МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Набережночелнинский институт (филиал)

Кафедра Бизнес-информатики и математических методов в экономике

Конспект лекций по дисциплине «Пакеты прикладных программ (MathCAD)»

Учебно-методическое пособие

Набережные Челны
2019 г.

УДК 004.421.2:519.67
ББК 32.84

Печатается по решению учебно-методической комиссии экономического отделения Набережночелнинского института (филиала) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», от «15» марта 2019г. (протокол №7)

Рецензенты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор А.Г. Исавнин
Доктор экономических наук, профессор А.Н. Макаров

Карамышев А.Н., Махмутов И.И. Конспект лекций по дисциплине «Пакеты прикладных программ (MathCAD)».: учебно-методическое пособие / А.Н. Карамышев, И.И. Махмутов. – Набережные Челны: Изд-во Набережночелнинского института КФУ, 2019. – 80 с.

Учебно-методическое пособие содержит последовательное изложение базовых понятий теории. В учебном пособии кратко рассматриваются возможности, интерфейс, компоненты системы MathCAD 2000 Professional и основные приемы работы при реализации математических задач. Приведенный в пособии материал без дополнительной переработки может быть использован и в более поздних версиях системы MathCAD

Учебно-методическое пособие предназначено для использования в учебном процессе студентами технических направлений в экономике и экономического отделения дневной, заочной и дистанционной форм обучения.

Содержание

Основные средства программы

Общие сведения о программе

MathCAD – это многофункциональная интерактивная *вычислительная система*. Отличается простым и удобным интерфейсом, написанием выражений стандартными математическими символами, хорошей двух- и трехмерной графикой, возможностью подключения к распространенным офисным и конструкторским программам, а также к *Internet*. MathCAD обеспечивает *вычисление*по сложным математическим формулам, имеет большой набор встроенных математических функций, позволяет вычислять ряды, суммы, произведения, интегралы, *производные*, работать с комплексными числами, решать линейные и нелинейные уравнения.

Представляет интерес историческое развитие MathCAD. MathCAD – это разработка компании MathSoft Inc. Версии MathCAD с 1.0 по 4.xx работали в операционной системе *DOS*, имели небольшой общий размер исполняемых файлов (до 1 Мб) и незначительные (по современным меркам) *системные требования* (оперативная *память* до 1 МБ). Начиная уже с 3 версии. MathSoft Inc объединяется с фирмой Waterloo Maple *Software* , в систему внедряется *ядро* мощной системы символьной математики Maple V. Версии с 5-й и выше уже работали на платформе *Windows*. В MathCAD 7.0 *PRO интерфейс* существенно переработан и приближен к интерфейсу текстового процессора *Word* 95/97. В MathCAD 8.0 *PRO* добавлено около 50 новых математических функций (элементарных, специальных статистических и др.); новые функции оптимизации maximize и *minimize*; решения задач линейного программирования, новые функции контроля типа данных; улучшенный блок решения систем нелинейных уравнений. MathCAD 2000 (версия 9) добавила к существующим возможностям интеграцию с Интернетом, введен ряд новых функций для финансово-экономических расчетов, создания матриц трехмерных поверхностей. В версии MathCAD 2001 еще более возросла *производительность* вычислений и расширенные возможности. Внедрена *поддержка Windows* 2000. MathCAD 2001i (интерактивный) получил полную поддержку*Windows* XP, расширены возможности сбора данных от внешних устройств, повышенную защищенность MathCAD-документов введением современной криптографии. При создании MathCAD 11 основное внимание было обращено на увеличение скорости и мощности работы системы. Цель состояла в том, чтобы улучшить *ядро* MathCAD, расширить и улучшить удобства работы. Версии пакета MathCAD 12 -13 получили более совершенное математическое *ядро*, а также дополнительные опции, позволяющие сохранять и публиковать документы MathCAD в различных форматах, что было проблемой в предыдущих версиях. С 2006 года MathSoft Inc становится частью корпорации PTC (*Parametric Technology* Corporation). MathCAD 14 (2007 г) - первая версия с момента приобретения Mathsoft Inc. компанией PTC. MathCAD теперь использует символьную систему MuPAD (*фирма* SciFace *Software*). (MuPAD - интегрированная система для математических вычислений, подобная системам Maple и Mathematica, но распространяемая бесплатно.) Работа в MathCAD 14 оказалась проблематичной. Задачи, решаемые средствами символьной математики в MathCAD 11/12/13, не решаются в MathCAD 14 или решаются медленнее. Это связано, по-видимому, с несовместимостью символьных алгоритмов с предыдущими версиями. Любителей и приверженцев MathCAD волнует эта проблема. Вопрос о судьбе MathCAD обсуждается в интересной статье В.Ф.Очкова "MathCAD – что это такое и какова его судьба".

В 2010 году компания PTC официально анонсировала выпуск новой версии MathCAD 15.0. Новая версия предлагает более 25 новых функций, обновленный набор справочных материалов и расширенную интеграцию со сторонними продуктами, в том числе с новейшей версией электронной таблицы Microsoft *Excel*. Предлагается улучшенная *интеграция* пакета MathCAD 15.0 с такими известными платформами инженерного проектирования, как *Pro*/ENGINEER, а также с собственными продуктами компании PTC – Windchill, Windchill PDMLink и Windchill ProductPoint.

Структура программы

Пользовательский *интерфейс* системы внешне имеет структуру программ MS Office. *Пользователь*, имеющий элементарные навыки работы с *Windows*-приложениями, может сразу начать работу с MathCAD.

Окно редактирования

Сразу после запуска система готова к созданию документа с необходимыми вычислениями. Окно содержит строку заголовка с именем системы и текущего документа, строку с пунктами меню, открывающими доступ к подменю с различными командами, рабочую область (worksheet), строку состояния, всплывающие или контекстные, меню, диалоговые окна. Панели инструментов разделены на стандартные, обеспечивающие быстрое выполнение наиболее важных команд при работе с системой; инструменты форматирования, обеспечивающие быстрое форматирование текстовых и формульных блоков в документе, и математические панели. При нажатии соответствующих кнопок математических панелей появляются панели математических объектов. Вид окна и математические панели показаны на Рис. 1 и Рис. 2.

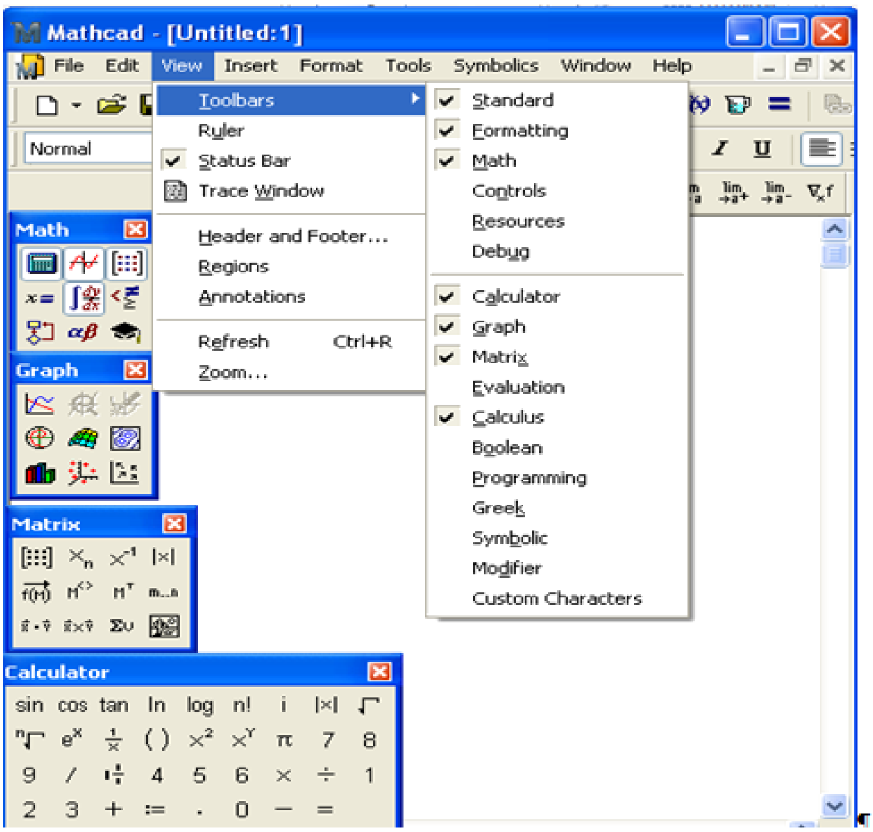


Рис. 1. Окно программы MathCAD 14

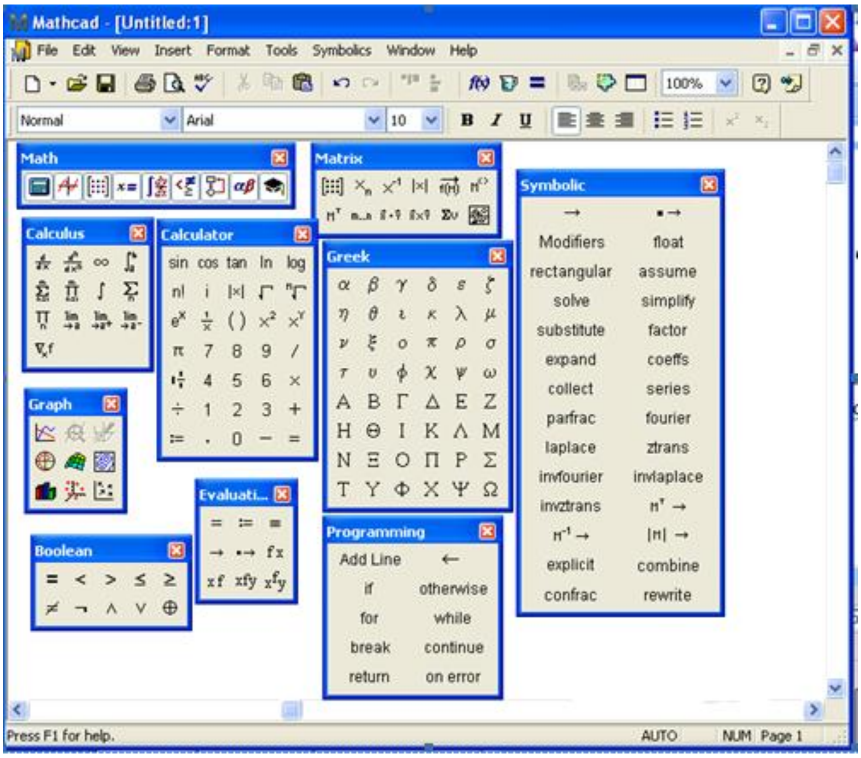
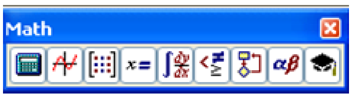


Рис. 2. Вид окна MathCAD с панелями

Математические панели

Ввод формул и операций производится при помощи математической панели инструментов **View/Toolbars/Math** - (*Вид/Панель инструментов /Математика*). **Панель Math(Математика)** содержит девять панелей (Рис. 3).



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Рис. 3. Панель Математика

Ниже представлены девять математических панелей.

Рис. 4. Калькулятор

Рис. 5. Инструменты графиков

Рис. 6. Векторные и матричные операции

Рис. 7. Инструменты знаков операций

Рис. 8. Операторы математического анализа

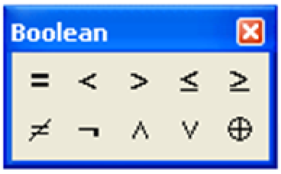


Рис. 9. Панель логики

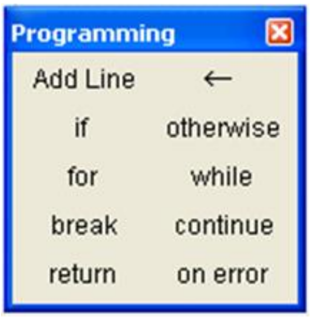


Рис. 10. Инструменты программирования

Рис. 11. Символы греческого алфавита

Рис. 12. Символические операторы

Рассмотрим операции.

Правила ввода информации

MathCAD содержит текстовый и формульный редактор, вычислитель, средства научной и деловой графики, а также огромную базу справочной информации, как математической, так и инженерной, оформленной в виде встроенного в MathCAD справочника, комплекта электронных книг и обычных книг, в том числе и на русском языке . MathCAD построен по принципу *WYSIWYG* ("What You*See* Is What You *Get*" - "что вы видите, то и получите"

MathCAD физико-математический пакет. Он позволяет присваивать переменным числа, а физические величины– длину, время, *мощность* и т.д. MathCAD берет на себя работу по переводу единиц измерения, контролю соответствия размерностей и вывода ответа с нужными единицами

Документом MathCAD называется полное математическое описание алгоритмов решения задач. Документ состоит из блоков, т.е. отдельных частей. Блоки могут быть трех видов:

- текстовые,
- вычислительные,
- графические.

Вычислительный *процессор* производит расчеты по введенным формулам, с использованием встроенных численных методов. Символьный *процессор* - фактически система искусственного интеллекта - производит аналитические вычисления. Математические выражения и текст вводятся с помощью формульного редактора MathCAD; математические расчеты производятся в соответствии с введенными формулами, графики различных типов вставляются непосредственно в документы. MathCAD14 создает файлы с расширением xmcd ; возможно сохранение в формате RTF-документов, а также Web-страниц: *HTML*

Правило ввода

Курсор MathCAD принимает три различные формы (Рис. 13):

- визира – знак "плюс" красного цвета, 
- маркера ввода текста – вертикальная красная черточка, 

- маркера ввода математических выражений – уголок ("клюшка") синего цвета, расположение которого изменяется при нажатии на клавишу *Пробел*.
-

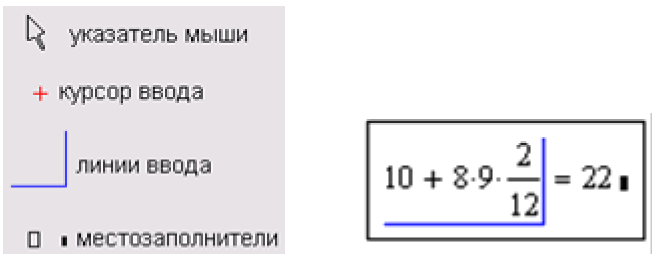


Рис. 13. Курсоры MathCAD. Маркер ввода математических выражений

Ввод текста

Вставляем текстовый блок. Порядок действий.

- Insert / Text Region
- установить шрифт:
- выход из текста: щелчок левой кнопкой мыши в любом месте документа

Правило видимости

Значение переменной доступно правее и ниже её определения. Целая и дробная части отделяются друг от друга точкой (а не запятой). В программе MathCAD существует три вида знака "равенства", которые употребляются каждый в своем случае:

- := выполняет функцию "присвоить". Используется, если надо задать новую функцию или присвоить переменной значение. Клавиша на панели "Калькулятор", Горячая клавиша Shift+Ж.
- = выполняет функцию "вычислить". Используется, если надо вычислить значение выражения и т.п. Перед тем как воспользоваться этим символом, убедитесь, что все переменные определены, т.е. им присвоено какое-нибудь значение. При выборе этого знака выдается численный ответ.
- = логическое равенство. Используется в уравнениях.. Клавиша на панели Boolean (логические символы).или . Горячая клавиша Ctrl+

В версии MathCAD 2000 и выше знак = допустимо применять и как знак присваивания. Система автоматически заменяет его на знак := при первой операции присваивания, так как система "знает", что перед первым присваиванием переменная не определена.

Ниже показано присваивание значений переменным и вычисление. Ввод информации:

$$t := 5, \ a := 9.8$$

$$a\frac{t^2}{2} = 122.5$$

Форматы переменных

Точность вычислений (количество знаков результата вычислений после десятичной точки) задается в меню **Format/Result** или просто дважды щелкнуть мышкой по выражению, после чего открывается окно **Result Format** (*Формат результата*)

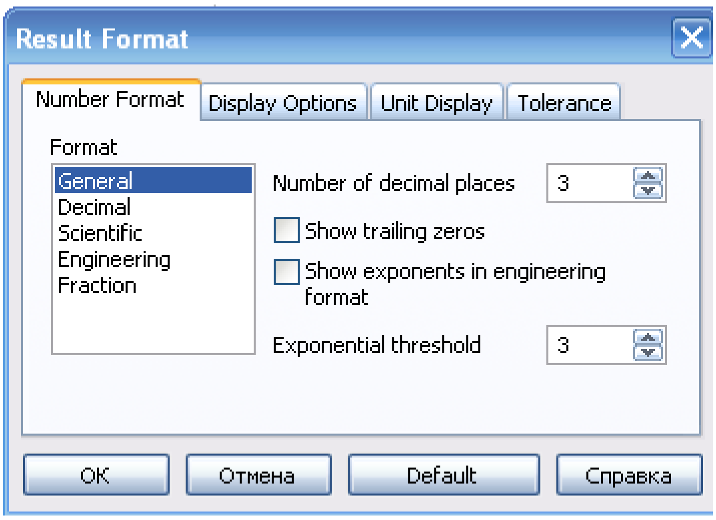


Рис. 14. Вкладка Формат числа окна Формат результата

В окне четыре вкладки:

- Формат числа
- Параметры отображения (разные системы счисления)
- Отображение размерных величин
- Tolerance (Допуск)

По умолчанию результат всех выражений вычисляется с точностью до 3-х знаков после запятой. Точность вычислений можно изменить. Для этого на выражении (оно будет выделено черной рамкой) щелкните два раза левой кнопкой мышки. Появится диалоговое окно **Result Format** (*Формат результата*):

Установите закладку *Формат числа*, тип формата: *General* и в поле ввода *Кол-во десят. точек* нужное число значащих цифр результата, например 3 (Рис. 14).

Поле *Show trailing zeros* (показывать хвостовые нули) определяет эту опцию.

Поле *Show exponents in engineering format"* определяет вывод числа в экспоненциальной форме.

Поле ввода *Экспоненциальный порог формата* указывает, начиная с какого числа цифр целой части выводить число в экспоненциальной форме. Так, если это значение задать равным 2, то число 887.55 будет выведено в экспоненциальной форме 8.8755×10^2. Результат вычислений можно всегда выводить в экспоненциальной форме установкой типа формата "Научные".

Перемещение объектов в документе

Подведите мышку к требуемому объекту; этот объект будет выделен черной рамкой; перемещая мышку, добейтесь появления указателя в виде кисти руки; нажмите левую кнопку мышки и переместите объект в другое место.

Установление системных переменных и параметров

Значения системных переменных устанавливаются в окне меню **Tools/ Worksheet Options** (*Инструменты/Опции листа*) (Рис. 15).

