КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ
Кафедра автономных робототехнических систем

Н.Н. Корнеева

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ: ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ПРЕДИКАТОВ

Учебно–методическое пособие

Казань — 2014

Корнеева Н.Н.

Основания математики: исчисления высказываний и предикатов: Учебно–методическое пособие / Н.Н.Корнеева. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2014. – 32 с.

Рецензент:
доктор физико–математических наук, профессор М.М. Арсланов

Учебное пособие предназначено для студентов второго курса Высшей школы информационных технологий и информационных систем и содержит основые разделы, излагаемые в курсе математической логики.

Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Высшей школы информационных технологий и информационных систем
Протокол № 3 от 19 декабря 2013 г.

Содержание

1 Логика высказываний

Высказывание – повествовательное предложение, про которое можно сказать истинно оно или ложно. Используя логические операции из одних высказываний можно составлять другие высказывания, об истинности которых можно судить по истинности составляющих их высказываний.

Рассмотрим основные *логические операции* и их истинностные значения, обозначая высказывания большими латинскими буквами.
1. *Конъюнкция.* Обозначается: $A \wedge B$, читается: "A и B". Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B.
2. *Дизъюнкция.* Обозначается: $A \vee B$, читается: "A или B". Дизъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний A или B. Другими словами, дизъюнкция ложна тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания A и B.
3. *Импликация.* Обозначается $A \to B$, читается: "если A, то B" или "A влечет B". Импликация ложна тогда и только тогда, когда истинно A и ложно B.
4. *Отрицание.* Обозначается: $\neg A$, читается: "не A". Отрицание истинно, когда исходное высказывание ложно, и ложно, когда исходное высказывание истинно.

Истинностные значения основных логических операций отражены в следующих таблицах, где истина обозначена как 1, ложь – как 0:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

и

A	$\neg A$
0	1
1	0

При формальном изложении логики высказываний используется следующий *язык*:
1. пропозициональные переменные (высказывания). Будем обозначать их большими латинскими буквами иногда с индексами, иногда без них: $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, A_3, \ldots,$
2. логические символы: $\wedge, \vee, \to, \neg,$

3. вспомогательные символы: открывающаяся скобка (, закрывающаяся скобка), запятая.

На указанном языке вводятся все основные понятия логики высказываний.

Формулы логики высказываний. Понятие формулы логики высказываний вводится индуктивно:
1. пропозициональная переменная есть формула,
2. если A, B – формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $\neg A$ – формулы.

Пример. $((A \wedge C) \rightarrow \neg(A \vee B))$ – формула.

При записи формул обычно некоторые скобки опускают. Во–первых, опускают внешние скобки. Во-вторых, опускают некоторые внутренние скобки, учитывая приоритет выполнения операций: конъюнкция выполняется раньше дизъюнкции, а дизъюнкция – раньше импликации.

Пример. Формула из предыдущего примера с учетом вышесказанного принимает следующий вид: $A \wedge C \rightarrow \neg(A \vee B)$.

Для каждой формулы можно определить истинностные значения, которые она принимает при подстановке различных истинностных значений пропозициональных переменных, построив для нее таблицу истинности.

Пример. Построим таблицу истинности формулы из предыдущего примера: $A \wedge C \rightarrow \neg(A \vee B)$.

A	B	C	$A \wedge C$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$A \wedge C \rightarrow \neg(A \vee B)$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0

Формула логики высказываний называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*), если она принимает значения истина (ложь) при любых значениях входящих в нее пропозициональных переменных.

Если формула A тождественно истинна, то пишут $\models A$.

Формула логики высказываний называется *выполнимой*, если она принимает значения истина хотя бы при одном наборе значений входящих в нее пропозициональных переменных.

Очевидно, что отрицание тождественно истинной формулы является тождественно ложной формулой, а отрицание формулы, которая не является тождественно истинной, является выполнимой. Ясно, что формула выполнима тогда и только тогда, когда она не тождественно ложна.

Пример. Формула из предыдущего примера $A \wedge C \to \neg(A \vee B)$ выполнима, но не тождественно истинна.

Две формулы логики высказываний A и B называются *эквивалентными* ($A \sim B$), если они принимают одинаковые истинностные значения при любых значениях входящих в них пропозициональных переменных, или, другими словами, если их таблицы истинности совпадают.

Для проверки эквивалентности формул достаточно построить их таблицы истинности, то есть вычислить их истинностные значения на всех возможных наборах значений переменных.

Следующие формулы логики высказываний эквивалентны:

1. $\neg\neg A \sim A$
2. $A \wedge B \sim B \wedge A$
3. $A \vee B \sim B \vee A$
4. $A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$
5. $A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$
6. $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
7. $A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
8. $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$
9. $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$
10. $A \to B \sim \neg A \vee B$
11. $A \to B \sim \neg B \to \neg A$
12. $A \wedge (A \vee B) \sim A$
13. $A \vee (A \wedge B) \sim A$
14. $A \wedge A \sim A$
15. $A \vee A \sim A$

16. $A \wedge \neg A \sim 0$
17. $A \vee \neg A \sim 1$
18. $A \to (B \to C) \sim A \wedge B \to C$
19. $A \to (B \to C) \sim B \to (A \to C)$

2 Теорема компактности логики высказываний

Множество формул логики высказываний Γ называется *выполнимым*, если при некотором наборе значений пропозициональных переменных, входящих в формулы из Γ, все формулы принимают значение истина.

Проверка выполнимости конечного множества формул осуществляется перебором всех возможных наборов значений пропозициональных переменных и определением истинностных значений всех формул на каждом наборе. Если на некотором наборе все формулы принимают значение истина, то множество формул выполнимо. Проверку выполнимости бесконечного множества формул можно свести к бесконечному числу проверок выполнимости конечного множества формул.

Теорема компактности. *Пусть* $\Gamma = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ *– некоторое (бесконечное) множество формул логики высказываний. Множество формул* Γ *выполнимо тогда и только тогда, когда выполнимо каждое конечное подмножество* $\Delta \subseteq \Gamma$.

Доказательство теоремы использует понятие дерева и лемму Кенига для бесконечных конечно ветвящихся деревьев. Оно будет приведено в конце параграфа. Сначала дадим необходимые определения и докажем саму лемму Кенига.

Множество S называется *строго частично упорядоченным*, если на нем задано антирефлексивное транзитивное бинарное отношение (которое обозначим $<$), то есть

1. для любого $x \in S$ неверно, что $x < x$ (антирефлексивность),
2. для любых $x, y, z \in S$: если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$ (транзитивность).

Строго частично упорядоченное множество S называется *линейно упорядоченным*, если для любых $x, y \in S$ выполняется условие: $x < y$, или $y < x$, или $x = y$.

