Казанский (Приволжский) федеральный университет

М.С. МАЛАКАЕВ, Л.Р. СЕКАЕВА, О.Н. ТЮЛЕНЕВА

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие

Казань

2013

УДК 510

Печатается по решению учебно-методической комиссии ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Протокол № 6 от 13 июня 2013 г.

заседания кафедры общей математики
Протокол № 9 от 30 мая 2013 г.

Авторы-составители:

ст. преп. Михаил Степанович Малакаев,
канд. физ.- мат. наук, доц. Лилия Раилевна Секаева,
канд. физ.- мат. наук, доц. Ольга Николаевна Тюленева

Научный редактор, рецензент

Доктор физ.- мат. наук, доц. Елена Александровна Широкова

Рецензент

Доктор физ.- мат. наук, проф. Николай Георгиевич Гурьянов

Элементы линейной алгебры: Учебно-методическое пособие / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. Казань: Казанский университет, 2013. – 37 с.

Данное пособие предназначено для студентов Института геологии и нефтегазовых технологий, содержит описание основных приемов работы с компьютерной программой *Maxima* для решения задач линейной алгебры, используя алгебру матриц.

СОДЕРЖАНИЕ

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Основная задача этого раздела научится решать большие системы уравнений, в которых не всегда бывает единственное решение, не всегда число уравнений совпадает с числом неизвестных. Введем новые понятия, необходимые нам для дальнейшей работы.

Определение: Матрица – это прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где числа a_{ij} $(i=1,\ m\ ;\quad j=1,\ n)$ называются элементами матрицы.

Определение: Матрицы, у которых число строк равно числу столбцов, называется квадратной.

Для квадратных матриц существует числовая характеристика, которая называется определителем.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ (ДЕТЕРМИНАНТЫ)

Определение: 1. Под **определителем (детерминантом) второго порядка** понимается выражение

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Числа a_{ij} $(i=1,\ 2\ ;\quad j=1,\ 2)$ называются элементами определителя, они расположены в двух строках и двух столбцах его (ряды определителя).

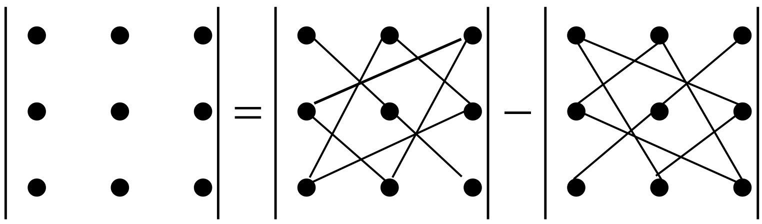
2. Под **определителем (детерминантом) третьего порядка** понимается выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Числа a_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2, 3)$ - элементы определителя, они расположены в трех строках и трех столбцах его (ряды определителя). Первый индекс (i) указывает номер строки, а второй (j)– номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Схематично правило вычисления определителя третьего порядка (правило треугольника) можно представить в виде



3. Под **определителем (детерминантом) первого порядка** понимается выражение $\Delta = a_1$.

4. Под **определителем (детерминантом) *N* порядка** понимается выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение: Под **минором некоторого** элемента a_{ij} определителя N порядка понимается определитель N-1 порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит выбранный элемент.

Обозначение: M_{ij}

Примеры: 1. Для определителя третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

минором элемента a_{21} является следующий определитель второго порядка

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Для определителя второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

минором элемента a_{22} является определитель первого порядка (т.е. число)

$$M_{22} = a_{11}.$$

Определение: Элемент определителя занимает **четное место,** если сумма номеров его строки и столбца есть четное число, и **нечетное место**, если эта сумма есть нечетное число.

Определение: Алгебраическим дополнением (минором со знаком) элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, взятый со знаком плюс, если элемент занимает четное место, и со знаком минус, если его место нечетное, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Примеры: 1. Для определителя третьего порядка

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

алгебраическим дополнением элемента a_{21} является

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Для определителя второго порядка

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

минором элемента a_{22} является определитель первого порядка (т.е. число)

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = a_{11}.$$

Знаки алгебраических дополнений элементов определителей второго, третьего и четвертого порядка можно задать следующими таблицами:

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Теорема разложения определителя по элементам некоторого ряда: Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения, т.е. для определителя третьего порядка имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$
$$=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=$$
$$=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}= \quad \text{и т.д.}$$

Доказательство: Проиллюстрируем эту теорему на примере определителя третьего порядка. В этом случае для первой строки имеем:

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\left(-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}\right)+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=\Delta,$$

(по определению)

Для второго столбца

$$a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=$$
$$a_{12}\left(-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}\right)+a_{22}\left(+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}\right)+a_{32}\left(-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{33}\end{vmatrix}\right)=$$

$$=-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{22}a_{11}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{32}a_{11}a_{23}+a_{32}a_{13}a_{21}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=D,$$

(по определению)

Пример: Вычислить $\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&4&2\\1&3&2\end{vmatrix}$.

