УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 2
С. 172–179

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.544

ОЦЕНКИ ГРАДИЕНТА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО РАДИУСА И НЕРАВЕНСТВА ТИПА ШВАРЦА – ПИКА ДЛЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

Д.Х. Гиниятова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Пусть Ω и Π – гиперболические области в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Через $A(\Omega,\Pi)$ обозначим класс функций f, локально голоморфных или мероморфных в Ω и таких, что $f(\Omega)\subset\Pi$. Одним из центральных вопросов геометрической теории функций являются оценки высших производных $|f^{(n)}(z)|$ аналитических функций из класса $A(\Omega,\Pi)$ с штрафным множителем $C_n(\Omega,\Pi)$. Эти оценки принято называть неравенствами типа Шварца – Пика. Большое количество результатов по данной тематике получено для односвязных областей. Поэтому естественным является интерес к исследованию подобных задач для конечносвязных областей. Известно, что для любых пар гиперболических областей константа $C_2(\Omega,\Pi)$ зависит лишь от величины градиента гиперболического радиуса соответствующих областей. В настоящей работе получены оценки градиента гиперболического радиуса и штрафного множителя в неравенстве типа Шварца – Пика для эксцентрического кольца и рассмотрен предельный случай - круг с произвольно выколотой точкой.

Ключевые слова: метрика Пуанкаре, неравенства типа Шварца – Пика, конформные отображения, штрафные множители

Введение

Пусть Ω – односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\Omega\neq\mathbb{C}$. Рассмотрим однолистное конформное отображение $F:\Delta\to\Omega$ единичного круга $\Delta=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|<1\}$ на Ω. Обозначим $z=F(\zeta)$. Известно, что в Ω коэффициент метрики Пуанкаре определяется следующим равенством:

$$\lambda_\Omega(z)|dz|=\lambda_\Delta(\zeta)|d\zeta|\quad\forall\, z\in\Delta,$$

откуда

$$\lambda_\Omega(z)=\frac{1}{|F'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)}\quad\forall\, z\in\Delta.$$

Коэффициент метрики Пуанкаре (гиперболической метрики) определяется также и для областей, граница которых содержит не менее трех точек в $\mathbb{C}$, см. [1, 2].

Пусть теперь Ω и Π – области в $\mathbb{C}$, снабженные гиперболической метрикой. Через $A(\Omega,\Pi)$ обозначим класс функций f, локально голоморфных или мероморфных в Ω, таких что $f(\Omega)\subset\Pi$. Пусть $\lambda_\Omega(z)$ и $\lambda_\Pi(w)$ – коэффициенты гиперболической метрики в точках z и w соответственно.

Рассмотрим функционал $L_n(f,z,\Omega,\Pi)$ (см. [2, гл. 4]), определяемый из равенства

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}\le L_n(f,z,\Omega,\Pi)\frac{(\lambda_\Omega(z))^n}{\lambda_\Pi(w)},\quad n\in\mathbb{N},\quad f(z)\in A(\Omega,\Pi),\quad z\in\Omega, w\in\Pi.$$

Многие задачи геометрической теории функций связаны с нахождением величин

$$M_n(z,\Omega,\Pi) = \sup_{f\in A(\Omega,\Pi)} L_n(f,z,\Omega,\Pi)$$

и

$$C_n(\Omega,\Pi) = \sup_{z\in\Omega} M_n(z,\Omega,\Pi).$$

Понятно, что константа C_n не зависит от выбора функции $f \in A(\Omega,\Pi)$ и точки $z\in\Omega$ и представляет собой наименьшее возможное число в неравенстве

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \le C_n(\Omega,\Pi)\,\frac{(\lambda_\Omega(z))^n}{\lambda_\Pi(w)}.$$

В литературе также может встречаться термин *штрафной множитель*, обозначающий константу C_n.

Классическая лемма Шварца – Пика утверждает, что $M_1(\Delta,\Delta) = C_1(\Delta,\Delta) = 1$. Большинство результатов по неравенствам типа Шварца – Пика, связанных с нахождением константы C_n, получено для односвязных областей (например, [2–12]), поэтому изучение данной тематики для произвольных конечносвязных областей представляет особый интерес. Существование и единственность константы C_n обеспечивает следующая теорема, доказанная в [13].