Линейно упорядоченное множество S называется *вполне упорядоченным*, если любое непустое подмножество S' множества S имеет наименьший элемент относительно заданного на нем отношения $<$, то есть существует такой элемент $x \in S'$, что $y < x$ не выполняется ни при каком $y \in S'$.

Деревом называется строго частично упорядоченное множество, которое имеет единственный наименьший элемент, называемый корнем, и в котором множество всех предшественников каждого его элемента образует вполне упорядоченное множество. Элементы дерева называются его вершинами.

Пусть T – дерево. Если $x, y \in T$ и $x < y$, то x называется *предшественником* y, а y – *последователем* x. Элемент x называется *непосредственным предшественником* элемента y и y – *непосредственным последователем* x, если не существует $z \in T$ такого, что $x < z < y$.

Дерево называется *бесконечным*, если оно содержит бесконечное вершин. Дерево называется *конечно ветвящимся*, если каждая его вершина имеет конечное число непосредственных последователей.

Дерево называется *бинарным*, если каждая его вершина имеет не более двух непосредственных последователей, и *полным бинарным*, если каждая его вершина имеет ровно двух непосредственных последователей.

Лемма Кенига. *Любое конечно ветвящееся бесконечное дерево содержит бесконечную ветвь (то есть максимальное линейно упорядоченное подмножество).*

Доказательство леммы Кенига. Пусть T – бесконечное дерево и x_0 – его корень. Так как дерево бесконечное и конечно ветвящееся, то среди непосредственных последователей x_0 найдется вершина, имеющая бесконечное число последователей. Пусть это вершина x_1. Аналогично среди непосредственных последователей x_1 находим вершину x_2, которая имеет бесконечное число последователей, и т. д. В итоге получим бесконечное линейно упорядоченное подмножество (ветвь) $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $\square$

Доказательство теоремы компактности.

Необходимость: Очевидно, что если Γ выполнимо, то выполнимо и каждое конечное подмножество Γ.

Достаточность: Пусть $\{B_i | i \in \mathbb{N}\}$ – все пропозициональные переменные, из которых составлены формулы из множества Γ.

Если множество $\{B_i | i \in \mathbb{N}\}$ конечно, то утверждение теоремы практически очевидно. Требуемый набор значений пропозициональных переменных можно найти перебирая подмножества, каждое следующее из которых содержит предыдущее, удаляя каждый раз те наборы значений пропозициональных переменных, которые придают ложное значение хотя бы одной формуле из рассматриваемого подмножества формул. В силу условия теоремы, на каждом шаге существует набор, который придает истинные значения всем формулам из указанного подмножества. Значит, существует набор, который придает истинные значения всем формулам из множества Γ.

Предположим, что множество $\{B_i | i \in \mathbb{N}\}$ бесконечно. Пусть T – полное бинарное дерево. Интерпретируем метки 0 и 1 первого уровня дерева (то есть непосредственных последователей корневой вершины) как значения пропозициональной переменной B_0, метки $\{0,0\}$, $\{0,1\}$, $\{1,0\}$, $\{1,1\}$ второго уровня (непосредственных последователей вершин первого уровня)– как значения пропозициональных переменных B_0, B_1 и т. д. Таким образом, метки n-го уровня дерева T интерпретируются как значения переменных B_0, B_1,..., B_{n-1}.

Определим поддерево T' дерева T. Пусть $\{B_i | i \leq i_0\}$ – наименьшее подмножество множества $\{B_i | i \in \mathbb{N}\}$, содержащее все пропозициональные переменные формулы A_0. Добавим в поддерево T' все вершины i_0-го уровня дерева T и их предшественников, метки которых придают истинные значения формуле A_0. По условию теоремы хотя бы одна вершина i_0-го уровня, удовлетворяющая этому условию, существует.

Аналогично, $\{B_i | i \leq i_1\}$ – наименьшее подмножество, содержащее все пропозициональные переменные формул A_0, A_1. Добавим в поддерево T' все вершины i_1-го уровня дерева T и их предшественников, метки которых придают истинные значения формулам A_0, A_1, и т. д.

Ясно, что таким образом построенное бинарное дерево бесконечно. В силу леммы Кенига, T' содержит бесконечную ветвь. В силу построения T', все формулы из Γ принимают истинные значения, если придать пропозициональным переменным значения истинности как на построенной бесконечной ветви. $\square$

3 Исчисление высказываний

Рассмотрим аксиоматическую логическую систему, которая естественным образом связана с логикой высказываний. В этой аксиоматической системе можно доказать те и только те формулы, которые являются тождественно истинными формулами логики высказываний. Ее называют исчислением высказываний.

Для описания логического исчисления необходимо указать язык, аксиомы и правила вывода исчисления, понятие формулы и доказуемой формулы исчисления. Язык и понятие формулы исчисления высказываний совпадают с соответствующими понятиями логики высказываний. В качестве аксиом выбирают формулы (тождественная) истинность которых очевидна или легко проверяема, в качестве правил вывода – правила, которые позволяют из (тождественно) истинных формул получать (тождественно) истинные формулы.

Аксиомы исчисления высказываний:

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
3. $A \wedge B \to A$
4. $A \wedge B \to B$
5. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$
6. $A \to A \vee B$
7. $B \to A \vee B$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
10. $\neg\neg A \to A$

Правило вывода исчисления высказываний: $\frac{A, A \to B}{B}$ (*правило Modus Ponens*). Правило гласит, что формула B может быть получена из формул A и $A \to B$.

Формула D называется *доказуемой (теоремой)* (записывается $\vdash D$), если существует конечная последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ такая, что $D_n = D$ и каждая D_i, $i = \overline{1.n}$, либо аксиома, либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих формул.

Последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ называется доказательством, а число n – длиной доказательства.

Пример: $A \to A$ – доказуемая формула, длина доказательства 5.

Доказательство:

1) $(A \to (A \to A)) \to ((A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A))$ (аксиома 2)
2) $A \to (A \to A)$ (аксиома 1)
3) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ (получена по правилу MP из 2 и 1 формул)
4) $A \to ((A \to A) \to A)$ (аксиома 1)
5) $A \to A$ (получена по правилу MP из 4 и 3 формул).

При расширении множества формул, к которым можно применять правило вывода, увеличивается множество формул, которые можно доказать. Обобщим понятие доказуемой формулы.

Формула D называтся *выводимой из формул* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (обозначается $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash D$), если существует конечная последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ такая, что $D_n = D$ и каждая D_i, $i = \overline{1.n}$, либо аксиома, либо одна из формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$, либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих формул.

Очевидно, что формула, выводимая из пустого множества формул, является доказуемой. Кроме того, ясно, что если формула доказуема, то она выводима из любого множества формул.

Следующие свойства операции выводимости легко следуют из определения этой операции.

