КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

ОТДЕЛЕНИЕ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

“МАТРИЦА ҺӘМ БИЛГЕЛӘГЕЧЛӘР”

темасы буенча индивидуль эшләр һәм методик күрсәтмәләр

А.И. Галимова, Ф.Ш. Зарипов

КАЗАН 2017

Печатается по решению учебно-методической комиссии Института Математики и Механики им. Н.И. Лобачевского

УДК 372.851

Индивидульные задания по теме “Матрицы и определители” и методические указания к их выполнению. Казань: КФУ, ИМиМ, 2017.- 54 с.

Методическое пособие предназначено для студентов Института Математики и Механики им. Н.И. Лобачевского КФУ, обучающихся по профилю «математика, информатика и информационные технологии в билингвальной татарско-русской среде», направления «Педагогическое образование», а также студентов других ВУЗов, желающих изучать математику на татарском языке.

В работе представлены основные типовые задачи по теме “Матрицы и определители” , необходимые теоретические сведения, образцы решений всех задач, предназначенных для самостоятельной работы студентов, а также знакомство с областью CAS программы GeoGebra и решение задач с помощью компьютерной программы.

Авторы, разработчики: А.И. Галимова – студент магистратуры,

Ф.Ш. Зарипов – к. физ.-мат.наук, доцент КФУ.

Рецензенты: д.п.н, профессор Л.Л. Салехова,

к.ф.-м.н., доц. А. Ф. Галимянов

©Галимова А. И. ,Зарипов Ф. Ш., 2017

© Казанский университет, 2017

Кереш сүз

Бу методик кулланма, татар телендә белем алучы студентлар өчен сызыкча алгебра һәм аналитик геометрия курсына ярдәмлек вазифасын үтәүче материал буларак тәкъдим ителә. Кулланмада башта кыскача теоретик материаллар, билгеләмәләр, аннан соң һәрбер билгеләмәгә карата чишелеп күрсәтелгән мисаллар китерелә. Шулай ук күрсәтмәнең ахырында мөстәкыйль эшләү өчен исбатлауга карата мәсәләләр һәм күрсәтмәнең барлык темаларын үз эченә алган мөстәкыйль эш вариантлары китерелгән. Мөстәкыйль эш 25 варианттан тора, һәрбер вариантка 8 мисал кертелгән. Шулай ук, студентлар укытучыга мөстәкыйль эшләрен тапшырганда, җавап бирә белергә тиешле йомгаклау сораулар китерелә. Әлеге ярдәмлекнең үзенчәлеге, өйрәнеләчәк курсның информацион технологияләр белән үрелеп баруы. Моның өчен GeoGebra математик программасы кулланыла. Мисаллар эшләү өчен командалар һәм үрнәкләр китерелә.

Бирелгән мисаллар студентларга лекцияләрдә алган теоретик белемнәрен кулланырга һәм тирәнтенрәк аңларга, мисалның чишү алгоритмын сайлап дөрес чишәргә, фәнара бәйләнеш булдырырга , GeoGebra программасын тирәнтен өйрәнергә мөмкинлек бирә.

§1. Матрицалар һәм алар белән гамәлләр башкару

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix},$$

Бирелгән таблица − **санлы матрица** дип атала, монда a_{ij} – ниндидер саннар, $i=1,2,...,m, j=1,2,...,n.$

Әлеге матрица m юл һәм n баганадан тора. Һәр юл n үлчәмле векторны, һәр багана m үлчәмле векторны тәшкил итә. $m\times n$ саны **матрицаның үлчәме** дип атала.

Әгәр $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ һәм $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ бер үлчәмле матрицалар булса, аларның **суммасы** дип $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$ матрицасы атала.

Матрицаларны кушу үзлекләре:

1. $A+B=B+A$ (кушу коммутатив).

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (кушу ассоциатив).

3. $A+\text{O}=A$, монда О − нуль-матрица (бар элементы нуль булган матрица).

4. $A+(-A)=\text{O}$, монда $-A=\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$ $-A$ матрицасына капма-каршы матрица.

$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ матрицасының λ санына **тапкырчыгышы** дип $\lambda A=\left(\lambda a_{ij}\right)_{m\times n}$ матрицасы атала.

Матрицаны санга тапкырлау түбәндәге үзлекләргә ия:

1. $1\cdot A = A\ (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A),\ \ (\lambda, \mu -$ саннар),

2. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, (λ –сан),

$A = \left(a_{i\,j}\right)_{m\times n}$ һәм $B = \left(b_{i\,j}\right)_{m\times n}$ матрицаларының **тапкырчыгышы** дип $AB = \left(c_{p\,q}\right)_{m\times n}$ матрицасы атала, монда $c_{pq} = a_{p1}b_{1q} + a_{p2}b_{2q} + ... + a_{pn}b_{nq},\ \ p = 1,...,m,\ q = 1,...,k$.

Бу билгеләмәдән, матрицаларны тапкырлау өчен, беренче матрицадагы баганалар саны белән икенче матрицадагы юллар саны тигез булырга тиешлеге килеп чыга.

Матрицаларны тапкырлау үзлекләре:

1. $(AB)C = A(BC)$, тапкырлау ассоциатив,

2. $AB \neq BA$, тапкырлау коммутатив түгел,

3. $A(B+C) = AB + AC;\quad (A+B)C = AC + BC$, (тапкырчыгыш кушу буенча дистрибутив),

4. Әгәр A – n нчы тәртиптәге квадрат матрица , ә $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$ -

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

шул ук тәртиптәге берәмлек матрица булса, $AE = EA = A$.

Вариант 0. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Чишелеше. A матрицасында 3 багана , ә B матрицасында 3 юл бар, димәк аларны тапкырларга мөмкин. Матрицаларны тапкырлау билгеләмәсе буенча:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 1+(-1)\cdot(-2)\\ 0\cdot 3+1\cdot(-1)+2\cdot 0 & 0\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

Бу мисалда B матрицасындагы баганалар саны A матрицасындагы юллар санына туры килгәнгә BA тапкырчыгышын да табып була:

$$BA=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 3\cdot 2+(-1)\cdot 1 & 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 2\\ (-1)\cdot 1+1\cdot 0 & (-1)\cdot 2+1\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+1\cdot 2\\ 0\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 0\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 0\cdot(-1)+(-2)\cdot 2\end{pmatrix}=$$

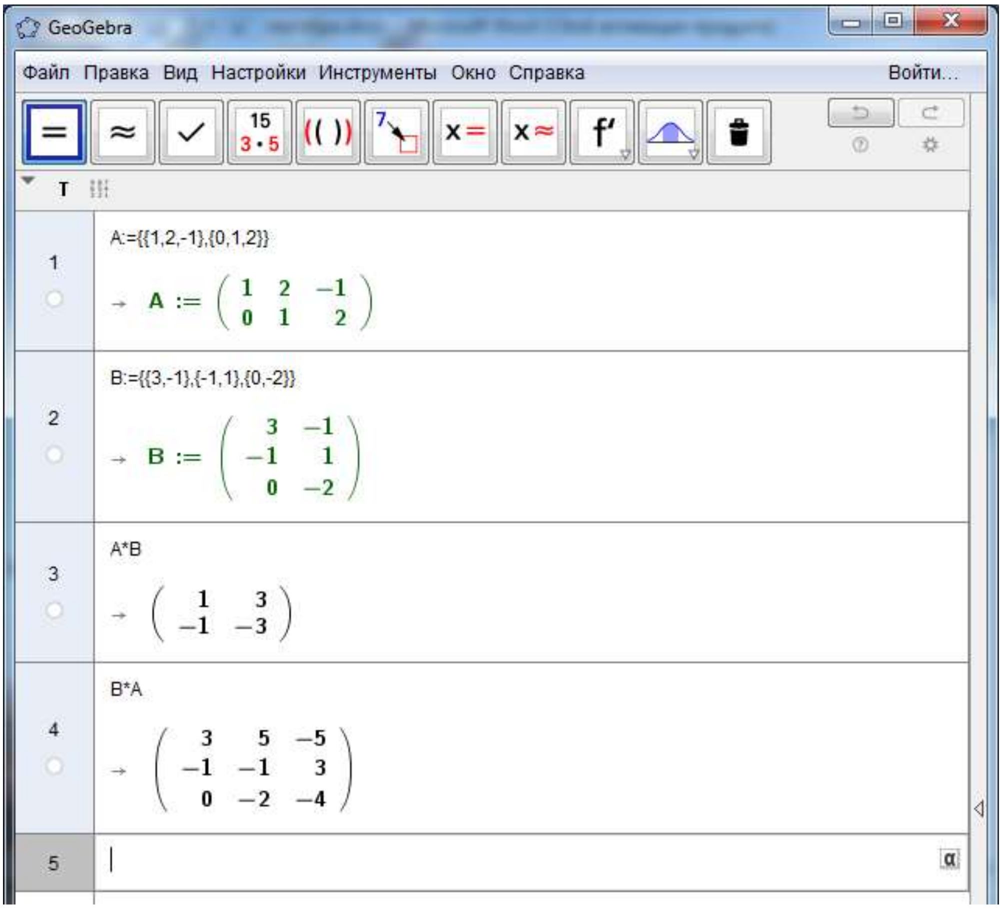
$$=\begin{pmatrix}3 & 5 & -5\\ -1 & -1 & 3\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}$$

