Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 405, 2012 г.

Ю. А. Альпин, В. С. Альпина

КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА НЕПРИВОДИМЫХ ПОЛУГРУПП НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Введение

Пусть $\mathcal{P}$ – мультипликативная полугруппа неотрицательных матриц порядка n. Полугруппа $\mathcal{P}$ называется приводимой, если посредством некоторой симметричной перестановки строк и столбцов все матрицы из $\mathcal{P}$ приводятся к виду $\begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}$ с квадратными блоками X и Y. Если такой перестановки строк и столбцов не существует, то говорят, что полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима. Неприводимость полугруппы $\mathcal{P}$ эквивалентна, легко видеть, следующему свойству: для любых индексов i, j из множества $N = \{1, \dots, n\}$ в $\mathcal{P}$ найдётся матрица с положительным (i, j)-элементом.

Пусть A – неотрицательная матрица порядка n. Для подмножества $M \subseteq N$ положим, что

$$A(M) = \{j \in N \mid A_{ij} > 0, i \in M\}.$$

Другими словами, множество $A(M)$ состоит из номеров столбцов, в которых расположены положительные элементы строк с номерами из M. Пусть задано разбиение множества N, то есть совокупность непустых непересекающихся подмножеств (классов), объединение которых совпадает с N. Скажем, что матрица A действует на разбиении как перестановка, если для всякого класса M существует класс P, такой что $A(M) = P$, причём определённое таким образом отображение классов биективно. Ясно, что матрица без нулевых строк и столбцов тогда и только тогда действует на некотором разбиении как перестановка, когда она перестановочно подобна блочной матрице, каждая блочная строка и каждый блочный столбец которой содержит ровно один ненулевой блок. Здесь и дальше имеются ввиду разбиения на блоки, при которых диагональные блоки – квадратные матрицы.

Ключевые слова: неотрицательные матрицы, неприводимые полугруппы, форма Фробениуса.

В сообщении [1] поставлена следующая проблема (приводим слегка отличную формулировку): верно ли, что неприводимая полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц порядка n без нулевых строк и столбцов тогда и только тогда не содержит положительных матриц, когда существует разбиение множества N, на котором каждая из матриц полугруппы $\mathcal{P}$ действует как перестановка. Наличие такого разбиения в переводе на язык матриц означает, что посредством симметричной перестановки строк и столбцов матрицы из $\mathcal{P}$ можно одновременно преобразовать к блочному виду (с одним и тем же разбиением на блоки), при котором любая блочная строка и любой блочный столбец содержит единственный ненулевой блок.

Положительное решение проблемы опубликовано в [2]. При этом утверждение было существенно усилено. А именно, доказано, что при указанных выше условиях полугруппу $\mathcal{P}$, не содержащую положительных матриц, можно привести к блочному виду со следующим свойством: в преобразованном виде полугруппа содержит блочно-диагональную матрицу с положительными блоками (см. [2, теорема 1]). Тем самым авторы обобщили на полугруппы неотрицательных матриц хорошо известный результат теории Перрона–Фробениуса–Романовского о строении неприводимой неотрицательной матрицы. Заметим, что переход от единственной неприводимой матрицы к неприводимой полугруппе матриц совершается естественно, так как моногенная полугруппа, порожденная неприводимой матрицей, неприводима.

Чтобы уточнить характер обобщения, достигнутого в [2], напомним, что по теореме Фробениуса всякая неприводимая неотрицательная матрица либо примитивна (и тогда некоторая степень этой матрицы не содержит нулей), либо приводится симметричной перестановкой строк и столбцов к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где число r, называемое индексом импримитивности, равно количеству собственных значений матрицы, имеющих максимальный модуль. Романовский [3, 4] обнаружил комбинаторную природу индекса импримитивности. Он доказал, говоря на принятом сегодня языке, что индекс импримитивности равен наибольшему общему делителю длин контуров графа матрицы. Форма Фробениуса (1) обладает следующим свойством: в блочно-диагональной матрице

$$A^r = \begin{pmatrix} A_{11}^{(r)} & & & \\ & A_{22}^{(r)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{rr}^{(r)} \end{pmatrix} \tag{2}$$