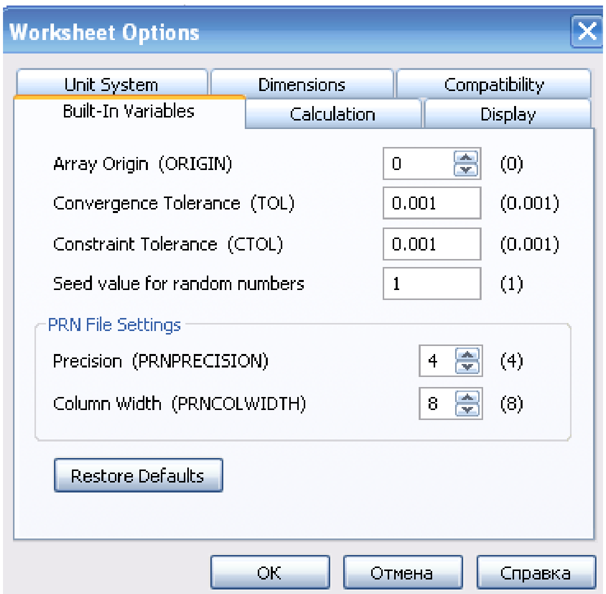


Рис. 15. Окно Worksheet Options

Вкладка *Built-In Variables (Встроенные переменные)*:

- ORIGIN - номер начального индекса в массивах;
- TOL - точность численных методов;
- CTOL - точность выполнения выражений, используемая в некоторых численных методах;
- Seed value for random numbers – установка начального значения для генерации случайных чисел,
- PRNPRECISION - установка формата данных при выводе в файл;
- PRNCOLWIDTH - установка формата столбца при выводе в файл;

Предустановленные значения системных переменных (значения по умолчанию) :

CTOL=1 x 10^{-3}

ORIGIN=0

PRNPECISION=4

PRNCOLWIDTH=8

CWD="C:\Dima\MCAD\MathCad 2001\Data\"

Чтобы в любой момент вернуть значения по умолчанию, надо использовать кнопку *Restore Defaults* (Восстановить установки по умолчанию).

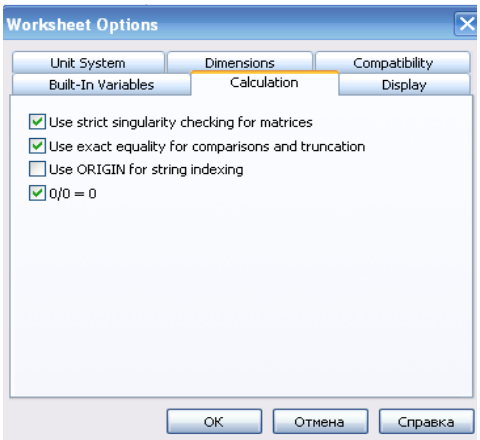


Рис. 16. Окно Worksheet Options /Calculations

Вкладка Вычисления:

Вкладка Calculations (Вычисления) (Рис. 16):

- *Use strict singularity checking for matrices* (Использовать проверку матриц на сингулярность)
- *Use exact equality for Boolean comparisons* (Использовать точное равенство для логического сравнения - когда флажок выбран - жесткий критерий точного равенства чисел. Если флажок снят, используется более мягкий критерий)

Автоматический режим вычислений устанавливается опцией в меню **Tools/ Calculate**/*Automatic calculations*.

Ввод и вычисление математических выражений

Конструирование выражений в MathCAD осуществляется с помощью математических панелей. Ввод заканчивается клавишей *Enter* или щелчком мыши вне определения. Синий уголок показывает текущий *операнд* выражения, он может быть расширен клавишей "*Пробел*". В качестве разделителя целой и дробной части числа используется точка.

Арифметические *операции*, простейшие функции, знаки присваивания переменным (символ :=) можно вводить, используя панель **Calculator** (*Калькулятор*). Численные ответы выражений определяются нажатием клавиши [=] на клавиатуре. В качестве элементов выражения могут использоваться функции определенных интегралов, сумм и произведений с панели **Calculus**.

Для ввода математической функции различной категории используется *команда* **Insert /Function** (*Вставить функцию*).

Для ввода текстового комментария необходимо ввести знак двойной кавычки ", затем вводить текст. Текстовая область, как и любая другая, может быть перемещена на рабочем листе или скопирована в *буфер*. Маркеры текстовой области позволяют менять её размеры

Переменные и функции

Переменная в MathCAD – это идентификатор, который используется в выражениях и которому можно присвоить числовое значение. Идентификатор – набор букв и цифр, первым из которых должна быть буква; буквы могут быть латинскими или греческими с соответствующей панели; малые и большие буквы различаются; в качестве цифры может использоваться символ подчеркивания. При выполнении цепочки выражений последовательность вычислений в документе определяется слева - направо и сверху - вниз. Чтобы цепочка выражений была вычислена, надо всем переменным числовые значения. Присваивания бывают двух видов: локальные и глобальные. Локальное присваивание осуществляется нажатием символа := на панели *Калькулятор*. Присвоенное значение в документе начинает действовать с момента его записи (слева-напрво и сверху-вниз).

Глобальное присваивание действует в пределах всего документа независимо от места его определения. Глобальное присваивание определяется символом ? с панели **Evaluation**. Ниже (Рис.1.10) приведен пример цепочки выражений с использованием локального (для x) и глобального (для a) присваивания:

$$a \equiv 3$$
$$x := 1,\ y := x + 3 - \cos\left(x^2\right),\ z := x + y + a$$
$$x := 2,\ \mu := y_{\frac{z}{a}} + e^x$$
$$y := 3.46,\ z := 7.46,\ \mu := 15.992$$

Встроенные константы

Символьный процессор распознает и способен выдавать математические константы в качестве результата.

Вычислительный процессор воспринимает как числа

∞ -бесконечность (клавиши <Ctrl>+<Shift>+<z>);

e - основание натурального логарифма (клавиша <e>);

π ; - число "пи" (вводится клавишами <Ctrl>+<Shift>+<p>);

j - мнимая единица (вводится клавишами <1>, <i> или <1>, <j>);

$\%$ - символ процента, <%>, эквивалентный 0,01.

Основные типы переменных

Действительные числа

Любое выражение, начинающееся с цифры, MathCAD интерпретирует как число. Числа набираются на клавиатуры в нужном формате (Рис.1.11). Форматы представлены в окне **Format/Result** (Рис.1.7.).

$$a \equiv 1000$$
$$b := 1.3474$$
$$c := 3124.1$$
$$d := 45.21 \cdot 10^{-5}$$

Комплексные числа

Комплексное число является суммой действительного и мнимого числа, получающегося путем умножения любого действительного числа на мнимую единицу (imaginary unit) i. По определению полагается, i2=-1. Для ввода мнимой единицы надо нажать клавиши <1>, <i.> (Рис.1.12). Если просто ввести символ "i", то MathCAD интерпретирует его как переменную i.

$$t := 1i + 1$$
$$t^2 \equiv 2i$$
$$2t = 2 + 2i$$

Размерные значения

В MathCAD числовые переменные и функции могут обладать размерностью. Используется команда **Insert / Unit** (*Вставка / Единицы*). "Горячая" клавиша <Ctrl>+<U>. В программе встроено большое количество единиц измерения, с помощью которых и создаются размерные переменные. Для ввода размерного значения - сразу после ввода переменной ввести символ умножения, в окне**Insert / Unit** списке *Unit (Единицы)* выбрать нужную единицу измерения

Редактирование формул

В программе MathCAD при вводе формул курсор имеет вид: синего уголка ("клюшка"). Действие производится только с объектом, выделенным этим уголком. Для того чтобы охватить синим уголком блок, надо нажать на пробел один или несколько раз.

$$z := \sin(x) + x^{\cos(2\cdot x)}$$

$$z := \sin(x) + x^{\cos(2\cdot x)}$$

1. Набираемая формула всегда заключена в рамку. Не выходите из рамки, пока не закончили набор формулы!
2. Для набора формул пользуйтесь "Калькулятором" из "Математической палитры"

При наборе формул возможно появление ошибок набора. Кнопка  на стандартной панели инструментов позволяет отменить последнее действие, выполненное при редактировании, т.е. вернуться к тексту, набранному ранее.

Встроенные функции MathCAD

Стандартные математические функции и численные методы, запрограммированные в MathCAD, реализованы в виде встроенных функций. Для вставки функции команда меню **Insert /Function** (*Вставить функцию*)(Рис. 17).

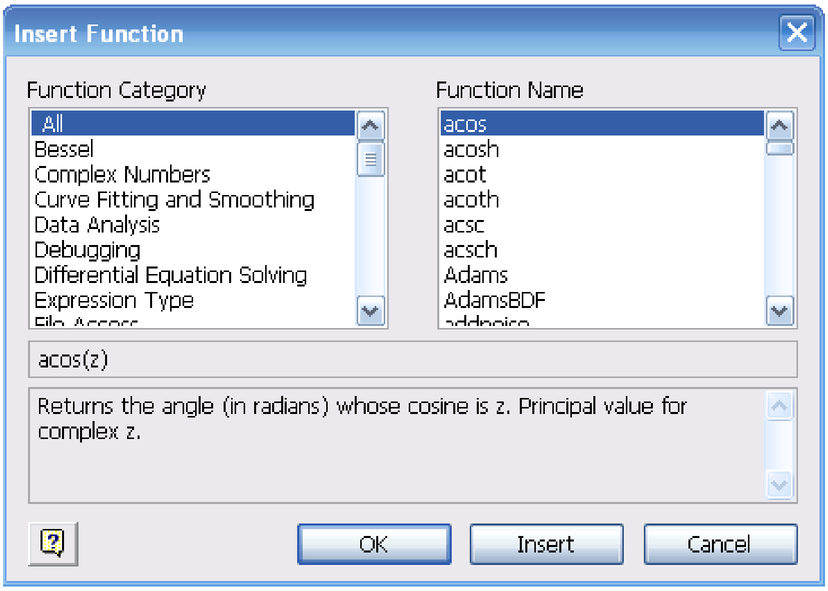


Рис. 17. Окно стандартных функций

Собственные функции пользователя

Помимо широкого набора стандартных функций в MathCAD возможно определение собственных функций пользователя (Рис.1.14). В простейшем случае функция может быть определена выражением пользователя. Функция определяется следующим образом:

имя_функции(аргументы):=выражение,

где имя_функции – любой идентификатор; аргументы – список аргументов функции через запятую; выражение – любое выражение с использованием стандартных функций и функций пользователя, определенных в документе перед этим. Выражение должно содержать идентификаторы аргументов. Пример цепочки выражений с использованием функций пользователя приведен ниже:

$$y := x + \cos x$$

$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

$$s(x, y) := x + y + f(x, y)$$

$$z(x, y) := s(x, y) + x$$

$$x := 2$$

$$z(x, y) := 12.092$$

Массивы

Массивами (arrays) называют упорядоченные последовательности чисел или элементов. Доступ к любому элементу массива возможен по его индексу, т. е. номеру в последовательности чисел В MathCAD условно выделяются два типа массивов: *векторы*(одноиндексные массивы), *матрицы* (двухиндексные массивы), и тензоры (многоиндексные массивы); *ранжированные переменные*(range variables) - векторы, элементы которых определенным образом зависят от их индекса.

Векторы и матрицы

Матрицей размером mxn называется совокупность m•n чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B.

В общем виде матрицу размером m x n записывают так

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

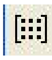
Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы. Элементы матрицы имеют два индекса a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце. Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной, причём число ее строк или столбцов называется порядком матрицы. Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется прямоугольной. Матрицу с одним столбцом называют вектор-столбец, с одной строкой - вектор-строка.

Сложение матриц производится поэлементно, но размеры матриц должны совпадать Умножение матриц. осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй). Произведением матрицы A не матрицу B

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{21}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

называется новая матрица C=AB, элементы которой составляются следующим образом:

Например, в произведении - матрице C, элемент стоящий в 1-ой строке и 1-м столбце c11, равен сумме произведений элементов 1-ой строки матрицы A и 1 столбца матрицы B,

Создаются матрицы при помощи кнопки  палитры инструментов **Matrix** или команды **Insert/Matrix** (Рис. 18, Рис. 19, Рис. 20). Появляется окно *Insert matrix*, где указывается количество строк, столбцов *Rows* и *Columns*.

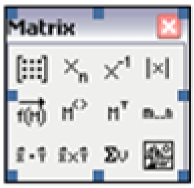


Рис. 18. Палитра Matrix

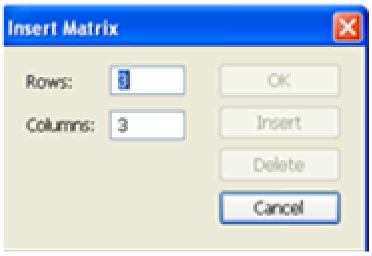


Рис. 19. Окно Insert matrix

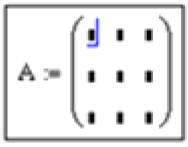


Рис. 20. Шаблон для ввода элементов матрицы

Действия с матрицами производятся с помощью кнопок палитры **Matrix** .

1. сложение матриц

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A1 := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -5 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A + A1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

2. умножение матриц

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 18 \end{pmatrix}$$

3. вычисление определителя матрицы, кнопка $|\times|$ (Ctrl)

$$|A| = 39$$

4. вычисление обратной матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.949 & -0.256 & -0.051 \\ 0.026 & 0.128 & 0.026 \\ 0.179 & -0.103 & 0.179 \end{pmatrix}$$

5. транспонирование матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boxed{A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

6. скалярное произведение (кнопка $\vec{x} \cdot \vec{y}$)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

7. векторное произведение (кнопка $\vec{x} \times \vec{y}$)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Доступ к элементам матрицы

Доступ к элементу матрицы производится по индексу, который отсчитывается от 0 (Рис.1.17). Вектор-столбец имеет один индекс. Индекс вводится с помощью кнопки X_n палитры **Матрицы** или при помощи символа [(левой квадратной скобки). Индексами могут быть целые константы и неотрицательные переменные. По умолчанию отсчет индексов в матрице (т.е. нумерация строк и столбцов матриц) начинается с нуля. Но этот отсчет можно изменить на 1 выполнив операцию присваивания для стандартной переменной ORIGIN:=1.

Чтобы выбрать один столбец используется кнопка  палитры **Матриц** или клавиша Ctrl+6.

$$ORIGIN := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

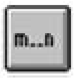
$$A_{1,1} = 1, A_{1,1} = 1, A_{1,2} = 2$$

$$B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 3$$

$$A^{\langle 1 \rangle} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; A^{\langle 2 \rangle} := \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \; A^{\langle 3 \rangle} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{\langle 1 \rangle} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ранжированные переменные

Ряд переменных с шагом. При определении ранжированной переменной можно задавать любой шаг изменения элементов, отличный от единицы. Для ввода указывается первое значение, значение плюс шаг, на панели **Матрица** набирается  . далее максимальное значение переменной (Рис.1.18). При определении ранжированной переменной можно задавать любой шаг изменения элементов. Если шаг равен единице, его можно не указывать.

Если вводится переменный индекс, на панели **Матрица** набирается m..n  , далее вместо **m** указывается минимальное значение индекса и вместо **n-** максимальное значение индекса. Значения ранжированной переменной выводятся в виде таблицы в столбик, при большом количестве элементов выводятся только первые 16 элементов, а остальные можно просмотреть с использованием полосы прокрутки, которая появляется при щелчке левой кнопкой мыши на любом значении ранжированной переменной.

$$y := 2, 2.5..5$$

$$y = \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 2.5 \\ \hline 3 \\ \hline 3.5 \\ \hline 4 \\ \hline 4.5 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

$$x := 1, 1.1..4.5$$

$$x = \begin{array}{|c|}\hline 1.6 \\ \hline 1.7 \\ \hline 1.8 \\ \hline 1.9 \\ \hline 2 \\ \hline 2.1 \\ \hline 2.2 \\ \hline 2.3 \\ \hline 2.4 \\ \hline 2.5 \\ \end{array}$$

$$j := 1..5$$

$$j = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

Основные итоги

В лекции рассмотрены пользовательский *интерфейс* системы, математические панели и правила ввода математических объектов. Описаны методы конструирования переменных различного вида: матриц, векторов, ранжированных переменных. Продемонстрированы методы и правила построения математических выражений, работы с функциями.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Рассчитать значения

$$1\frac{1}{4} + \frac{1}{9},$$

$$3\frac{3}{4}-\frac{4}{5},$$

$$\sqrt[3]{7},$$

$$\sin\frac{\pi}{6},$$

$$\frac{2b^2r}{3}-\sqrt{b}$$

при $b=7,211$ и $3,6,$

$$s+\frac{l^2}{\sqrt{s}}$$

при $s=0,3$ и $l=1,3,$

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}$$

для $x=3,25$.

2. Вычислить при $x=2$:

$$y1=\frac{2,087x^3+3,24\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}},$$

$$y3=\frac{\sqrt{1-\sin ax^2}}{b-p\operatorname{tg}x}$$

3. Ввести функции как ранжированные переменные и показать их значения

$$R(i)=\frac{b-a}{n}i,\ S(j)=-b+\frac{2\cdot b\cdot j}{m}$$

При $n=5, m=5, a=1, b=\pi$. i меняется от 0 до n; j меняется от 0 до m

4. Произвести операции с матрицами P и Q

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 9,1 & 3,45 & 6,5 & 1 \\ -2,1 & 5,0 & -7,3 & 2,2 \\ -9,9 & 8,3 & 7 & 4 \\ 12 & -23 & 88 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \\ 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Перемножить матрицы
b. транспонировать матрицу P
c. произвести выборку элементов матрицы Q
d. выбрать столбцы матрицы P
e. вычислить определители матриц P и Q
f. Вычислить скалярное и векторное произведение матриц

5. Построить матрицы r , s , X , Y , элементами которых являются следующие индексные переменные. Ввести переменные и показать матрицы. $n = 3$ $m = 2$; индекс i меняется от 1 до n ; индекс j меняется от 1 до m ; $a = 1$ $b = \pi/2$

$$r_i = \frac{b-a}{n}$$

,

$$S_j = 3b + \frac{bj}{m}$$

,

$$X_{i,j} = r_i \sin)S_j)$$

,

$$Y_{i,j} = r_i \cos(S_j)$$

.

Ключевые термины

Math (*Математика*) - панель, содержащая девять панелей инструментов для ввода математических символов, операторов преобразования и графики.

Boolean - панель логических операций

Format Result (Формат результата) – окно задания формата представления чисел.

Worksheet Options (Опции листа) – окно установки системных переменных .

Insert Function (Вставить функцию) – окно вставки функций.

Matrix (Матрицы) - панель операций с матрицами.

Calculator (Калькулятор) - панель для вставки основных арифметических операций, простейших функций, знаков присваивания.

Evaluating – панель, содержащая знаки операций.

Calculus – панель операций математического анализа.

Символьные вычисления

Символьные вычисления с помощью команд меню

Программа MathCAD снабжена специальным процессором для выполнения аналитических (символьных) вычислений. Его основой является *ядро*, хранящее всю совокупность формул и формульных преобразований, с помощью которых производятся аналитические вычисления . Символьные *операции* можно выполнять двумя способами: непосредственно в командном режиме (используя команды *меню*) и с помощью операторов символьного преобразования (используя палитру инструментов **Symbolics** *Символы*).

Рассмотрим символьные вычисления с командами *меню*. Аналитические преобразования, проводимые через *меню*, касаются только одного, выделенного в данный момент, выражения. На них не влияют формулы, находящиеся в документе MathCAD выше этого выделенного выражения (например, *операторы* присваивания значений каким-либо переменным). Этот способ более удобен, когда требуется быстро получить какой-либо аналитический результат для однократного использования, не сохраняя сам ход вычислений.