Игътибар: $AB\neq BA$.

GeoGebra[1] программасында эшләү :

---

[1] тулырак 51 биттән кара



§2. Кире матрица. Кайтма матрица булу критерие

$A,B - n$ нчы тәртиптәге квадрат матрицалар, ә $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ -шул ук тәртиптәге берәмлек матрица булсын ди. Әгәр $AB = BA = E$ булса, ул чагында B матрицасы A матрицасының **кире матрицасы** була һәм A^{-1} дип тамгалана.

Әгәр A^{-1} кире матрицасы булса, A матрицасы **кайтма (обратимая) матрица** була.

A матрицасы үзенчәлексез (невырожденная) **матрица** (ягъни матрицаның рангасы аның тәртибенә туры килә) булган очракта һәм бары шул очракта гына матрица кайтма була. A^{-1} кире матрицасын, киңәйтелгән $(A|E)$ матрицасының юллары өстендә, элементар үзгәртүләр башкарып табарга мөмкин. $(A|E)$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга.

матрицасының сул өлешен элементар үзгәртүләр башкарып берәмлек матрицага китерсәк, уңда (E матрицасы урынында) A^{-1} табабыз.

Вариант 0. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$

Чишелеше. Киңәйтелгән матрицаны язабыз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Бу матрицада элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} матрицасын табыйк.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 2\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2\end{array}\right).$$

A матрицасы урынында берәмлек матрица барлыкка килде, димәк

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Тикшереп карыйк: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$,

$$A\cdot A^{-1}=E.$$

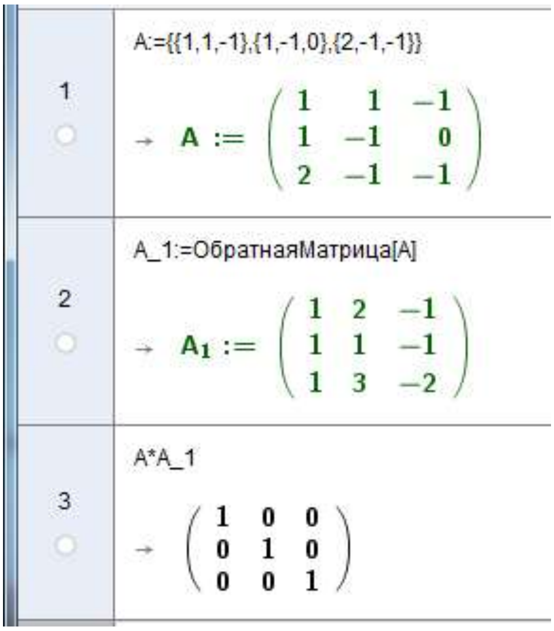
$A^{-1}\cdot A=E$ икәнлеген дә тикшереп карарга була. Димәк исәпләүләр дөрес.

A кайтма матрица булуын без A урынына $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ өчпочмак матрицасын тапкач ук күрәбез. Моннан $rangA=3$ булуын табабыз, матрица

рангасы аның тәртибе белән туры килә. Бу A матрицасының үзенчәлексез булуын аңлата. Димәк, A кайтма матрица.

GeoGebra программасында эшләү:

3 бирем. $AX = B$ матрицалы тигезләмәсен чишегез, монда A –2 нче биремдәге матрица , $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Аннан соң $X + 2B$ матрицасын табарга.



Вариант 0.

а) $AX = B$

б) $XA = B$

Чишелеше.

а) Әгәр A матрицасы кайтма булса, бу тигезләмәнең ике ягын да сулдан A^{-1} гә тапкырлыйбыз, $A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B$, димәк $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$. Моннан:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ул чагында

$$X + 2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

б) Аналогик рәвештә, тигезләмәнең ике ягын да уңнан A^{-1} гә тапкырлыйбыз:

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

GeoGebra программасында эшләү:

1

A:={{1,1,-1},{1,-1,0},{2,-1,-1}}

$$\rightarrow \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2

B:={{1,-1,1},{-1,1,-1},{-1,1,1}}

$$\rightarrow \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3

A_1:=ОбратнаяМатрица[A]

$$\rightarrow \mathbf{A_1} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

4

X:=A_1*B

$$\rightarrow \mathbf{X} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

5

X+2*B

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

§ 3. Квадрат матрицаның билгеләгече. Икенче һәм өченче тәртиптәге билгеләгечләр

Билгеләмә: Матрицаның юллар саны баганалар санына туры килсә, ул **квадрат матрица** дип атала.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - n-нчы тәртиптәге квадрат матрица булсын.

Һәр квадрат матрицага аның **билгеләгече** яки **детерминанты** дип аталган сан куеп була, ул **detA** дип тамгалана яки түбәндәгечә языла:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Детерминантны билгеләү өчен **альтернатор** дигән объектны билгелик.

$$\delta_{j_1\ j_2\ \cdots\ j_k}^{i_1\ i_2\ \cdots\ i_k},\ (i_1,...,i_k,j_1,...,j_k=\overline{1,n}).$$

Ул түбәндәге шартлар белән билгеләнә: $\delta_{j_1\ j_2\ \cdots\ j_k}^{i_1\ i_2\ \cdots\ i_k}=\pm1,$ әгәр $j_1,j_2,...,j_k$ индекслары $i_1,i_2,...,i_k$ индексларыннан килеп чыккан алыштырма булса ($i_1,i_2,...,i_k$ үзара төрле саннар).

Шулчакта, бу алыштырма җөп булса ул +1, алыштырма так булса ул -1 дип алына. Калган барлык очракларда $\delta_{j_1\ j_2\ \cdots\ j_k}^{i_1\ i_2\ \cdots\ i_k}=0$ (ягъни, әгәр $i_1,i_2,...,i_k$ яки $j_1,j_2,...,j_k$ арасында бертөрле саннар булса, шулай ук әгәр $i_1,i_2,...,i_k$ кыйммәтләре арсында $j_1,j_2,...,j_k$ булмаган саннар булса һәм киресенчә) .

Мәсәлән: $\delta_{2\ 1\ 3}^{1\ 2\ 3}=-1,\ \delta_{2\ 3\ 1}^{1\ 2\ 3}=1,\ \delta_{2\ 2\ 3}^{1\ 2\ 3}=0.$

$k=1$ булганда $\delta_j^i=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ **Кронекер символы** дип аталучы альтернатор килеп чыга.