диагональные блоки примитивны (следовательно, некоторая степень матрицы A^d имеет на диагонали положительные блоки). И наоборот, если матрица блочного типа (1) обладает этим свойством, то она является формой Фробениуса неприводимой неотрицательной матрицы (см., например, [5, с. 60]). Непосредственно из строения формы Фробениуса видно, что существует разбиение $S_1, S_2, \dots, S_r$ множества N, на котором матрица A действует как циклическая перестановка:

$$A(S_1) = S_2, \quad \dots, \quad A(S_r) = S_1.$$

Доказательство основной теоремы 1 работы [2] использует свойства выпуклых многогранников в многомерном пространстве и их аффинных отображений. Авторы поставили вопрос о чисто комбинаторном доказательстве этой, по существу комбинаторной, теоремы. Мы приводим здесь доказательство, в котором используется лишь положительность или равенство нулю элементов матриц, то есть их комбинаторная структура.

Все определения и доказательства статьи имеют комбинаторный характер. В частности, неприводимость полугруппы неотрицательных матриц и действие матрицы на разбиении определены выше не геометрически, как в [1, 2], а комбинаторно. В §1 доказывается теорема об условиях, при которых полугруппа неотрицательных матриц содержит положительную матрицу. И здесь вместо геометрических и спектральных свойств неотрицательных матриц, применённых в [1, 2], используются лишь их комбинаторные свойства. В §2 эта теорема применяется для доказательства основного результата, который содержится в теоремах 3–5. Главную же роль играет бинарное отношение совместимости, определяемое матричной полугруппой на множестве индексов матриц. Аналогичный подход использован в [6] для комбинаторного вывода формы Фробениуса неразложимой неотрицательной матрицы.

Обозначим символом $\mathbb{P}_n$ мультипликативную полугруппу всех неотрицательных матриц порядка n без нулевых строк и столбцов. Можно сказать, что предметом этой статьи являются неприводимые подполугруппы $\mathbb{P}_n$. Полугруппа $\mathbb{P}_n$ содержит единичную матрицу; будем считать, что и рассматриваемые далее подполугруппы $\mathbb{P}_n$ содержат единичную матрицу.

§1. Полугруппы, содержащие положительные матрицы

При каких условиях полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц порядка n содержит положительную матрицу? Существенную роль играет условие

1) *для любых индексов i, j в $\mathcal{P}$ существует матрица, в некотором столбце которой i-й и j-й элементы положительны.*

Если полугруппа $\mathcal{P}$ содержит положительную матрицу, то условие 1), разумеется, выполняется. Но обращение этого утверждения нетривиально.

Теорема 1. *Для того, чтобы неприводимая полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ содержала положительную матрицу, достаточно, чтобы выполнялось условие* 1).

Доказательство теоремы состоит из трёх лемм.

Лемма 1. *Если неприводимая полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ удовлетворяет условию* 1)*, то для любого индекса k в $\mathcal{P}$ найдётся матрица, в которой k-й столбец положителен.*

Доказательство. Обозначим через $m(A)$ максимальное количество положительных элементов, стоящих в одном столбце матрицы A. Пусть $m = m(A) < n$ положительных элементов матрицы $A \in \mathcal{P}$ находятся в столбце l:

$$A_{i_1 l} > 0, \quad \dots, \quad A_{i_m l} > 0.$$

В некоторой r-й строке есть элементы $A_{rl} = 0$ и $A_{rp} > 0$. По условию 1) существует матрица $B \in \mathcal{P}$, в которой $B_{lq} > 0$ и $B_{pq} > 0$ при некотором q. Тогда, очевидно,

$$(AB)_{i_1 q} > 0, \quad \dots, \quad (AB)_{i_m q} > 0, \quad (AB)_{rq} > 0,$$

следовательно, $m(AB) \geqslant m + 1$. Повторяя описанную процедуру, на некотором шаге получим матрицу C с положительным столбцом.