Свойства операции выводимости $\vdash$*:*

1) $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash A_i$ для любого i.
2) Если $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B_1$, $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B_2$, $\ldots$, $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B_p$ и $B_1, B_2, \ldots, B_p \vdash C$, то $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash C$.
3) Если $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B$, то $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1} \vdash B$.
4) Если $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_m \vdash B$, то $A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_m \vdash B$.

Теорема дедукции: *Если* Γ *– некоторое конечное множество формул исчисления высказываний,* A, B *– произвольные формулы исчисления высказываний и* $\Gamma, A \vdash B$*, то* $\Gamma \vdash A \to B$*.*

Доказательство. Доказательство теоремы проводится индукцией по длине n вывода формулы B из множества формул Γ, A.

Базис индукции. Если длина вывода $n = 1$, то возможны 3 случая:
1) B – аксиома,
2) $B = A$,
3) $B \in \Gamma$.

Построим вывод формулы $A \to B$ из Γ. Во втором случае формула принимает вид $A \to A$. Это доказуемая формула (см. пример выше), значит она выводима из любого множества формул, в частности, из Γ. В первом и третьем случаях:
1. $B \to (A \to B)$ (аксиома 1)
2. B (аксиома или $B \in \Gamma$)
3. $A \to B$ (MP(2,1)).

Индукционное предположение: допустим, утверждение теоремы справедливо для случая, когда длина вывода B из Γ, A не превосходит n.

Шаг индукции: рассмотрим случай, когда длина соответствующего вывода есть $n + 1$.

В силу определения выводимости на $(n + 1)$–ом шаге возможны следующие случаи:
1) B – аксиома,
2) $B = A$,
3) $B \in \Gamma$,
4) $B = MP(P_i, P_j)$, где $1 \leq i, j \leq n$, то есть B получена по правилу Modus Ponens из формул P_i и P_j.

Доказательство для первых трех случаев проводится также, как в базисе индукции.

Рассмотрим 4 случай. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ есть вывод B из Γ, A. Поскольку B получена по правилу Modus Ponens из формул P_i и P_j, то $P_j = P_i \to B$. Поскольку $\Gamma, A \vdash P_i$ на i–ом шаге вывода и $\Gamma, A \vdash P_j$ на j–ом шаге вывода и $i, j \leq n$, то для формул P_i и P_j, в силу индукционного предположения, утверждение теоремы уже доказано, то есть
$\Gamma \vdash A \to P_i$
$\Gamma \vdash A \to (P_i \to B)$.

Построим требуемый в заключении теоремы вывод:
$\Gamma \vdash (A \to P_i) \to ((A \to (P_i \to B)) \to (A \to B))$ (аксиома 2)

$\Gamma \vdash (A \to (P_i \to B)) \to (A \to B)$ (по правилу MP из предыдущей формулы и из $\Gamma \vdash A \to P_i$)
$\Gamma \vdash A \to B$ (по правилу MP из предыдущей формулы и из формулы $\Gamma \vdash A \to (P_i \to B)$). $\Box$

Следствием теоремы дедукции являются следующие правила, которые позволяют проще устанавливать выводимость формул.

Правила введения и удаления логических символов:
1) введение конъюнкции: $A, B \vdash A \wedge B$,
2) удаление конъюнкции: $A \wedge B \vdash A$, $A \wedge B \vdash B$,
3) введение дизъюнкции: $A \vdash A \vee B$, $B \vdash A \vee B$,
4) удаление дизъюнкции: если $A \vdash C$ и $B \vdash C$, то $A \vee B \vdash C$,
5) введение импликации: если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \to B$,
6) удаление импликации: $A, A \to B \vdash B$,
7) введение отрицания: если $A \vdash B$ и $A \vdash \neg B$, то $\vdash \neg A$,
8) удаление отрицания: $\neg\neg A \vdash A$.

Доказательство: Правила введения и удаления импликации (5 и 6) – это теорема дедукции и правило Modus Ponens соответственно. Правило удаления конъюнкции 2) получается применением правила Modus Ponens к формуле $A \wedge B$ и аксиомам 3, 4. Правило введения дизъюнкции 3) получается применением правила Modus Ponens к формуле A и аксиоме 6 или к формуле B и аксиоме 7. Правило удаления отрицания 8) – применением правила Modus Ponens к формуле $\neg\neg A$ и аксиоме 10. Докажем оставшиеся правила.

1) введение конъюнкции.
1. $A, B \vdash (A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A \wedge B))$ (аксиома 5)
2. $A, B \vdash A \to (A \to A)$ (аксиома 1)
3. $A, B \vdash A$
4. $A, B \vdash A \to A$ (MP(3, 2))
5. $A, B \vdash (A \to B) \to (A \to A \wedge B)$ (MP(4, 1))
6. $A, B \vdash B \to (A \to B)$ (аксиома 1)
7. $A, B \vdash B$
8. $A, B \vdash A \to B$ (MP(7, 6))
9. $A, B \vdash A \to A \wedge B$ (MP(8, 5))
10. $A, B \vdash A \wedge B$ (MP(3, 9))

4) удаление дизъюнкции:

1. $A \vee B \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ (аксиома 8)
2. $A \vdash C$ (допущение правила)
3. $\vdash A \to C$ (теорема дедукции, примененная к шагу 2)
4. $A \vee B \vdash A \to C$ (свойство операции $\vdash$)
5. $A \vee B \vdash (B \to C) \to (A \vee B \to C)$ (MP(4, 1))
6. $B \vdash C$ (допущение правила)
7. $\vdash B \to C$ (теорема дедукции, примененная к шагу 6)
8. $A \vee B \vdash B \to C$ (свойство операции $\vdash$)
9. $A \vee B \vdash A \vee B \to C$ (MP(8, 5))
10. $A \vee B \vdash A \vee B$
11. $A \vee B \vdash C$ (MP(10, 9))

7) введение отрицания:

1. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (аксиома 9)
2. $A \vdash B$ (допущение правила)
3. $\vdash A \to B$ (теорема дедукции, примененная к шагу 2)
4. $(A \to \neg B) \to \neg A$ (MP(3, 1))
5. $A \vdash \neg B$ (допущение правила)
6. $\vdash A \to \neg B$ (теорема дедукции, примененная к шагу 4)
7. $\vdash \neg A$ (MP(6, 4)). $\square$

Теорема (закон исключенного третьего): *Для любой формулы исчисления высказываний A доказуема формула $A \vee \neg A$, то есть $\vdash A \vee \neg A$.*

Доказательство.