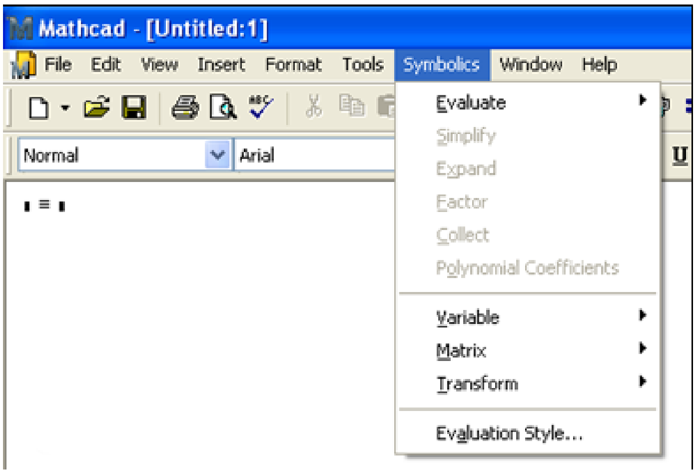


Рис. 21. Меню символьных средств Symbolics

С помощью пункта **Symbolics** (*Символы*) главного *меню* вызывается падающее *меню* символьных средств (Рис. 21), из них часть содержит свои подменю.

Режим отображения вычислений **Evaluatin style** (*Стиль вычислений*) (Рис. 22) может быть по горизонтали и по вертикали. Для установления режима следует щелкнуть по строке **Symbolics)/ Evaluatin style** и ввести соответствующие метки в окне диалога.

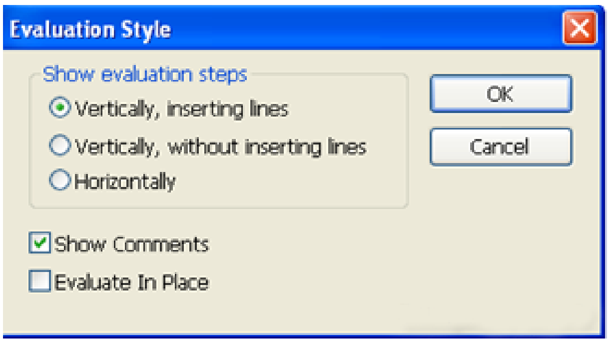


Рис. 22. Окно Evaluatin style (стиль вычислений)

- вертикально, вставка строк – расположение результата под основным выражением с включением пустых строк справа;

- вертикально, без вставки строк – расположение результата прямо под основным выражением;
- горизонтально – расположение результата рядом (по горизонтали) с основным выражением.

Внизу, установив флажок в прямоугольниках, можно ввести еще два режима:

- показать комментарии;
- расчет на месте - заменить исходное выражение результатом символьного его преобразования.

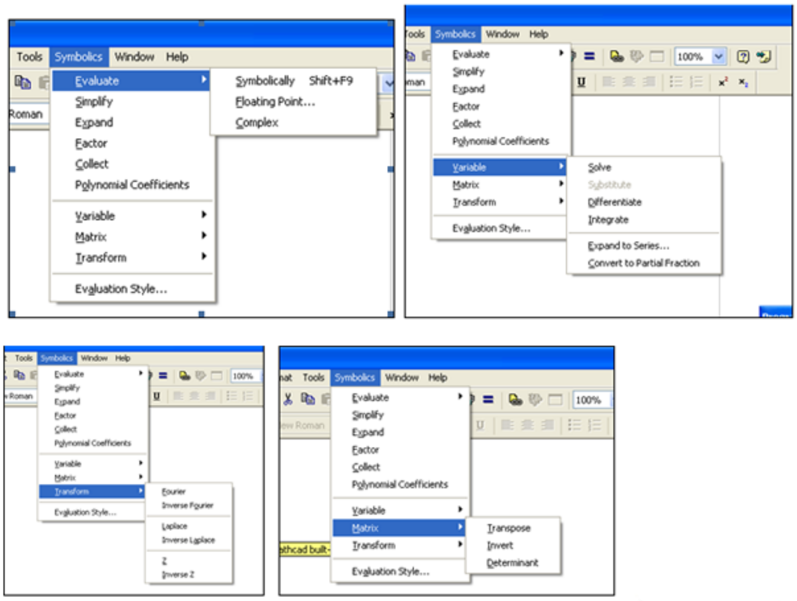


Рис. 23. Команды меню Symbolics

Выполнение символьной *операции*:

- выделить выражение, выделить переменную, относительно которой выполняется операция,
- выбрать необходимую операцию (Рис. 23).

Дифференцирование математических выражений

Команда меню **Symbolics/Variable/ Differentiate** (*Символы /переменная/ дифференцировать*) дифференцирует выражение относительно выделенной переменной (Рис. 24).

Порядок действий:

1. Ввести функцию.
2. Выделить переменную.
3. Команда **Symbolics/Variable/Differentiate**.

Возвращает производную выражения по той переменной, которая выделена курсором. Для вычисления производных высшего порядка нужно повторить вычисление необходимое число раз. Ниже приведен фрагмент документа с вычислением производной.

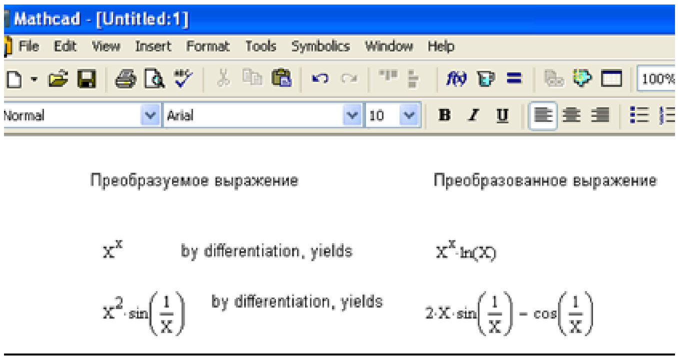


Рис. 24. Дифференцирование с командой меню

Интегрирование математических выражений

Команда меню **Symbolics/Variable/Integrate** (*Символы/переменная/интегрировать*) интегрирует выражения по выделенной переменной (Рис.25).

Порядок действий

1. Ввести подынтегральную функцию.
2. Выделить переменную.
3. Команда **Symbolics)/(Variable)/Integrate**.

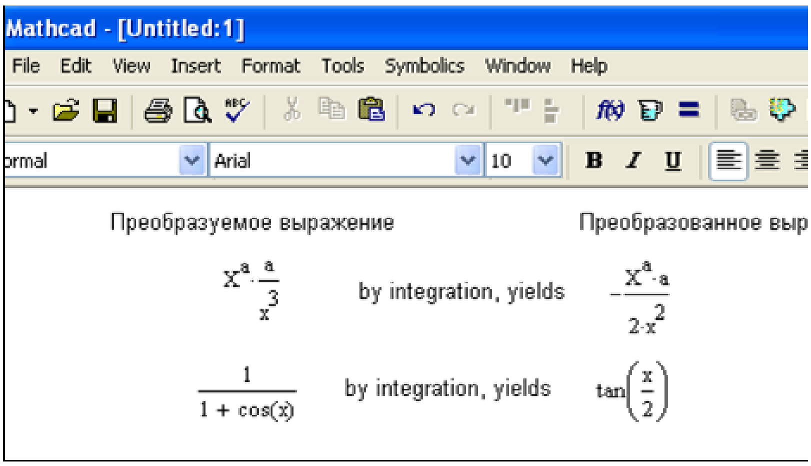


Рис. 25. Интегрирование с командой меню

Действия с матрицами: ввести матрицу, выделить, щелкнуть команду в меню **Simbolics/Matrix/** и соответствующую команду.

Символьные операции с оператором символьного вывода

Мощное и удобное средство символьных операций - **оператор символьного вывода**. Используя этот оператор, можно дифференцировать, интегрировать в символьном виде и производить другие *операции*. Этот способ более нагляден, так как позволяет записывать выражения в традиционной математической форме и сохранять символьные вычисления в документах MathCAD. Следует иметь в виду, что оператор символьного вывода учитывает все предыдущее содержимое документа и выдает результат с его учетом. Не всякое *выражение* поддается аналитическим преобразованиям. В случае, если задача не имеет аналитического решения, либо она оказывается слишком сложной для символьного процессора, то в качестве результата выводится само *выражение*.

Оператор и символьные *операции* можно вызвать из панели инструментов **Symbolic** (иконка палитры имеет вид ) или **Evaluation** (Рис. 26 а,б).

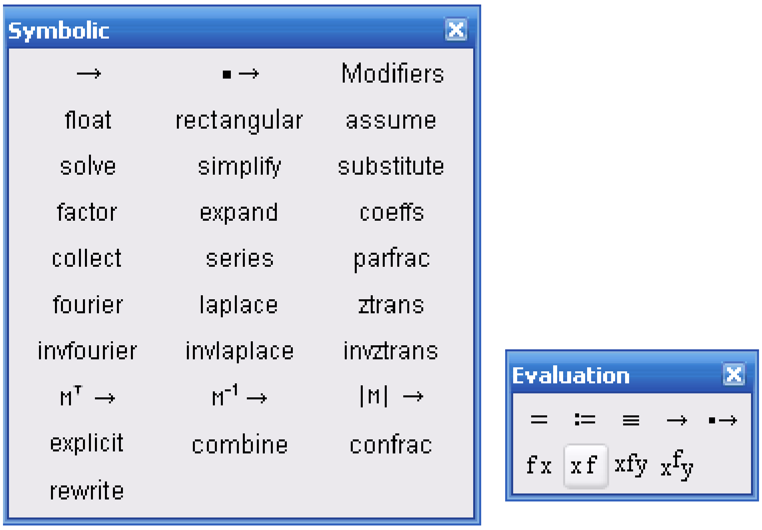


Рис. 26. Палитра символьных операций а) Symbolic, б) Evaluation

Выполнение символьной операции

1. Ввести выражение. Обязательно выделить его с помощью синего уголка (клавиша "пробел"), синий уголок справа.
2. Щелкнуть *оператор символьного вывода*.
3. Щелкнуть за пределами.
4. Проделать операции.

Символьные операции с ключевыми словами

До определённой степени можно управлять способом символьных вычислений. Для всестороннего контроля над символьными преобразованиями нужно использовать ключевые слова (keywords) панели **Symbolic**. Ключевые слова символьных преобразований представлены в таблице 1

Выполнение символьной операции с ключевым словом:

1. Ввести выражение. Обязательно выделить его с помощью синего уголка.
2. Щелкнуть соответствующую операцию – ключевое слово на палитре Symbolic.
3. Если надо произвести две операции, щелкнуть другую операцию (ключевое слово).
4. Щелкнуть за пределами.

Таблица 1. Команды панели Symbolic

Команда меню	**Назначение**
Float, n	Выполнить вычисление, результат представить форме числа с плавающей точкой с точностью до n значащих цифр.
rectangular	Выполнить вычисление с представлением результата в комплексной форме
assume	Выполнить вычисление с предположениями
simplify	Упростить выражение
expand	Разложить выражение по степеням
factor	Разложить на множители
collect	Группировка по степеням переменной
coeffc	Найти коэффициенты полинома
solve	Решить уравнение (систему уравнений) относительно переменной
substitute	Замена переменной
differentiate	Дифференцировать все выражение относительно выделенной переменной
Integrate	Интегрировать выражение относительно выделенной переменной
parFrac	Разложить на элементарные дроби
series	Разложить в ряд Тейлора
fourier	Преобразование Фурье
invfourier	Обратное преобразование Фурье
laplace	Преобразование Лапласа
invlaplace	Обратное преобразование Лапласа
ztranns	Z-преобразование
invztranns	Обратное Z-преобразование
combine	Упростить выражение для экспоненциальной или логарифмической функции

Дифференцирование и интегрирование

1. Для дифференцирования ввести функцию под знак $\frac{d}{d_1}'$ используя панель **Calculus**. Обязательно выделить его с помощью синего уголка (клавиша "пробел"), синий уголок справа.

2. Для интегрирования ввести функцию под знак $\frac{d}{d_1}'$. Также выделить его с помощью синего уголка (клавиша "пробел"), синий уголок справа.
3. Щелкнуть оператор символьного вывода, используя панель **Symbolic** *или* **Evaluation**.
4. Щелкнуть за пределами.

Примеры символьного дифференцирования и интегрирования (вычисления тройного интеграла и определенного интеграла с параметрами a,b) показаны ниже. Аналогичным образом в символьном виде можно вычислить производные любого порядка, суммы, произведения.

Не все интегралы, тем более двойные и тройные, MathCAD может вычислить в символьном виде. Если MathCAD не может совершить операцию, он выводит первоначальное выражение.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sin(x)^2(1-\cos(x))}\right] \to \frac{-2}{\sin(x)^3(1-\cos(x))}\cdot\cos(x)-\frac{1}{\sin(x)(1-\cos(x))^2}$$

$$\int \frac{1}{\sin(x)^2(1-\cos(x))}dx \to \frac{1}{4}\cdot\tan\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{12\tan\left(\frac{1}{2}x\right)^3}-\frac{1}{2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

Вычисление пределов

1. Ввести функцию под знак $\lim_{t\to 0}$ используя панель **Calculus**. Обязательно выделить его с помощью синего уголка (клавиша "пробел"), синий

уголок справа.

2. Щелкнуть оператор символьного вывода, используя панель **Symbolic** *или* **Evaluation**.

3. Щелкнуть за пределами.

4. Проделать операции, перечисленные ниже.

Замечательные пределы

1. $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}\to 1$

2. $\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t\to e$

3. $\lim_{t\to 0}(1+t)^t\to$

Преобразование выражений

Упрощение выражений. Для выполнения операции преобразования необходимо выбрать соответствующее ключевое слово *Simplify (Упрощение), Factor (разложение на множители)* или *Expand (расширение выражений) на панели Символика*. Пример команд*Simplify, Expand, Factor* приведен ниже.

$$\sin(x)^2+\cos(x)^2 simplify\to 1$$
$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)(a-b)} simplify\to 1$$
$$\frac{-5}{x}+\frac{5}{x-1}-\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{6}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^4} simplify\to\frac{(x^2-5)}{[x(x-1)^4]}$$
$$\sin(5x) expand,2\to 16\sin(x)\cos(x)^4-12\sin(x)\cos(x)^2+\sin(x)$$
$$(a+b)^5 expand,2\to a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$-4(\cos(2\alpha)+\cos(4\alpha)) expand,2\to 2-4\cos(2\alpha)-8\cos(\alpha)^4+8\cos(\alpha)^2$$
$$x^2-y^2 factor,2\to(x-y)(x+y)$$
$$[(a)^2-2ab+b^2] factor,2\to(a-b)^2$$
$$\sum_n x-n factor,2\to n(x-1)$$
$$x^3-1 factor,2\to(x-1)(x^2+x+1)$$

Разложение по степеням переменной. Команда *Collect* разлагает выражение по степеням указанной в этой команде переменной, если такое представление возможно. Пример использования команды *Collect* приведен ниже.

$$(a+b)^5 collect,a\to a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(x-a)(x-b)(x-c) collect,x\to x^3+(-a-b-c)x^2+[ab-(-a-b)c]x-abc$$
$$(a+b+c)^2 collect,a\to a^2+(2b+2c)a+(b+c)^2$$
$$(a+b+c)^2 collect,b\to b^2+(2a+2c)b+(a+c)^2$$
$$(a+b+c)^2 collect,c\to c^2+(2a+2b)c+(a+b)^2$$

Подстановка значений переменных в выражение и вычисление этого выражения. Используется слово *Substitute*. Пример использования команды *Substitute* приведен ниже.

$$ax^2 + bx + c\,substitute, x = 5 \rightarrow 25a + 5b + c$$

$$ax^2 + bx + c \left| \begin{matrix} substitute, c = 3 \\ substitute, x = 5 \end{matrix} \right| \rightarrow 25a + 5b + 3$$

$$ax^2 + bx + c \left| \begin{matrix} substitute, x = 5 \\ substitute, c = 4 \\ substitute, b = 11 \end{matrix} \right| \rightarrow 25a + 59$$

$$ax^2 + bx + c \left| \begin{matrix} substitute, x = 5 \\ substitute, c = 3 \\ substitute, b = 4 \\ substitute, a = 3 \end{matrix} \right| \rightarrow 98$$

Решение уравнений

Ключевое слово **Solve** позволяет решать уравнения и системы линейных и нелинейных уравнений. При решении уравнений с нулевой правой частью надо ввести выражение, ключевое слово **Solve**, переменную, относительно которой решается уравнение. Пример решения приведен ниже.

$$x^2 + ax + b\,solve, x \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1}{2}a + \frac{1}{2}(a^2 - 4b)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ \frac{-1}{2}a - \frac{1}{2}(a^2 - 4b)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \end{bmatrix}$$

$$e^x - a\,solve, x \rightarrow \ln(a)$$

Если уравнения имеют правую часть, используется логическое равенство **=** с панели **Boolean**. Система уравнений и переменные, относительно которых система решается, вводятся как элементы матрицы (см. ниже).

$$\begin{pmatrix} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{pmatrix} solve, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow (1, 1)$$

При решении уравнений с определенной точностью вводится ключевое слово *float* (см. ниже).

$$\begin{pmatrix} z + t = 16 \\ 2z - t = 28.5 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} solve, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \\ float, 3 \end{matrix} \right| \rightarrow (14.8, 1.17) = (14.800, 1.170)$$

Основные итоги

В лекции представлены символьные вычисления в различных вариантах: с помощью команд *меню*, оператора символьного вывода, ключевых слов символьного процессора. На примерах показано *дифференцирование* и *интегрирование* математических выражений,*вычисление* пределов, решение уравнений, различные преобразования алгебраических выражений.

Ключевые термины

Matrix (Матрицы) - панель операций с матрицами.

Evaluating – панель, содержащая знаки равенств и выполнения операций.

Symbolic (символы) - панель для символьных операций.
Solve (решить) – оператор символьного решения уравнений.
Calculus - панель операций математического анализа.
Boolean - панель логических операций.

Решение задач линейной алгебры
Системы линейных уравнений

Рассмотрим задачу решения системы из n линейных уравнений. Пусть нам дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_1nx_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Решить систему – значит найти такие числа, при подстановке которых в данную систему получим все *n* верных равенств. Составим матрицы системы.

- Составляем матрицу *A*, состоящую из коэффициентов при переменных (размерность *n* x *n*).
- Составляем матрицу свободных членов *B* (размерность (*n* x 1).
- Перепишем и исходную систему в матричном виде: $AX = B$.

Матричный способ

Система решается аналитически. Вектор решения можно получить из следующего выражения: $X = A^{-1}B$. Можно сделать проверку подстановкой корней в уравнения.

Пример 1

Решить систему уравнений матричным способом. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -24 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -5 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 9x_4 = -8 \end{cases}$$

Ниже представлено решение через обратную матрицу. Найден определитель, чтобы убедиться в существовании решения.