Решение:

Разложим определитель по первой строке

$$\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&4&2\\1&3&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}4&2\\3&2\end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix}0&2\\1&2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}0&4\\1&3\end{vmatrix}=8-6+0-4+0-12=-14,$$

Разложим определитель по первому столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 - 0 - 4 - 12 = -14,$$

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков, но доказывать и иллюстрировать их будем на примере определителей третьего порядка.

1. Равноправность строк и столбцов. Определитель не меняет своего значения при замене всех его строк соответствующими столбцами, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке двух параллельных рядов определителя его абсолютная величина сохраняет прежнее значение, а знак меняется на обратный.

Доказательство: Пусть, например, в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

переставлены первая и вторая строки, тогда получим определитель:

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Разложим второй определитель по элементам второй строки

$$\tilde{\Delta} = a_{11} \cdot \left(-\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{12} \cdot \left(+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \cdot \left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) =$$

$$-\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) = -D.$$

Ч.Т.Д.

3. Определитель, у которого два параллельных ряда одинаковых, равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно выносить за знак определителя, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Если элементы какого-либо ряда определителя пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то определитель равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

8. Элементарные преобразования определителя. Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда его прибавить (или отнять) числа, пропорциональные соответствующим элементам параллельного ряда с одним и тем же коэффициентом пропорциональности.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \pm ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \pm ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \pm ka_{31} \end{vmatrix}$$

В Maxima чтобы вычислить определитель, нужно задать квадратную матрицу

```
(%i1) A: matrix([1,2], [3,4]);
```

$$(\%o1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

затем вычислить определитель

```
(%i2) determinant(A);
(%o2) -2
```

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение: Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \ , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \ , \end{cases}$$

где числа a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ называются **коэффициентами системы**, числа b_{ij} - **свободными членами системы**. Подлежат нахождению числа x_n.

Решить систему уравнений значит найти такие числа $x_i \, (i = \overline{1, n})$, что при подстановке в исходную систему уравнений каждое уравнение системы обратится в тождество. Необязательно решение будет единственным.

Определение: Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Определение: Совместная система называется **определенной,** если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется **частным решением** системы. Совокупность всех частных решений называется **общим решением.**

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Определение: Две системы называются **эквивалентными** (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение.

Определение: Система уравнений называется **однородной,** если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0\,, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0\,. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется **нулевым** или **тривиальным.**

В *Maxima* решение алгебраических уравнений и их систем осуществляется функцией **solve**, в качестве параметров в первых квадратных скобках указывается список уравнений через запятую, во-вторых – список переменных, через запятую.

```
(%i1) solve([x+y=0, x-y=3], [x,y]);
```

(%o1) $[[x=\frac{3}{2}, y=-\frac{3}{2}]]$

МЕТОД КАМЕРА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Рассмотрим:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 , \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 . \end{cases}$$

Для нахождения решений системы применим метод **исключения**. Для этого умножим первое уравнение системы на a_{22}, а второе на $(-a_{12})$ и сложим их, тогда получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x = b_1a_{22} - b_2a_{12} . \qquad (1)$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы на $(-a_{21})$, а второе – на a_{11} и складывая, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, y = b_2a_{11} - b_1a_{21} . \qquad (2)$$

В полученных уравнениях в левой части стоят одинаковые выражения, а в правой стоят выражения по структуре похожие на выражение в левой части.

Введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

Δ – называется определителем системы.

Введем дополнительные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1.$$

Мы получили выражения стоящие в правых частях уравнений (1) и (2). Заметим, что дополнительные определители Δ_x и Δ_y получаются из определителя системы Δ путем замены коэффициентов при указанном неизвестном на соответствующие свободные члены.