1. $\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$
2. $\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$ (введение $\vee$)
3. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$ (введение $\neg$)
4. $\neg A \vdash A \vee \neg A$ (введение $\vee$)
5. $\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$ (следует из 3, 4 в силу свойств операции $\vdash$)
6. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$
7. $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ (введение $\neg$)
8. $\vdash A \vee \neg A$ (удаление $\neg$). $\square$

4 Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний

Логическое исчисление *непротиворечиво*, если не существует такой формулы A, что доказуемо A и доказуемо $\neg A$, то есть $\vdash A$ и $\vdash \neg A$.

Прежде чем сформулировать и доказать непротиворечивость исчисления высказываний, докажем две леммы.

Лемма 1. *Любая доказуемая формула исчисления высказываний тождественно истинна.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать справедливость следующих двух утверждений:
1. каждая аксиома тождественно истинна,
2. применение правила вывода (Modus Ponens) к тождественно истинным формулам дает тождественно истинную формулу.

Первое утверждение проверяется построением таблиц истинности для аксиом. Докажем второе утверждение. Пусть A, $A \to B$ тождественно истинны. Допустим, что B не тождественно истинна. Тогда она принимает значение ложь при некоторых значениях входящих в нее пропозициональных переменных. Формула A принимает значение истина на этом наборе пропозициональных переменных. Тогда $A \to B$ также принимает значение ложь на указанном наборе, что противоречит тождественной истинности формулы $A \to B$. □

Следующая лемма утверждает, что из противоречивого множества формул исчисления высказываний может быть выведена любая формула исчисления высказываний.

Лемма 2. *Для любой формулы исчисления высказываний A верно $A, \neg A \vdash B$, где B – произвольная формула исчисления высказываний.*

Доказательство.
1. $A, \neg A, \neg B \vdash A$
2. $A, \neg A, \neg B \vdash \neg A$
3. $A, \neg A \vdash \neg\neg B$ (введение $\neg$)
4. $A, \neg A \vdash B$ (удаление $\neg$). □

Теорема (о непротиворечивости исчисления высказываний). *Исчисление высказываний непротиворечиво.*

Доказательство. Допустим, что исчисление высказываний противоречиво. Тогда существует формула A такая, что $\vdash A$ и $\vdash \neg A$. Значит, в силу леммы 2, в исчислении высказываний любая формула доказуема. Следовательно, в силу леммы 1, любая формула исчисления высказываний тождественно истинна. Приходим к противоречию с тем, что не любая формула исчисления высказываний тождественно истинна (например, формула $A \to B$ – не тождественно истинна). $\square$

Теорема (о полноте исчисления высказываний). *Исчисление высказываний полно в том смысле, что любая тождественно истинная формула доказуема.*

Для доказательства теоремы о полноте, нам потребуются следующее определение и вспомогательная лемма.

Пусть A – произвольная формула исчисления высказываний, которая составлена из пропозициональных переменных $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Пусть эти переменные принимают некоторые значения 0 и 1. Последовательность $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, где

$$Q_i = \begin{cases} P_i, \text{ если } P_i = 1 \\ \neg P_i, \text{ если } P_i = 0 \end{cases},$$

называется *соответствующей n-кой* для формулы A.

Лемма 3. *Пусть формула A составлена из пропозициональных переменных $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Пусть эти переменные принимают некоторые значения 0,1 и последовательность $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ является соответствующей n-кой. Тогда если A при заданных значениях $P_1, P_2, \ldots, P_n$ принимает значение 1, то $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ выводит A ($Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \vdash A$). Если A при заданных значениях $P_1, P_2, \ldots, P_n$ принимает значение 0, то $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ выводит $\neg A$ ($Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \vdash \neg A$).*

Доказательство леммы. Будем доказывать лемму индукцией по количеству логических знаков m, участвующих в построение формулы A.

Базис индукции: $m = 0$, тогда $A = P$ и возможны 2 случая:
1) $P = 0$ и $A = 0$, тогда $Q = \neg P$. Утверждение леммы $\neg P \vdash \neg A$ или $\neg A \vdash \neg A$ в этом случае очевидно.

2) $P=1$ и $A=1$, тогда $Q=P$. Утверждение леммы $P\vdash A$ или $A\vdash A$ также очевидно.

Допустим, лемма доказана для формул, в построении которых участвует не более m логических знаков. Докажем ее для формул с $m+1$ логическим знаком. В зависимости от того, какой логический знак входит в формулу последним, возможны следующие случаи:

1. $A=B\wedge C$,
2. $A=B\vee C$,
3. $A=B\to C$,
4. $A=\neg B$.

Для формул B и C лемма уже доказана, так как они содержат не более m логических знаков. Поэтому в зависимости от того, какие значения принимают формулы B и C, доказано:

$Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash B$, $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash C$, если $B=1$ и $C=1$,
$Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash B$, $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash \neg C$, если $B=1$ и $C=0$,
$Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash \neg B$, $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash C$, если $B=0$ и $C=1$,
$Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash \neg B$, $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash \neg C$, если $B=0$ и $C=0$.

Рассмотрим случай, когда последний логический знак, входящий в формулу A есть конъюнкция: $A=B\wedge C$. В этом случае в зависимости от значений, которые принимают формулы B и C, требуется доказать:

1.1. $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash A$, если $B=1$ и $C=1$, так как $A=1$,
1.2. $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash \neg A$, если $B=1$ и $C=0$, так как $A=0$,
1.3. $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash \neg A$, если $B=0$ и $C=1$, так как $A=0$,
1.4. $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\vdash \neg A$, если $B=0$ и $C=0$, так как $A=0$.

Для доказательства достаточно построить выводы:

1.1 $B,C\vdash B\wedge C$
1.2. $B,\neg C\vdash \neg(B\wedge C)$
1.3. $\neg B,C\vdash \neg(B\wedge C)$
1.4. $\neg B,\neg C\vdash \neg(B\wedge C)$.

Разберем случай 1.2:

1) $B,\neg C,B\wedge C\vdash \neg C$ (в силу свойств операции $\vdash$)
2) $B,\neg C,B\wedge C\vdash C$ (удалении $\wedge$)
3) $B,\neg C\vdash \neg(B\wedge C)$ (введение $\neg$).

В случаях 1.3, 1.4 выводы строятся аналогично, случай 1.1 – правило введение конъюнкции.

Случаи, когда последний логический знак, входящий в формулу, есть дизъюнкция, импликация или отрицание 2) – 4), рассматриваются аналогично. □

Доказательство теоремы о полноте. Пусть A – тождественно истинная формула, составленная из пропозициональных переменных $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Докажем теорему для случая, когда число переменных, входящих в формулу, равно трем. Доказательство в общем случае проводится аналогично.