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -24$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -5$$
$$x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 = -2$$
$$3x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 9x_4 = -8$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & -6 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} -24 \\ -5 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -220$$

$$X := A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} -2.65 \\ 0 \\ -2.95 \\ -2.3 \end{pmatrix}$$

Проверка: $$A \cdot X = \begin{pmatrix} -24 \\ -5 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Использование функции lsolve()

В системе MathCAD введена встроенная функция lsolve (A,B), которая решает систему аналитически и возвращает вектор X для системы линейных уравнений $A \cdot X = B$ при заданной матрице коэффициентов A и векторе свободных членов B.

Пример 2

Решить систему используя функцию *lsolve()*

$$\begin{gathered} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -24 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -5 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 9x_4 = -8 \end{gathered}$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & -6 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} -24 \\ -5 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$X := lsolve(A, B)$$

$$X = \begin{pmatrix} -2.65 \\ 0 \\ -2.95 \\ -2.3 \end{pmatrix}$$

Символьное решение

Для решения применяем символьные преобразования. Преимуществом символьного решения является возможность решения уравнений в общем виде. Используем оператор *Solve*.

Пример 3

Пусть функции *r (x,y) w(x,y)* заданы системой уравнений. Найти *r* и *w* , решив систему.

$$\begin{cases} xr + w = y^2 \\ r + yw = x^2 \end{cases}$$

Записываем систему в виде матрицы, используя логическое равенство, решается система относительно *r (x,y) w(x,y)* ,они тоже записываются в виде матрицы.

$$\begin{pmatrix} xr + w = y^2 \\ r + yw = 5 \end{pmatrix} solve, \begin{pmatrix} r \\ w \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{y^3-5}{xy-1} \frac{5x-y^2}{xy-1} \right)$$

$$r(x,y) = \frac{y^3-5}{xy-1}$$

$$w(x,y) = \frac{5x-y^2}{xy-1}$$

Пример 4

Решить аналитически систему уравнений:

$$\begin{cases} 5y1 + 4y2 - y3 = 3 \\ 3y1 + 2y2 + 3y3 = 6 \\ 2y1 + 2.5y2 + 4y3 = 9 \end{cases}$$

На листинге показано точное решение системы и решение с точностью до 3 значащих цифр. Операторы *solve* и *float* набираются последовательно .

$$\begin{bmatrix} (5y1 + 4y2 - y3 = 3) \\ (3y1 + 2y2 + 3y3 = 6) \\ (2y1 + 2.5y2 - 4y3 = 9) \end{bmatrix} solve, \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow (-17.833333333333333333\ 24.0\ 3.8333333333333333333)$$

$$\begin{bmatrix} (5y1 + 4y2 - y3 = 3) \\ (3y1 + 2y2 + 3y3 = 6) \\ (2y1 + 2.5y2 - 4y3 = 9) \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} solve, \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix} \\ float, 3 \end{matrix} \right| \rightarrow (-17.824.03.8)\ \ 3$$

Иногда сложные уравнения символьно не решаются, поэтому приходится обращаться к численным методам.

Численное решение

Решение в скалярной форме. В данном методе система уравнений вводится без использования матриц, в "натуральном" виде. Операция аналогична решению системы

Пример 5

Решить систему уравнений, используя блок *Given Find():*

$$\begin{cases} 2x1 + 4x2 - x3 = 7 \\ x1 + 2x2 + 3x3 = 6 \\ 0.5x1 + 2.5x2 + 4x3 = 5 \end{cases}$$

Предварительно указать начальные значения неизвестных. Это могут быть любые числа, входящие в область определения. (Часто за них принимают столбец свободных членов).

$$x1 := 1, x2 := 1, x3 := 1$$
$$Given$$
$$2x1 + 4x2 - x3 = 7$$
$$x1 + 2x2 + 3x3 = 6$$
$$0.5x1 + 2.5x2 + -4x3 = 5$$

$$Find(x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} -4.048 \\ 3.952 \\ 0.714 \end{pmatrix}$$

Задачи оптимизации

В программе MathCAD с успехом решаются задачи оптимизации. Задача оптимизации (линейного программирования) – *определение* значений аргументов функции, при которых *функция* имеет экстремальное (минимальное, максимальное) *значение*. Условия, налагаемые на аргументы функции - заданные ограничения. Используется методика решения системы уравнений помощью блока *Given*. При этом вместо функции *Find* используется *функция* **Maximize(),** если определяется *максимум*, и *функция* **Minimize()** , если определяется *минимум* оптимизируемой функции. Последовательность действий следующая:

- ввести оптимизируемую функцию,
- определить начальные значения аргументов,
- в блоке Given ввести уравнения (неравенства) ограничений,
- ввести функцию **Maximize () (Minimaze()**),
- определить решение.

Задача решается в алгебраическом и матричном виде. В матричном виде начальное *значение* корней, ограничения задаются в виде матриц. Решение в обоих случаях получается в виде матрицы.

Пример 6

Найти максимум функции

$$f = 500y1 + 800y2 + 400y3 + 200y4$$

при ограничениях
$$\begin{cases} 3y1 + 3y2 + 6y3 \leq 30000 \\ 4y1 + 8y2 + 3y3 + 2y4 \leq 24000 \\ 4y1 + 3y3 + 5y4 \leq 12000 \\ y1 \geq 0 \\ y2 \geq 0 \\ y3 \geq 0 \\ y4 \geq 0 \end{cases}$$

Листинги решения в алгебраическом и матричном виде.

$$ORIGIN := 1$$

Оптимизируемая функция – поиск максимума,

$$f(y1, y2, y3, y4) := 500y1 + 800y2 + 400y3 + 200y4$$

Начальные значения:

$$y1 := 1,\ y2 := 1,\ y3 := 1,\ y4 := 1$$
$$Given$$
$$3y1 + y2 + 6y3 \leq 30000$$
$$4y1 + 8y2 + y3 + 2y4 \leq 24000$$
$$y1 + 3y2 + 5y4 \leq 12000$$

Ограничения:

$$y1 \geq 0,\ y2 \geq 0,\ y3 \geq 0,\ y4 \geq 0$$
$$y := Maximize(f, y1, y2, y3, y4)$$

Решение:

$$y = \begin{pmatrix} 4.168 \times 10^3 \\ 1.827 \times 10^3 \\ 3.511 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Максимальное значение функции:

$$f(y1, y2, y3, y4) = 3.6 \times 10^6$$
$$ORIGIN := 1$$

Матрица коэффициентов функции:
$$C := \begin{pmatrix} 500 \\ 800 \\ 400 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Матрица левых частей ограничений:
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Матрица правых частей ограничений:
$$B := \begin{pmatrix} 30000 \\ 24000 \\ 12000 \end{pmatrix}$$

Начальные значения:
$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := C \cdot x$$
$$Given$$
$$A \cdot x \le B$$
$$x \ge 0$$
$$x := Maximize(f, x)$$

Решение:

$$x = \begin{pmatrix} 4.168 \times 10^3 \\ 1.827 \times 10^3 \\ 3.511 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Максимальное значение функции:

$$f(x) = 3.6 \times 10^6$$

Ключевые термины

Maximize () – *функция* для поиска значений переменных функции, при которых *функция* имеет максимальное *значение*.

Minimaze() - , *функция* для поиска значений переменных функции, при которых *функция* имеет минимальное *значение*.

lsolve(A,B) - *функция* аналитического решения системы линейных уравнений, представленной в виде AX=B.

Основы программирования

На одном листе MathCAD могут определяться один или несколько программных блоков. Обычно их используют при разработке функций, которые осуществляют какую-либо сложную обработку данных, например находят корень нестандартного уравнения.

Переменные. В программном блоке можно читать значения переменных, определенных в MathCAD до этого блока. Однако *изменить* значения этих переменных внутри программного блока *невозможно*. Все переменные, которым присваиваются значения внутри программного блока, будут локальными переменными, которые *недоступны* вне блока. Специально объявлять переменные не нужно, достаточно просто присвоить им значения.

Если программный блок является телом функции, то он также может читать значения аргументов этой функции.

Программный блок представляет собой группу операторов присваивания и управляющих операторов. Необходимо обратить особое внимание, что все ключевые слова (например, *if*) в этих операторах обязательно вводятся с помощью панели *Programming* (*Программирование*). Их ввод с клавиатуры - ошибка!

В целом правила работы с операторами те же, что и в языке Pascal, отличия касаются *способа* записи операторов.

Таблица 2. Соответствие программных операторов MathCAD и Pascal

Оператор языка Pascal	**Оператор MathCAD**	**Комментарий**
A := B	$A \leftarrow B$	Присваивание
Begin оператор1; оператор2; … *End*	| оператор1 | оператор2 | ..	Группа, объединяющая несколько операторов в один составной оператор. Для создания группы и добавления в нее новой пустой строчки используется кнопка «Add Line» панели *Programming*
If условие *Then* оператор *If* условие *Then* *Begin* оператор1; оператор2; … *End*	оператор *if* условие if условие | оператор1 | оператор2 | ..	Простой оператор ветвления. Как и в языке Pascal, его действие распространяется на один указанный оператор, который может быть группой операторов. *Условием* может быть любое логическое выражение, которое может содержать знаки отношения (вместо обычного знака равенства используется знак логического равенства) и логические операторы (находятся на панели *Boolean*): $\neg$ - Not; $\wedge$ - And; $\vee$ - Or; $\oplus$ - Xor
If условие *Then* оператор1 *Else* оператор2	| оператор1 if условие | оператор2 otherwise	Полный оператор ветвления
For инд := нач *To* кон *Do* оператор	for инд ∈ нач.. кон оператор	Фиксированный оператор цикла. Индексная переменная принимает значения от начального до конечного с шагом, равным единице. Цикл действует на один указанный оператор, который может быть группой операторов
While условие *Do* оператор	while условие оператор	Гибкий оператор цикла с предусловием. Цикл выполняется, пока истинно заданое *условие*
Break *Continue*	break continue	Оператор break принудительно завершает текущий цикл. Оператор continue завершает только текущий виток цикла и начинает следующий виток
Нет прямого аналога	выражение1 on error выражение2	Специальная операция обработки ошибок. Сначала вычисляется *выражение2*. Если при этом происходит ошибка, то результатом операции будет *выражение1*. Если ошибки нет, то результат - *выражение2*. *Пример*: $A \leftarrow 2 \ \text{on error} \ \frac{1}{0}$ $B \leftarrow 0 \ \text{on error} \ \frac{1}{2}$ Здесь локальная переменная A получает значение 2, переменная B - значение 0,5

Использование программных блоков в функциях

Если функция является программным блоком, то значение, которое возвращает функция, - это обычно значение, которое вычислено последним сработавшим оператором блока. Иногда возникает необходимость досрочно завершить работу блока и вернуть какое-либо иное значение - для этого используется оператор вида

return значение,

который также вводится с помощью панели *Programming*. Его выполнение заканчивает работу текущего программного блока.

Примеры:

1. Функция, возвращающая –1, 0 или 1 в зависимости от знака аргумента.

$$Sign(x) := \begin{vmatrix} -1 \text{ if } x < 0 \\ 0 \text{ if } x = 0 \\ 1 \text{ if } x > 0 \end{vmatrix}$$

$$Sign(2) = 1$$

2. Пусть интегрируется дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -\sin(z \cdot x)\ ;$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0{,}5\ ; \quad x|_{t=0} = 1\ ,$$

где параметр z определяется в результате решения нелинейного уравнения

$$e^{-z \cdot x} - 0.5 \cdot z = 0\ .$$

Известно, что в рассматриваемом случае это нелинейное уравнение имеет единственное решение. Создадим функцию, которая решает данное уравнение методом касательных с заданной точностью?.

$$f(x,z) := e^{-z \cdot x} - 0.5 \cdot z \qquad d(x,z) := \frac{d}{dz} f(x,z)$$

$$Solve(x,\varepsilon) := \begin{vmatrix} \Delta \leftarrow 1 \\ z_0 \leftarrow 1 \\ \text{while } |\Delta| > \varepsilon \\ \quad \begin{vmatrix} z_1 \leftarrow z_0 - \dfrac{f(x,z_0)}{d(x,z_0)} \\ \Delta \leftarrow z_1 - z_0 \\ z_0 \leftarrow z_1 \end{vmatrix} \\ z_0 \end{vmatrix}$$

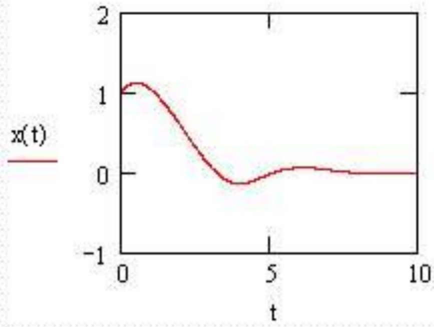
Функция Solve возвращает значение z, которое является корнем уравнения при заданном значении x. Решение дифференциального уравнения:

Given

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}x(t) = -\sin(\mathrm{Solve}(x(t), 0.00001) \cdot x(t))$$

$x'(0) = 0.5 \quad x(0) = 1$

$x := \mathrm{odesolve}(t, 10)$



Решение задач линейного программирования

Постановка оптимизационной задачи

Принятию любого экономического или финансового решения предшествует перебор и оценка вариантов. Экономико-математические задачи, цель которых состоит в нахождении наилучшего (оптимального) с точки зрения некоторого критерия или критериев варианта использования имеющихся ресурсов (труда, капитала и пр.), называются оптимизационными.

Типы оптимизационных задач в экономике:

- Задачи оптимального планирования деятельности предприятий.
- Задачи оптимального прикрепления потребителей к поставщикам - транспортная.
- Задачи оптимального распределения трудовых ресурсов.
- Задача оптимального составления смесей
- Бинарные задачи распределения.
- Задачи формирования оптимального портфеля ценных бумаг (инвестиционных проектов).

Оптимизационные задачи решаются с помощью оптимизационных моделей. Оптимизационные модели возникают при практической реализации принципа оптимальности в управлении. В каждом случае выделяется *объект* оптимизации, определяется цель оптимизации, ставится задача нахождения экстремума функции, описывающей оптимизируемую цель при заданных условиях. Структура оптимизационной модели состоит из целевой функции, области допустимых решений и системы ограничений, определяющих эту область. В качестве инструмента используется математическое *программирование* (планирование): линейное, нелинейное, динамическое, и т.п. В зависимости от типа переменных и функциональных связей различают задачи линейного и нелинейного программирования. Многие экономические задачи формулируются в терминах линейного программирования, поскольку функции прибыли, стоимости затрат - линейные функции переменных, связанных с объемами выпуска, продаж и других факторов.

В общем виде *задача линейного программирования* ЗЛП ставится следующим образом: найти *вектор* $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, максимизирующий (минимизирующий) линейную форму $f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$, удовлетворяющий условиям:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le b_i$ (1)

$x_j \geq 0, \ j = 1..n$ (2)

где f — заданная функции, $a_{ij}, \ b_i$ — некоторые действительные числа.

Линейная функция $f(\overline{X})$ - *целевая функция* задачи, условия (1) (2) - ограничения задачи, *вектор* $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненты которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи, называется планом или допустимым решением ЗЛП. Допустимое решение, максимизирующее (минимизирующее) целевую функцию $f(\overline{X})$, называется оптимальным планом задачи: $f(\overline{X^*}) = \max \ f(\overline{X})$ (или $\min$) где $\overline{X^*} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ - оптимальное решение ЗЛП.

В оптимизационной задаче экономический показатель, для которого определяется максимальное или минимальное *значение* -*целевая функция.* Управляемые переменные - аргументы целевой функции - переменные задачи, которые подвергаются изменению в процессе поиска решения. Область допустимых решений – это область, в пределах которой осуществляется выбор решений. В экономических задачах она ограничена наличными ресурсами, условиями, которые записываются в виде системы ограничений, состоящей из уравнений и неравенств.

Приведем примеры экономико-математического моделирования оптимизационных задач средствами Mathcad.

Оптимальное планирование выпуска продукции

Рассмотрим классическую задачу формирования производственной программы. Пусть осуществляется выпуск m видов продукции. Для этого используется n основных видов ресурсов B, (механизмов, оборудования, времени, специалистов), объем которых на предприятии задан. Известно количество каждого ресурса, идущего на выпуск единицы продукции каждого вида. Отдельная продукция реализуется по цене с, *норма* переменных затрат для нее составляет q. Необходимо, чтобы производственная *программа* была оптимальна и давала наибольшую валовую *прибыль,*

Постановка задачи. Цель моделирования – получить максимальную *прибыль*, которая определяется количеством произведенной продукции в имеющихся условиях с учетом всех ограничений. Найти вариант из *множества* возможных.

Модель задачи

Определение переменных. Введем обозначения:

Входные переменные:

m –видов продукции, j – текущий номер вида продукции.

c_j - *прибыль* от реализации единицы j -го вида продукции.

q_j - переменные *затраты* производства единицы j -го вида продукции

B_i - запасы i -го ресурса i – текущий номер вида ресурса, m - количество ресурсов.

a_{ij} - *норма* затрат i го ресурса для производства j -го вида продукции

P_j – требуемое количество выпуска продукции каждого вида по плану,

Выходные показатели – суммарная *прибыль* $Z(x_1, x_2, x_3, \ldots x_m)$,

Управляемые переменные. x_j - искомый объем продукции j -го вида.

Целевая функция – показатель, который определяет *цель моделирования* - результирующий, оптимизируемый *параметр – прибыль.* Цель решения задачи – нахождение значений управляемых переменных x_j, доставляющих *экстремум* целевой функции прибыли Z .

$$Z(x_j) = \sum_{j=1}^{m}(c_j - q_j) \cdot x_j,\ j = \overline{1,m} \qquad (3)$$

$$Z(x_j) \to \max\ j = \overline{1,m} \qquad (5.4)$$

Ограничения. Условия, налагаемые на данные задачи, определяющие исследуемую величину, которая оптимизируется. Различают три типа ограничений:

1. Ресурсные ограничения - ограниченность имеющихся ресурсов; обеспечивающих выпуск:

$a_{ij} \cdot x_j$ – планируемые затраты ресурса i для производства продукции j ,

$\sum_j^m a_{ij} \cdot x_j$ – планируемые затраты ресурса i на производство всех видов продукции,

$\sum_j^m a_{ij} \cdot x_j \leq B_i\ i = \overline{1,n}$ - условие ограниченности ресурсов

2. плановые ограничения - необходимость выполнения заданных значений P_j для искомых объемов продукции j -го вида:

$x_j \geq P_j\ j = \overline{1,m}$ - условие ограниченности по плану

3. технологические соотношения между группами управляемых переменных, здесь

$x_j \geq 0\ j = \overline{1,m}$

Уравнения. В результате имеем систему уравнений, которую надо решить.

$$\begin{cases} a_{ij} \cdot x_j \leq B_i \\ x_j \geq P_j \\ x_j \geq 0 \\ Z(x_j) \to \max\ j = \overline{1,m} \end{cases} \qquad (5)$$

Решение, если получено, представляется в виде оптимального решения. Это:
количество управляемых переменных, не равных нулю,
числовые значения управляемых переменных,
полученное *значение* целевой функции
Рассмотрим решение модели на примере следующей задачи.

Задача 1.