Уравнения (1), (2) принимают вид:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x, \quad \Delta \cdot y = \Delta_y.$$

Возможны два варианта:

1) Если $\Delta \neq 0$, то отсюда получаем, что исходная система уравнений имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$ (формулы Крамера).

То, что *x, y* являются решением системы можно проверить подстановкой их в систему.

2) Если $\Delta = 0$:

- Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_x или $\Delta_y \neq 0$, то **система не имеет решений** (т.е. несовместна).
- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет **бесчисленное множество решений** (т.е. система неопределенная).

Доказательство: Из свойств определителя $\Delta = 0$

- Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_x или $\Delta_y \neq 0$ (пусть $\Delta_x \neq 0$), из первого уравнения системы (1), получаем

$$\underline{\Delta x = 0 = \Delta_x \neq 0} \text{ противоречие.}$$

Значит, система уравнений не имеет решений.

- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то из системы (1)

$$\Delta\, x = 0 = \Delta_x = 0, \quad \Delta\, y = 0 = \Delta_y = 0,$$

тождественные равенства.

Примеры:

1. $\begin{cases} 3x + 6y = 3, \\ 4x + 8y = 2. \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2\cdot 3 \\ 4 & 2\cdot 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ Решений нет. Действительно, сократим первое уравнение на 3, а второе на 4, получим

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x + 2y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Нельзя найти такие x, y, которые бы обращали в тождество оба уравнения системы.

2. $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 4x + 6y = 16. \end{cases}$

Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$.

Одно из уравнений является следствием другого (например, второе получается из первого умножением на 2). Система сводится к одному уравнению и имеет бесчисленное множество решений, содержащихся в формуле:

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}.$

3. $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 7x - 5y = -3. \end{cases}$

Здесь

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -31,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -31,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -62$

Система имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2.$$

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1\ , \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3\ \ . \end{cases}$$

Введем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а также дополнительные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Возможны два варианта:

1) $\Delta \neq 0$, тогда решение исходной системы уравнений существует и оно единственное.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \text{ (формулы Крамера)} \qquad (*)$$

2) $\Delta = 0$

- Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y или $\Delta_z \neq 0$, то хотя бы одно из равенств (*) невозможно, т.е. система **не имеет решений** (т.е. несовместна).
- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система имеет либо **бесчисленное множество решений** (т.е. система неопределенная) либо **не имеет решений** (т.е. система несовместна).

4. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 1, \\ 4x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$

Не имеет решений, т.к. $\Delta = 0, \quad \Delta_y = 1 \neq 0$.

5. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+y+z=2, \\ 3x+2y+2z=3. \end{cases}$

Имеет бесчисленное множество решений.

$$\Delta=0, \quad \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0.$$

Ищем минор отличный от нуля $M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1$, возьмем первые два уравнения системы и запишем их в виде

$$\begin{cases} x+y=1-z, \\ 2x+y=2-z. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\tilde{\Delta}=M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Воспользуемся формулами Крамера

$$\tilde{\Delta}_x=\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 2-z & 1 \end{vmatrix}=1-z-2+z=-1,$$

$$\tilde{\Delta}_y=\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & 2-z \end{vmatrix}=2-z-2+2z=z,$$

Тогда решение этой системы запишется в виде

$$x=\frac{\tilde{\Delta}_x}{\tilde{\Delta}}=\frac{-1}{-1}=1, \quad y=\frac{\tilde{\Delta}_y}{\tilde{\Delta}}=\frac{z}{-1}=-z.$$

Если возьмем $z=-t$, то решение системы запишется в виде

$$x=1, \; y=t, \; z=-t$$

6. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+2z=3, \\ 3x+3y+3z=4. \end{cases}$

Не имеет решений, т.к. $\Delta=0, \quad \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, но уже первые два ее уравнения не совместны, т.к. если умножить первое из них на 2 и вычесть из второго, то получим невозможное равенство 0=1.

$$7.\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+2z=2, \\ 3x+3y+3z=3. \end{cases}$$

Имеет бесчисленное множество решений. Здесь $\Delta=0,\ \ \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ и все миноры равны нулю и пропорциональны свободные члены, т.е. второе и третье уравнения являются следствием первого. Значит, имеем одно уравнение с тремя неизвестными, которое, естественно, имеет бесчисленное множество решений.

МАТРИЦЫ

В отличие от определителей, значения которых можно вычислить, матрицы - это таблицы, содержащие некоторую информацию.

Определение: Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины).

