Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, как это делается оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply’ем.

Если в ближайшее время студентам будет открыт доступ в университет, то вы можете приходить ко мне (ауд. 1205) в часы ваших занятий по расписанию (во вторник 11h.50m.-13h.30m. и в пятницу 15h.40m.-17h.30m.) для консультаций по решению домашних задач.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 44

Числовые ряды; критерий Коши сходимости ряда. Признаки сходимости рядов с неотрицательными слагаемыми.

Как и на прошлом занятии, мы рассматриваем задачу сходимости числового ряда, то есть сходимость числовой последовательности вида

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1, 2, ...$$

Напомню, что предел этой последовательности при $n \to \infty$ записывается в виде

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и называется *числовым рядом*, в то время как S_n *называется частичной суммой*.

Существует много достаточных признаков сходимости ряда, с которыми мы познакомимся позднее. Необходимые и достаточные признаки сходимости называются критериями сходимости.

Критерий Коши сходимости ряда. *Ряд* (1) *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое целое число* $N = N(\varepsilon)$, *что для любых* $n > N$ *и любых* $p \geq 1$ *отрезок ряда* (1) $|a_{n+1} + \cdot + a_{n+p}| < \varepsilon$.

В терминах кванторов критерий записывается следующим образом:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon),\ \forall n > N,\ \forall p \geq 1: \ |a_{n+1} + \cdot + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Сформулируем этот критерий в терминах расходимости ряда.

Критерий Коши расходимости ряда. *Ряд* (1) *расходится тогда и только тогда, когда существует такое* $\varepsilon > 0$ *и для любого* $N \geq 1$ *существуют такие* $n > N$ *и* $p \geq 1$, *что* $|a_{n+1} + \cdot + a_{n+p}| > \varepsilon$.

В терминах кванторов критерий расходимости ряда записывается следующим образом:

$$\exists\varepsilon > 0 \quad \forall N \geq 1,\ \exists n \geq N,\ \exists p \geq 1: \ |a_{n+1} + \cdot + a_{n+p}| \geq \varepsilon.$$

Пример 1. Доказать, что так называемый *гармонический* ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

Решение. Повременим с выбором ε, но, используя критерий расходимости, для любого целого $N \geq 1$ положим $n = N$ и $p = N$. Для выбранных значений n и p оценим снизу отрезок ряда

$$a_{n+1} + \cdot + a_{n+p} = a_{N+1} + \cdot + a_{N+N} = \frac{1}{N+1} + \cdot + \frac{1}{N+N} >$$

$$\frac{1}{N+N} + \cdot + \frac{1}{N+N} = \frac{1}{2N} \cdot N = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, выбор $\varepsilon = 1/2$ в критерии расходимости обеспечивает расходимости гармонического ряда.

На этом занятии мы будем работать со следующими тремя признаками сходимости числовых рядов с $a_n \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots$

1^0. **Признак сравнения.** *Если найдутся такие* $b_n \geq a_n, \forall n \geq 1$, *что ряд* $\sum_1^\infty b_n$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum_1^\infty a_n$. *В терминах расходимости: Если найдутся такие* $b_n \leq a_n, \forall n \geq 1$, *что ряд* $\sum_1^\infty b_n$ *расходится, то расходится и ряд* $\sum_1^\infty a_n$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряды

$$\mathrm{S}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 3\,(-1)^{N+1}}{2^n}, \qquad \mathrm{S}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/4n)}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}}$$

Решение. Для ряда S_1 общий член

$$a_n = \frac{5 + 3\,(-1)^{N+1}}{2^n} \le \frac{8}{2^n}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{2^n}$$

сходится как геометрический. Следовательно, сходится и ряд S_1.

Для ряда S_2 общий член

$$a_n = \frac{\cos(\pi/4n)}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}} \ge \frac{\cos(\pi/4)}{2n}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/4)}{2n}$$

расходится, будучи гармоническим рядом (см. Пример 1). Следовательно, ряд S_2 расходится.