В зависимости от значений пропозициональных переменных, в силу леммы 3, существуют следующие выводы:

$P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 1 \Rightarrow P_1, P_2, P_3 \vdash A$ (1)
$P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 0 \Rightarrow P_1, P_2, \neg P_3 \vdash A$ (2)
$P_1 = 1, P_2 = 0, P_3 = 1 \Rightarrow P_1, \neg P_2, P_3 \vdash A$ (3)
$P_1 = 1, P_2 = 0, P_3 = 0 \Rightarrow P_1, \neg P_2, \neg P_3 \vdash A$ (4)
$P_1 = 0, P_2 = 1, P_3 = 1 \Rightarrow \neg P_1, P_2, P_3 \vdash A$ (5)
$P_1 = 0, P_2 = 1, P_3 = 0 \Rightarrow \neg P_1, P_2, \neg P_3 \vdash A$ (6)
$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 1 \Rightarrow \neg P_1, \neg P_2, P_3 \vdash A$ (7)
$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0 \Rightarrow \neg P_1, \neg P_2, \neg P_3 \vdash A$ (8)

К парам выводов (1, 2), (3, 4), (5, 6) и (7, 8) применяем правило удаления дизъюнкции:

$P_1, P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$ (9)
$P_1, \neg P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$ (10)
$\neg P_1, P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$ (11)
$\neg P_1, \neg P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$ (12)

Еще раз применяем правило удаления дизъюнкции к парам выводов (9, 10) и (11, 12):

$P_1, P_2 \vee \neg P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$ (13)
$\neg P_1, P_2 \vee \neg P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$ (14)

Последний раз применяем правило удаления дизъюнкции, после чего используем закон исключенного третьего:

$P_1 \vee \neg P_1, P_2 \vee \neg P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$
$\vdash A$. □

Две формулы исчисления высказываний A и B называются *равносильными* ($A \dashv\vdash B$), если $A \vdash B$ и $B \vdash A$.

Покажем, что формулы эквивалентны (определение дано в первом параграфе) тогда и только тогда, когда они равносильны.

Следствие (теоремы о полноте исчисления высказываний). $A \sim B$ *тогда и только тогда, когда* $A \dashv\vdash B$.

Доказательство. Необходимость ($\Rightarrow$): Пусть $A \sim B$. Тогда таблицы истинности формул A и B совпадают. Значит, формула $(A \to B) \wedge (B \to A)$ тождественно истинна. Следовательно, по теореме о полноте она доказуема: $\vdash (A \to B) \wedge (B \to A)$.

По правилу удаления конъюнкции доказуемы формулы: $\vdash A \to B$ и $\vdash B \to A$. По правилу удаления импликации: $A \vdash B$ и $B \vdash A$. В силу определения равносильных формул, $A \dashv\vdash B$.

Достаточность ($\Leftarrow$): Пусть $A \dashv\vdash B$. Тогда $A \vdash B$, $B \vdash A$.
По правиду введения импликации:$\vdash A \to B$ и $\vdash B \to A$.
По правилу введения конъюнкции: $\vdash (A \to B) \wedge (B \to A)$.

Поскольку формула доказуема, значит, по лемме 1, она тождественно истинна. Предположив, что A и B имеют разные таблицы истинности придем к противоречию с тождественной истинностью формулы $(A \to B) \wedge (B \to A)$. Следовательно, A и B имеют одинаковые таблицы истинности, то есть $A \sim B$. $\square$

В силу только что доказанного следствия теоремы о полноте, в исчислении высказываний равносильными являются все пары формул, которые приведены в конце первого параграфа.

5 Логика предикатов

Пусть задано некоторое множество M и $A : M^n \to \{0,1\}$ – функция, которая принимает значение истина или ложь на каждом наборе значений переменных, то есть функция, которая при подстановке переменных становится высказыванием (истинным или ложным). Такие функции называют *предикатами* от соответствующего числа переменных.

Если $n = 0$, то предикат является высказыванием.

Пусть $A : M^n \to \{0,1\}$ – предикат от n переменных, тогда $\exists x_i A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\forall x_i A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – предикаты от $n-1$ переменной, где $\exists$ и $\forall$ – кванторы существования и всеобщности соответственно.

Если $A(x)$ – предикат от одной переменной, заданный на множестве M, то $\exists x A(x)$ и $\forall x A(x)$ – высказывания, причем $\forall x A(x)$ – истинно тогда и только тогда, когда $A(x)$ истинно для любого $x \in M$ и $\exists x A(x)$ – истинно тогда и только тогда, когда $A(x)$ истинно при некотором $x \in M$.

Переменная, не связанная никаким квантором, называется свободной. Переменная, связанная либо квантором всеобщности, либо квантором существования, называется связанной.

Определим язык и основные понятия логики предикатов.

Язык логики предикатов:

1) предметные переменные. Будем их обозначать малыми латинскими буквами, возможно с индексами: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots,$

2) логические символы $\wedge, \vee, \to, \neg, \forall, \exists,$

3) вспомогательные символы: запятая, открывающаяся скобка (, закрывающаяся скобка),

4) символы сигнатуры Σ, то есть

а) предикатные символы: $A^n(x_1, x_2, \ldots, x_n), B^k(y_1, y_2, \ldots, y_k), \ldots,$

б) функциональные символы: $f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n), g^k(y_1, y_2, \ldots, y_k), \ldots$

Для каждого символа как предикатного, так и функционального указывается его местность, то есть число переменных, от которых он зависит. Нульместный предикатный символ называется символом высказываний, нульместный функциональный символ – символом константы.

Интерпретацией сигнатуры Σ на множестве M называется сопоставление каждому символу из Σ некоторой функции $f : M^n \to M$ (для функционального символа) или $A : M^n \to \{0, 1\}$ (для предикатного символа).

Моделью сигнатуры Σ называется $\langle M, f_1, f_2, \dots, f_n, A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$, где M – непустое множество (называемое универсумом модели), а $f_1, f_2, \dots, f_n, A_1$, $A_2, \dots, A_k$ – интерпретация сигнатуры Σ на этом множестве.

Пример. Пусть $\Sigma = \{f^1, g^0, h^2, A^3, B^2\}$ – сигнатура, состоящая из одноместного, нульместного и двухместного функциональных символов и трехместного, двухместного предикатных символов. Рассмотрим интерпретацию сигнатуры Σ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$: $f(x) = x$, $g = 1$, $h(x, y) = xy$, $A(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z$, $B(x, y) = 1 \Leftrightarrow x < y$.

Определим понятие *терма* по индукции:
1) каждая предметная переменная – терм,
2) каждый символ константы – терм,
3) если $t_1, t_2, \dots, t_n$ – термы и f – n–местный функциональный символ, то $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ также терм.

Пример. Пусть $\Sigma = \{f^1, g^0, h^2\}$ – сигнатура, состоящая из одноместного, нульместного и двухместного функциональных символов. Термами сигнатуры Σ являются: $g, x, y, x_1, z_3, \dots, f(x), f(g), h(x, y), h(x, x), h(x, g), h(g, g), \dots$, $f(h(f(y), g)), h(h(x_1, f(y)), f(h(g, z_3)))$ и т. д.