Билгеләмә. А матрицасының детерминанты дип түбәндәге сан атала:

$$\det A = \sum_{i_1\ i_2\ \dots\ i_n=1}^{n} \delta^{1\ \ 2\ \dots\ n}_{i_1\ i_2\ \dots\ i_n} a_1^{i_1}\ a_2^{i_2}\ \dots\ a_n^{i_n}.$$

2 нче тәртиптәге квадрат матрицаның билгеләгечен исәпләү мисалы:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = \sum_{i_1\ i_2\ =\ 1}^{2} \delta^{1\ \ 2}_{i_1\ i_2} a_1^{i_1} a_2^{i_2} = \delta^{12}_{11} a_1^1 a_2^1 + \delta^{12}_{12} a_1^1 a_2^2 + \delta^{12}_{21} a_1^2 a_2^1 + \delta^{12}_{22} a_1^2 a_2^2.$$

Альтернатор билгеләмәсе буенча $\delta^{12}_{11} = 0, \delta^{12}_{12} = 1, \delta^{12}_{21} = -1, \delta^{12}_{22} = 0$. Димәк 2нче тәртиптәге квадрат матрицаның билгеләгечен исәпләү өчен түбәндәгене табабыз:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

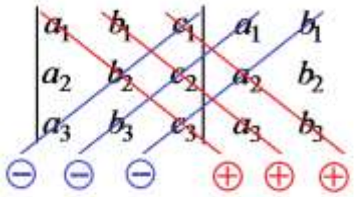
3 нче тәртиптәге квадрат матрицаның билгеләгечен исәпләү мисалы (альтернатор=0 булган буыннарны төшереп калдырабыз):

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \sum_{i_1, i_2, i_3 = 1}^{3} \delta^{123}_{i_1 i_2 i_3} a_1^{i_1} a_2^{i_2} a_3^{i_3} = \delta^{123}_{123} a_1^1 a_2^2 a_3^3 + \delta^{123}_{132} a_1^1 a_2^3 a_3^2 + \delta^{123}_{213} a_1^2 a_2^1 a_3^3 +$$

$$+ \delta^{123}_{231} a_1^2 a_2^3 a_3^1 + \delta^{123}_{312} a_1^3 a_2^1 a_3^2 + \delta^{123}_{321} a_1^3 a_2^2 a_3^1 = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 +$$

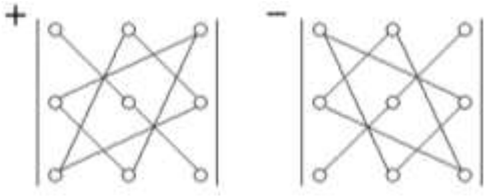
$$+ a_1^2 a_2^3 a_3^1 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^3 a_2^2 a_3^1.$$

Альтернатор билгеләмәсен кулланып, 3 нче тәртиптәге квадрат матрицаның билгеләгечен исәпләү өчен **Саррюс кагыйдәсен** дә карап китик:



$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aek + bfg + cdh - gec - hfa - kdb.$$

3 нче тәртиптәге квадрат матрицаның билгеләгечен исәпләү өчен **өчпочмак кагыйдәсе** дип аталган кагыйдә бар:



$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - gec - hfa - kdb.$$

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга. Дөреслеген тикшерергә.

Вариант 0.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

Чишелеше. Өчпочмак кагыйдәсе буенча матрицаның билгеләгечен табыйк һәм нульгә тигезлик:

$$D(\lambda) = 2(\lambda+3) - \lambda - (\lambda+3) - 3\lambda = = 2\lambda + 6 - \lambda - \lambda - 3 - 3\lambda = -3\lambda + 3 = 0.$$

Моннан $\lambda = 1$ икәнлеге килеп чыга. Дөреслеген тикшерү өчен бирелгән билгеләгечне $\lambda = 1$ булганда исәплик:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

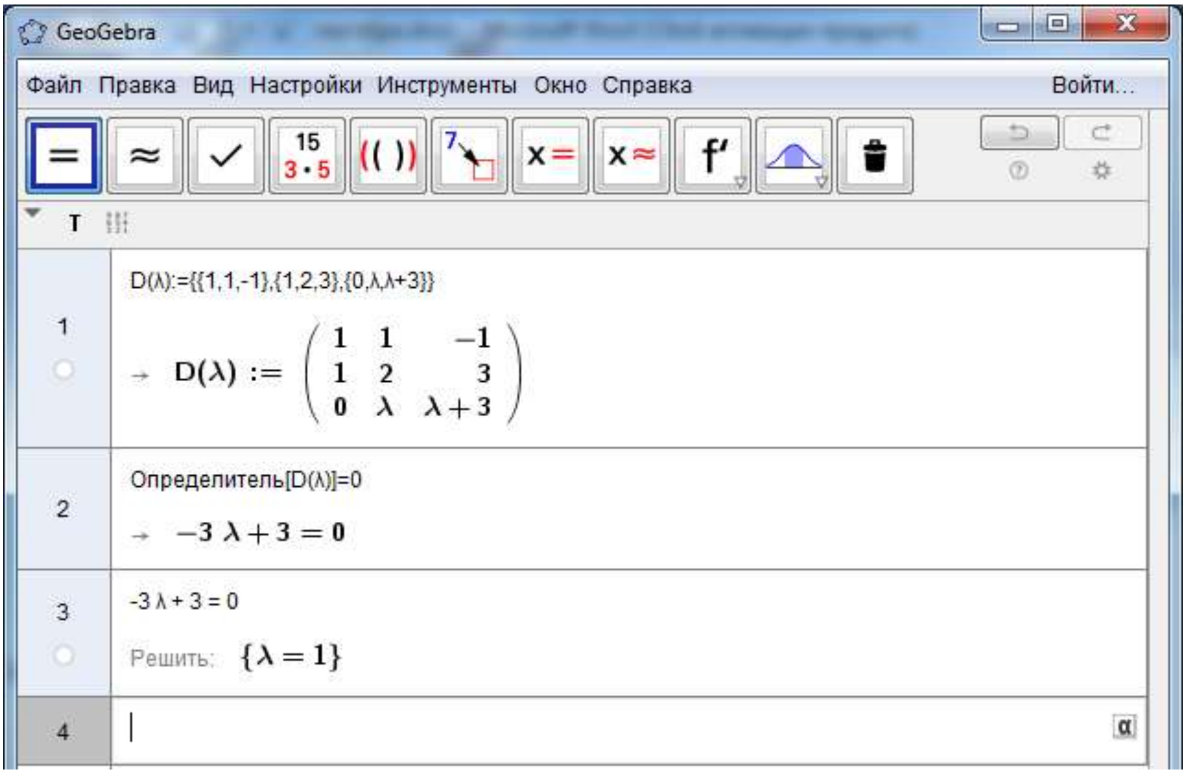
чөнки ике юлы бертөрле. Бу билгеләгечне исәпләп карасак та була, ягъни:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 1 - 4 - 3 = 0.$$

GeoGebra программасында эшләү:

Определитель[{{1,1,-1},{1,2,3},{0,l,l+3}}]=0 (Enter) ,

Килеп чыккан җавапка тычканның уң төймәсе белән чиертсәк, җавап яңа юлга күчереп языла. Аннан соң “x=” тамгасына басып тигезләмәнең чишелешен табабыз:



§ 4. Квадрат матрица элементларының алгебраик өстәлмәсе һәм билгеләгечне юл (багана) элементлары буенча таркату.

Әгәр n тәртибендәге A квадрат матрицасында s номерлы баганасын һәм k номерлы юлын уйда гына (мысленно) алып ташласак, калган $n-1$ тәртибендәге билгеләгеч a_s^k элементының ***миноры*** дип атала һәм M_s^k символы белән тамгалана. $(-1)^{k+s}$ тамгасы белән алынган M_s^k миноры, a_s^k элементының алгебраик өстәлмәсе дип атала һәм A_s^k тамгалана.

$$A_s^k = (-1)^{k+s} M_s^k$$

A матрицасының билгеләгече нинди дә булса юл (багана) элементлары һәм аларның алгебраик өстәлмәләренең тапкырчыгышлары суммасына тигез:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad \text{яки} \quad |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Билгеләгечнең мондый күрсәтелеше аның i юлы (j баганасы) буенча таркатылышы дип атала.

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A, B, C, D алдындагы коэффициентларны табарга.