Фирма по сборке компьютеров предполагает производить выпуск 3 новых моделей при использовании комплектующих 5 типов. Маркетинговые исследования показали возможность сбыта компьютеров по приемлемым продажным ценам. Необходимые данные по запасам комплектующих, и ценам приведены в таблице. Определить оптимальные объемы выпуска компьютеров при имеющихся ресурсах для получения максимальной прибыли.

Таблица 3.

Вид комплектующих	Расход комплектующих ед./изд.	Запас комплектующих.

	Модели ПК			(ед.)
	Модель 1	Модель 2	Модель 3	
1	4	6	5	240
2	1	3	4	145
3	5	2	3	155
4	2	2	2	60
5	1	2	3	70
Затраты на 1 изд.	1800	2700	2100	
Цена реализации(усл.ед.)	10000	35000	20000	

Оптимальный выпуск без плана

Решение задачи 1.

Применяем модель, описанную выше. В Mathcad система уравнений с оптимизацией решается численно с помощью блока $given$ и функции $maximize\ (miniimize)$. Задачу решаем в матричном виде: все данные и уравнения представляем в виде матриц. Порядок действий:

- ввод данных в виде матриц,
- ввод начальных значений искомых параметров,
- ввод целевой функции,
- в блоке given ввод ограничений,
- ввод функции $maximize\ (minimize)$,
- получение решения в виде вектора, размер которого равен количеству аргументов целевой функции.

Входные данные

$\underline{c} := \begin{pmatrix} 10000 & 35000 & 20000 \end{pmatrix}$ - цена реализации

$\underline{q} := \begin{pmatrix} 1800 & 2700 & 2100 \end{pmatrix}$ - затраты на один компьютер

$\underline{d} := \underline{c} - \underline{q}$ - прибыль на один компьютер

$\underline{Z}(\underline{x})$ - прибыль

Затраты ресурсов: $$\underline{a} := \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Запасы ресурсов: $$\underline{B} := \begin{pmatrix} 240 \\ 145 \\ 155 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Начальное значение: $$\underline{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z(x) := d \cdot x$$
$$Given$$
$$a \cdot x \le B$$
$$x \ge 0$$

$$x := Maximize(Z, x), \quad x := \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Максимальная прибыль: $Z(x) = 969000$

Остаток комплектующих: $B - a \cdot x := \begin{pmatrix} 60 \\ 55 \\ 95 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

Оптимальный выпуск компьютеров (рис.4.1):

Продукция: x^T

Ресурсы: $B2 := a \cdot x$

$B^T, \ B2^T$

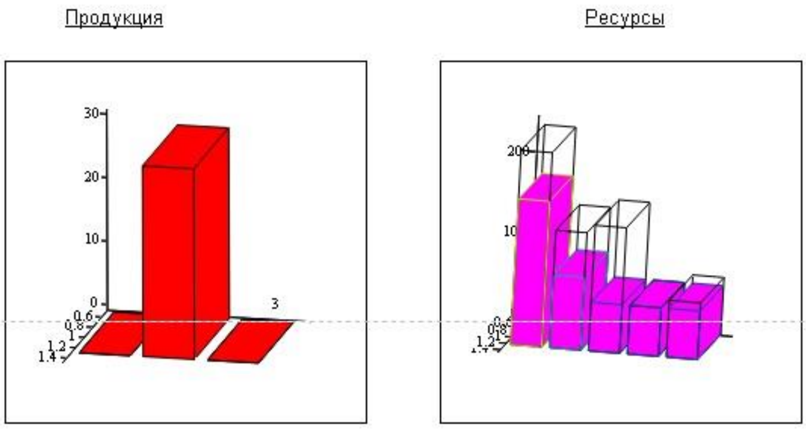


Рис. 27. Графики к задаче 1. Количество компьютеров и распределения ресурсов

Полученное оптимальное решение (рис. 27) следующее. Оптимальная структура выпуска при имеющихся ресурсах без задания плана – 30 компьютеров 2 модели, прибыль при этом составляет 969000 ед ; 4 вид комплектующих израсходован полностью – это дефицитный ресурс. Остальные ресурсы имеют остаток, они недефицитные.

Проведем экономический анализ: как меняется прибыль при изменении структуры выпуска. Ниже показаны листинги расчета нормированной стоимости. Полученные результаты приведены в таблице. **Нормированная стоимость** – изменение целевой функции при изменении соответствующего управляемого параметра (количество выпускаемого продукта) на единицу. Нормированная стоимость для модели 1 в 1,7 больше, чем для модели 3.

Таблица 4.

Переменная	Результирующее значение	Целевой коэффициент	Нормированная стоимость
x1	0	8200	24100
x2	30	32300	0
x3	0	17900	14400

$$ORIGIN := 1$$

Увеличим 1 вид продукции на 1 единицу.

$$a := \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 240 \\ 145 \\ 155 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix},$$

$$d := \begin{pmatrix} 8200 & 32300 & 17900 \end{pmatrix},$$

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z(x) := d \cdot x,$$

$$Z0 := 969000,$$

$$ZN(x) := Z0 - Z(x)$$ – нормированная стоимость

$$Given$$

$$a \cdot x \le B$$

$$x \ge 0 \; x1 \ge 1$$

$$x1 := Maximize(Z, x)$$

$$x1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 29 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z(x1) := 9.449 \times 10^5, \; ZN(x1) := 24100$$

Остаток ресурсов:

$$B - a \cdot x := \begin{pmatrix} 225 \\ 137 \\ 145 \\ 54 \\ 64 \end{pmatrix}$$

Увеличим 2 вид продукции на 1 единицу

$$Given$$

$$a \cdot x \leq B$$

$$x \geq 0 \; x2 \geq 1$$

$$x1 := Maximize(Z, x)$$

$$x1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z(x1) := 969000, \; ZN(x1) := 0$$

Остаток ресурсов:

$$B - a \cdot x := \begin{pmatrix} 225 \\ 137 \\ 145 \\ 54 \\ 64 \end{pmatrix}$$

Увеличим 3 вид продукции на 1 единицу

$$Given$$

$$a \cdot x \leq B$$

$$x \geq 0 \; x3 \geq 1$$

$$x1 := Maximize(Z, x)$$

$$x1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 29 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z(x1) := 954600, \; ZN(x1) := 14400$$

Остаток ресурсов: $$B - a \cdot x := \begin{pmatrix} 225 \\ 137 \\ 145 \\ 54 \\ 64 \end{pmatrix}$$

Добавление плановых ограничений

Задача 2.

Фирма по сборке компьютеров (см. задачу 5.1) получила заказ на следующий выпуск компьютеров: 1 модель - не менее 8 шт., 2 модель - не менее 10 шт., 3 модель - не менее 3 шт. Данные по запасам комплектующих и ценам приведены в таблице 5.1. Определить прибыль при заданном плане и имеющихся ресурсах. Можно ли выполнить такой план?

Решение. Задан план выпуска. Схема решения в программе Mathcad аналогична. Задача имеет решение. Ресурсов достаточно - план выполняется. Структура выпуска – заданный план. Но прибыль составляет $7333000/969000 = 0,75$ от оптимальной.. Дефицитным является 4 вид комплектующих.

Входные данные

$Z(x)$ – прибыль

$c := \begin{pmatrix} 10000 & 35000 & 20000 \end{pmatrix}$ - цена реализации

$q := \begin{pmatrix} 1800 & 2700 & 2100 \end{pmatrix}$ - затраты на один компьютер

$d := c - q$ - прибыль на один компьютер

$P := \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$ - план выпуска

Матрица затрат ресурсов: $$a := \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрица запасов ресурсов: $$B := \begin{pmatrix} 240 \\ 145 \\ 155 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Начальные значения: $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Z(x) := d \cdot x$$

$$Given$$

$$a \cdot x \leq B$$

$$x \geq P$$

$$x1 := Maximize(Z, x)$$

$$x1 := \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Прибыль: $Z(x1) := 733000$

Остаток ресурсов: $B - a \cdot x1 := \begin{pmatrix} 79 \\ 68 \\ 68 \\ -0 \\ 15 \end{pmatrix}$

Недостаток ресурсов для выполнения плана

Задача 3.

Фирма по сборке компьютеров (см. задачу 5.1) получила заказ на увеличенный план выпуска компьютеров: 1 модель - 40 шт., 2 модель - 20 шт., 3 модель - 10 шт. Данные по запасам комплектующих и ценам приведены в таблице 5.1. Определить оптимальную прибыль при заданном плане и имеющихся ресурсах. Можно ли выполнить такой план?

Решение. Для увеличенного плана выпуска задача не имеет решения, система несовместна. Экономическая причина – требуемые значения плана (P_j) недостижимы при имеющихся запасах ресурсов (B_i).

Входные данные

$Z(x)$ – прибыль

$c := \begin{pmatrix} 10000 & 35000 & 20000 \end{pmatrix}$ - цена реализации

$q := \begin{pmatrix} 1800 & 2700 & 2100 \end{pmatrix}$ - затраты на один компьютер

$d := c - q$ - прибыль на один компьютер

$$P := \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$ - план выпуска

Матрица затрат ресурсов: > $$a := \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрица запасов ресурсов: $$B := \begin{pmatrix} 240 \\ 145 \\ 155 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Начальные значения: $$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z(x) := d \cdot x$$

$$Given$$

$$a \cdot x \leq B$$

$$x \geq P$$

$$x1 := Maximize(Z, x)$$

$$x1 := \square$$

Прибыль: $Z(x1) := \square$

Остаток ресурсов: $B - a \cdot x1 := \square$

Решение проблемы выполнения плана при нехватке ресурсов

Возможны два пути решения проблемы:

1. выполнить часть плана из имеющихся ресурсов,
2. добавить недостающие ресурсы, чтобы выполнить план полностью.

1. Выполнение части плана из имеющихся ресурсов

Решение задачи 3 в комплектной постановке. Задача - определить, какую часть плана можно выполнить при имеющихся ресурсах. Для этого случая воспользуемся моделью, приведенной в [21]. Ставится цель определения максимальной доли выпуска требуемого плана при имеющихся ресурсах. Разработана **комплектная** постановка задачи. Вводится новая переменная y – возможный процент достижения плана, определяется ее оптимальное значение при уменьшенном плане, ресурсные и технологические ограничения задачи записываются без изменений. Целевая функция $K(y, x_j)$ строится как функция двух аргументов: скаляра y и вектора переменных продукции $x_j,\ j=\overline{1,m}$, который неявно зависит от y. Решение получается в виде вектора $y1$ с элементами $y1_1$ - найденная доля выполнения плана и $y1_2$ - найденный вектор переменных продукции.

Система уравнений в **комплектной** постановке

$$\begin{cases} K(x_j, y) \to \max \sum_j^m a_{ij} \cdot x_j \le B_i \\ x_j \ge P_j \cdot y \qquad\qquad\qquad\qquad \$ \\ x_j \ge 0 \end{cases} \tag{6}$$

Ниже приведен листинг решения в MathCad (комплектная постановка).

Входные данные

$c := \begin{pmatrix} 10000 & 35000 & 20000 \end{pmatrix}$ - цена реализации

$q := \begin{pmatrix} 1800 & 2700 & 2100 \end{pmatrix}$ - затраты на один компьютер

$d := c - q$ - прибыль на один компьютер

$P := \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$ - план выпуска

$Z(x)$ – прибыль

Матрица затрат ресурсов: > $a := \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Матрица запасов ресурсов: $B := \begin{pmatrix} 240 \\ 145 \\ 155 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

Начальные значения: $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y := 1$

Решение:

$$Z(x) := d \cdot x$$

$$K(y,x) := y$$ – целевая функция

$$Given$$

$$a \cdot x \le B$$

$$x \ge P \cdot y$$

$$y1 := Maximize(K,y,x), \quad y1 := \begin{pmatrix} 0.429 \\ \{3.1\} \end{pmatrix}$$

Доля плана: $y1_1 = 0.43$

Количество выпуска: $y1_2 := \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

Прибыль: $Z(y1_2) := 494143$

Израсходовано ресурсов: $a \cdot y1_2 := \begin{pmatrix} 141 \\ 60 \\ 116 \\ 60 \\ 47 \end{pmatrix}$

Остаток ресурсов: $B - a \cdot y1_2 := \begin{pmatrix} 99 \\ 85 \\ 39 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix}$

Как видно, план можно выполнен только на 43%, но это оптимальный процент при имеющихся условиях. Полученная прибыль при таком плане еще меньше, чем в задаче 2 и ресурсов остается больше.

2. Добавление минимального количества ресурсов для выполнения плана

Решение задачи 3 с добавлением ресурсов. Добавление недостающих ресурсов для выполнения полного плана. Воспользуемся t-моделью постановки задачи, - нахождения минимума дополнительного количества ресурсов, необходимых для выпуска продукции в соответствии с планом. В предлагаемой t-модели вводятся новые переменные $t_i, \ i = \overline{1,n}$ – значения дополнительных ресурсов каждого вида продукции i . Цель задачи – минимум суммарного количества добавляемых ресурсов. В ресурсные ограничения вводятся дополнительные неизвестные ресурсы, плановые и технологические ограничения вводятся в t-модель без изменений. Целевая функция $T(x,t)$ вводится как функция двух аргументов: вектора добавочных ресурсов $t_i,\ i=\overline{1,n}$ и вектора переменных продукции $x_j,\ j=\overline{1,m}$, который неявно зависит от t_j

Система уравнений в постановке t -модели

$$\begin{cases} T(x_j,t_i)=\sum_i^n to \min \sum_j^m a_{ij}\cdot x_j \le B_i+t_i \\ x_j \ge P_j \\ x_j \ge 0 \end{cases} \$ \qquad (5.7)$$

Листинг решения в Mathcad показан ниже. Решение получается в виде двумерной переменной $t1$ с элементами $t1_1$ найденный вектор продукции и $t1_2$, найденный вектор добавочных ресурсов

Далее, имея полученные значения добавочных ресурсов, решаем исходную задачу. На диаграммах показаны старые ресурсы, новые ресурсы. Видны добавочные ресурсы, добавлено ровно столько, чтобы выполнить план. В результате план выполняется и ресурсов не остается

Входные данные

$c := \begin{pmatrix}10000 & 35000 & 20000\end{pmatrix}$ - цена реализации

$q := \begin{pmatrix}1800 & 2700 & 2100\end{pmatrix}$ - затраты на один компьютер

$d := c - q$ - прибыль на один компьютер

$P := \begin{pmatrix}40\\20\\10\end{pmatrix}$ - план выпуска

$Z(x)$ – прибыль

Матрица затрат ресурсов: > $a := \begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\1 & 3 & 4\\5 & 2 & 3\\2 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Матрица запасов ресурсов: $B := \begin{pmatrix}240\\145\\155\\60\\70\end{pmatrix}$

Начальные значения: $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Решение:

$$Z(x) := d \cdot x$$

$T(x,t) := t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$ – добавочные ресурсы

$$Given$$

$$a \cdot x \leq B + t$$

$$x \geq P$$

$$t1 := Minimize(T, x, t)$$

$$t1 := \begin{pmatrix} \{3.1\} \\ \{5.1\} \end{pmatrix}$$

Вектор решений – количество компьютеров: $t1_1 := \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

Добавочные ресурсы: $t1_2 := \begin{pmatrix} 90 \\ -5 \\ 115 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix}$

Новые ресурсы: $B + t1_2 := \begin{pmatrix} 330 \\ 140 \\ 270 \\ 140 \\ 110 \end{pmatrix}$

Прибыль: $Z(t1_1) = 1153000$

План: $$P := \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ресурсы: $$B1 := \begin{pmatrix} 330 \\ 140 \\ 270 \\ 140 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Начальные значения: $$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z(x) := d \cdot x$$

$T(x,t) := t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$ – добавочные ресурсы

$$Given$$

$$a \cdot x \le B1$$

$$x \ge P$$

$$x := Maximize(Z, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \; Z(X) = 1153000$$

Новые ресурсы: $$B1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 140 \\ 270 \\ 140 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Старые ресурсы: $$B = \begin{pmatrix} 240 \\ 145 \\ 155 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$B1 - a \cdot x = \begin{pmatrix} -0 \\ 0 \\ -0 \\ -0 \\ -0 \end{pmatrix}$$

Остаточные ресурсы, новый выпуск:

Транспортная задача

Транспортная задача – задача поиска оптимального распределения поставок однородных грузов [20]. В общей постановке формулируется так: составить план поставок продукции (грузов) от поставщиков к потребителям, имеющий минимальную *стоимость* затрат.

Модель задачи

Входные переменные:

- m –количество поставщиков, i – текущий номер поставщика.
- n - количество потребителей , j – текущий номер потребителя,
- c_{ij} - стоимость перевозки единицы продукции от i - го поставщика к j -му потребителю, $A_i(i = \overline{1, m})$ - объемы производства поставщиков,
- $B_j(j = \overline{1, n})$ – объемы доставки продукции от всех поставщиков потребителям,
- P_{ij} – требуемое количество единиц продукта, доставленного от i - го поставщика к j -му потребителю при наличии плана доставки

Управляемые переменные - x_{ij} - количество единиц продукта, доставленного от i - го поставщика к j -му потребителю,

Выходные показатели – суммарные *затраты* доставки продукции $F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$.

Целевая функция – результирующий, оптимизируемый *параметр* – суммарные *затраты*. Цель решения задачи – нахождение значений управляемых переменных x_{ij}, обеспечивающих *минимум* целевой функции F .

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Математическая модель транспортной задачи может быть закрытой (сбалансированной) - все грузы должны быть вывезены, и все потребности полностью удовлетворены. В этом случае $\sum_{i}^{m} A_i = \sum_{j}^{n} B_j$.

На практике обычно встречается случай открытой (несбалансированной) транспортной задачи, когда производство не совпадает с потреблением. В этом случае открытая модель сводится к закрытой. Для этого вводятся либо фиктивный поставщик (случай дефицита), либо фиктивный потребитель (случай перепроизводства). *Стоимость* перевозок единицы продукции, как от фиктивного поставщика, так и до фиктивного потребителя полагают раной нулю, так как в обоих случаях продукция не перевозится.

При добавлении фиктивного поставщика (потребителя) количество поставщиков m (или потребителей n) увеличивается на единицу.

$\sum_{i}^{m} A_i - \sum_{j}^{n} B_j = \text{объем продукции фиктивного поставщика (потребителя)}$

В результате имеем систему уравнений.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = A_i \ (i = \overline{1,m}) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_j \ (j = \overline{1,n}) \\ x_j \geq 0, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n} \qquad \$ \\ x_j \geq P_j \\ F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \end{cases} \tag{8}$$

Открытая транспортная задача

Задача 4.

Имеется 4 мебельные фирмы и 5 центров распределения товаров - магазинов. Планируется наладить перевозки продукции с фирм в магазины. Фирмы имеют следующие возможности производства: 280, 150, 225, 175 единиц в месяц. Пяти магазинам необходимо поставить 100, 200, 50, 250 и 150 единиц товара в месяц соответственно. Необходимо так спланировать перевозки, чтобы уменьшить (оптимизировать) транспортные расходы.

Стоимость перевозок единиц продукции приведена в таблице.