Теорема. *Пусть Ω и Π – конечносвязные гиперболические области в $\mathbb{C}$. Константа C_n конечна тогда и только тогда, когда обе границы $\partial\Omega$ и $\partial\Pi$ не содержат изолированных точек.*

Для случая $n = 2$ задача нахождения константы C_n решена Авхадиевым и Вирцем [14].

Теорема. *Для всех гиперболических областей $\Omega,\Pi\in\mathbb{C}$*

$$C_2(\Omega,\Pi) = C_2(\Pi,\Omega) = \frac{1}{2}\left(\sup_{z\in\Omega}\left|\nabla\left(\frac{1}{\lambda_\Omega(z)}\right)\right| + \sup_{w\in\Pi}\left|\nabla\left(\frac{1}{\lambda_\Pi(w)}\right)\right|\right), \tag{1}$$

где

$$\nabla\left(\frac{1}{\lambda_\Omega(z)}\right) = \nabla R(z,\Omega) = \frac{\partial R}{\partial x} + i\frac{\partial R}{\partial y} = 2\frac{\partial R}{\partial \bar z}, \quad z = x+iy.$$

Величина $R(z,\Omega) = 1/(\lambda_\Omega(z))$ называется *гиперболическим радиусом* области Ω в точке z. В случае, когда Ω – односвязная область, не содержащая бесконечно удаленной точки, $R(z,\Omega)$ называется *конформным радиусом* области Ω в точке z. Исследованию данной характеристики области и смежных вопросов посвящено множество работ, среди недавних (см., например, [15, 16] и др.)

Итак, в случае $n = 2$ задача определения константы C_n для конкретных пар областей сводится к оценке градиента гиперболического радиуса соответствующих областей. Данная тематика широко представлена в работах [14, 17–19]. В [14] доказана следующая

Теорема 1. *Пусть A – концентрическое кольцо с модулем $M(A)$ и $\gamma(\Omega) = \sup_{z\in\Omega}|\nabla(1/(\lambda_\Omega(z)))|$, тогда*

$$\frac{(\gamma(A))^2}{16} = \frac{1}{4} + (M(A))^2. \tag{2}$$

Отсюда, применяя (1), немедленно вытекает

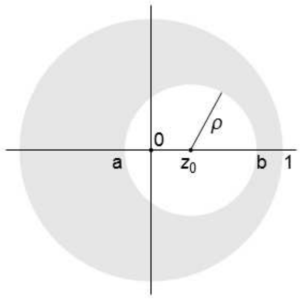

Рис. 1

Следствие 1. *Пусть* A_1 *и* A_2 *– два концентрических кольца с модулями* M_1 *и* M_2 *соответственно, тогда*

$$C_2(A_1, A_2) = \sqrt{1+4M_1^2} + \sqrt{1+4M_2^2}. \tag{3}$$

1. Основные результаты

Целью настоящей работы является получение формул, аналогичных (2) и (3), для экцентрического кольца, то есть для двусвязной области, ограниченной двумя окружностями с несовпадающими центрами. Так как величина $R(z,\Omega)$ инвариантна относительно линейных преобразований вида $Az+B$, для простоты рассуждений мы можем рассмотреть эксцентрическое кольцо Ω, ограниченное окружностями $|z|=1$ и $|z-z_0|=\rho \in (0,1)$, $z_0=(a+b)/2 \in (0,1)$, $\rho=(b-a)/2<1$. (см. рис. 1).

Напомним, что каждая двусвязная область может быть отображена на концентрическое кольцо, при этом кольцо, на которое отображается данная двусвязная область, определяется однозначно с точностью до линейного преобразования. *Модулем двусвязной области* $M(\Omega)$ называется модуль концентрического кольца, на которое осуществляется отображение. Он определяется по формуле

$$M(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}, \quad 0<R_1<R_2,$$

где R_1 и R_2 – радиусы окружностей, ограничивающих концентрическое кольцо $R_1<|\zeta|<R_2$, на которое конформно отображается область Ω.

Мы можем выбрать эксцентрическое кольцо Ω, зафиксировав параметры $\{M,t\}$, где $M=M(\Omega)$ – модуль области Ω, а величина $t\in[0,1)$ определяется по формуле

$$t=\frac{a+q}{1+qa}=\frac{b-q}{1-bq}, \quad q=e^{-2\pi M}.$$

Величину t будем называть смещением эксцентрического кольца Ω. При $t=0$ область Ω превращается в концентрическое кольцо, и мы оказываемся в условиях теоремы 1.