Вариант 0. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ A & B & C & D \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

Чишелеше.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ A & B & C & D \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = A(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} + B(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+C(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + D(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

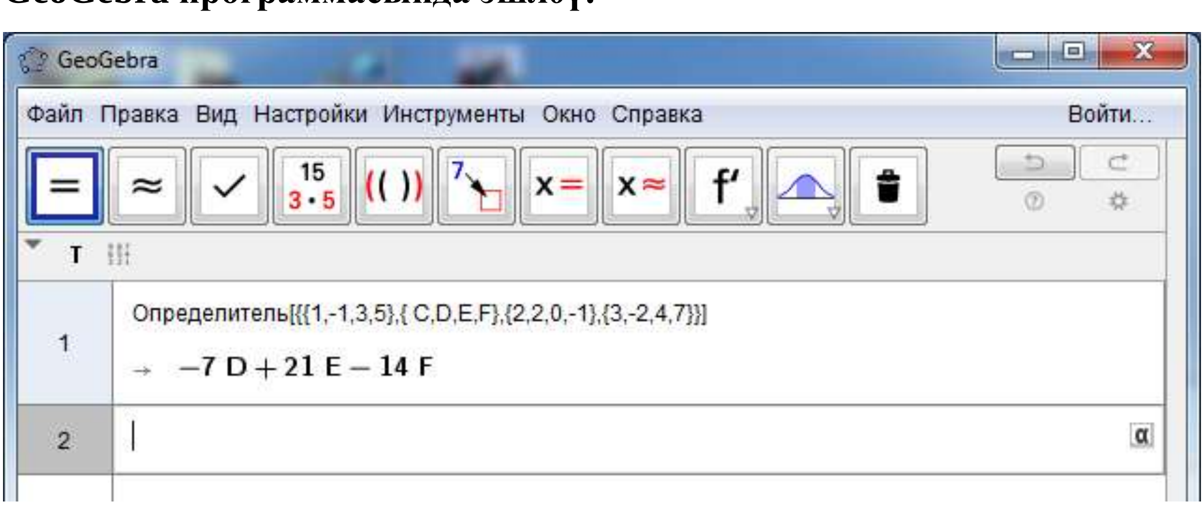
$$= -A(6+40-42-4) + B(-9+40-42+4) -$$

$$-C(14+3-20-30+14-2) + D(8-1-18+8) =$$

$$= 0A + (-7)B + 21C + (14)D$$

Димәк $A:0,\quad B:-7,\quad C:21,\quad D:-14$.

GeoGebra программасында эшләү:



§ 5. Югары тәртиптәге билгеләгечләр

Югары тәртиптәге билгеләгечләрне исәпләгәндә билгеләгечләрнең тәртибен түбәнәйтүче үзлекләрен кулланалар. Ул чагында 2нче яки 3нче тәртиптәге билгеләгечләрне генә исәплисе кала.

Билгеләгечнең тәртибен түбәнәйтүче төп үзлекләр:

1) Матрицаның юлларын баганаларга алыштырудан килеп чыккан матрицаны – **транспонирланган матрица** дип атыйлар һәм A^{tr} символы белән билгелиләр. Квадрат матрицаны транспонирлаганда аның билгеләгече үзгәрми.

2) Билгеләгечтә берәр баганаы (юлны) ниндидер санга тапкырлап башка баганага (юлга) кушсак, билгеләгеч үзгәрми.

3) Әгәр билгеләгечнең бер юлын (баганасын) ниндидә булса санга тапкырласак, билгеләгеч тә шул санга тапкырлана.

4) 2 юлны (багананы) үзара алыштырсак билгеләгеч тамгасын үзгәртә.

Билгеләгеч нульгә тигез, әгәр:

5) нуль-юлы (нуль-баганасы) булса;

6)ике бертөрле юлы (баганасы) булса;

7)ике пропорциональ юлы (баганасы) булса;

8)берәр юлы (баганасы) калганнарының сызыкча комбинациясе булып торса.

n нчы тәртиптәге билгеләгечләрне исәпләгәндә **өчпочмак төренә** китерү кулланыла,ягъни билгеләгечнең төп(яки өстәмә) диагоналеннән өстә (яки аста) барлык элементлары нульләр булырга тиеш.

Төп диагональ төргә китерелгән билгеләгеч – диагональ элементларының тапкырчыгышына тигез. Өстәмә диагональ төргә китерелгән билгеләгеч - $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ тамгасы белән алынган диагональ элементларының тапкырчыгышына тигез.

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә.

Вариант 0.

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}$$

Чишелеше: 4нче тәртиптәге әлеге билгеләгечне юл яки багана элементлары буенча таркатып, 3 нче тәртиптәге 4 билгеләгеч таба алабыз. Ләкин без башта билгеләгечнең ниндидер юлы (яки ниндидер баганасы) бер элементтан кала барысы да 0 гә әйләнерлек үзгәртүләр башкарабыз. Ул чагында 4 билгеләгеч урынына бер генә билгеләгеч исәпләргә туры киләчәк.

$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\-8&0&-2&-2\\-2&0&2&0\\-2&0&0&2\end{vmatrix}=1\bullet(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-8&-2&-2\\-2&2&0\\-2&0&2\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot2\cdot2\cdot\begin{vmatrix}4&1&1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=8\cdot(4+1+1)=8\cdot6=48$$

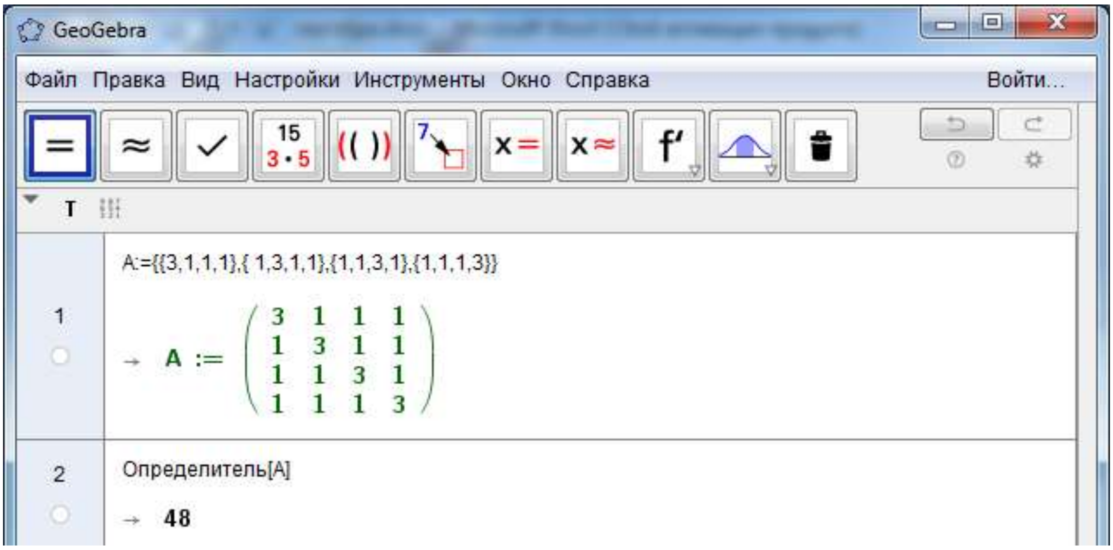
Башта 2 нче үзлекне кулланып 2нче баганада нульләр китереп чыгардык, аннан соң шушы багана элементлары буенча билгеләгечне таркаттык. Шулай итеп бирем 3нче тәртиптәге билгеләгечне исәпләүгә китерелде. Ул билгеләгечне өчпочмак кагыйдәсен һәм 3 нче үзлекне кулланып исәплибез. Башкача тикшереп карсак:

$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{vmatrix}3&1&1&1\\0&8&2&2\\0&2&8&2\\0&2&2&8\end{vmatrix}=\frac{3\cdot(-1)^{1+1}}{27}\begin{vmatrix}8&2&2\\2&8&2\\2&2&8\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2\cdot2\cdot2}{9}\begin{vmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{vmatrix}=\frac{8}{9}(64+1+1-4-4-4)=\frac{8}{9}\cdot54=8\cdot6=48.$$

Монда 2 һәм 3 нче үзлекләрне кулланып 1 нче баганада нульләр китереп чыгарабыз. Билгеләгечне исәпләгәндә 3 нче үзлек һәм өчпочмак кагыйдәсен кулланабыз.