Пусть в C положителен s-й столбец и $s \neq k$. Ввиду неприводимости $\mathcal{P}$ для некоторой $D \in \mathcal{P}$ имеем $D_{sk} > 0$. Тогда в матрице CD положителен k-й столбец. □

Сформулируем условие, двойственное к условию 1):

2) *для любых индексов i, j в полугруппе $\mathcal{P}$ существует матрица, в некоторой строке которой i-й и j-й элементы положительны.* Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 2. *Если неприводимая полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ удовлетворяет условию* 2), *то для любого индекса k в $\mathcal{P}$ найдётся матрица, в которой k-я строка положительна.*

Лемма 3. *Если для неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ выполнено условие* 1), *то выполнено и условие* 2).

Доказательство. Действительно, согласно лемме 1, для любого наперёд заданного номера i существует матрица $A \in \mathcal{P}$, столбец которой с номером i положителен. Остальные столбцы A, напомним, ненулевые. Поэтому i-й столбец и произвольно взятый j-й столбец имеют в некоторой строке положительные элементы. □

Завершим доказательство теоремы 1. По лемме 1 в $\mathcal{P}$ существует матрица A с положительным 1-м столбцом, а согласно леммам 2 и 3 найдётся матрица B с положительной 1-й строкой. Тогда произведение AB – положительная матрица.

§2. Строение полугрупп, не содержащих положительных матриц

Пусть матрица A принадлежит полугруппе $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$. Индекс j называется A-последователем индекса i, если $A_{ij} > 0$. Индекс j будем называть последователем индекса i, если он является A-последователем i для некоторой $A \in \mathcal{P}$. Отсутствие в A нулевых строк гарантирует существование A-последователей любого индекса, а ввиду отсутствия нулевых столбцов любой индекс является A-последователем некоторого индекса.

Лемма 4. *Если индекс j – A-последователь i, а индекс k – B-последователь j, то k – AB-последователь i.*

Действительно, если $A_{ij} > 0$ и $A_{jk} > 0$, то $(AB)_{ik} \geqslant A_{ij}B_{jk} > 0$.

Скажем, что индексы i и j совместимы матрицей $A \in \mathcal{P}$, если $A_{im} > 0$ и $A_{jm} > 0$ при некотором m. Будем говорить, что индексы i и j совместимы полугруппой $\mathcal{P}$ (или просто – совместимы), если они совместимы некоторой матрицей $A \in \mathcal{P}$. Индексы i и j по определению сильно совместимы, если их B-последователи совместимы при любой матрице $B \in \mathcal{P}$. Так как в качестве B можно взять единичную матрицу, то совместимость следует из сильной совместимости. Обозначим бинарное отношение сильной совместимости на множестве N символом S.

Случай, когда любые два индекса совместимы полугруппой $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$, то есть выполнено условие 1), рассмотрен в §1. Здесь отметим лишь, что если любые два индекса совместимы, то любые два индекса также и сильно совместимы.

Лемма 5. *Для любой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ отношение сильной совместимости симметрично и транзитивно.*

Доказательство. Симметричность прямо следует из определения сильной совместимости. Докажем транзитивность. Пусть iSj, jSk и дано, что p, m, q – B-последователи индексов i, j, k соответственно. Требуется доказать, что p и q совместимы. В силу iSj, для некоторой A и некоторого r имеем $A_{pr} > 0$, $A_{mr} > 0$, и пусть $A_{qs} > 0$. Индексы r и s, как BA-последователи сильно совместимых индексов j и k, совместимы некоторой матрицей C. Тогда, очевидно, индексы p и q AC-совместимы. □

Назовём индекс i рефлексивным, если iSi. В полугруппе неотрицательных матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & d & e \end{pmatrix}$$

с положительными a, b, c, d, e индексы 1 и 2 рефлексивны, а индекс 3 нерефлексивен, так как его последователи – индексы 1 и 2 – несовместимы. Таким образом, отношение S не всегда рефлексивно.