Матрица записывается в виде

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Обозначения: Коротко матрицу обозначают так:

$$A=\left(a_{ij}\right), \text{ где } i=\overline{1,\,m},\ \ j=\overline{1,\,n}.$$

или

$A_{m\times n}$ - здесь индекс внизу обозначает **размер матрицы** $m\times n$ (т.е. число строк равно m , а число столбцов n), и говорят A матрица размера $m\times n$.

Определение: Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют **главную диагональ.**

Определение: Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной матрицей,** т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение: Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной**. Обозначается буквой E.

Пример: $E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка,

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица n-го порядка.

Определение: Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение: Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой.** Обозначается буквой O.

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Определение: Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектор-столбец** или **вектор-строка** соответственно. Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. $(5)_{1\times 1}$ есть 5.

Определение: Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером называется **матрицей транспонированной к данной.**

Обозначение: A^T.

Пример:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$

СВОЙСТВО ТРАНСПОНИРОВАННОЙ МАТРИЦЫ:

$$\left(A^T\right)^T = A.$$

Определение: Матрицы **равны** между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.

$$A = B\,,\quad \text{если}\quad a_{ij} = b_{ij}\,,\quad \text{где}\ i = \overline{1,\ m}\,,\quad j = \overline{1,\ n}\,.$$

Т.е. сравнивать мы можем только те матрицы, у которых равны размеры.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Матрицы – это таблицы, содержащие некоторую информацию, а свойства матриц определяются ситуацией, в которой они используются.

Наибольшее распространение матрицы получили в линейной алгебре, в частности, при решении систем линейных алгебраических уравнений, упрощении квадратичных форм и т.д. Поэтому большинство свойств матриц приспособлено к решению этих задач.

СЛОЖЕНИЕ

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Определение: Суммой двух матриц $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$, $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)$ такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,,\quad \left(i = \overline{1,\ m}\,,\quad j = \overline{1,\ n}\right).$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

РАЗНОСТЬ МАТРИЦ

Аналогично определяется **разность** матриц.

Определение: Разностью двух матриц $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$, $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ такая, что

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij},\quad \left(i=\overline{1,\ m},\quad j=\overline{1,\ n}\right).$$

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

УМНОЖЕНИЕ НА ЧИСЛО

Определение: Произведением матрицы $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ **на число** $\boldsymbol{k}$ называется матрица $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ такая, что

$$b_{ij}=k\cdot a_{ij},\quad \left(i=\overline{1,\ m},\quad j=\overline{1,\ n}\right).$$

Пример:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\quad k=2,\qquad A\cdot k=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Определение: Матрица $-A=(-1)A$ называется **противоположной** матрице A.

Разность матриц A-B можно определить еще так

$$A-B=A+(-B).$$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ СЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ И УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО

1. свойство переместительности
$$A+B=B+A;$$
2. свойство сочетательности (слагаемые можно группировать как угодно)

$$A+(B+C)=(A+B)+C;$$

3. $A+O=A$;
4. $A-A=O$;
5. $1\cdot A=A$
6. Свойство распределительности по отношению к матрицам
$$\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B;$$
7. Свойство распределительности по отношению к числовому множителю
$$(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A;$$
8. Свойство сочетательности
$$\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A,$$

где A, B, C - матрицы, α, β - числа.

9. $(A+B)^T=A^T+B^T$.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- Умножение всех элементов матрицы на число, отличное от нуля;
- Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Определение: Две матрицы называются **эквивалентным,** если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение: *A*~*B*.

Это важное свойство матриц связано с решением систем линейных алгебраических уравнений (ЛАУ). Рассматривая матрицу коэффициентов некоторой системы ЛАУ, отметим, что если умножить некоторую строку на какое-то число и прибавить ее к другой строке матрицы, то получаем эквивалентную матрицу, то есть матрицу коэффициентов системы ЛАУ, имеющей то же решение, что и предыдущая. Это свойство следует из того, что аналогичную процедуру можно производить с системами линейных алгебраических уравнений.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют **канонической,** например

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример: Привести к каноническому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&2&-1&1\\4&0&5&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2\\-1&2&0&1\\5&0&4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&5&2&3\\0&-15&-6&-9\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&5&2&3\\0&-15&-6&-9\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}&\div 5&\div 2&\div 3\end{array}\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&-3&-3&-3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ

