n$ из Z-алгебры A как $\sum\limits_{i=1}^{n} {}^{(\lambda)} a_i$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} {}^{(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} {}^{(\omega)} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} {}^{(\omega)} \sum_{i=1}^{n} {}^{(\lambda)} a_{i,j}. \tag{15}$$

Таким образом, в любой алгебре над коммутативной операдой имеет место тождество (15) для любых λ и ω. Отметим, что именно эти соотношения были первоначально взяты в [2] за определение коммутативной операды. В данной работе принимаем за определение коммутативности принимаем соотношение (14), что обосновывается теоремами 5 и 6. Операды, коммутативные в смысле определения 8, будут коммутативны и в смысле определения работы [2]. Все примеры коммутативных операд, которые рассматривались в [2], остаются коммутативными и в смысле определения 8. Вероятнее всего, обе версии определения коммутативности эквивалентны, но строгого доказательства этого пока нет.

Теорема 5. *Центр мультикатегории является коммутативной операдой. Центр коммутативной операды R совпадает с R.*

Доказательство. Сравним (14) с определением центра мультикатегории R. Если A — тождественный мультифунктор $R \to R$, то мультиморфизм $\lambda : A \dots A \to A$ определяется семейством $\{\lambda_x : x \dots x \to x \mid x \in \mathrm{Ob}(R)\}$ (многоточия в обоих случаях означают строки из n символов) таким, что для всех $\omega \in R(x_1 \dots x_m, y)$ имеют место равенства $\lambda_y \omega \dots \omega = (\omega \lambda_{x_1} \dots \lambda_{x_m}) \sigma_{n,m}$. Пусть $\nu : \overbrace{A \dots A}^{m} \to A$ — другой мультиморфизм мультифункторов. Положим $x_1 = \dots = x_m = y$, $\omega = \nu_y$. Тогда получим равенство $\lambda_y \nu_y \dots \nu_y = (\nu_y \lambda_y \dots \lambda_y) \sigma_{n,m}$, справедливое для всех $y \in \mathrm{Ob}(R)$. Из него вытекает равенство $\lambda \nu \dots \nu = (\nu \lambda \dots \lambda) \sigma_{n,m}$. Поскольку это верно для любой пары λ, ν, то это означает, что центр R является коммутативной операдой. То, что центр коммутативной операды совпадает с ней самой, теперь очевидно. □

В заключение выясним, какова связь между коммутативными операдами и коммутативными алгебраическими теориями ([3], § 3.10). Напомним, что *алгебраической теорией* (или ловеровской алгебраической теорией) называется категория T с объектами $[0], [1], [2], \dots,$

обладающая прямыми (декартовыми) произведениями, причем $[n] \times [m] = [n+m]$. Хорошо известно, что алгебраические теории (и только они) — это в точности категории, двойственные к категориям свободных алгебр с конечными базисами (точнее, с базисами вида $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$) многообразий универсальных алгебр. Хорошо известно также, что это понятие эквивалентно и понятию абстрактного клона. Определение коммутативной алгебраической теории (в наших обозначениях) таково ([3], definition 3.10.1, p. 166).

Алгебраическая теория T называется *коммутативной*, если для любых морфизмов категории T вида $\rho : [m] \to [1]$ и $\nu : [n] \to [1]$, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} [nm] & \xrightarrow{\rho^n} & [n] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \nu^m} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \nu} \\ [m] & \xrightarrow{\rho} & [1]. \end{array} \tag{16}$$

Диаграмма (16) соответствует диаграмме 3.15 из ([3], с. 166).

Теорема 6. *Пусть T — коммутативная алгебраическая теория и R — соответствующая ей, согласно основному результату работы* [4], Fset*-операда. Тогда R является коммутативной операдой. Обратно, коммутативная* Fset*-операда, рассматриваемая как алгебраическая теория, является коммутативной алгебраической теорией.*

Заметим, что, ссылаясь на основной результат работы [4], мы имеем в виду эквивалентность понятий алгебраической теории и абстрактного клона.

Доказательство. Пусть T есть категория, двойственная к некоторому (однозначно определенному) многообразию универсальных алгебр, свободные алгебры в котором будем обозначать через $\mathrm{Fr}(X)$. Тогда $T(k,l)$ есть множество гомоморфизмов из $\mathrm{Fr}(x_1, \dots, x_l)$ в $\mathrm{Fr}(x_1, \dots, x_k)$, а диаграмма (16) превращается в диаграмму следующего вида:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fr}(x_{1,1}, \dots, x_{n,m}) & \xleftarrow{\rho^n} & \mathrm{Fr}(x_1, \dots, x_m) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \nu^m} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \nu} \\ \mathrm{Fr}(x_1, \dots, x_n) & \xleftarrow{\rho} & \mathrm{Fr}(x). \end{array} \tag{17}$$