Таблица 5. Стоимость перевозки единицы продукции

Фирмы/магазины	Олимп	Сфера	Квартира	Уют	Товары для дома
Томек	1,50	2	2,25	2,25	2,25
СуперМебель	2,5	2,2	1,65	1	1,5
Мебель-лес	2,3	1,7	1,5	1,4	1,6
ЦентрМебель	2,3	0,5	1,85	1,35	1,25

Решение . Определим тип задачи. Суммарное количество производимого товара составляет $\sum_{i}^{m} A_i = 830$, количество товара, которое надо доставить $\sum_{j}^{n} B_j = 750$. Задача "открытого типа". Имеем случай перепроизводства. Сбалансируем задачу, сведем к "закрытому типу", введя фиктивного потребителя с потребностью $\sum_{i}^{m} A_i - \sum_{j}^{n} B_j = 80$. Стоимость перевозок единицы продукции до фиктивного потребителя считаем равной нулю.

В Mathcad транспортная задача решается аналогично задаче производства – в матричном виде, с помощью блока $given$ и в данном случае функции $miniimize$. Особенность заключается в том, что матрица неизвестных двумерна. Для построения ограничений – нахождения суммы по строкам и по столбцам вводим единичные векторы. Порядок действий тот же. Документ Mathcad решения задачи показан на рис. 28.

$$ORIGIN := 1$$

Входные данные

$$m := 4, \ n := 5$$

$\underline{i} := 1..\underline{m}$ - фирмы-поставщики

$\underline{j} := 1..\underline{n}$ - магазины-потребители

Производство фирм поставщиков: $A := \begin{pmatrix} 280 \\ 150 \\ 225 \\ 175 \end{pmatrix}$

Потребность магазинов: $B := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix}$

$\sum_i A_i = 830$, $\sum_j B_j = 750$, $\sum_i A_i - \sum_j B_j = 80$

Вводим фиктивного потребителя в магазин с потребностью 80 ед.

$$n := n + 1 = 6,\ j := 1..n$$

$$\text{Потребители} + \text{фиктивный}$$

$$B := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 250 \\ 150 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозки ед. продукции: $c := \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 1.55 & 2.25 & 2.25 & 0 \\ 2.5 & 2.2 & 1.65 & 1 & 1.5 & 0 \\ 2.3 & 1.7 & 1.5 & 1.4 & 1.6 & 0 \\ 2.3 & 0.5 & 1.85 & 1.35 & 1.25 & 0 \end{pmatrix}$

Решение:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} \cdot c_{ij})$$

Начальные значения: $x_{i,j} := 1$

Единичный вектор-столбец для магазинов: $v_j := 1$

Единичный вектор-столбец для поставщиков: $k_j := 1$

$$Given$$

$$x \cdot v = A$$

$$x^T \cdot k = B$$

$$x \geq 0$$

$$\underline{x} := \underline{Minimize}(\underline{F}, \underline{x})$$

Оптимальные перевозки: $$x = \begin{pmatrix} 100 & 25 & 50 & 0 & 25 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 125 & 0 \\ 0 & 175 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Затраты: $\underline{F}(\underline{x}) = 911.25$

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \begin{pmatrix} 280 \\ 150 \\ 225 \\ 175 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}^T \cdot \underline{k} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 250 \\ 150 \\ 80 \end{pmatrix}$$

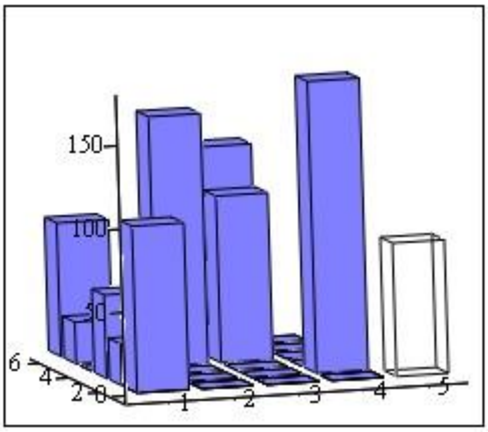


Рис. 28. Листинг решения задачи 4. Оптимальные перевозки. Показан фиктивный потребитель.

Результат решения показывает, как спланировать доставку. Минимальные затраты составляют F=911ед. Излишек товара выгоднее отправить в "Товары для дома" (магазин 5).

Транспортная задача с промежуточными пунктами

Есть транспортные задачи, в которых пункты отправления и назначения являются промежуточными, через них переправляются товары в конечный пункт назначения. В данной постановке промежуточные пункты выступают и как потребители и как поставщики. В данном случае формируется единая транспортная матрица, в которой количество поставщиков и количество потребителей увеличивается на число промежуточных пунктов.

Задача 5.

Усложним условия задачи 4. Фирмы производят и вывозят мебель на 3 склада. Необходимо распределить доставку товаров от поставщиков на склады, со складов в магазины по заказам так, чтобы оптимизировать транспортные расходы. Фирмы производят 280, 150, 225, 175 единиц. Вместимость складов 400, 300, 350 единиц. Магазины заказывают 100, 200, 50, 250 и 150 единиц товара, соответственно. Стоимость перевозок единиц продукции с фирм на склады и со склада в магазины приведена в таблице 6, таблице 7.

Таблица 6. Стоимость перевозки единицы продукции с фирм на склады

Фирмы	Склад 1	Склад 2	Склад 3	Объемы производства на фирмах
Фирма 1	2,4	3,0	2,3	280
Фирма 2	3,9	3,2	4,3	150
Фирма 3	3,3	3,3	2,1	225
Фирма 4	4,3	2,7	3,2	175
Вместимость складов	400	300	350	

Таблица 7. Стоимость перевозки единицы продукции со складов в магазины

Склады	"Олимп"	"Сфера"	"Квартира"	"Уют"	"Товары для дома"
Склад 1	5,8	3,9	3,6	5,4	2,8
Склад 2	4,8	5,5	3,3	2,0	2,0
Склад 3	2,2	3,3	3,6	3,4	1,6
Потребности	100	200	50	250	150

Модель задачи

В модель задачи. добавляется входная переменная склады - три склада $D_k\ (k = \overline{1,s}),\ \ s = 3$. Склады выступают и как потребители, и как поставщики. Формируется единая матрица, в которой количество элементов поставщиков и количество потребителей увеличивается на число складов: строки = поставщики плюс склады, столбцы = склады плюс магазины. Для запрета перевозок со склада на другой склад и непосредственно от поставщиков в магазины устанавливается очень большой, нереальный тариф (999999).

Таблица стоимости доставки со склада на склад имеет вид:

	Склад 1	Склад 2	Склад 3
Склад 1	0	999999	999999
Склад 2	999999	0	999999
Склад 3	999999	999999	0

Таблица стоимости доставки со склада в магазин имеет вид:

Фирмы	"Олимп"	"Сфера"	"Квартира"	"Уют"	"Товары для дома"
Фирма 1	999999	999999	999999	999999	999999
Фирма 2	999999	999999	999999	999999	999999
Фирма 3	999999	999999	999999	999999	999999
Фирма 4	999999	999999	999999	999999	999999

Задача решается в объединенной матрице $M_{i+k,k+j}$ стоимость доставки в объединенной матрице стоимостей. Баланс устанавливается по сумме производства поставщиков и емкости складов, с одной стороны, и емкости складов и потребности магазинов, с другой стороны. $\sum_i^4 A_i + \sum_k^3 D_k = \sum_k^3 D_k + \sum_j^5 B_j$.

Здесь $\sum_i^4 A_i + \sum_k^3 D_k = 1880$, $\sum_k^3 D_k + \sum_j^5 B_j = 1800$ данной задаче необходим фиктивный потребитель с потребностью 80 ед. В остальном модель аналогична предыдущей модели. Система уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m+s} x_{ij} = A_i(i = \overline{1,m}) + D_k(k = \overline{1,s}) \\ \sum_{j=1}^{n+s} x_{ij} = B_j(j = \overline{1,n}) + D_k(k = \overline{1,s}) \\ x_j \geq 0,\ i = \overline{1, m+s},\ j = \overline{1, n+s} \\ F = \sum_i^{n+s} \sum_j^{m+s} M_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \end{cases} \$ \qquad (10)$$

Решение. В Mathcad задача строится аналогично транспортной задаче. Данные вводятся в матричном виде, оптимизация реализуется с помощью блока given и функции $minimize$, ограничения вводятся с единичные векторы. Здесь обенность заключается в том, строится объединенная матрица. Для этого используем встроенные функции для матричных операций

Функция $augment(M1, M2)$ объединяет в одну матрицы $\mathrm{M1}$ и $\mathrm{M2}$, имеющие одинаковое число строк.

Функция $stack(M1, M2)$ объединяет в одну матрицы $\mathrm{M1}$ и $\mathrm{M2}$, имеющие одинаковое число столбцов. Документ Mathcad решения задачи показан ниже.

$ORIGIN := 1$

Входные данные

$\underline{i} := 1..4$ - фирмы-поставщики

$\underline{j} := 1..5$ - магазины-потребители

$\underline{k} = 1..3$ - склады

Производство фирм поставщиков: $A := \begin{pmatrix} 280 \\ 150 \\ 225 \\ 175 \end{pmatrix}$

Емкость складов: $D := \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 350 \end{pmatrix}$

Потребность магазинов: $B := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix}$

$$\sum_{\underline{i}=1}^{4} \underline{A_i} = 830,\ \sum_{\underline{k}=1}^{3} \underline{D_k} = 1050,\ \sum_{\underline{j}=1}^{5} \underline{B_j} = 750$$

$$\underline{\text{поставщики}} + \underline{\text{склады}}: \sum_i \underline{A_i} + \sum_k \underline{D_k} = 1880$$

$$\underline{\text{склады}} + \underline{\text{магазины}}: \sum_j \underline{B_j} + \sum_k \underline{D_k} = 1800$$

Вводим фиктивного потребителя в магазин с потребностью 80 ед.

$$\underline{j} := 1..6, \underline{j} := 1..\underline{n}$$

$$\underline{\text{магазины}} + \underline{\text{фиктивный}}$$

$$\underline{B} := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 250 \\ 150 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозки ед. продукции от фирмы на склад: $c := \begin{pmatrix} 2.4 & 3 & 2.3 \\ 3.9 & 3.2 & 4.3 \\ 3.3 & 3.3 & 2.1 \\ 4.3 & 2.7 & 3.2 \end{pmatrix}$

Стоимость перевозки ед. продукции со склада в магазин: $c := \begin{pmatrix} 5.8 & 3.9 & 3.6 & 5.4 & 2.8 & 0 \\ 4.8 & 5.5 & 3.3 & 2.0 & 2.0 & 0 \\ 2.2 & 3.3 & 3.6 & 3.4 & 1.6 & 0 \end{pmatrix}$

Решение

матрица стоимостей фиктивной доставки со склада на склад: $underlinecc := \begin{pmatrix} 0 & 999999 & 999999 \\ 999999 & 0 & 999999 \\ 999999 & 999999 & 0 \end{pmatrix}$

матрица стоимостей фиктивной доставки с фирмы в магазин: $underlinecc1 := \begin{pmatrix} 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 0 \\ 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 0 \\ 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 0 \\ 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 0 \end{pmatrix}$

Объединяем матрицы: $\underline{M1} := \underline{argument}(\underline{c}, \underline{cc1})$, $\underline{A1} := \underline{stack}(\underline{A}, \underline{D})$, $\underline{M2} := \underline{argument}(\underline{cc}, \underline{c1})$, $\underline{B1} := \underline{stack}(\underline{D}, \underline{B})$

$$\underline{A1} := \begin{pmatrix} 280 \\ 150 \\ 225 \\ 175 \\ 400 \\ 300 \\ 350 \end{pmatrix}, \quad \underline{B1} := \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 350 \\ 100 \\ 200 \\ 50 \\ 250 \\ 150 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M1} := \begin{pmatrix} 2.4 & 3 & 2.3 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 0 \\ 3.9 & 3.2 & 4.3 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 0 \\ 3.3 & 3.3 & 2.1 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 0 \\ 4.3 & 2.7 & 3.2 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M2} := \begin{pmatrix} 0 & 10\times10^5 & 10\times10^5 & 5.8 & 3.9 & 3.6 & 5.4 & 2.8 & 0 \\ 10\times10^5 & 0 & 10\times10^5 & 4.8 & 5.5 & 3.3 & 2 & 2 & 0 \\ 10\times10^5 & 10\times10^5 & 0 & 2.2 & 3.3 & 3.6 & 3.4 & 1.6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M} := \underline{stack}(\underline{M1}, \underline{M2}), \quad \underline{M} := \begin{pmatrix} 2.4 & 3 & 2.3 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 0 \\ 3.9 & 3.2 & 4.3 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 0 \\ 3.3 & 3.3 & 2.1 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 0 \\ 4.3 & 2.7 & 3.2 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 999999 & 0 \\ 0 & 999999 & 999999 & 5.8 & 3.9 & 3.6 & 5.4 & 2.8 & 0 \\ 999999 & 0 & 999999 & 4.8 & 5.5 & 3.3 & 2 & 2 & 0 \\ 999999 & 999999 & 0 & 2.2 & 3.3 & 3.6 & 3.4 & 1.6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i := 1..7.\ j := 1..9$$

Начальные значения: $x_{i,j} := 1$

Единичный вектор для строк и столбцов $v1_i := 1,\ v2_j := 1$

$$F(x) := \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{9} (x_{i,j} \cdot M_{i,j})$$

$$Civen$$

$$x^T \cdot v1 = B1$$

$$x \cdot v2 = A1$$

$$x \geq 0$$

Оптимальные перевозки: $x := Minimize(F, x)$

Затраты: $F(x) = 26000065$

Ограничения:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	113	13	35	0	0	0	0	0	0
2	4	18	49	0	0	0	0	0	9
3	110	78	37	0	0	0	0	0	0
4	100	18	56	0	0	0	0	0	1
5	73	0	0	39	94	42	27	126	0
6	0	54	0	10	81	8	137	9	0
7	0	0	173	51	25	0	86	15	0

$$x \cdot v2 := \begin{pmatrix} 280 \\ 150 \\ 225 \\ 175 \\ 400 \\ 300 \\ 350 \end{pmatrix}, \quad x^T \cdot v1 := \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 350 \\ 100 \\ 200 \\ 50 \\ 250 \\ 150 \\ 80 \end{pmatrix}$$

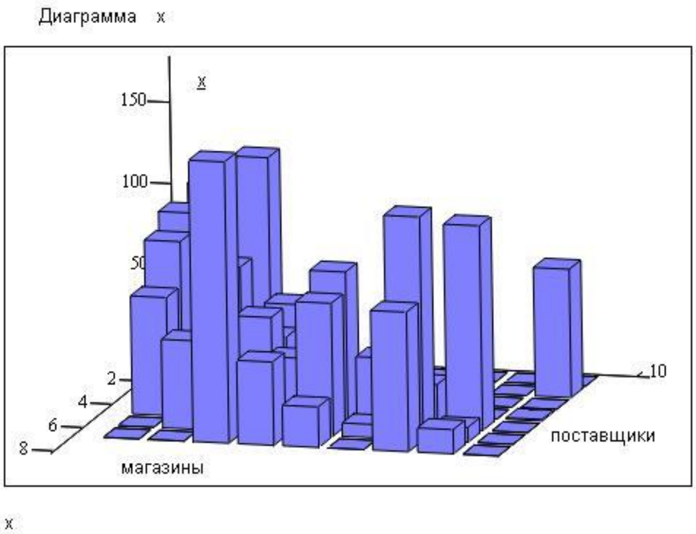


Рис. 29. Диаграмма доставки

Планирование штатного расписания

Планирование штатного расписания относится к типу задач оптимального распределения трудовых ресурсов.

Задача 6.

Необходимо укомплектовать штат работников в диспетчерской фирме в соответствии со следующими требованиями: каждый день недели должно работать определенное количество работников (см. таблицу). При этом служащие должны иметь два выходных дня. В каждой группе – не менее 2 человек. Руководитель фирмы заинтересован в экономии заработной платы. Обеспечить работу в течение недели фирмы в соответствии с ресурсным планом при минимальном фонде заработной платы.

Потребность в работниках каждый день недели

День	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.
Кол. работников	22	17	13	14	15	18	24

Постановка задачи

Организуем группы, каждая из которых имеет свои выходные дни - два смежных дня. У первой группы выходные - *Вс* и Пн., у второй - Пн и Вт. и т.д. Всего - 7 групп. Дневная *оплата* каждой группы приведена в таблице. Задача – определить количество работников в каждой группе при минимальной суммарной оплате.

Таблица 8.

№ группы	Вых.дни	Количество работников	Оплата Р.
1	Вс.,Пн.	x1	50
2	Пн. Вт.	x2	45
3	Вт. Ср.	x3	45
4	Ср. Чт.	x4	45
5	Чт. Пт.	x5	45
6	Пт. Суб.	x6	55
7	Суб. Вс	x7	50

Модель задачи

1. Выбираем объекты для моделирования: и исходные данные - т.е. что мы имеем.
   - плановое количество работников на каждый день недели
   - выходные для работников – два смежных дня,
   - дневная оплата работника постоянна,
   - минимизация общей оплаты работников.
2. Детализируем объекты, применяя системный подход. Учитываем все данные.

Входные переменные:

- j – текущий день недели,
- i – текущий номер группы. $m = 7$ –количество групп
- P_i – оплата одного работника в i группе
- c_{ij} - параметр, обозначающий выход на работу i группы в j день недели, выход – $c_{ij} = 1$, выходной – $c_{ij} = 0$ (см. таблицу 9).

Таблица 9.

Группа	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.
1	0	0	1	1	1	1	1
2	1	0	0	1	1	1	1
3	1	1	0	0	1	1	1
4	1	1	1	0	0	1	1
5	1	1	1	1	0	0	1
6	1	1	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1	1	0

Управляемые переменные – x_i - количество работников в i группе,

Ограничения

Ресурсное - $B_j \ (j = \overline{1, m})$ - количество работающих в j день недели

Плановое – M_i требуемое количество работников в i группе .

Выходные показатели – суммарная заработная *плата* $S = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot x_i$.

Целевая функция – результирующий, оптимизируемый *параметр* – суммарная заработная *плата* минимальна.

$$S = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot x_i \to \min$$

В результате имеем систему уравнений.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{c}_{ij} \cdot x_i = B_j \ (j = \overline{1,m}) \\ x_i \geq 0, \ (i = \overline{1,m}) \\ x_i \geq P_i \\ x_i \geq 2 \\ S = \sum_{i=1}^{m} P_i \cdot x_i \to \min \end{cases} \quad \$ \qquad (11)$$

Решение. Данные вводятся в виде матриц. *Матрица* выхода бригад на работу двумерна. Задача решается с помощью блока $given$ и функции $minimize$. Документ Mathcad решения задачи показан ниже.