GeoGebra программасында эшләү:



7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

Вариант 0.

$$\text{a) } D_n = \begin{vmatrix} a_1-1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2-1 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-1 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n-1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 7 & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n+1 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Чишелеше: а) Беренче баганага калган баганаларны кушып табабыз:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+\ldots+a_n-1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1+\ldots+a_n-1 & a_2-1 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1+\ldots+a_n-1 & a_2 & a_3-1 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1+\ldots+a_n-1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n-1 \end{vmatrix}$$

Беренче баганада торучы элементларның уртак тапкырлаучысын билгеләгеч алдына чыгарабыз:

$$D_n = (a_1+\ldots+a_n-1)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 1 & a_2-1 & a_3 & \ldots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3-1 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n-1 \end{vmatrix}$$

Хәзер һәр юлдан 2 нче юлдан башлап беренче юлны алып чыгарга кирәк:

$$D_n = (a_1+\ldots+a_n-1)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix}$$

Табылган билгеләгеч өчпочмак төренә килде, ягъни төп диагональ астындагы барлык элементлар 0 гә тигез. Шуңа күрә билгеләгеч - диагональ элементлары тапкырчыгышына тигез. Димәк, $D_n = (a_1+\ldots+a_n-1)\cdot(-1)^{n-1}$.

$n=3$ булганда $D_n = a_1+a_2+a_3-1$.

Тикшерү өчен бирелгән билгеләгечне $n=3$ булганда өчпочмак кагыйдәсе буенча исәплик:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1-1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2-1 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3-1 \end{vmatrix} = (a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)+$$

$$+a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3 - a_1a_3(a_2-1) - a_1a_2(a_3-1) - a_3a_2(a_1-1) =$$

$$= a_1a_2a_3 - a_1a_2 - a_1a_3 + a_1 - a_3a_2 + a_2 + a_3 - 1 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3 -$$

$$-a_1a_2a_3 + a_1a_3 - a_1a_2a_3 + a_1a_2 - a_1a_2a_3 + a_2a_3 = a_1 + a_2 + a_3 - 1.$$

b) Һәр юлдан (2 нче юлдан башлап) 3 кә тапкырланган беренче юлны алып чыгыйк.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Өстәмә диагональнең аскы ягында элементлар 0гә тигез, димәк билгеләгеч $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ тамгасы белән алынган диагональ элементларының тапкырчыгышына тигез.

Димәк: $D_n = 1 \cdot 2 \cdot 4 \dots (2n-2) \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$n = 3$ булганда : $D_n = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-1)^3 = -8$

D_3 билгеләгечен табыйк:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 21 + 9 - 35 - 9 - 9 = -8.$$

Димәк дөрес исәпләгәнбез.

§ 6. Кире матрица табу формуласы

Әгәр

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

ул чагында алгебраик өстәлмәләрдән төзелгән матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

ялганган (присоединенная) матрица дип атала. Игътибар итик A^* матрицасының беренче баганасына A матрицасының беренче юлы элементларының алгебраик өстәлмәләре язылган, икенчесенә A матрицасының икенче юлы элементларының алгебраик өстәлмәләре,....,соңгы баганага A матрицасының соңгы юлы элементларының алгебраик өстәлмәләре язылган.

Әгәр $|A| \neq 0$ булса, кире матрицаны түбәндәге формула ярдәмендә табып була:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

Вариант 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Чишелеше. A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтик. Моның өчен аның билгеләгечен исәплик:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 + 1 = 1,$$

ягъни $|A| \neq 0$, димәк A матрицасының кире матрицасы бар. A^* матрицасын төзер өчен A матрицасының барлык алгебраик өстәлмәләрен табыйк:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=2$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

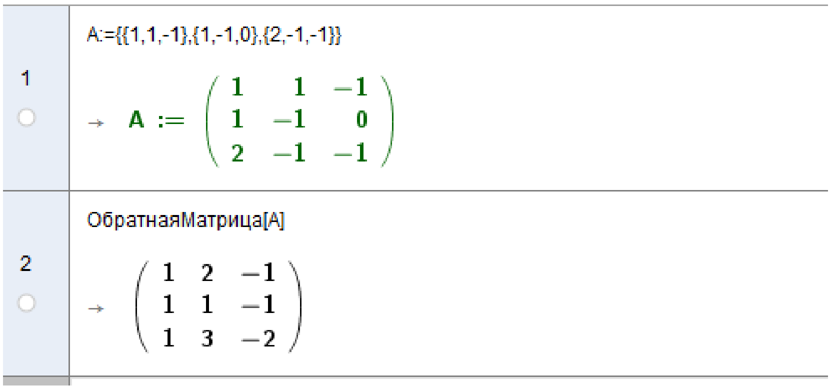
$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2.$$

Ул чагында

$$A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix} \quad \text{һәм} \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{1}\cdot A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

GeoGebra программасында эшләү:



§ 7. Мөстәкыйль эш өчен өстәмә мисаллар

1. A^T - A матрицасын транспонирлагач килеп чыккан матрица. Исбатлагыз: $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$,

$(\lambda A)^T = \lambda A^T \ (\lambda \in \mathbb{R})$, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

2. $m\times n$ размерындагы A һәм B матрицаларының, $n\times 1$ размерындагы барлык X матрицалары өчен, $AX = BX$ булганда һәм бары шул чакта гына тигез булуларын исбатларга.

3. A һәм B үзенчәлексез матрицалары өчен түбәндәге тигезлекләрне исбатлагыз: $AB = BA$, $A^{-1}B = BA^{-1}$,

$AB^{-1} = B^{-1}A$, $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. Нуль булмаган квадрат A матрицасы үзенчәлекле (вырожденный) булса, $AB = BA = O$ булырдай $B \neq O$ матрицасы барлыгын исбатлагыз.

5. Бер тәртиптәге квадрат матрицалар өчен түбәндәге тигезлек дөресме: $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$?

6. A һәм B нуль булмаган квадрат матрицалары өчен $AB = O$ булса, $\det A = \det B = O$ икәнлеген исбатлагыз.

7. Нинди $\lambda \in \mathbb{C}$ өчен n тәртибендәге A квадрат матрицасын λ га тапкырлаганда матрицаның билгеләгече үзгәрми? Шундый барлык λ ларның гомуми күренешен языгыз.

8. Матрицаның комплекс сан булган һәр элементын капма-каршы комплекслы сан белән алыштырсак, матрицаның билгеләгече ничек үзгәрер?

9. Бөтен санлы квадрат матрицаның кире матрицасы шулай ук бөтен санлы икәнлеге билгеле. Әлеге матрицаның билгеләгече нинди булырга мөкин?

10. Әгәр $A = CBD,\ DC = E$ (барлык матрицалар да n нчы тәртиптә) булса, барлык $k \in \mathbb{N}$ өчен $A^k = CB^kD$ үтәлүен исбатлагыз

11. n нчы тәртиптәге $(n \geq 2)$ A квадрат матрицасының элементлары $a_{ij} = (-1)^{i+j}$. $\det A = ?$

12. Теләсә нинди D билгеләгечен, юллар яки баганаларының урыннарын алыштырып һәм бер юлдан икенчесен алып, аны 0гә тигез булмаган нинди дә булса санга тапкырлап, D_1 “өчпочмак” төргә китереп булуы билгеле. D һәм D_1 билгеләгечләре арасында бәйләнеш табырга һәм D_1 билгеләгеченең төп диагоналендәге барлык элементлар да 0 гә тигез булмаганда һәм бары шул чакта гына $D \neq 0$ булуын исбатлагыз.

13. n нчы тәртиптәге $(n \geq 3)$ билгеләгечтә беренче юлыннан икенчесен, икенчесеннән өченчесен, өченчесеннән үзгәртелмәгән беренчесен алсак билгеләгеч ничек үзгәрер?

14. A матрицасының билгеләгече һәм A^* ялганган матрица билгеләгече арасындагы бәйләнешне табарга.

15. n тәртибендәге A һәм B квадрат матрицаларының $A+B=E, \quad A\cdot B=O$ шартларын канәгатьләндерүләре билгеле. $A^2=A, \; B^2=B, \quad B\cdot A=O$ булуын исбатлагыз.

16. A,B,C - бер үк тәртиптәге үзенчәлексез квадрат матрицалар булуы һәм $AX^{-1}B=C$ икәне билгеле. X матрицасын табарга.

17. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – үзенчәлексез квадрат матрица булса,

$$A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \dots & \lambda_n a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 a_{n1} & \dots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix}$$ булуын күрсәтегез.

18. n нчы тәртиптәге A квадрат матрицасы симметрик матрица дип атала, әгәр аның элементлары өчен $a_{ij}=a_{ji}$ тигезлеге үтәлсә. Әгәр A, B бер үк тәртиптәге симметрик матрицалар булсалар, $AB=BA$ булганда һәм бары шул чакта гына AB - симммметрик матрица булуын исбатлагыз.

Мөстәкыйль эшләр.

1 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга. Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ \lambda & \lambda & \lambda-1 \end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A, B, C, D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ A & B & C & D \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & -5 & -3 \\ 5 & -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

2 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4\\0\\2\\3\end{pmatrix}.$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

3 бирем. $XA=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга. Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\\lambda & \lambda+1 & 1\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}$

5 бирем. 4нче тәртиптәге билгеләгечтә A, B, C, D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\3 & 2 & 1 & 3\\A & B & C & D\\2 & -3 & -1 & 1\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n\\2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n\\3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n\\\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\n-1 & n & n & \dots & n & n & n\\n & n & n & \dots & n & n & n\end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

3 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}3&5\\7&9\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&3\\9&1&2\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\-1&-4&1\end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}2&1&2\\\lambda&\lambda+1&\lambda\\-1&1&-1\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}1&2&1&2\\3&2&1&3\\A&B&C&D\\2&-3&-1&1\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}1&6&4&1\\3&19&12&3\\-2&-12&-9&-2\\4&24&16&5\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

$$\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n-2&n-1&n\\2&3&4&\dots&n-1&n&n\\3&4&5&\dots&n&n&n\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\n-1&n&n&\dots&n&n&n\\n&n&n&\dots&n&n&n\end{vmatrix}$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

4 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -5 & -6\end{pmatrix},\mathrm{B}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & -7\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3 бирем. $XA=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ \lambda+1 & \lambda-1 & \lambda\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга.

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 3 & 3\\ 3 & -1 & 2 & 2\\ A & B & C & D\end{vmatrix}$$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}1 & -3 & 2 & -1\\ -4 & 13 & -8 & 4\\ 2 & -6 & 4 & -2\\ 3 & -9 & 6 & -2\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0\end{vmatrix}$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

5 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & \lambda-2 & \lambda+1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix} A & -1 & 3 & 1 \\ B & 1 & 3 & 3 \\ C & 1 & 1 & -1 \\ D & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & \dots & 4 & 6 \\ 4 & 4 & \dots & 6 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4 & 6 & \dots & 4 & 4 \\ 6 & 4 & \dots & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

6 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

3 бирем. $XA=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ \lambda & \lambda-2 & \lambda+1\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A, B, C, D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}A & 3 & 1 & -1\\ B & 3 & 1 & 1\\ C & 2 & 2 & 3\\ D & 3 & 3 & -2\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 7 & 2\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ -1 & 0 & 3 & \dots & n\\ -1 & -2 & 0 & \dots & n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0\end{vmatrix}$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

7 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 6\end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ \lambda+1 & -\lambda-1 & \lambda\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}A & 2 & 3 & 2\\ B & 3 & 1 & -3\\ C & 3 & 1 & 2\\ D & 2 & -2 & -1\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}-1 & 2 & -3 & -1\\ 2 & -5 & 6 & 2\\ 5 & -10 & 16 & 5\\ -3 & 6 & -9 & -2\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1\\ -1 & 0 & 5 & \dots & 2n-1\\ -1 & -3 & 0 & \dots & 2n-1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & -3 & -5 & \dots & 0\end{vmatrix}$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

8 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda+3 & \lambda \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A, B, C, D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 4 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n & \dots & 2 & 2 & 1 \\ n+1 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

9 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0 & 1\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\\3\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 2 & -1\end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\\lambda-2 & \lambda & 6+\lambda\\1 & 2 & -2\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}A & 1 & 1 & -1\\B & 1 & 1 & 2\\C & 1 & 3 & 3\\D & 3 & -3 & -1\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3 & 4\\1 & 4 & 9 & 16\\1 & 8 & 27 & 64\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3\\1 & 4 & 3 & \dots & 3 & 3\\1 & 3 & 5 & \dots & 3 & 3\\\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\1 & 3 & 3 & \dots & n+1 & 3\\1 & 3 & 3 & \dots & 3 & n+2\end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

10 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}1\\5\\1\\-1\\4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\-4 & 3 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\4 & 3 & 2\\\lambda & -\lambda & -\lambda-2\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}0 & 2 & 1 & A\\1 & 2 & 3 & B\\3 & 3 & 2 & C\\2 & -3 & 3 & D\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә.

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 8 & 6\\9 & 2 & 5 & 6\\7 & 5 & 3 & 3\\7 & 3 & 1 & 9\end{vmatrix}$$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & n & n & \dots & n & n\\-1 & 2 & n & \dots & n & n\\-1 & -1 & 3 & \dots & n & n\\\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\-1 & -1 & -1 & \dots & n-1 & n\\n & n & n & \dots & n & n\end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

11 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 2 & 1\\ -1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә.

$$\begin{vmatrix}\lambda+1 & 5 & 3\\ \lambda & 2 & 6+\lambda\\ -\lambda & 1 & -2\end{vmatrix}$$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}A & 2 & 2 & -1\\ B & 3 & 3 & 2\\ C & 3 & 3 & -2\\ D & 3 & -1 & 2\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}-3 & 9 & 3 & 6\\ -5 & 8 & 2 & 7\\ 4 & -5 & -3 & -2\\ 7 & -8 & -4 & -5\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n\\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & 0 & -n\\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & 1-n & -n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 0 & -3 & \dots & 2-n & 1-n & -n\\ 0 & -2 & -3 & \dots & 2-n & 1-n & -n\end{vmatrix}$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

12 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}7 & 8 & -1\\ 5 & 6 & -2\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 8\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -2 & 3 & -2\end{pmatrix}$

3 бирем. $XA=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & -1 & \lambda\\ 2 & 3 & -\lambda+1\\ 1 & -2 & \lambda+1\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A, B, C, D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}0 & 2 & A & -3\\ 1 & 2 & B & -3\\ 2 & 2 & C & 2\\ 1 & -2 & D & 3\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә.

$$\begin{vmatrix}-5 & 2 & -3 & 3\\ 7 & -4 & 3 & 5\\ 8 & -9 & 4 & 5\\ 8 & -10 & 4 & 6\end{vmatrix}$$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix}-3 & -3 & \dots & -3 & -2\\ -3 & -3 & \dots & -2 & -3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -3 & -2 & \dots & -3 & -3\\ -2 & -3 & \dots & -3 & -3\end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

13 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 4\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}2 & \lambda & 1\\ 1 & \lambda-4 & -2\\ 4 & \lambda & -1\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}2 & 1 & A & -3\\ 2 & 2 & B & 3\\ 2 & 2 & C & 3\\ 3 & 2 & D & -3\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}7 & -5 & 8 & 6\\ 10 & -8 & 10 & 9\\ 8 & -8 & 10 & 5\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

$$\begin{vmatrix}3 & 3 & \dots & 3 & 5\\ 3 & 3 & \dots & 5 & 3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 3 & 5 & \dots & 3 & 3\\ 5 & 3 & \dots & 3 & 3\end{vmatrix}$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

14 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3 бирем. $XA=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\\lambda+1 & 1 & 2\\\lambda-2 & 1 & -1\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}0 & 3 & A & 3\\3 & 2 & B & 1\\2 & 3 & C & -1\\3 & -2 & D & 2\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә.