Атомарной формулой называется выражение $A(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где A – n–местный предикатный символ, а $t_1, t_2, \dots, t_n$ – термы.

Определим по индукции понятие *формулы логики предикатов.* Вместе с определением формулы, дадим определение свободной и связанной переменной:
1) атомарная формула есть формула, каждая предметная переменная, входящая в атомарную формулу, входит в нее свободно,
2) пусть A – формула, тогда $\neg A$ – формула, переменные, которые были в A свободны, в $\neg A$ также свободны, которые были в A связанны, в $\neg A$ также связанны,
3) пусть A и B – формулы, причем переменные, которые входят в одну из формул свободно, не могут входить в другую связанно. Тогда

$(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ – формулы, причем свободные переменные совпадают со свободными переменными, а связанные – со связанными переменными формул A и B,
4) пусть $A(x)$ – формула, содержащая переменную x свободно, тогда $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$ – формулы, содержащие переменную x связанно.

Пример. Пусть $\Sigma = \{f^1, g^0, h^2, A^3, B^2, C^0\}$ – сигнатура, состоящая из одноместного, нульместного и двухместного функциональных символов и трехместного, двухместного и нульместного предикатных символов. Термы сигнатуры Σ определены в предыдущем примере.

Атомарными формулами будут, например, формулы:
$A(y, f(x), f(h(g, z_3)))$ – атомарная формула с тремя свободными переменными,
$B(h(g, g), f(h(f(y), g)))$ – атомарная формула с одной свободной переменной,
$A(h(g, g), f(g), g), C$ – атомарные формулы без свободных переменных.

Формулами логики предикатов являются:
$\exists x A(y, f(x), f(h(g, z_3))) \to B(h(g, g), f(h(f(y), g)) \vee A(f(g), f(g), g)$ – формула с двумя свободными переменными y, z_3 и со связанной переменной x,
$\exists x(\exists y(B(h(g, g), f(h(f(y), g))) \wedge C) \to \forall z_3 \forall y A(y, f(x), f(h(g, z_3))))$ – формула без свободных переменных.

Формула A называется *тождественно истинной (тождественно ложной) на модели* M, если она принимает значение истина (ложь) при любых из универсума модели значениях входящих в ее свободных переменных.

Формула A называется *выполнимой на модели* M, если она принимает значение истина при некоторых из универсума модели значениях входящих в ее свободных переменных.

Таким образом, формула может быть тождественно истинна на одной модели, при этом на другой модели она может быть либо выполнима, либо тождественно ложна. Основное внимание в логике предикатов уделяют формулам, которые тождественно истинны на любой модели или выполнимы хотя бы на одной модели. Поэтому понятия тождественно истинной, выполнимой, тождественно ложной формулы логики предикатов не связаны с моделью, на которой рассматривается формула, необходимо лишь, чтобы сигнатура модели содержала сигнатуру формулы.

Формула A называется *тождественно истинной (тождественно ложной)*, если она принимает значение истина (ложь) на любой модели M, сигнатура которой содержит сигнатуру формулы, при любых значениях входящих в ее свободных переменных.

Формула A называется *выполнимой*, если она принимает значение истина на некоторой (хотя бы одной) модели M, сигнатура которой содержит сигнатуру формулы, при некоторых значениях входящих в ее свободных переменных.

Формулы A и B называются *эквивалентными на модели* M, если они принимают одинаковые истинностные значения на модели M при любых из универсума модели значениях входящих в них свободных переменных.

Формулы A и B называются *эквивалентными* ($A \sim B$), если они принимают одинаковые истинностные значения на любой модели M при любых значениях входящих в них свободных переменных.

Следующие формулы логики предикатов эквивалентны:

1. $\neg\forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$
2. $\neg\exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$
3. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \sim \forall x(A(x) \wedge B(x))$
4. $\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \sim \exists x(A(x) \vee B(x))$
5. $\forall x A(x) \wedge B \sim \forall x(A(x) \wedge B)$
6. $\exists x A(x) \wedge B \sim \exists x(A(x) \wedge B)$
7. $\forall x A(x) \vee B \sim \forall x(A(x) \vee B)$
8. $\exists x A(x) \vee B \sim \exists x(A(x) \vee B)$
9. $\forall x A(x) \to B \sim \exists x(A(x) \to B)$
10. $\exists x A(x) \to B \sim \forall x(A(x) \to B)$
11. $A \to \forall x B(x) \sim \forall x(A \to B(x))$
12. $A \to \exists x B(x) \sim \exists x(A \to B(x))$
13. $\forall x A(x) \to \forall x B(x) \sim \exists x \forall y(A(x) \to B(y))$
14. $\forall x A(x) \to \exists x B(x) \sim \exists x(A(x) \to B(x))$
15. $\exists x A(x) \to \exists x B(x) \sim \forall x \exists y(A(x) \to B(y))$
16. $\exists x A(x) \to \forall x B(x) \sim \forall x \forall y(A(x) \to B(y))$
17. $\exists x \exists y A(x, y) \sim \exists y \exists x A(x, y)$
18. $\forall x \forall y A(x, y) \sim \forall y \forall x A(x, y)$

Доказательство. Для доказательства эквивалентности необходимо показать, что на любой модели, сигнатура которой содержит сигнатуру формул, при любых значениях свободных переменных обе формулы либо истинны, либо ложны одновременно. Докажем эквивалентности 1 и 4.

1. Пусть M – модель, сигнатура которой содержит предикат $A(x)$. Если предикат содержит, кроме переменной x, другие свободные переменные, то фиксируем произвольные значения для них.

Пусть $\neg\forall x A(x)$ истинна при заданной фиксации свободных переменных, тогда $\forall x A(x)$ – ложь. То есть формула $A(x)$ ложна при некотором значении x. Тогда при этом значении x формула $\neg A(x)$ истинна. Значит, истинна и формула $\exists x\neg A(x)$.

Пусть теперь истинна формула $\exists x\neg A(x)$ при заданной фиксации свободных переменных. Тогда формула $\neg A(x)$ истинна при некотором значении x. Значит, формула $A(x)$ ложна при этом значении x. По смыслу квантора всеобщности, ложна формула $\forall x A(x)$. Следовательно, формула $\neg\forall x A(x)$ истинна.

4. Пусть M – модель, сигнатура которой содержит предикаты $A(x)$ и $B(x)$. Если предикаты содержат другие свободные переменные, кроме переменной x, то фиксируем произвольные значения для них.