Лемма 6. *Рефлексивные индексы существуют для любой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$.*

Доказательство. Предположим противное: все индексы нерефлексивны. Тогда существуют несовместимые индексы. Пусть

$$i_1, i_2, \ldots, i_m \tag{3}$$

– максимальное число попарно несовместимых индексов. Для некоторой матрицы $A \in \mathcal{P}$ у нерефлексивного индекса i_1 существуют несовместимые A-последователи j_0 и j_1. Пусть $j_2, \ldots, j_m$ – A-последователи индексов $i_2, \ldots, i_m$. Индексы

$$j_0, j_1, j_2, \ldots, j_m \tag{4}$$

должны быть попарно несовместимы. Действительно, если, например, индексы j_1 и j_2 совместимы некоторой матрицей $B \in \mathcal{P}$, то индексы i_1 и i_2 AB-совместимы, чего не может быть поскольку в списке (3) нет совместимых индексов. Выходит, что индексы (4) попарно несовместимы, но это противоречит условию максимальности списка (3). □

Теорема 2. *Для неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ бинарное отношение S сильной совместимости является эквивалентностью.*

Доказательство. Ввиду леммы 5 требуется доказать лишь рефлексивность отношения S. По лемме 6 множество рефлексивных индексов непусто. Пусть i – рефлексивный индекс и предположим, что существует нерефлексивный индекс j. В силу неприводимости полугруппы $\mathcal{P}$ для некоторой матрицы $A \in \mathcal{P}$ имеем $A_{ij} > 0$. Для нерефлексивного индекса j найдётся такая матрица $B \in \mathcal{P}$, что некоторые B-последователи k и l этого индекса несовместимы. Но индексы k и l являются в то же время AB-последователями рефлексивного индекса i и потому обязаны быть совместимыми. Полученное противоречие доказывает теорему. □

По теореме 2 неприводимая полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ определяет на множестве индексов N отношение эквивалентности S сильной совместимости. Следовательно, можно говорить о разбиении множества N на классы сильной совместимости, то есть S-классы.

Лемма 7. *Пусть A – матрица порядка n без нулевых строк и столбцов. Предположим, что на множестве N задано разбиение со следующим свойством: для всякого класса M существует такой класс P, что $A(M) \subseteq P$. Тогда матрица A действует на разбиении как перестановка.*

Доказательство. Назовём множество $A(M)$ образом класса M. По условию леммы образ любого класса содержится в некотором классе. В A нет нулевых столбцов, поэтому всякий индекс является A-последователем некоторого индекса. Следовательно, любой класс содержит образ некоторого класса. Причем ровно одного класса, так как в противном случае для некоторого класса не хватило бы образа. Поэтому для любого класса P существует единственный класс M такой, что $A(M) \subseteq P$. На самом деле здесь имеет место равенство. Действительно, существование индекса $j \in P, j \notin A(M)$, означало бы, что индекс j ни для какого индекса не является последователем. Итак, для любого класса P существует единственный класс M такой, что $A(M) = P$. Это значит, что отображение, определяемое матрицей A на классах разбиения, биективно, то есть матрица A действует на данном разбиении как перестановка. □

Теорема 3. *Матрицы неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ действуют на S-классах как перестановки.*

Доказательство. Пусть индексы i и j сильно совместимы. Тогда для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$ все A-последователи индексов i и j тоже сильно совместимы. Действительно, если

$$A_{ip} > 0, \quad A_{jq} > 0, \quad B_{pu} > 0, \quad B_{qv} > 0,$$

то индексы u и v (B-последователи индексов p и q) совместимы как AB-последователи сильно совместимых индексов i и j. На языке S-классов доказанное свойство означает, что для любого класса M и любой матрицы $A \in \mathcal{P}$ существует такой класс P, что $A(M) \subseteq P$. То есть, для разбиения множества N на S-классы для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$ выполнено условие леммы 7. Применяя эту лемму, получаем утверждение теоремы. □

То, что всякая матрица $A \in \mathcal{P}$ действует на множестве S-классов как перестановка, имеет неожиданное следствие.