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 2\\1 & 1 & 0 & 1\\1 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & \dots & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & \dots & 5 & 1 & 1\\\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\2n-1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

15 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә.

$$\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & -1\\ \lambda & 4 & 3\\ \lambda+1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\ A & B & C & D\\ 2 & 3 & 2 & -3\\ -3 & -1 & 2 & -1\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & 5 & 6\\ -3 & -5 & 1 & 7\\ -4 & -6 & -7 & 1\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & \dots & 3 & 1 & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ n & 1 & \dots & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

16 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 8\\ 2 & 4 & 10\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

3 бирем. $XA=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}2 & \lambda+2 & 1\\ 1 & -\lambda & -2\\ -1 & \lambda+1 & 3\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}A & B & C & D\\ -1 & 1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 3 & -1\\ 1 & -3 & -3 & 3\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә.

$$\begin{vmatrix}3 & 4 & 6 & 7\\ 1 & -2 & 3 & 4\\ 5 & -1 & 2 & 4\\ 8 & 7 & 1 & 5\end{vmatrix}$$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

17 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга. $A=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 & -1 \end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & A \\ 1 & 2 & 3 & B \\ 3 & 1 & 2 & C \\ 2 & -1 & -2 & D \end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ 1 & 2 & n & \dots & n & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

18 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

2 бирем. A матрицасының кире матрицасы булганын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\-1 & -2 & 1\\4 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

3 бирем. $XA=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 2 & \lambda\\2 & 3 & \lambda+2\\2 & 4 & \lambda+3\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 3\\A & B & C & D\\2 & 1 & 1 & 3\\-2 & -3 & 2 & -3\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}3 & 8 & 9 & 1\\1 & 2 & 3 & -1\\6 & 3 & 5 & 2\\7 & 3 & 2 & 4\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix}3 & -2 & -2 & \dots & -2\\-2 & 3 & -2 & \dots & -2\\-2 & -2 & 3 & \dots & -2\\\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\-2 & -2 & -2 & \dots & 3\end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

19 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3 бирем. $AX = B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Аннан соң $X + 2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \lambda+2 \\ -1 & 2 & \lambda \\ 1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A, B, C, D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ A & B & C & D \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n = 3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

20 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\5\\4\\3\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -1\\-1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

3 бирем. $XA=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 2\\3+\lambda & \lambda+1 & \lambda\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 2\\2 & 3 & 1 & -1\\-1 & -1 & -3 & 1\\A & B & C & D\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 1\\3 & 4 & 1 & 2\\4 & 1 & 1 & 5\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 4 & 4 & \dots & 4\\1 & 5 & 4 & \dots & 4\\1 & 4 & 6 & \dots & 4\\\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\1 & 4 & 4 & \dots & n+3\end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

21 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ 1 & -4 & -1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}\lambda+1 & -\lambda-1 & \lambda\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ A & B & C & D\\ -1 & 2 & 2 & -1\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}7 & 14 & 0 & -7\\ -1 & -3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -1\\ 3 & 6 & 0 & -2\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2\end{vmatrix}$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

22 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\5\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ -3 & -3 & 1\end{pmatrix}$

3 бирем. $XA=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ \lambda+1 & \lambda & \lambda-1\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}2 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 3\\ A & B & C & D\\ 2 & -1 & -3 & 2\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 8 & -7 & 16 & 0\\ -3 & 3 & -5 & 0\\ 4 & -4 & 8 & 1\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix}2 & 2 & 2 & \dots & 2\\ 3 & 4 & 3 & \dots & 3\\ 3 & 3 & 6 & \dots & 3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 3 & 3 & 3 & \dots & 2n\end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

23 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\\ 5 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -2 & -1 & -5\end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ \lambda & -\lambda+1 & \lambda-2\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1 & -2\\ A & B & C & D\\ 2 & 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & n\end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

24 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&8&3\\1&2&4\end{pmatrix},\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-5&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$

3 бирем. $XA=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга.Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\\lambda+1&-\lambda-1&\lambda\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга. $\begin{vmatrix}A&3&1&-1\\B&3&1&1\\C&2&2&3\\D&3&3&-2\end{vmatrix}$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}-1&4&1&-3\\2&-7&-2&6\\3&-12&-2&9\\4&16&-4&13\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә.

$$\begin{vmatrix}5&3&3&\dots&3\\3&5&3&\dots&3\\3&3&5&\dots&3\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\3&3&3&\dots&5\end{vmatrix}$$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

25 вариант.

1 бирем. A һәм B бирелгән матрицалар булса, AB тапкырчыгышын табарга. BA матрицасы була алган очракта, аны да табарга.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

2 бирем. A кайтма матрица булуын исбатларга һәм элементар үзгәртүләр башкарып A^{-1} кире матрицасын табарга. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & -1\end{pmatrix}$

3 бирем. $AX=B$ матрицалы тигезләмәне чишегез, монда A- 2 нче биремдәге матрица, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Аннан соң $X+2B$ матрицасын табарга.

4 бирем. $D(\lambda)$ нульгә тигез булган очракта λ параметрының кыйммәтен табарга. Дөреслеген тикшерергә. $\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 2\\ \lambda-1 & 2 & 4\\ \lambda-3 & -1 & 3\end{vmatrix}$

5 бирем. 4 нче тәртиптәге билгеләгечтә A,B,C,D алдындагы коэффициентларны табарга.

$$\begin{vmatrix}0 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ A & B & C & D\\ -1 & -3 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

6 бирем. A матрицасының билгеләгечен исәпләргә. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 2 & 8\\ -3 & -6 & -2 & -12\\ 4 & 8 & 4 & 15\end{vmatrix}$

7 бирем. n нчы тәртиптәге билгеләгечне өчпочмак тибына китереп исәпләргә. Җавапны $n=3$ булганда тикшерергә. $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0\end{vmatrix}$

8 бирем. 2 нче биремдәге A матрицасының кире матрицасы барлыгын күрсәтегез һәм бу кире матрицаны формула ярдәмендә исәпләргә.

Белемнәрне тикшерү өчен сораулар

1. Матрицалар өстеннән нинди сызыкча операцияләр башкарып була?

2. Нәрсә ул кире матрица һәм аны ничек табарга?

3. Матрицаның билгеләгечен ничек билгелиләр?

4. Билгеләгечне исәпләү ысуллары?

5. Матрица элементларының алгебраик өстәлмәсе һәм билгеләгечне юл һәм багана элементлары буенча таркату формуласы?

GeoGebra. Компьютерлашкан алгебра күренеше (CAS)

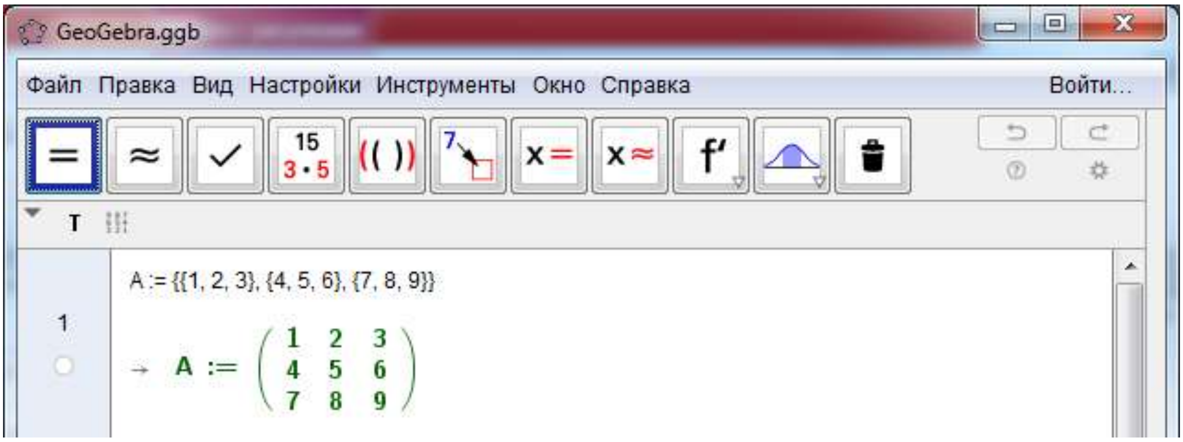
GeoGebra — ул үз эченә геометрия, алгебра, таблицалар, графлар, статистика һәм арифметиканы берләштергән, белем бирүнең төрле этапларында ирекле кулланып була торган динамик математик программа.

Компьютерлашкан алгебра куренешен ачу өчен, экранның уң ягындагы укка тычкан белән чиертеп, CAS юлын сайларга яисә Ctrl+Shift+K төймәләре берләшмәсенә басарга кирәк.