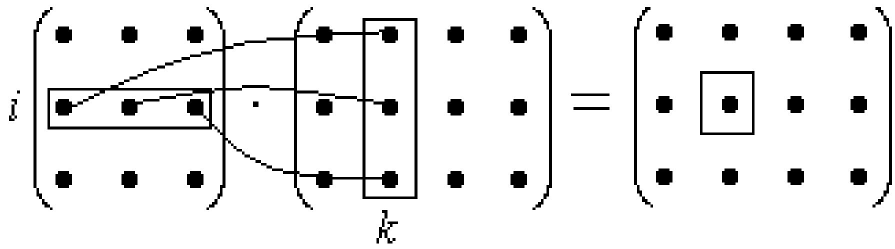
Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Определение: Произведением матрицы $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ **на матрицу** $B_{n\times p}=\left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times p}=\left(c_{ij}\right)$, такая, что

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk},\ \text{где}\quad i=\overline{1,m},\ \ k=\overline{1,p},$$

т.е. элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы *B*.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так



Примеры:

1. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Итак, мы перемножили матрицы размерами 3×3, 3×2 и получили матрицу - произведение размером 3×2.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{pmatrix}.$

В результате получаем вектор-столбец.

СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

1) $A\cdot B \neq B\cdot A$ (переместительного свойства нет)

Более того, если матрица $A\cdot B$ существует, то матрица $B\cdot A$ может не существовать. Поэтому принято говорить «умножим матрицу A

справа на *B*», тогда получим *AB*. При умножении матрицы *A* «слева на *B*» имеем $B\cdot A$.

Если матрицы *A* и *B* квадратные одного размера, то произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ всегда существуют. Матрицы *A* и *B* называются **перестановочными**, если $A\cdot B=B\cdot A$.

2) Произведение квадратной матрицы на единичную матрицу того же порядка равно самой матрице, т.е.

$$A\cdot E=\ E\cdot A=A.$$

Доказательство:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0+\ a_{12}\cdot 1 \\ a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$ Итак,

$A\cdot E=A$. Нетрудно показать, что $E\cdot A=A$.

Ч.Т.Д.

3) $\left(A\cdot B\right)^T=B^T\cdot A^T$.

Доказательство:

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Тогда

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B^T=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

В то же время

$$\left(A\cdot B\right)^T=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}\,b_{21} & a_{21}b_{11}+a_{22}\,b_{21} \\ a_{11}b_{12}+a_{12}\,b_{22} & a_{21}b_{12}+a_{22}\,b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}\, b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}\, b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}\, b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}\, b_{22} \end{pmatrix} = (A \cdot B)^T .$$

Ч.Т.Д.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для суммы и произведения матриц справедливы следующие свойства:

4) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

5) $A(BC) = (AB)C$ (свойство сочетательности),

6) $A(B+C) = AB + AC$ (свойство распределительности),

7) $(A+B)C = AC + BC$ (свойство распределительности),

8) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$ (свойство распределительности).

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение: Квадратная матрица называется **невырожденной**, если ее определитель $D \neq 0$.

Определение: **Обратной** матрицей квадратной матрицы A называют матрицу A^{-1}, для которой выполняется соотношение $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \frac{A_{31}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \frac{A_{32}}{D} \\ \frac{A_{13}}{D} & \frac{A_{23}}{D} & \frac{A_{33}}{D} \end{pmatrix},$$

где D – определитель матрицы *A*, $A_{i\,j}$ – алгебраические дополнения элементов матрицы *A*.

Эта формула легко доказывается перемножением $A \cdot A^{-1} = E$.

Очевидно, обратная матрица существует только для невырожденных матриц, то есть матриц, определитель которых не равен нулю. Вырожденная матрица (ее определитель равен нулю) обратной матрицы не имеет.

СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

1. Пусть определитель матрицы A равен $\det A$, определитель матрицы A^{-1} равен $\det\left(A^{-1}\right)$, тогда $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$,

2. $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,

4. $\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}$.

РАНГ МАТРИЦЫ

Определение: Рангом матрицы называют порядок наибольшего не равного нулю определителя, составленного из ее элементов.

Пояснение: Рассмотрим матрицу размера $m \times n$

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cdots & \cdots \end{matrix} & \cdots & \cdots \\ \begin{matrix} a_{m1} & a_{m2} \end{matrix} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k порядка. Все эти определители называются **минорами** матрицы A. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля и является рангом матрицы.

Далее будет показано, как ранг матрицы коэффициентов ЛАУ влияет на ее решение.