Следствие 1. *Бинарные отношения совместимости и сильной совместимости, определяемые неприводимой полугруппой $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ на множестве N, совпадают.*

Доказательство. Понятно, что несовместимые индексы не могут быть сильно совместимыми. Но верно и обратное. Действительно, пусть индексы i и j находятся в разных S-классах, например, $i \in M$, $j \in P$ ($M \neq P$), тогда их A-последователи находятся в классах $A(M)$ и $A(P)$. Эти классы не равны, так как по теореме 3 отображение классов, реализуемое матрицей A, является перестановкой классов. Следовательно, индексы i и j не совмещаются никакой матрицей $A \in \mathcal{P}$. Таким образом, если индексы не являются сильно совместимыми, то они не являются и совместимыми. Это означает совпадение отношений. □

Индексом импримитивности неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ назовём число классов отношения совместимости S, определяемого полугруппой $\mathcal{P}$ на множестве N. Индекс импримитивности, другими словами, равен наибольшему числу индексов, любые два из которых несовместимы. Этот термин введён в [2], наше определение отличается лишь комбинаторной формой выражения.

Переведём теорему 3 на язык матриц.

Теорема 4. *Неприводимая полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ с индексом импримитивности r либо содержит положительную матрицу (это случится при $r = 1$), либо матрицы из $\mathcal{P}$ с помощью перестановки строк и столбцов (одной и той же для всех матриц) преобразуются к блочной форме блочного порядка $r \geqslant 2$ (с одним и тем же разбиением на блоки), при которой каждая блочная строка и каждый блочный стобец содержит единственный ненулевой блок.*

Доказательство. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_r$ – классы совместимости с числом элементов, соответственно, $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Произведём преобразование подобия матриц из $\mathcal{P}$: переставим строки с номерами из S_1 на первые n_1 мест, на следующие n_2 мест – строки с номерами из S_2, и так далее. Затем аналогично переставим столбцы. Каждую преобразованную матрицу полугруппы разобъём на блоки так, чтобы диагональные блоки были порядков $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Тогда всякая матрица $A \in \mathcal{P}$ приобретёт форму, наглядно отражающую действие на классах: в u-й блочной строке и v-м блочном столбце стоит ненулевой блок, если $A(S_u) = S_v$. Так как по теореме 3 отображение классов является перестановкой, то в каждой блочной строке и каждом блочном столбце стоит ровно один ненулевой блок. Этот блок, очевидно, не имеет нулевых строк и столбцов. □

Будем говорить, что описанными выше симметричными перестановками строк и столбцов матрицы неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ преобразуются к S-форме. Докажем, что если матрицы приведены к S-форме, то $\mathcal{P}$ содержит блочно-диагональную матрицу с положительными диагональными блоками. Для этого потребуются вспомогательные утверждения.

Лемма 8. *Если индексы i и j совместимы матрицей $A \in \mathcal{P}$, то они совместимы и матрицей AB при любой матрице $B \in \mathcal{P}$.*

Доказательство. Действительно, пусть $A_{ik} > 0$ и $A_{jk} > 0$. Существует элемент $B_{kl} > 0$. Тогда $(AB)_{il} \geqslant A_{ik}B_{kl} > 0$ и $(AB)_{jl} \geqslant A_{jk}B_{kl} > 0$. □

Ещё два утверждения приведём без доказательства.