Матрицалар темасын үткәндә кулланырга мөмкин командалар

1)А матрицасын кертү:

Мәгълүмат кертү юлына язабыз: **A := {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}** һәм Enter төймәсенә басабыз. Керткән юл астында ук, нәтиҗә чыгарыла.



2) Матрицаларның суммасын, аермасын табу төрлечә кертелә ала:

a) **A+B** (Enter) **,**

Сумма[{A,B}] (Enter).

Матрицаларны кертеп тормыйча, турыдан туры командага язсак та була:

{{1,2},{3,4}}+{{5,6},{7,8}} (Enter) **,**

Сумма[{{{1,2},{3,4}},{{5,6},{7,8}}}] (Enter).

b) **A-B** (Enter),

{{1,2},{3,4}}-{{5,6},{7,8}} (Enter) **.**

3) Матрицаны санга, матрицага тапкырлау:

a) A*λ (Enter),

{{1,2,-1},{0,1,2}}*5 (Enter).

b) {{{1,2,-1},{0,1,2}}*{{3,-1},{-1,1},{0,-2}}} (Enter),

Произведение[{{{1,2,-1},{0,1,2}}*{{3,-1},{-1,1},{0,-2}}}](Enter).

4) Кире матрица табу:

ОбратнаяМатрица[{{1,1,-1},{1,-1,0},{2,-1,-1}}] (Enter) .

5) Билгеләгеч табу:

Определитель[{{1,2},{3,4}}] (Enter) .

6) Транспонирлау:

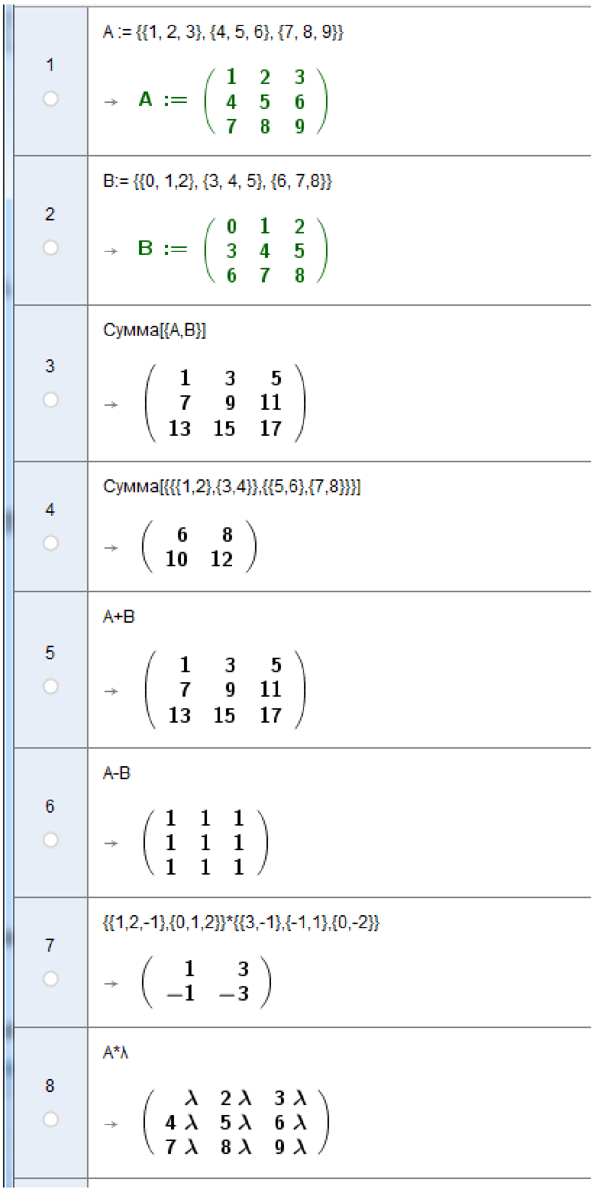
Транспонировать[{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}] (Enter) .

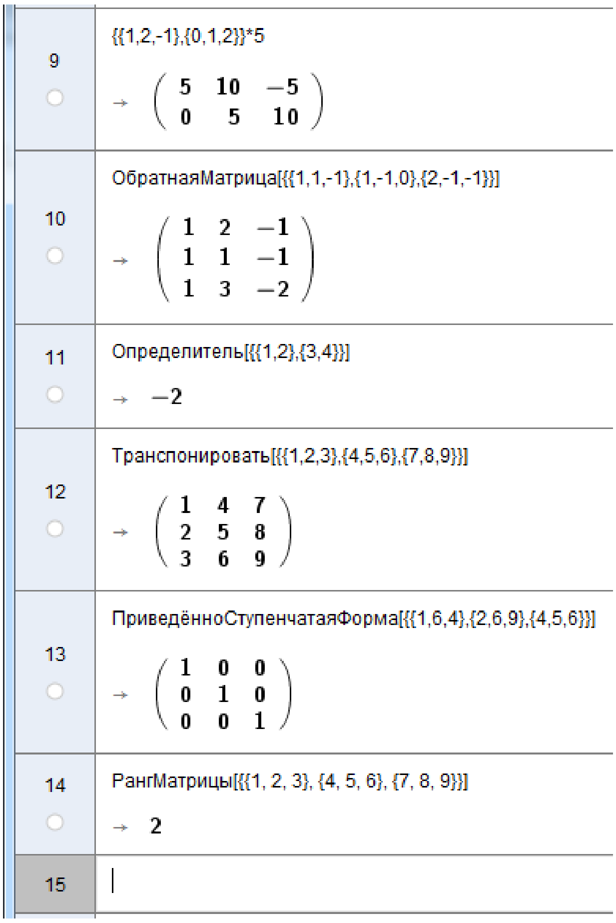
7)Өчпочмак тибына китерү:

ПриведённоСтупенчатаяФорма[{{1,6,4},{2,8,9},{4,5,6}}] (Enter) .

8) Матрицаның рангасын табу:

РангМатрицы[{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}] (Enter) .





ЭЧТӘЛЕК

Кереш сүз .... - 3 -

§1. Матрицалар һәм алар белән гамәлләр башкару .... - 4 -

§2. Кире матрица. Кайтма матрица булу критерие.. - 7 -

§ 3. Квадрат матрицаның билгеләгече. Икенче һәм өченче тәртиптәге билгеләгечләр.. - 12 -

§ 4. Квадрат матрица элементларының алгебраик өстәлмәсе һәм билгеләгечне юл (багана) элементлары буенча таркату. .... - 15 -

§ 5. Югары тәртиптәге билгеләгечләр... - 17 -

§ 6. Кире матрица табу формуласы .... - 21 -

§ 7. Мөстәкыйль эш өчен өстәмә мисаллар .... - 24 -

Мөстәкыйль эшләр. .... - 26 -

Белемнәрне тикшерү өчен сораулар .... - 51 -

GeoGebra. Компьютерлашкан алгебра күренеше (CAS) .... - 52 -

КУЛЛАНЫЛГАН ӘДӘБИЯТ .... - 55 -

КУЛЛАНЫЛГАН ӘДӘБИЯТ

1. Белоусов И.В. *Матрицы и определители*.-2006 г.
2. Галиева Л.И., Салехова Л.Л. *Матрицы и определители*-ТГГПУ,2005г
3. Данко П.Е., Попов А.Г. *Высшая математика в упражнениях и задачах.* Ч.1.М.:Мир и образование, Астрель , Оникс, 2001. – 368 с.
4. Кайгородов В.Р. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*.- Казань, Изд-во КГУ, 1985г. - 120с.
5. Натансон И.П. *Краткий курс высшей математики*. М.: Лань, 2009.-736 с.
6. www.geogebra.org

7. Introduction to GeoGebra. Last modified: November 23, 2013.Written for GeoGebra 4.4

8. http://www.geogebra.org/cms/

9. http://static.geogebra.org/book/intro-ru.pdf

«Издание, осуществлено в рамках мероприятия 3.5.4 Государственной программы «Сохранение, изучение и развитие государственных языков Республики Татарстан и других языков в Республике Татарстан на 2014-2020 годы».