Входные данные

$$ORIGIN := 1$$

$$m := 7$$

$i = 1..m$ - номер группы, $j := 1..m$ – день недели

Потребности работников: $B := \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$

Оплата по группам: $P := \begin{pmatrix} 50 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 55 \\ 50 \end{pmatrix}$

Матрица выхода работников: $c := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Решение:
Начальные значения:

$x_i := 1$ – количество работников

$$S(x) := P \cdot x$$

$$Given$$

$$c \cdot x \geq B$$

$$x \geq 2$$

$$x1 := Minimize(S, x)$$

$$x1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Заработная *плата*: S(x)=335

$$c \cdot x1 := \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Ограничение:

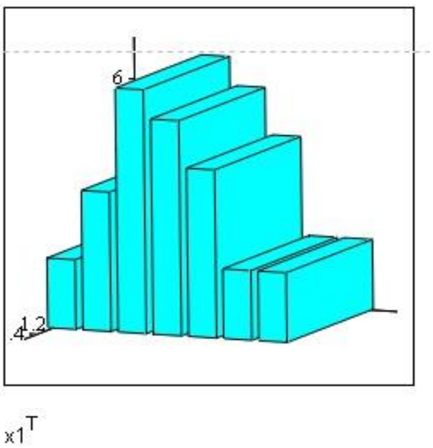


Рис. 30. Количество работников в группах, имеющих разные выходные

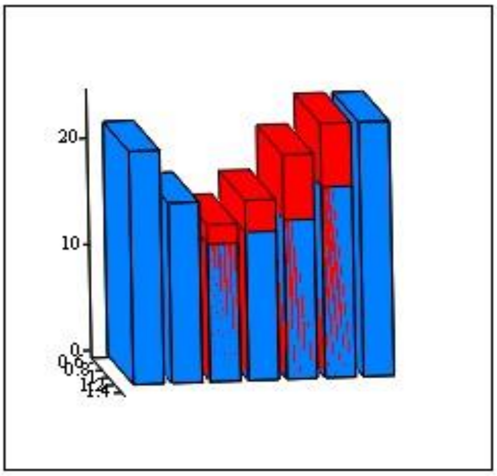
Потребности работников

$$RR := c \cdot x1$$

$$RR := \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Ограничение:

$$B := \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$



RR^T, B^T

Рис. 31. Количество работающих по дням недели

Оптимизация межотраслевого баланса

Возможность оптимизации межотраслевого баланса появляется, если *коэффициенты* прямых затрат отражают *затраты* не средние по отрасли, а для каждого способа и технологии производства. В таких моделях межотраслевого баланса представлено отдельно производство каждого вида продукции. Построение оптимизационных моделей межотраслевого баланса позволяет в условиях ограниченности ресурсов находить наиболее эффективные комбинации ресурсов для максимизации конечного продукта.

Задача 7.

Крупное структурное предприятие состоит из 6 подразделений, каждый из которых выпускает по 1 виду продукции. Отношения между подразделениями определены технологической матрицей прямых затрат. В таблице 10 указаны нормы прямых затрат подразделений, используемых в качестве промежуточного продукта для выпуска единицы продукции для каждого *подразделения*. Известны максимально допустимые ресурсы подразделений предприятия. Известны цены на готовую продукцию, которая направляется на внешний рынок. Оптимизировать новую программу – плановую валовую продукцию, так, чтобы распределение готовой продукции на собственные потребности и экспорт, давало максимальный доход от реализованной продукции.

Таблица 10.

	Подразделение 1	Подразделение 2	Подразделение 3	Подразделение 4	Подразделение 5	Подразделение 6	Цена
Подразделение 1	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,12	2
Подразделение 2	0,03	0,05	0,06	0,08	0,1	0,13	6
Подразделение 3	0,05	0,07	0,07	0,09	0,11	0,14	3
Подразделение 4	0,07	0,09	0,08	0,1	0,12	0,15	7
Подразделение 5	0,09	0,11	0,09	0,11	0,13	0,16	8
Подразделение 6	0,11	0,13	0,1	0,12	0,14	0,17	1
Ресурсы подразделений	400	300	900	500	450	250	

Модель задачи

Входные переменные:

- n –количество подразделений , i – текущий номер подразделения - производителя, j – текущий номер подразделения-потребителя
- $A_(ij)\ (i, j = \overline{1, n})$ - матрица прямых затрат,
- C_i - цены на готовую продукцию, которая направляют на внешний рынок,
- M_j – допустимые мощности подразделений, ресурсы,

Управляемые переменные - X_j - *вектор* плановой валовой продукции.

Выходные показатели –

Y_j -. конечная продукция подразделений,

$Y = (E - A) \cdot X$ - в соответствии с уравнением межотраслевого баланса, $Z(X)$ - доход от реализации конечной продукции на внешнем рынке..

Целевая функция –оптимизируемый *параметр* – доход от реализации конечной продукции.

$$Z(X) = (E - A) \cdot X \cdot C$$

$$Z(X) \to \max$$

Ограничения.

$$X_j \le M_j$$ – ресурсные ограничения

$$(E - A) \cdot X > 0$$ – конечный продут положителен,

$$X_j \ge 0$$

В результате имеем систему уравнений.

$$\begin{cases} X_j \le M_j \\ (E - A) \cdot X > 0 \\ X_j \ge 0 \\ Z(X) = (E - A) \cdot X \cdot C \to \mathrm{m} \end{cases}$$ (12)

Решение. В программе Mathcad задача решается в матричном виде, аналогично всем приведенным примерам. Система уравнений с оптимизацией решается численно с помощью блока $given$ и функции $maximize()$.

Входные данные

$$ORIGIN := 1$$

$$i := 1..6,\ j := 1..6$$

Матрица промежуточных потоков затрат:

$$A := \begin{pmatrix} 0.01 & 0.03 & 0.05 & 0.07 & 0.09 & 0.12 \\ 0.03 & 0.05 & 0.06 & 0.08 & 0.1 & 0.13 \\ 0.05 & 0.07 & 0.07 & 0.09 & 0.11 & 0.14 \\ 0.07 & 0.09 & 0.08 & 0.1 & 0.12 & 0.15 \\ 0.09 & 0.11 & 0.09 & 0.11 & 0.13 & 0.16 \\ 0.11 & 0.13 & 0.1 & 0.12 & 0.14 & 0.17 \end{pmatrix}$$

Ресурсы подразделений:

$$M := \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 900 \\ 500 \\ 450 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Цена:

$$C := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E := identity(6)$ – единичная *матрица*

X – валовый планируемый выпуск
$(E-A)\cdot X$ – *вектор* конечной продукции
Z – доход от реализации конечной продукции – *целевая функция*
Оптимизация дохода: $Z - \max$

Решение:

$Z(X) := [(E-A)\cdot X]\cdot C$, $v1_i := 1$ – единичный *вектор*

Начальные значения:

$X_j := 1$, $A\cdot diag(X)\cdot v1$ – *затраты* – сумма по столбцам

$$Given$$

$$X \le M$$
$$(E-A)\cdot X > 0$$

$$X \ge 0$$

$$X1 := Maximixe(Z, X)$$

Оптимальный план валового выпуска: $X1 := \begin{pmatrix} 131 \\ 300 \\ 311 \\ 500 \\ 450 \\ 250 \end{pmatrix}$

Конечная продукция: $Y := (E-A)\cdot X1$, $Y := \begin{pmatrix} -0 \\ 145 \\ 132 \\ 297 \\ 224 \\ 0 \end{pmatrix}$

Оптимальный доход: $Z(X1) = 5137$

Промежуточные поставки: $A\cdot diag(X1)$

$$A\cdot diag(X1) := \begin{pmatrix} 1.313 & 9 & 15.526 & 35 & 40.5 & 30 \\ 3.94 & 15 & 18.632 & 40 & 45 & 32.5 \\ 6.567 & 21 & 21.737 & 45 & 49.5 & 35 \\ 9.194 & 27 & 24.842 & 50 & 54 & 37.5 \\ 11.821 & 33 & 27.947 & 55 & 58.5 & 40 \\ 14.447 & 39 & 31.053 & 60 & 63 & 42.5 \end{pmatrix}$$
,

$$S := \begin{pmatrix} 131.34 \\ 155.072 \\ 178.804 \\ 202.536 \\ 226.268 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Затраты – суммы по столбцам $S := A \cdot diag(X1) \cdot v1$,

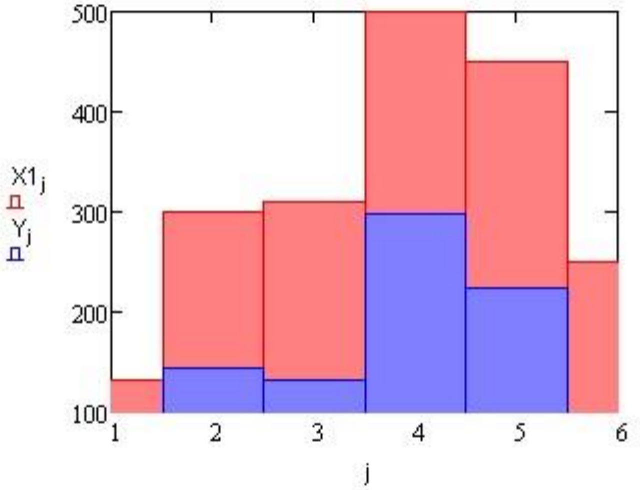


Рис. 32. Валовая продукция, конечный продукт

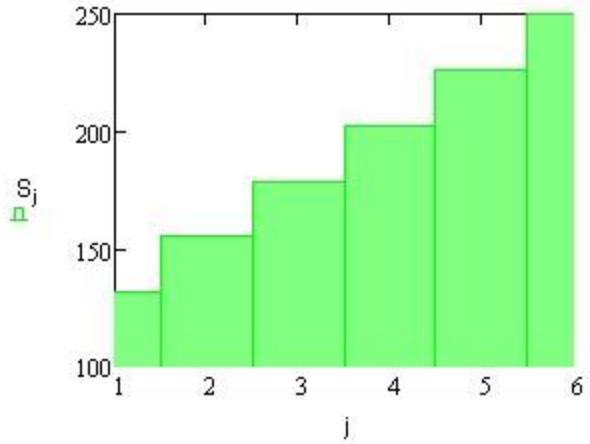


Рис. 33. Затраты

Основные итоги

Рассмотрены основные типы оптимизационных задач.

Задача формирования оптимальной производственной программы - три модели: модель получения максимальной прибыли без заданного плана и с планом, модель в комплектной постановке - получение максимальной доли плана выпуска продукции при нехватке ресурсов, т-модель - нахождения минимума дополнительного количества ресурсов, необходимых для выполнения полного плана. Две модели транспортной задачи. Задача оптимального комплектования штата работников. Задача максимизации конечного продукта в схеме межотраслевого баланса. Для каждой задачи определены входные данные, построена математическая модель. Каждая модель представлена в Mathcad в виде системы матричных уравнений. Системы уравнений решены численно - в блоке $given\ maximize\ (minimize)$. Построены диаграммы результирующих данных.

Ключевые термины

Оптимизационная задача – задача, цель которой состоит в нахождении наилучшего (оптимального) с точки зрения некоторого критерия варианта использования имеющихся ресурсов.

Оптимизационная модель – *математическая модель* решения оптимизационной задачи.

Математическое программирование - направление математики, изучающее методы решения оптимизационных задач.

Целевая функция – *функция*, определяющая *критерий оптимальности* в оптимизационной задаче.

Управляемые переменные - переменные целевой функции, которые подвергаются изменению в процессе поиска решения.

Ограничения – системы уравнений и неравенств, ограничивающих область решения оптимизационной задачи в соответствии с заданными условиями.

Нормированная стоимость - изменение целевой функции при изменении соответствующего управляемого параметра на единицу.

Транспортная задача - оптимизационная задача оптимального прикрепления потребителей к поставщикам при доставке грузов.

Задача оптимального распределения трудовых ресурсов – оптимизационная задача распределения трудовых ресурсов при выбранном критерии оптимальности.

Решение задач динамического программирования

Задача распределения средств между предприятиями

Рассмотрим схему на конкретной задаче распределения средств между предприятиями.

Показатель эффективности каждого предприятия может определяться в результате решения задачи использования ресурсов (планирования производства), математическая модель которой имеет вид:

Целевая функция $Z^k = \sum_{n=1}^{n} c_j^k \cdot x_j^k \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{n} a_{ij}^k \cdot x_j^k \le b_i^{0k} + b_i^k, i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} y_i^k \cdot b_i^k \le Q^k \\ d_j^k \le x_j^k \le D_j^k,\ j = \overline{1,n} \\ b_i^k \ge 0 \end{cases}$$

$$b_i^k, x_j^k - ?$$

Условные обозначения:

c_j^k – прибыль от реализации единицы продукции каждого вида;

b_i^k – объем закупаемых ресурсов;

b_i^{0k} – складские запасы ресурсов;

x_j^k – план производства продукции каждого вида;

a_{ij}^k – нормы затрат ресурсов для производства единицы продукции каждого вида;

y_i^k – цены на ресурсы;

Q – объем выделенных ресурсов;

d_j^k и D_j^k – соответственно минимальный (обязательства предприятия) и максимальный объем (ёмкость рынка) выпуска продукции;

κ – номер предприятия.

Для определения величины дополнительного дохода как показателя эффективности деятельности каждого предприятия необходимо из величины прибыли при соответствующем объёме выделенных дополнительных средств вычесть прибыль в случае, если дополнительные средства не выделяются.

Вычисленные методами линейного программирования показатели эффективности деятельности каждого предприятия в зависимости от объема получаемых финансовых средств в последующем используются для нахождения оптимального распределения средств между предприятиями методами динамического программирования.

Предполагается, что:

1. дополнительный доход каждого предприятия $f(x)$ не зависит от вложения средств в другие предприятия;
2. дополнительный доход $f(x)$ каждого предприятия выражается в одних условных единицах;
3. совокупный дополнительный доход равен сумме дополнительных доходов, полученных каждым предприятием.

Задача распределения ресурсов между предприятиями является задачей динамического программирования. Её решение содержит следующие этапы:

1. интервал изменения выделяемых средств разбивается на элементарные отрезки;
2. для заданных значений выделяемых средств определяются показатели эффективности для всех предприятий;
3. по обратной (прямой) схеме используются уравнения Беллмана;
4. в обратной (прямой) последовательности, начиная от $Z_1(x)(Z_n(x))$ находят оптимальные значения выделяемых средств Z_i^*.

Пример

Для увеличения объемов выпуска пользующейся повышенным спросом продукций, изготавливаемой 4 предприятиями города, выделены средства в размере 100 млн рублей. Использование i - ым предприятием х миллион рублей из указанных средств обеспечивает прирост выпуска продукций, определяемый значением $f_i(x)$.

Найти распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальное увеличение выпуска продукции.

Объемы прироста выпуска продукции в зависимости от выделенных ресурсов x представлены в таблице 11.

Таблица 11

Объем выделенных средств,млн. руб, x_i	***Прирост выпуска продукции в зависимости от объема выделенных средств, $f_i(x)$***			
	$f_1(x)$	***$f_2(x)$***	***$f_3(x)$***	***$f_4(x)$***
0	0	0	0	0
20	16	7	10	10
40	28	19	15	19
60	36	25	27	27
80	39	39	42	34
100	44	51	59	61

Необходимо определить оптимальное распределение средств, обеспечивающее максимальный прирост выпуска продукции всех предприятий.

Рассмотрим обратную схему Беллмана. Рекуррентные соотношения имеют вид:

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{\{X_n\}}\{ f_n(s_{n-1}, X_n)\}$$

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{\{X_k\}}\{ f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(S_k)\}, k = n-1, n-2, ..., 1$$

Распределение ресурсов будем производить с точностью 20 млн. рублей.

Согласно обратной схеме Беллмана начинаем с определения условно оптимальных капиталовложений, выделяемых для последнего четвертого (n-ого) предприятия.

Для этого находим значения Z_4^* для каждого x принимающего значения 0, 20, 40, 60, 80, 100.

Показатель эффективности 4-ого шага (4-ого предприятия), равный суммарному показателю эффективности на всех шагах определяется как $Z_4^*(Q) = \max\limits_{\{x \le Q\}}\{ f_4(Q)\}$

Далее аналогично находим $Z_3^*(Q) = \max\limits_{\{x \le Q\}}\{ f_3(X) + \underset{Q=0,20,...,100}{Z_4^*(Q-x)}\}$

- объединённый показатель эффективности деятельности 2 предприятий.

Произведем вычисления значений функции $Z_3(Q)$ и представим их в таблице 2.

$Z_3^*(20) = \max\{0+10, \underline{10+0}\} = 10,$

$Z_3^*(40) = \max\{0+19, \underline{10+10}, 15+0\} = 20,$

$Z_3^*(60) = \max\{0+27, \underline{10+19}, 15+10, 27+0\} = 29,$

$Z_3^*(80) = \max\{0+34, 10+27, 15+19, 27+10, \underline{42+0}\} = 42,$

$Z_3^*(100) = \max\{\underline{0+61}, 10+34, 15+27, 27+19, 42+10, 59+0\} = 61.$

Таблица 12

Объем выделенных средств,млн. руб, x_i	*Прирост выпуска продукции в зависимости от объема выделенных средств, $f_i(x)$*				*Показатели эффективности предприятий в зависимости от объема выделенных средств, $Z_j(x)$*			
	$f_1(x)$	*$f_2(x)$*	*$f_3(x)$*	*$f_4(x)$*	*$Z_4(x)$*	*$Z_3(x)$*	*$Z_2(x)$*	*$Z_1(x)$*
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	16	7	10	10	10	10	10	16
40	28	19	15	19	19	20	20	28
60	36	25	27	27	27	29	29	38
80	39	39	42	34	34	42	42	48
100	44	51	59	61	61	61	61	61

Объем выделенных средств,млн. руб, x_i	*Показатели эффективности предприятий в зависимости от объема выделенных средств, $Z_j(x)$*			
	$Z_4(x)$	*$Z_3(x)$*	*$Z_2(x)$*	*$Z_1(x)$*
0	0	0	0	0
20	10	10	10	16
40	19	20	20	28
60	27	29	29	38
80	34	42	42	48
100	61	61	61	61

Объединённый показатель эффективности деятельности 3 предприятий - $Z_2^*(Q) = \max\limits_{\{x \le Q\}}\{ f_2(X) + \underset{Q=0,20,...,100}{Z_3^*(Q-x)}\}$. Произведем вычисления значений функции $Z_2^*(Q)$ и представим их в таблице 2.

$Z_2^*(20) = \max\{\underline{0+10}, 7+0\} = 10,$

$Z_2^*(40) = \max\{\underline{0+20},7+10,19+0\} = 20,$

$Z_2^*(60) = \max\{\underline{0+29},7+20,19+10,25+0\} = 29,$

$Z_2^*(80) = \max\{\underline{0+42},7+29,19+20,25+10,39+0\} = 42,$

$Z_2^*(100) = \max\{\underline{0+61},7+42,19+29,25+20,39+10,51+0\} = 61.$

Объединённый показатель эффективности деятельности 4 предприятий - $Z_1^*(Q) = \max\limits_{\{x \le Q\}}\{f_1(X) + Z_2^*(Q-x)\}_{Q=0,20,\dots,100}$. Произведем вычисления значений функции $Z_1^*(Q)$ и представим их в таблице 2.