Отметим, что функция $f(\zeta)=\dfrac{\zeta+t}{1+t\zeta}$ осуществляет конформное отображение концентрического кольца $A_q=\{\zeta\in\mathbb{C}: q<|\zeta|<1\}$ на эксцентрическое кольцо Ω. Обозначим

$$\gamma(\Omega)=\max_{z\in\Omega}|\nabla R(z,\Omega)|.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *Для эксцентрического кольца* Ω *с модулем* M *и со смещением* $t \in [0,1)$ *справедлива следующая точная оценка:*

$$\gamma(\Omega) \le \sqrt{4+16M^2} + 4t,$$

равенство достигается при $t = 0$.

Доказательство. Известно (см. [1]), что

$$R(w,\Pi) = R(z,\Omega)|F'(z)|, \quad \Omega, \Pi \in \mathbb{C}, F \in A(\Omega,\Pi),$$

следовательно,

$$R(z,\Omega) = |f'(\zeta)|R(\zeta, A_q). \tag{4}$$

Дифференцируя равенство (4) по ζ, получим

$$\frac{\partial R(z,\Omega)}{\partial z} f'(\zeta) = \frac{\partial R(\zeta, A_q)}{\partial \zeta} |f'(\zeta)| + \frac{R(\zeta, A_q)}{2} \cdot \frac{\sqrt{\overline{f'(\zeta)}}}{\sqrt{f'(\zeta)}} f''(\zeta).$$

Откуда

$$|\nabla R(z,\Omega)| \le |\nabla R(\zeta, A_q)| + R(\zeta, A_q) \left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right|. \tag{5}$$

Согласно теореме Авхадиева – Вирца

$$|\nabla R(\zeta, A_q)| \le \sqrt{4+16M^2}. \tag{6}$$

При этом

$$\left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right| = \left| \frac{-2t}{1+\zeta t} \right| \le \frac{2t}{1-rt}, \quad r = |\zeta| \tag{7}$$

и согласно свойству гиперболического радиуса (см. [1])

$$R(\zeta, A_q) \le R(\zeta, \Delta) = 1 - |\zeta|^2 = 1 - r^2. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что

$$R(\zeta, A_q) \left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right| \le 2t \frac{1-r^2}{1-rt}. \tag{9}$$

Отношение $(1-r^2)/(1-rt)$ на $[0,1]$ достигает максимума по r, когда $t = t_0 = (2r_0)/1 + r_0^2$, где r_0 – точка максимума. Следовательно,

$$\frac{1-r^2}{1-rt} \le \frac{1-r_0^2}{1-\dfrac{2r_0^2}{1+r_0^2}} = 1 + r_0^2 \le 2. \tag{10}$$

Из (5), (6), (9), (10) следует утверждение теоремы. □

Следствие 2. *Пусть* Ω_1 *и* Ω_2 *– два эксцентрических кольца с модулями* M_1 *и* M_2 *и смещениями* t_1 *и* t_2 *соответственно, тогда*

$$C_2(\Omega_1, \Omega_2) \le \sqrt{1+4M_1^2} + \sqrt{1+4M_2^2} + 2(t_1 + t_2),$$

равенство достигается при $t_1 = t_2 = 0$.

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из теоремы 2 и формулы (1). □

Рассмотрим теперь предельный случай эксцентрического кольца – круг с произвольно выколотой точкой. Для начала исследуем область, представляющую собой круг с выколотым центром $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

Функция $f(\zeta) = \exp\left(\dfrac{1+\zeta}{\zeta-1}\right)$ определяет универсальную поверхность наложения (см. [1]) для D_0. Найдем гиперболический радиус этой области. Имеем

$$R(z, D_0) = |f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2), \quad |\zeta| < 1.$$

Вычислим $|f'(\zeta)|$:

$$f'(\zeta) = -\frac{2}{(\zeta-1)^2}\exp\left(\frac{1+\zeta}{\zeta-1}\right) = -\frac{2z}{(\zeta-1)^2},$$

следовательно,

$$|f'(\zeta)| = \frac{2|z|}{|1-\zeta|^2}.$$

Введем дополнительную переменную $w = \dfrac{1+\zeta}{\zeta-1}$, тогда

$$\zeta = \frac{w+1}{w-1}, \quad 1 - |\zeta|^2 = -\frac{4\operatorname{Re} w}{|w-1|^2}, \quad |1-\zeta|^2 = \frac{4}{|w-1|^2}.$$

Поскольку $z = \exp^w$, то $\ln z = w$. По определению $\ln z = \ln|z| + \imath \arg z$, следовательно, $\operatorname{Re} w = \ln|z|$.

