Казанский (Приволжский) федеральный университет

Математическое образование в школе и ВУЗе в условиях перехода на новые образовательные стандарты

Материалы II Всероссийской научно-практической конференции с международным участием

15 марта 2012 г.

Казань

Математический кружок. Покрытия и разрезания

Киндер Михаил Иванович, к.ф.-м. н., доцент
Казанский (Приволжский) федеральный университет
mkinder@rambler.ru

Теория «покрытия» — обширный и интересный раздел комбинаторной геометрии, изучающей оптимальные конфигурации точек или фигур. Области, которые требуется покрыть, могут быть любой формы, конечными или бесконечными. Форма фигур, которыми требуется покрыть заданную фигуру, варьируется от задаче к задаче. Иногда требуется покрытие не конгруэнтными фигурами, а фигурами нескольких различных форм. Доказательство невозможности разрезания или покрытия в таких задачах удается получить, раскрасив клетки покрываемой фигуры специальным образом.

Эта статья посвящена обсуждению олимпиадных задач, связанных с замощением плоских областей фигурками специального вида, и предназначена в первую очередь преподавателям-тренерам и школьникам, увлекающихся решением таких задач.

Полиомино — фигуры, составленные из единичных квадратов, примыкающих друг к другу сторонами. Впервые математический мир узнал о них в 1953 г. от С.В.Голомба. Его книга [1] является источником первоначальных сведений об этих фигурах для всех любителей занимательной математики. До сих пор не существует эффективного алгоритма, позволяющего для любого данного конечного набора различных или одинаковых полиомино определить, можно ли из него сложить мозаику в виде некоторой заданной фигуры или части плоскости.

Тема разрезания клетчатых фигур на полиомино часто встречается в олимпиадной практике, многие идеи и подходы к решению таких задач уже давно стали стандартными. В этой статье мы познакомимся с методом «раскраски».

1. «Шахматная» раскраска

Сначала рассмотрим старинную занимательную задачу, связанную с разрезанием шахматной доски на «доминошки» — прямоугольники размером 1×2.

Пример 1. *Можно ли замостить костяшками домино размером 1×2 шахматную доску 8×8, из которой вырезаны два противоположных угловых поля?*

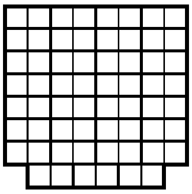

Рис. 1,а

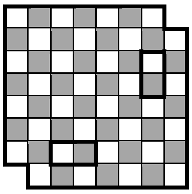

Рис. 1,б

Решение. Замощение возможно, если вырезанные угловые клетки принадлежат одной боковой стороне (рис. 1,*а*). Однако, если эти клетки находятся на несмежных боковых сторонах доски, то замостить ее доминошками уже не удается. Для доказательства используем то, что доска шахматная и все ее клетки раскрашены в «шахматном» порядке (рис. 1,*б*).

Заметим, что вырезанные поля одного цвета, пусть для определенности черного. Значит, на доске осталось 32 белых и 30 черных клеток. Для их покрытия нужна $62:2=31$ кость домино. Так как каждая доминошка *всегда* накрывает одну белую и одну черную клетку, то 31 костью домино можно накрыть только 31 белую и 31 черную клетки. Полученное противоречие означает, что *нельзя* замостить шахматную доску, из которой вырезаны два диагональных угловых поля.

Замечание. Обратите внимание на интересный факт: приведенное доказательство применимо к *любой* фигуре, у которой после раскрашивания в шахматном порядке клеток одного цвета оказывается больше, чем клеток другого цвета.

Следующая задача также использует идею шахматной раскраски для невозможности разрезания квадрата 10×10 на фигурки в форме буквы «Т».

Пример 2. *Можно ли квадрат 10×10 клеток разрезать на фигурки Т-тетрамино из четырех клеток (рис. 2,а)?*