$Z_1^*(20) = \max\{0+10,\underline{16+0}\} = 16,$

$Z_1^*(40) = \max\{0+20,16+10,\underline{28+0}\} = 28,$

$Z_1^*(60) = \max\{0+29,16+20,\underline{28+10},36+0\} = 38,$

$Z_1^*(80) = \max\{0+42,16+29,\underline{28+20},36+10,39+0\} = 48,$

$Z_1^*(100) = \max\{\underline{0+61},16+42,28+29,36+20,39+10,44+0\} = 61.$

Из таблицы 2 находим оптимальный план распределения выделенных средств. В результате вычислений получили, что максимальное значение функции цели составляет

$Z_{\max} = Z_1^*(100) = 61$

Чтобы найти оптимальную стратегию управления, т.е. определить решение задачи – оптимальное распределение средств между предприятиями $\{X_к\}$, необходимо снова пройти всю последовательность шагов – от последнего к первому.

$Z_1^*(100) = \{f_1(0) + Z_2^*(100)\} \Rightarrow x_1^* = 0$

$x_2^* = 0$

$x_3^* = 0$

$x_4^* = 100$

Таким образом, в результате решения задачи распределения средств между предприятиями получили, что для обеспечения максимального прироста выпуска продукции, равной 61 , первому и второму и третьему предприятиям согласно оптимальному распределению следует не выделять средств, четвертому предприятию необходимо выделить 100 млн. рублей.

Задача замены оборудования

Задача замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены старого оборудования (станков, производственных зданий и т. п.) в процессе его эксплуатации. С течением времени растут производственные затраты на текущий и капитальный ремонт и обслуживание, снижаются производительность труда, ликвидная стоимость.

Поэтому в определенный момент времени возникает необходимость (экономическая целесообразность) замены старого оборудования на новое. Критерием оптимальности являются, как правило, либо прибыль от эксплуатации оборудования (задача максимизации), либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение планируемого периода (задача минимизации).

Таким образом, задача состоит в нахождении плана-графика замены старого оборудования на новое в течение планируемого периода эксплуатации.

При построении модели задачи принято считать, что решение о замене выносится в начале каждого промежутка эксплуатации (например, в начале года) и что в принципе оборудование можно использовать неограниченно долго.

Основная характеристика оборудования - параметр состояния - его возраст t.

При составлении динамической модели замены процесс замены рассматривают как n -

шаговый, разбивая весь период эксплуатации на n шагов. Возможное управление на каждом шаге характеризуется качественными признаками, например, X^c (сохранить оборудование), $X^з$ (заменить оборудование).

При решении задачи замены оборудования используются следующие исходные данные:

$0 \le t \le n$ - период планирования;

$\varphi(t)$ - ликвидная стоимость оборудования ($1 \le t \le n$);

$r(t)$ - стоимость содержания оборудования ($0 \le t \le n-1$);

$p(t)$ - первоначальная стоимость оборудования ($p(t) = p_0(t) + \Delta p(t)$).

Уравнения состояний системы зависят от управления:

$$s_k = \begin{cases} t+1, \text{если } X_k = X^c \\ 1, \text{если } X_k = X^з \end{cases}$$

В самом деле, если к k – ому шагу $s_{k-1} = t$, то при сохранении оборудования $\left(X_k = X^c\right)$ через год возраст оборудования увеличится на 1. Если оборудование заменяется новым $\left(X_k = X^з\right)$, то это означает, что к началу k – ого шага её возраст $t=0$, а после года эксплуатации $t=1$, т.е. $s_k = 1$.

Показатель эффективности k - ого шага:

$$f_k(X_k, t) = \begin{cases} r(t), X_k = X^c \\ p(t) + r(0) - \varphi(t), X_k = X^з \end{cases}.$$

Пусть $Z_k^*(t)$ - условные оптимальные затраты на эксплуатацию оборудования, начиная с k - ого шага до конца, при условии, что к началу k - ого шага оборудование имеет возраст t лет.

Тогда уравнения Беллмана будут иметь вид:

$$Z_n^*(t) = \min_{\{X_n\}} \left\{ f_n(X_n, t) \right\}$$

....

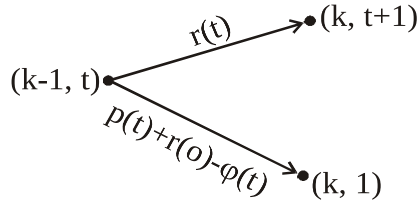
$$Z_k^*(t) = \min_{\{X_k\}} \left\{ f_k(X_k, t) + Z_{k+1}^*(t) \right\}, k = \overline{n-1,1}$$

$$Z_k^*(t) = \min \begin{cases} r(t) + Z_{k+1}(t+1) \\ p(t) + r(0) - \varphi(t) + Z_{k+1}(1) \end{cases}$$

$$Z_n^*(t) = \min \begin{cases} r(t) \\ p(t) + r(0) - \varphi(t) \end{cases}$$

$$Z_{\min} = Z_1^*(0)$$

Геометрическое решение задачи замены оборудования. Схема расчетов при решении задачи замены оборудования может быть представлена в виде двухкоординатной диаграммы (графа). На оси абсцисс будем откладывают номер шага k, на оси ординат – возраст оборудования t. Точка $(k\text{-}1,\ t)$ на плоскости соответствует началу k-го года эксплуатации оборудования возраста t лет. Перемещение на графике в зависимости от принятого управления на k-м шаге показано на рисунке.



Над каждым отрезком, соединяющим точки *(k-1;t)* и *(k;t+1)*, записываются соответствующие управлению X^c затраты на сохранение оборудования, а над отрезком, соединяющим точки *(k-1;t)* и *(k; 1)*, запишем затраты, соответствующие замене оборудования – управлению $X^ç$. Таким образом, будут размечены все отрезки, соединяющие точки на графике, соответствующие переходам из любого состояния s_{k-1} в состояние s_k.

Задание

Оборудование эксплуатируется в течение 5 лет, после чего продается. В начале каждого года принимается решение сохранить оборудование или заменить его новым. Известны первоначальная стоимость нового оборудования $p(t) = p_0 = const$, затраты на содержание оборудования **r(t)** и ликвидная стоимость оборудования **φ(t)**.

Необходимо определить оптимальную стратегию эксплуатации оборудования, обеспечивающую минимальные суммарные затраты на эксплуатацию в течение 5 лет.

Данные о затратах на содержание оборудования и ликвидной стоимости

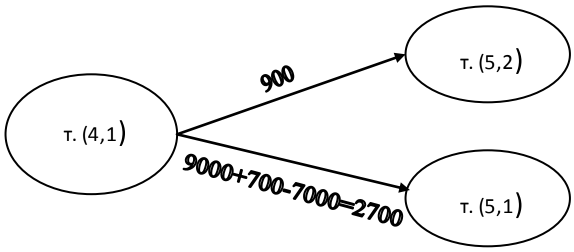
t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
r(t)	700	900	1200	1600	2000	-
φ(t)	-	7000	6000	4000	2000	1000
p(t)	9000	9000	9000	9000	9000	9000

Проведем на размеченном графе условную оптимизацию.

5 шаг. В состояниях *(5,t)* оборудование продается, условный оптимальный доход от продажи равен ликвидной стоимости *φ(t)*, но поскольку целевая функция связана с затратами, то в кружках точек *(5,t)* ставим величину дохода со знаком «-».

4 шаг.

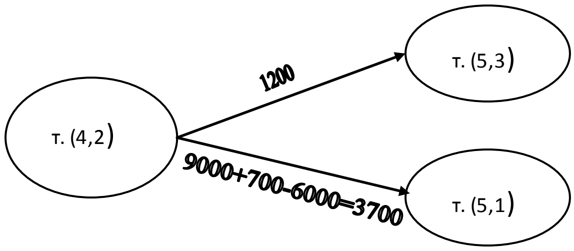
Состояние (4,1).



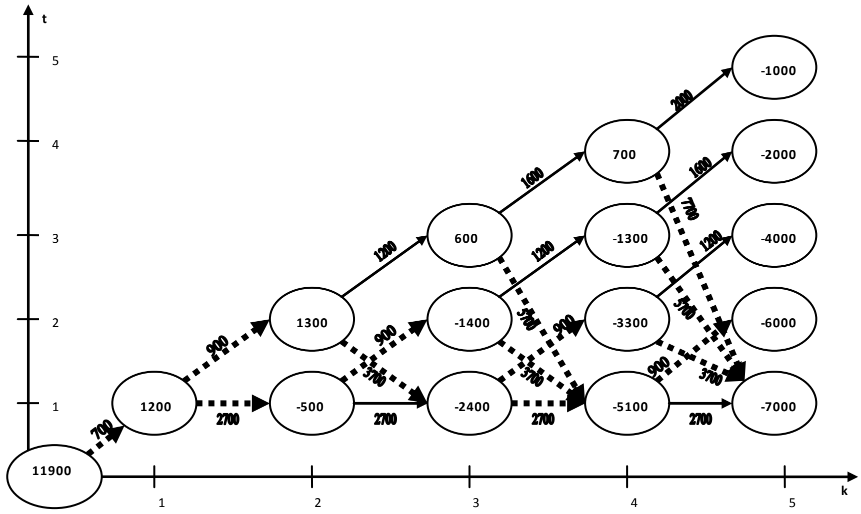
$$Z_4^*(1) = \min \begin{cases} 900 - 6000 \\ 2700 - 7000 \end{cases} = -5100$$

Таким образом, если система к последнему шагу находилась в точке (4,1), то следует идти в точку (5,2) (укажем это направление пунктирной линией), т.к. затраты в этом случае будут минимальными (9000+700-7000=2700<900).

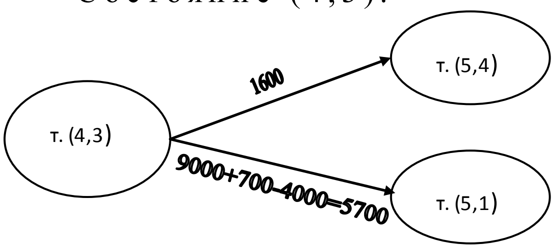
Состояние (4,2).



$$Z_4^*(2) = \min\begin{cases} 1200 - 4000 \\ 3700 - 7000 \end{cases} = -3300$$

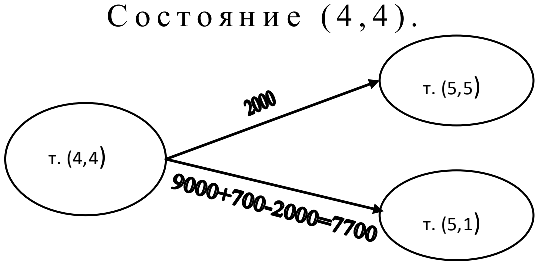


Состояние (4,3).



$$Z_4^*(3) = \min\begin{cases} 1600 - 2000 \\ 5700 - 7000 \end{cases} = -1300$$

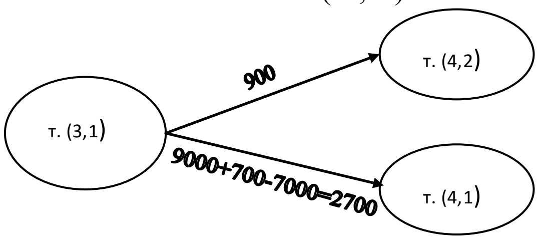
Состояние (4,4).



$$Z_4^*(4) = \min\begin{cases} 2000 - 1000 \\ 7700 - 7000 \end{cases} = 700$$

3 шаг.

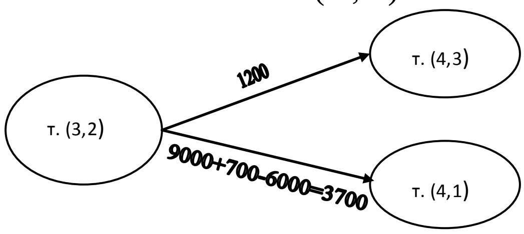
С о с т о я н и е (3 , 1) .



$$Z_3^*(1) = \min \begin{cases} 900 - 3300 \\ 2700 - 5100 \end{cases} = -2400$$

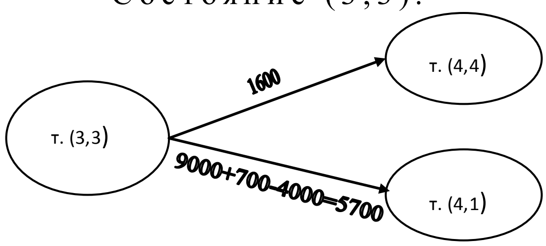
В данном случае, находясь в точке (3,1), оптимально идти как в точку (4,2), так и в точку (4,1) (в обоих случаях затраты будут одинаковыми (-2400), возникает альтернативность решения).

С о с т о я н и е (3 , 2) .



$$Z_3^*(2) = \min \begin{cases} 1200 - 1300 \\ 3700 - 5100 \end{cases} = -1400$$

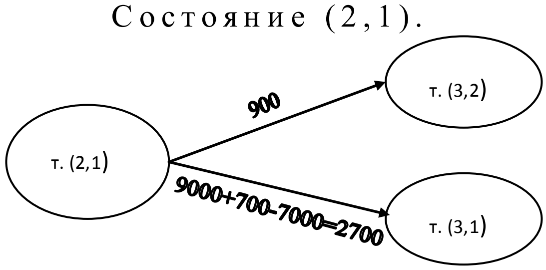
С о с т о я н и е (3 , 3) .



$$Z_3^*(3) = \min \begin{cases} 1600 + 700 \\ 5700 - 5100 \end{cases} = 600$$

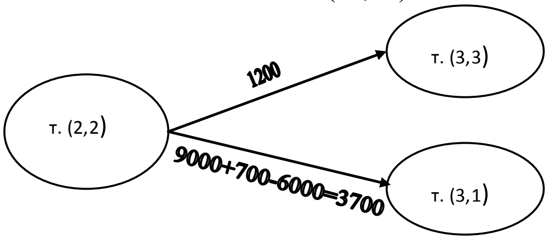
2 шаг.

С о с т о я н и е (2 , 1) .



$$Z_2^*(1) = \min \begin{cases} 900 - 1400 \\ 2700 - 2400 \end{cases} = -500$$

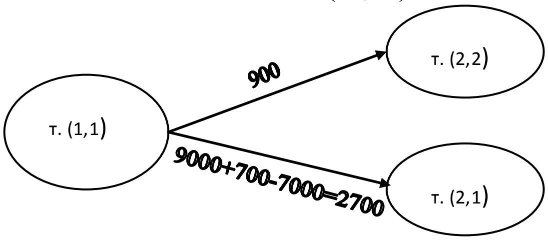
Состояние (2,2).



$$Z_2^*(2) = \min\begin{cases}1200+600\\3700-2400\end{cases} = 1300$$

1 шаг.

Состояние (1,1).



$$Z_1^*(1) = \min\begin{cases}900+1300\\2700-500\end{cases} = 2200$$

В данном случае, находясь в точке (1,1), оптимально идти как в точку (2,1), так и в точку (2,2) (в обоих случаях затраты будут одинаковыми (2200), возникает альтернативность решения).

После проведения условной оптимизации в точке (0,0) получим минимальные затраты на эксплуатацию оборудования в течение 5 лет с последующей продажей: $Z_{\min} = p(0) + r(0) + Z_1^*(1) = 9000 + 700 + 2200 = 11900$ руб.

Строим оптимальные траектории, перемещаясь из точки (0,0) по пунктирным линиям в конечное состояние $\hat{s}$.

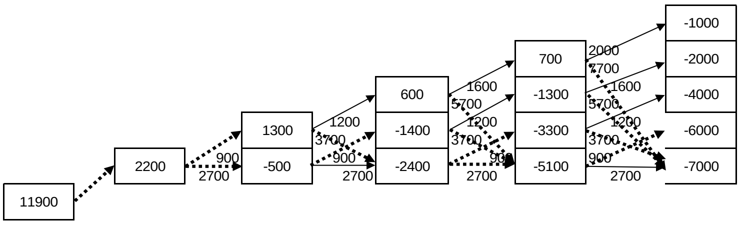
Получаем следующие наборы точек, соответствующие управлениям:

1. (0,0); (1,1); (2,2); (3,1); (4,2); (5,1) - $X^*(X^c, X^c, X^ç, X^c, X^ç)$;
2. (0,0); (1,1); (2,1); (3,2); (4,1); (5,2) - $X^*(X^c, X^ç, X^ñ, X^ç, X^ñ)$
3. (0,0); (1,1); (2,2); (3,1); (4,1); (5,2) - $X^*(X^c, X^c, X^ç, X^ç, X^ñ)$.

Согласно первой стратегии эксплуатации оборудования следует заменить в начале 3-его и 5-ого годов, согласно второй – в начале 2-ого и 4-ого годов, согласно третьей - в начале 3-его и 4-ого годов.

<u>*Замечания:*</u>

1. Стоимость приобретения оборудование зависит от года в силу изменения рыночных цен;
2. Затраты на содержание оборудования зависят не только от возраста оборудования, но и от года обслуживания;
3. Ликвидная стоимость оборудования зависит от стоимости нового оборудования в момент продажи;
4. Приобретаемое оборудование может иметь иные технологические характеристики, чем заменяемое оборудование, поэтому после замены оборудования изменяются экономические показатели производства (прибыль, рентабельность и др.).



11900
2200
900
2700
1300
-500
1200
3700
900
2700
600
-1400
-2400
1600
5700
1200
3700
900
2700
700
-1300
-3300
-5100
2000
2700
1600
5700
1200
3700
900
2700
-1000
-2000
-4000
-6000
-7000

Список использованных источников

1. Основная литература:

1.1. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD [Текст] / В. А. Охорзин. - 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/294.

1.2. Поршнев С.В. MATLAB 7. Основы работы и программирования [Текст] / С. В. Поршнев. М.: Бином-Пресс, 2011.

1.3. Гурский Д.А. Вычисления в MathCAD 12 [Текст] / Д.А. Гурский, Е.С.Турбина. – СПб.: Питер, 2006. - 544 с.

1.4. Макаров Е.Н. Инженерные расчеты в MathCAD 14 (+ CD) [Текст] / Е.Н. Макаров. – СПб.: Питер, 2007. – 592 с.

1.5. Дьяконов В. П. VisSim+Mathcad+MATLAB. Визуальное математическое моделирование [Электронный ресурс]. — Москва: СОЛОН-Пресс, 2008. — 384 с.: ил. — (Полное руководство пользователя).- ISBN 5-98003-130-8. –Режим доступа: http://www.bibliorossica.com/book.html?currBookId=10546

2. Дополнительная литература:

2.1. Охорзин В.А. Компьютерное моделирование в системе Mathcad. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 144 с.

2.2. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, Matlab 7, Maple 9. – М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.

Карамыше А.Н., Махмутов И.И.

Конспект лекций
по дисциплине «Пакеты прикладных программ (MathCAD)»

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 22.04.2019
Формат 60x84/16. Печать ризографическая.
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman».
Усл.п.л. 5 Уч.-изд. л. 4.8
Тираж 100 экз. Заказ № 1228

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре
Набережночелнинского института
Казанского (Приволжского) федерального университета

423810, г. Набережные Челны, Новый город, пр.Мира, 68/19
тел./факс (8552) 39-65-99 e-mail: ic-nchi-kpfu@mail.ru