Пусть $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ – ложна при заданных значениях свободных переменных. Тогда ложна как формула $\exists x A(x)$, так и формула $\exists x B(x)$. По смыслу квантора существования, $A(x)$ и $B(x)$ ложны при любом значении x. Значит, при любом x ложна формула $A(x) \vee B(x)$. По смыслу квантора существования, формула $\exists x(A(x) \vee B(x))$ также ложна.

Пусть $\exists x(A(x) \vee B(x))$ ложна при заданных значениях свободных переменных. Тогда $A(x) \vee B(x)$ ложна при любом значении x. Значит, $A(x)$ и $B(x)$ ложны при любом значении x. Отсюда следует, что ложны формулы $\exists x A(x)$ и $\exists x B(x)$ и ложна их дизъюнкция $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

Остальные эквивалентности логики предикатов доказываются аналогично. $\square$

6 Пренексная нормальная форма

Формула A находится в *пренексной (предваренной) нормальной форме*, если она имеет вид $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nA(x_1,x_2,\ldots x_n,y_1,y_2,\ldots,y_k)$, где Q_i, $i=\overline{1.n}$, – кванторы, $A(x_1,x_2,\ldots x_n,y_1,y_2,\ldots,y_k)$ – формула, не содержащая кванторов.

Теорема. *Для каждой формулы логики предикатов A существует эквивалентная ей формула B, находящаяся в пренексной нормальной форме.*

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по количеству k логических знаков и кванторов, участвующих в построение формулы.

При $k=0$ утверждение теоремы очевидно, поскольку формула B совпадает с формулой A.

Допустим, теорема доказана для формул с не более k логическими знаками и кванторами. Докажем ее для формул с $k+1$ логическими знаками и кванторами. Рассмотрим последний логический знак или квантор, входящий в формулу:

1) $A=\neg A_1$,
2) $A=A_1\vee A_2$,
3) $A=A_1\wedge A_2$,
4) $A=A_1\to A_2$,
5) $A=\exists xA_1(x)$,
6) $A=\forall xA_1(x)$.

Для формул A_1 и A_2 теорема доказана, поскольку они содержат не более k логических знака и квантора. Значит, для них существуют эквивалентные формулы, находящиеся в пренексной нормальной форме. Обозначим их B_1 и B_2: $A_1\sim B_1$ и $A_2\sim B_2$. Можно считать, что связанные переменные, входящие в формулу B_1, не совпадают со связанными переменными, входящими в формулу B_2 (иначе их можно переименовать).

Пусть B_1,B_2 имеют вид:

$$B_1=Q_1y_1Q_2y_2\ldots Q_ny_nC_1(y_1,y_2,\ldots,y_n,u_1,u_2,\ldots,u_{l_1}),$$

$$B_2=R_1z_1R_2z_2\ldots R_mz_mC_2(z_1,z_2,\ldots,z_m,v_1,v_2,\ldots,v_{l_2}),$$

где $C_1(y_1,y_2,\ldots,y_n,u_1,u_2,\ldots,u_{l_1}),C_2(z_1,z_2,\ldots,z_m,v_1,v_2,\ldots,v_{l_2})$ – формулы, не содержащие кванторов. Далее, чтобы не загромождать запись, будем писать просто C_1, C_2, не забывая при этом, что они зависят от указанных выше переменных.

В каждом из 6 случаев построим формулу, эквивалентную A и находящуюся в пренексной нормальной форме, использую эквивалентности, приведенные в предыдущем параграфе. Последняя формула в цепочке эквивалентностей находится в пренексной нормальной форме.

1) $A = \neg A_1 \sim \neg B_1 \sim Q'_1 y_1 Q'_2 y_2 \dots Q'_n y_n \neg C_1$, где

$$Q'_i = \begin{cases} \exists, \text{ если } Q_i = \forall, \\ \forall, \text{ если } Q_i = \exists \end{cases}.$$

2) $A = A_1 \vee A_2 \sim B_1 \vee B_2 = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n C_1 \vee R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m C_2 \sim$
$\sim Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m (C_1 \vee C_2)$.

3) $A = A_1 \wedge A_2 \sim B_1 \wedge B_2 = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n C_1 \wedge R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m C_2 \sim$
$\sim Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m (C_1 \wedge C_2)$.

4) $A = A_1 \to A_2 \sim B_1 \to B_2 = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n C_1 \to R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m C_2 \sim$
$\sim Q'_1 y_1 Q'_2 y_2 \dots Q'_n y_n R_1 z_1 R_2 z_2 \dots R_m z_m (C_1 \to C_2)$.

5) $A = \exists x A_1(x) \sim \exists x B_1(x) = \exists x Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n C_1$.

6) $A = \forall x A_1(x) \sim \forall x B_1(x) = \forall x Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n C_1$. $\square$

7 Исчисление предикатов

Опишем логическое исчисление, которое соответствует логике предикатов. Язык и понятие формулы исчисления предикатов совпадают с соответствующими понятиями логики предикатов.

Аксиомы исчисления предикатов:

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
3. $A \wedge B \to A$
4. $A \wedge B \to B$
5. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$
6. $A \to A \vee B$
7. $B \to A \vee B$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
10. $\neg\neg A \to A$
11. $\forall x A(x) \to A(y)$
12. $A(x) \to \exists y A(y)$

Правила вывода исчисления предикатов:

1) Modus Ponens: $\frac{A, A \to B}{B}$,
2) $\forall$-правило: $\frac{C \to A(x)}{C \to \forall x A(x)}$, где C не содержит переменной x,
3) $\exists$-правило: $\frac{A(x) \to C}{\exists x A(x) \to C}$, где C не содержит переменной x,
4) правило замены свободных переменных: свободную переменную можно заменить всюду, где она входит в формулу, на новую переменную, связанно не входящую в формулу,
5) правило замены связанных переменных: связанную переменную в области действия квантора и в самом кванторе можно заменить на новую переменную, свободно не входящую в формулу.

Формула D называется *доказуемой (теоремой)* (обозначается $\vdash D$), если существует конечная последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ такая, что $D_n = D$ и каждая D_i, $i = \overline{1.n}$, либо аксиома, либо получается из предыдущих формул при помощи одного из правил вывода.

Формула D называется *выводимой из формул* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (обозначается $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash D$), если существует конечная последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ такая, что $D_n = D$ и каждая D_i, $i = \overline{1.n}$, либо аксиома, либо одна из формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода.

Для исчисления предикатов справедливы теоремы, аналогичные теоремам исчисления высказываний.

Теорема дедукции. *Пусть* Γ *– некоторое конечное множество формул исчисления предикатов,* A, B *– произвольные формулы исчисления предикатов и* $\Gamma, A \vdash B$*, причем в процессе вывода переменные, входящие в множество формул* Γ, A *не изменяются, то есть если они были свободными, то остаются свободными, если были связанными, то остаются связанными. Тогда* $\Gamma \vdash A \to B$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по длине вывода B из Γ, A и во многом повторяет доказательство теоремы дедукции для исчисления высказываний. Базис индукции совпадает с базисом индукции теоремы для исчисления высказываний.

