МОДУЛЬ «ПРОПОРЦИИ» ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ 8-9 КЛАССОВ

Григорьева И.С.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, igrigori_@mail.ru

Программа дополнительного образования не ограничена жесткими рамками ГОС, но такая «свобода» чревата тем, что курс может превратиться в «лоскутное одеяло», набор не связанных между собой фактов. Чтобы этого избежать, автор предлагает выбрать какую-нибудь ключевую идею, вокруг которой и строить курс (или его модуль). Такой метод изложения назовем «Тема с вариациями».

В качестве примера можно предложить важное, хотя и простое, понятие «пропорциональность».

Тема

Задачи, приводящие к идее пропорции, можно иногда найти «под ногами».

Пример 1. В песне В.Сюткина есть слова: «Ежедневно 42 минуты под землей я наконец сложу в года». Сколько нужно лет, чтобы этот прогноз сбылся?

Решение. «Годá» – это, как минимум, 2 года. Поэтому ответ следует из пропорции 1 сутки : 42 минуты = x лет : 2 года, откуда $x \approx 69$ лет.

Пример 2. В магазине продаются яйца разного размера: высотой 5 см по 40 руб. за десяток, а высотой 4 см – 30 руб. Какие покупать выгоднее?

«Решение». Мелкие яйца должны стоить $4/5\cdot40$ руб. = 32 руб. Поэтому яйца по 30 руб. за десяток выгоднее. Конечно, это рассуждение неправильное, объемы подчиняются не тому же закону пропорциональности, что и линейные размеры.

Вариация 1. Порожденные пропорции

В примере 2 мы видим, что пропорциональность величин позволяет найти закономерности, связывающие некоторые другие величины. Например, при изменении линейных размеров в k раз площади увеличиваются в k^2, а объёмы в k^3 раз. Продолжая этот ряд, мы получаем такой важный объект, как геометрическая прогрессия. Его можно использовать для описания многих процессов. Примеры таких задач приведены в [3].

Вариация 2. Аффинная геометрия

К понятию пропорциональности близка идея деления в данном отношении. В геометрии свойство пропорциональности может быть связано с понятием параллельности прямых и плоскостей. Свойства параллелограмма, средние линии, теорема Фалеса – представители этой связи. Причем эта группа свойств составляет полноценную законченную теорию, вложенную в «обычную», евклидову геометрию. Идеи аффинной геометрии можно изложить ученикам, закончившим 8 или 9 классов, с помощью системы задач, приведенных в [4].

Вариация 3. Исторический нониус

Пример 3. Нониус – это устройство, установленное на штангенциркуле и позволяющее значительно повысить точность измерений. Введем две шкалы, например, одну с шагом 1 мм, а другую – 9/10 мм. Предположим, что в миллиметрах измеряемая длина равна $21 + x$. Приложим вторую линейку так, чтобы её начало отсчета совпало с краем измеряемого отрезка. При этом одно из делений миллиметровой шкалы (с номером $21 + k$) совпадет с делением шкалы нониуса (также с номером k). Тогда $k{\cdot}1 = x + k{\cdot}9/10$, откуда следует, что $x = k – 0{,}9k = 0{,}1k$. Точность измерения повысилась до 0,1 мм, хотя единицы измерения обеих шкал гораздо больше!

Пример 4. Историческая хронология сталкивается с трудностями, когда надо привязать события древности к определенному времени. Из-за этого иногда возникают теории типа «Новой хронологии», которые пытаются сдвинуть даты прошлых событий. Однако точность датировок можно повысить, если они описаны в хрониках разных государств. Дело в том, что некоторые культуры (например, мусульманская), пользуются не солнечным, а лунным годом, который на 11 дней короче солнечного. Поэтому такой календарь может служить своеобразным «нониусом» для уточнения дат солнечного календаря.

Вариация 4. Доли и вероятности

С идеей пропорции можно также связать понятие доли. Например, если у нас есть несколько типов объектов, можно посчитать доли каждого из них, p_i.

Зная только эту информацию, можно уже отвечать на некоторые простейшие вопросы, например, какой тип объекта встречается чаще. Если же объекты являются числами x_i, то можно найти их средневзвешенное значение $\sum x_i p_i$. Заметим, что в силу $p_i = n_i/N$ это значение совпадает со средним арифметическим набора чисел, в котором каждое из x_i повторяется n_i раз. Такое среднее используется в теории вероятностей и в математической статистике.

Вариация 5. Сложность алгоритмов

Несмотря на быстродействие современных компьютеров, алгоритмы, обрабатывающие большие объёмы данных, могут работать весьма медленно. Сравним два алгоритма: один требует $10N$ операций, а другой – N^2. Время выполнения одной операции нам не известно, однако алгоритмы можно различить, увеличив пропорционально размер N. Пусть, например, массив размера N обрабатывается 1 с. Увеличим размер массива в 2 раза, время выполнения первого алгоритма составит 2 с, второго – 4 с. Увеличение же N в 100 раз для первого даст время100 с = 1 мин 40 с, а для второго 10000 с, что составляет почти семь суток!

Идеи, связанные с пропорциями, не исчерпываются описанными выше. Их можно найти в разных разделах знаний. Это и музыка (построение звукоряда), и биология (законы размножения популяций), психология (закон Вебера-Фехнера) и многое другое. Много интересных идей можно почерпнуть в книгах [1] и [2].

Описанный подход был применен на занятиях с учениками 8-9 классов в летнем профильном лагере «Квант» при Казанском университете.

Литература

1. Математическая составляющая/ Ред.-сост. Н.Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюнин. – М.: Фонд «Математические этюды», 2015. – 151 с.
2. Маковецкий П.В. Смотри в корень. Сборник любопытных задач и вопросов. – М. Книговек, 2013. – 432 с.
3. Григорьева И.С. Математика и жизнь, или Парадоксы моделирования // Математика для школьников. – 2011. – № 1. – С. 58–63; № 2. – С. 57–64.
4. Григорьева И.С. Структура евклидовой геометрии в задачах. – М. "Школа-Пресс", – 2003. – 64 с.