Лемма 9. *Если A – блочная матрица с единственным ненулевым блоком в каждой блочной строке и каждом блочном столбце, то некоторая степень A является блочно-диагональной матрицей.*

Лемма 10. *Произведение двух матриц, одна из которых положительная, а другая не содержит нулевых строк и столбцов, является положительной матрицей.*

Теорема 5. *Пусть неприводимая полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ с индексом импримитивности r приведена к S-форме. Тогда $\mathcal{P}$ содержит блочно-диагональную матрицу с положительными диагональными блоками.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{P}_s$ ненулевых диагональных блоков матриц из $\mathcal{P}$, расположенных на s-й диагональной позиции. Легко видеть, что множество $\mathcal{P}_s$ $(s = 1, \dots, r)$ образует неприводимую мультипликативную полугруппу матриц без нулевых строк и столбцов. Докажем, что полугруппа $\mathcal{P}_s$ удовлетворяет условию 1). Для простоты обозначений пусть $s = 1$. Любые индексы i и j с номерами между 1 и n_1 совместимы некоторой матрицей $A \in \mathcal{P}$. По лемме 8 они совместимы и матрицей A^k, где k – показатель, при котором 1-й диагональный блок матрицы A^k ненулевой. Этот блок принадлежит $\mathcal{P}_1$ и совмещает индексы i и j. Итак, любые два индекса из множества $N_1 = \{1, \dots, n_1\}$ совместимы полугруппой $\mathcal{P}_1$, что и означает выполнение условия 1). Для полугруппы $\mathcal{P}_1$ выполнены все условия теоремы 1, следовательно, эта полугруппа содержит положительную матрицу. Это значит, что существует матрица $A_1 \in \mathcal{P}$, у которой левый верхний диагональный блок положителен, причём можно считать, что A_1 – блочно-диагональная матрица. В противном случае можно возвести A_1 в подходящую степень – см. лемму 9. По аналогичным причинам для любого $s = 2, \dots r$ существует блочно-диагональная матрица $A_s \in \mathcal{P}$, в которой s-й диагональный блок положителен. Тогда (здесь применяется лемма 10) произведение $D = A_1A_2 \cdots A_r$ есть блочно-диагональная матрица с положительными диагональными блоками. □

Теоремы 3–5 содержат основные утверждения теоремы 1 работы [2]. Эта теорема утверждает, кроме того, что разбиение со свойствами, описанными выше в теоремах 3 и 4, единственно. Следовательно, разбиение, определённое в работе [2], и разбиение на S-классы совпадают.

Литература

1. В. Ю. Протасов, *Полугруппы неотрицательных матриц.* — Успехи мат. наук **65** (2010), вып. 6, 191–192.
2. V. Yu. Protasov, A. S. Voynov, *Sets of nonnegative matrices without positive products.* — Linear Algebra Appl. **437** (2012), 749–765.
3. V. Romanovsky, *Un théoréme sur les zéros des matrices nonnégatives.* — Bull. Soc. Math. France **61** (1933), 213–219.
4. В. И. Романовский, *Дискретные цепи Маркова.* Гостехиздат, М., 1949.
5. H. Minc, *Nonnegative Matrices.* Wiley, New York, 1988.
6. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Теорема Перрона–Фробениуса: доказательство с помощью цепей Маркова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 6–16.

Al‘pin Yu. A., Al‘pina V. S. Combinatorial properties of irreducible semigroups of nonnegative matrices.

The paper suggests a combinatorial proof of the Protasov–Voynov theorem on an irreducible semigroup of nonnegative matrices free of positive matrices. This solves the problem posed by the authors of the theorem.

Казанский федеральный университет
Кремлевская ул. 8, 420008 Казань, Россия

E-mail: Yuri.Alpin@ksu.ru

Казанский национальный исследовательский технологический университет
ул. К. Маркса 68, 420015 Казань, Россия

Поступило 25 октября 2012 г.