Предположив, что теорема доказана для случая, когда длина вывода B из Γ, A есть n, докажем ее для случая, когда длина вывода есть $n + 1$. В силу определения выводимости, на $n + 1$ шаге B может быть получена в следующих случаях: либо B – аксиома, либо $B = A$, либо $B \in \Gamma$, либо получена по одному из правил вывода. Для первых трех случаев и для случая, когда B получена по правилу Modus Ponens, доказательство аналогично доказательству теоремы для исчисления высказываний. Осталось рассмотреть случаи, когда B получена по $\forall$–правилу, по $\exists$–правилу или по правилам замены свободной или связанной переменной.

Пусть $B = \forall$–правило(P_i), где $i \leq n$. Тогда $P_i = C \to D(x)$ и $B = C \to \forall x D(x)$, причем формула C не содержит переменной x. По предположению индукции для P_i теорема доказана, значит $\Gamma \vdash A \to P_i$, то есть $\Gamma \vdash A \to (C \to D(x))$. В силу эквивалентности 18 из первого параграфа $\Gamma \vdash A \wedge C \to D(x)$. Поскольку формула $A \wedge C$ переменной x не содержит, то можно воспользоваться $\forall$–правилом: $\Gamma \vdash A \wedge C \to \forall x D(x)$. Воспользуемся еще раз указанной эквивалентностью: $\Gamma \vdash A \to (C \to \forall x D(x))$. Получили то, что требовалось: $\Gamma \vdash A \to B$.

Пусть $B = \exists$–правило(P_i), где $i \leq n$. Тогда $P_i = D(x) \to C$ и $B = \exists x D(x) \to C$, причем формула C не содержит переменной x. Для P_i теорема уже доказана, значит $\Gamma \vdash A \to P_i$ или $\Gamma \vdash A \to (D(x) \to C)$. В силу эквивалентности 19 первого параграфа: $\Gamma \vdash D(x) \to (A \to C)$. Так как формула $A \to C$ переменной x не содержит, то можно воспользоваться $\exists$–правилом: $\Gamma \vdash \exists x D(x) \to (A \to C)$. Еще раз воспользуемся указанной эквивалентностью: $\Gamma \vdash A \to (\exists x D(x) \to C)$, то есть $\Gamma \vdash A \to B$.

Случаи, когда формула B получена по правилу замены свободной переменной или по правилу замены связанной переменной, очевидны. $\square$

Теорема. *Любая доказуемая формула исчисления предикатов тождественно истинна.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что
1. каждая аксиома тождественно истинна,
2. применение правил вывода к тождественно истинным формулам дает тождественно истинную формулу.

Первые десять аксиом не содержат переменных, поэтому для проверки тождественной истинности достаточно построить таблицы истинности. Рассмотрим аксиому 11. Допустим, что она не тождественно истинна. Тогда в некоторой модели при некоторых значениях свободных переменных она принимает значение ложь, то есть $\forall x A(x)$ – истина, а $A(y_0)$ – ложь для некоторого y_0. Но, по смыслу квантора всеобщности, формула $\forall x A(x)$ ложна. Пришли к противоречию, следовательно аксиома 11 – тождественно истинна. Аналогично устанавливается тождественная истинность аксиомы 12.

Докажем второе утверждение. Для правил замены свободной и связанной переменной утверждение очевидно. Для правила Modus Ponens доказывается так же, как в исчислении высказываний. Рассмотрим $\forall$–правило. Пусть $C \to A(x)$ – тождественно истинная формула. Допустим, что формула $C \to \forall x A(x)$ не тождественно истинна. Значит, в некоторой модели при некоторых значениях свободных переменных она принимает значение ложь, то есть C – истина, $\forall x A(x)$ – ложь. По смыслу квантора всеобщности, $A(x)$ принимает значение ложь хотя бы при одном значении переменной x (допустим, при $x = x_0$). Но тогда формула $C \to A(x_0)$ ложна, что противоречит ее тождественной истинности. Следовательно, заключение $\forall$–правила, формула $C \to \forall x A(x)$, тождественно истинна. Для $\exists$–правила доказательство аналогично. $\square$

Теорема (о непротиворечивости исчисления предикатов). *Исчисление предикатов непротиворечиво, то есть не существует такой формулы A, что $\vdash A$ и $\vdash \neg A$.*

Доказательство. Если исчисление предикатов противоречиво, то существует формула A такая, что $\vdash A$ и $\vdash \neg A$. Тогда A – тождественно истинна и $\neg A$ – тождественно истинна. Противоречие с тем, что отрицание тождественно истинной формул есть тождественно ложная формула. $\square$

Теорема (о полноте исчисления предикатов). *Исчисление предикатов полно в том смысле, что любая тождественно истинная формула доказуема.*

Для доказательства теоремы о полноте воспользуемся теоремой Геделя о существовании модели, которую приведем без доказательства. Доказательство можно найти, например, в [6].

Теорема Геделя (о существовании модели). *Пусть* Γ *– счетное непротиворечивое множество формул. Тогда существует модель той же сигнатуры, что и формулы из* Γ*, такая, что все формулы из* Γ *в этой модели при некоторых значениях свободных переменных принимают значение истина.*

Доказательство теоремы о полноте. Пусть A – тождественно истинная формула, тогда $\neg A$ – тождественна ложна. Значит, она не имеет модели. Следовательно, по теореме Геделя о существовании модели, она противоречива, то есть существует формула B такая, что
$\neg A \vdash B$
$\neg A \vdash \neg B$
По правилу введения отрицания: $\vdash \neg\neg A$.
По правилу удаления отрицания: $\vdash A$. $\square$

Две формулы исчисления предикатов A и B называются *равносильными* ($A \dashv\vdash B$), если $A \vdash B$ и $B \vdash A$.

Аналогично исчислению высказываний можно показать, что формулы эквивалентны тогда и только тогда, когда они равносильны. Следовательно, в исчислении предикатов равносильными являются все пары формул, которые приведены в параграфе 5.

Литература

1. Арсланов М.М., Калимуллин И.Ш. "Элементы математической логики"// Казань: КГУ, 2007.

2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. "Математическая логика"// М.: Наука, 1987.

3. Клини С. "Математическая логика"// М.: Мир, 1973.

4. Мендельсон Э. "Введение в математическую логику"// М.: Наука, 1976.

5. Новиков П.С. "Элементы математической логики"// М.: Наука, 1973.

6. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. "Математическая логика и теория алгоритмов"// М.: ИНФРА–М; Новосибирск: Издательство НГТУ, 2004.