СВОЙСТВА РАНГА МАТРИЦЫ

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦ

Решаем систему n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \ , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \ , \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что в матричном виде система будет выглядеть следующим образом

$$A \cdot X = B.$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Умножаем уравнение слева на матрицу A^{-1}. Ясно, что она должна существовать, то есть определитель матрицы A должен быть не равным нулю. Это означает, что данный метод пригоден только для случая единственного решения системы уравнений. Итак,

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Решение получено, остается его реализовать.

Пример:

Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28 \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1 \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5 \end{cases}$$

Очевидно

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 9\\ 7 & 3 & -6\\ 7 & 9 & -9\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}28\\ -1\\ 5\end{pmatrix}.$$

Основной определитель этой системы уравнений совпадает с определителем матрицы A:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -4 & 9\\ 7 & 3 & -6\\ 7 & 9 & -9\end{vmatrix}=2\cdot 27-4\cdot 21+9\cdot 42=348.$$

Подсчитаем алгебраические дополнения элементов определителя:

$$A_{11}=27;\ A_{12}=21;\ A_{13}=42;\ A_{21}=45;\ A_{22}=-81;$$
$$A_{23}=-46;\ A_{31}=-3;\ A_{32}=75;\ A_{33}=34.$$

Тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{348}\begin{pmatrix}27 & 45 & -3\\ 21 & -81 & 75\\ 42 & -46 & 34\end{pmatrix}$$

и

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{348}\begin{pmatrix}27\cdot 28+45\cdot(-1)-3\cdot 5\\ 21\cdot 28+81\cdot 1+75\cdot 5\\ 42\cdot 28+46\cdot 1+34\cdot 5\end{pmatrix}=\frac{1}{348}\begin{pmatrix}696\\ 1044\\ 1392\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix},$$

отсюда $x_1=2$, $x_3=3$, $x_3=4$.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

Процесс решения системы по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду (в частности, к треугольному), т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \ , \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \cdots + \tilde{a}_{2k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \ , \\ \qquad\qquad\qquad \tilde{a}_{33}x_3 + \cdots + \tilde{a}_{3k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{3n}x_n = \tilde{b}_3 \ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \tilde{a}_{kk}x_k + \cdots + \tilde{a}_{kn}x_n = \tilde{b}_k \ , \end{cases}$$

где $k \le n, \quad a_{11}, \tilde{a}_{ii} \ne 0, \quad i = \overline{1, \ k}$.

Пояснение:

$k = n$, если все уравнения в системе разные.

$k < n$, если в исходной системе уравнений есть уравнения, являющиеся линейной комбинацией других уравнений системы. Эти уравнения отбрасываются.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Пример:

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Итак, решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса реализуется построением треугольной матрицы, эквивалентной исходной.

Расширенная матрица этой системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

содержит все параметры системы.

Запишем эквивалентную ей матрицу, у которой ниже главной диагонали стоят одни нули. Для этого умножим первую строку на (-2) и прибавим ко второй, затем первую строку умножаем на (-3) и суммируем с третьей:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 28 & -98 & -84 \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -58 & -116 \end{array}\right\|$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ \quad 7x_2 - 10x_3 = 8, \\ \quad\quad -58x_3 = -116. \end{cases}$$

эквивалентной исходной, то есть имеющей то же решение. Таким образом,

$$x_3 = 2, \; x_2 = \frac{8 + 10 \cdot 2}{7} = 4, \; x_1 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 6 = 8.$$

Отметим, что это не единственный вариант решения, который можно получить методом Гаусса. В последней строке могут быть три первых нуля и не нуль последний элемент. Легко установить, что система в этом случае несовместна. Может случиться и так, что вся последняя строка состоит из нулей. Тогда следует рассмотреть вторую строку. Если она также состоит только из нулей, то остается одно уравнение относительно трех неизвестных, и мы имеем бесчисленное множество решений, когда одна из неизвестных выражается через две другие, которые могут задаваться произвольно. Если во второй строке нулем является только первый элемент, то имеем также бесчисленное множество решений, когда две неизвестные выражаются через одну, задаваемую произвольно.

Наконец, во второй строке не равен нулю только последний элемент, тогда система несовместна.

Пример:

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Расширенная матрица этой системы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Мы пришли к системе двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ -3x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_2 - 1 \\ x_1 = 2x_2 - 3. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид двух формул для вычисления неизвестных x_1, x_3 при любом заданном x_2.