Если $\rho(x) = \omega(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Fr}(x_1, \dots, x_n)$ и $\nu(x) = \lambda(x_1, \dots, x_m) \in \mathrm{Fr}(x_1, \dots, x_m)$, то $\rho^n(x_j) = \omega(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$, $1 \le j \le m$, а $\nu^m(x_i) = \lambda(x_{i,1}, \dots, x_{i,m})$, $1 \le i \le n$. Следовательно, коммутативность диаграмм (16) и (17) равносильна равенству

$$\omega(\lambda(x_{1,1}, \dots, x_{1,m}), \dots, \lambda(x_{n,1}, \dots, x_{n,m})) = \lambda(\omega(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}), \dots, \omega(x_{1,m}, \dots, x_{n,m})). \tag{18}$$

Из результатов работ [4], [5] следует, что алгебраическая теория превращается в Fset-операду следующим образом: $R(n) = \mathrm{Fr}(x_1, \dots, x_n)$ для каждого n, и если $\xi \in R(m)$, $\gamma_i \in R(n_i)$, $1 \le i \le m$, то

$$\xi\gamma_1 \dots \gamma_m(x_1, \dots, x_{n_1+\dots+n_m}) = \xi(\gamma_1(x_1, \dots, x_{n_1}), \dots, \gamma_m(x_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_m})).$$

Кроме того, если $f : [n] \to [m]$ — морфизм из Fset, то $\xi f(x_1, \dots, x_m) = \xi(x_{f(1)}, \dots, x_{f(n)})$. Это можно еще выразить так: если $\overline{x} = x_1 \dots x_m$, то $\overline{x} f = x_{f(1)} \dots x_{f(n)}$, и тогда $\xi f = \xi f(\overline{x}) = \xi(\overline{x} f)$. Здесь, как и в предыдущих разделах, пользуемся соглашением о пропуске (или, при необходимости, восстановлении) запятых в упорядоченных строках символов. Ввиду всего этого равенство (18) может быть переписано в виде

$$\omega \overbrace{\lambda \dots \lambda}^{n}(\overline{x}') = \lambda \overbrace{\omega \dots \omega}^{m}(\overline{x}''),$$

где (опуская запятые) $\overline{x}' = x_{1,1} \dots x_{1,m} \dots x_{n,1} \dots x_{n,m}$, $\overline{x}'' = x_{1,1} \dots x_{n,1} \dots x_{1,m} \dots x_{n,m}$. Вспоминая опеределение $\sigma_{n,m}$, видим, что $\overline{x}' = \overline{x}''\sigma_{n,m}$, и это означает, что коммутативность T эквивалентна равенству $\lambda\overbrace{\omega\dots\omega}^{m} = (\omega\overbrace{\lambda\dots\lambda}^{n})\sigma_{n,m}$, т. е. равенству (14). □

Автор выражает признательность рецензенту за полезные замечания.

Литература

[1] Маклейн С. *Категории для работающего математика* (Физматлит, М., 2004).

[2] Тронин С.Н. *Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами*, Сиб. матем. журн. **47** (3), 670–694 (2006).

[3] Borceux F. *Handbook of categorical algebra* 2. *Categories and structures* (Cambridge University Press, 1994).

[4] Тронин С.Н. *Абстрактные клоны и операды*, Сиб. матем. журн. **43** (4), 924–936 (2002).

[5] Тронин С.Н. *Мультикатегории и многообразия многосортных алгебр*, Сиб. матем. журн. **49** (5), 1184–1201 (2008).

[6] Tronin S.N. *Natural multitransformations of multifunctors*, Междунар. алгебр. конф. посв. 100-летию со дня рожд. А.Г. Куроша. Тезисы докл. (Изд-во мехмата МГУ, М., 2008), с. 363–364.

[7] Бордман Дж., Фогт Р. *Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах* (Мир, М., 1977).

[8] Kelly G.M. *On the operads of J.P. May*, Reprints in Theory and Applications of Categories **13**, 1–13 (2005).

[9] Lambek J. *Deductive systems and categories*. II. *Standard constructions and closed categories*, Category Theory, Homology Theory and Their Applications. I (Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1969), p. 76–122 (Lect. Notes in Math., V. 86.)

[10] Baez J.C., Dolan J. *Higher-dimensional algebra* III: *n-categories and the algebra of opetopes*, Adv. Math. **135** (2), 145–206 (1998).

[11] Hermida C. *Representable multicategories*, Adv. Math. **151** (2), 164–225 (2000).

[12] Leinster T. *Higher operads, higher categories* (London Math. Soc. Lect. Notes Ser., Cambr. Univ. Press, 2003).

[13] Васюков В.Л. *Категорная логика* (АНО Институт логики, М., 2005).

[14] Фейс К. *Алгебра: кольца, модули, категории*, Т. 1 (Мир, М., 1977).

[15] Басс Х. *Алгебраическая K-теория* (Мир, М., 1973).

С.Н. Тронин

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008,

`e-mail:` Serge.Tronin@ksu.ru

S.N. Tronin

Associate Profesor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Serge.Tronin@ksu.ru