2^0. **Интегральный признак сравнения.** *Если неотрицательная на промежутке $[a, \infty)$, $a \ge 1$, функция $f(x)$ монотонно убывает с ростом аргумента x, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}$ и интеграл $\int_a^{\infty}(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}. \tag{2}$$

Решение. Как известно (см. Пример 3 в занятии 41), интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} dx$$

сходится лишь при $\alpha > 1$. Следовательно, аналогичное заключение верно и для ряда (2).

Следует отметить, что для применения интегрального признака целесообразно сначала использовать *асимптотический* признак (см. ниже признак 3^0), заменяя a_n эквивалентной при $n \to \infty$ функцией $f(n)$ таким образом, чтобы интеграл $\int_a^\infty(x)dx$ можно было или вычислить, или судить о его сходимости.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(e^{1/n}-1)}{\ln^\alpha(1+n^2)}\,. \tag{3}$$

Решение. Используя табличные формулы эквивалентности $e^x - 1 \sim x$, и $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$, упрощаем общий член этого ряда:

$$a_n = \frac{\operatorname{arctg}(e^{1/n}-1)}{\ln^\alpha(1+n^2)} \sim \frac{\operatorname{arctg}(1/n)}{(\ln n^2)^\alpha} \sim \frac{1}{2^\alpha n \ln^\alpha n}.$$

Следовательно, $f(x) = 1/(x \ln^\alpha x)$, интеграл

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \frac{1}{1-\alpha} x \ln^{1-\alpha} x \Big|_2^\infty$$

сходится только при $\alpha > 1$ и ряд (3) также сходится при $\alpha > 1$.

3^0. **Асимптотический признак сравнения.** *Если при $n \to \infty$ общий член $a_n \sim b_n$, , то ряды $\sum_1^\infty b_n$ и $\sum_1^\infty a_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 5. Исследовать на сходимость ряды

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\frac{2\pi}{n}, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Решение. Для ряда S_1 при $n \to \infty$ общий член

$$a_n = 1 - \cos\frac{2\pi}{n} \sim 1 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 = \frac{2\pi^2}{n^2}$$

(использовалась известная нам эквивалентность $1 - \cos x \sim x^2/2$ при $x \to 0$).

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится(см. Пример 3 на использование интегрального признака с $\alpha = 2 > 1$). Следовательно, сходится и ряд S_1.

Для ряда S_2 общий член

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

расходится, будучи гармоническим рядом (см. Пример 1). Следовательно, ряд S_2 расходится.

Задание 44

Решение следующих задач, взятых из задачника Кудрявцев, Кутасов и др., высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу.

Исследовать на сходимость ряды, общие члены a_n которых имеют следующий вид.

1. *Признак сравнения.*

$$14.2(2). \qquad a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1},$$

$$14.2(7). \quad a_n = \frac{n+2}{n^2\left[(4+3\sin(\pi n/3)\right]},$$

$$14.3(8). \quad a_n = \frac{\left[(3-2\cos^2(\pi n/3)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{n}}}{n^2\cdot 2^n}.$$

2. *Асимптотический признак сравнения.*

$$14.4(7). \qquad a_n = (\mathrm{e}^{1/n}-1)\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

$$14.5(8). \qquad a_n = \arcsin \frac{(\sqrt{n}+1)^3}{n^3+3n+2}\,,$$

$$14.6(2). \quad a_n = \sqrt{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} \cdot \ln \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\,,$$

Определить область сходимости (при каких α сходится?).

$$14.13(4). \qquad a_n = \frac{1}{n}\left(\exp\left\{\frac{1}{n^\alpha+1}\right\}-1\right)\,.$$

3. *Интегральный признак сравнения.*

$$14.14(3). \qquad a_n = \sqrt[n]{n}-1\,,$$

Определить область сходимости

$$14.15(4). \qquad a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^3+2}}\,.$$