Таким образом,

$$R(z, D_0) = -2|z|\ln|z|, \quad \nabla R(z, D_0) = -2\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}}\,(\ln|z| + 1) = -2\exp(\imath\varphi)(\ln|z| + 1),$$

где $z = |z|e^{\imath\varphi}$, $0 < |z| < 1$. Очевидно, $-\infty \le \ln|z| + 1 \le 1$ и $\ln|z| + 1 = 0$ при $|z| = 1/e$. Следовательно,

$$|\nabla R(z, D_0)| = \begin{cases} 2(\ln|z| + 1), & \text{если } 1/e \le |z| < 1, \\ -2(\ln|z| + 1), & \text{если } 0 < |z| < 1/e. \end{cases}$$

Мы видим, что при $|z| \to 0$ величина $|\nabla R(z, D_0)|$ неограниченно растет, и мы не можем получить оценку сверху. Вернемся теперь к рассмотрению круга с произвольно выколотой точкой a. Обозначим эту область D_a. Поскольку

$$|\nabla R(z, D_a)| \le |\nabla R(\zeta, D_0)| + R(\zeta, D_0)\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right|,$$

то мы не можем оценить сверху данную величину. Таким образом, предельная область – круг с выколотой точкой – представляет собой «плохую» область в том смысле, что для нее невозможно получить оценку сверху для модуля градиента гиперболического радиуса, и, соответственно, константы C_2.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю, профессору Ф.Г. Авхадиеву за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

2. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* Schwarz–Pick Type Inequalities. – Boston-Berlin-Bern: Birkhäuser, 2009. – 156 p.

3. *Ruscheweyh St.* Über einige Klassen in Einheitskreis holomorpher Funktionen // Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszent. Graz. – 1974. – H. 7. – 12 S.

4. *Ruscheweyh St.* Two remarks on bounded analytic functions // Serdica, Bulg. Math. Publ. – 1985. – V. 11, No 2. – P. 200–202.

5. *Yamashita S.* Higher derivatives of holomorphic function with positive real part // Hokkaido Math. J. – 2000. – V. 29, No 1. – P. 23–36.

6. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* Schwarz–Pick inequalities for derivatives of arbitrary order // Constr. approx. – 2003. – V. 19, No 1. – P. 265–277. – doi: 10.1007/s00365-002-0503-4.

7. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* The punishing factors for convex pairs are 2^{n-1} // Rev. Math. Iberoam. – 2007. – V. 23, No 3. – P. 847–860.

8. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* Estimates of the derivatives of meromorphic maps from convex domains into concave domains // Comp. Methods Funct. Theory. – 2008. – V. 8, No 1. – P. 107–119. – doi: 10.1007/BF03321674.

9. *Li J.-L.* Estimates for derivatives of holomorphic functions in a hyperbolic domain // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – V. 329, No 1. – P. 581–591. – doi: 10.1016/j.jmaa.2006.06.090.

10. *Chua K.S.* Derivatives of univalent functions and the hyperbolic metric // Rocky Mt. J. Math. – 1996. – V. 26, No 1. – P. 63–75. – doi: 10.1216/rmjm/1181072103.

11. *Гиниятова Д.Х.* Обобщение теорем Саца и Рушевея о точных оценках производных аналитических функций // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 12. – С. 84–89.

12. *Abramov D.A., Avkhadiev F.G., Giniyatova D.Kh.* Versions of the Schwarz lemma for domain moments and the torsional rigidity // Lobachevskii J. Math. – 2011. – V. 32, No 2. – P. 149–158. – doi: 10.1134/S1995080211020028.

13. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* Punishing factors for finitely connected domains // Monatsh. Math. – 2006. – V. 147, No 2. – P. 103–115. – doi: 10.1007/s00605-005-0334-z.

14. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* A theorem of Teichmüller, Uniformly Perfect Sets and Punishing Factors: Preprint. – Braunschweig: Tech. Univ. Braunschweig, 2005. – 16 p.

15. *Казанцев А.В.* Множество Гахова в пространстве Хорнича при блоховских ограничениях на предшварцианы // Учен.зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 65–82.

16. *Казанцев А.В.* О выходе из множества Гахова, контролируемом условиями подчиненности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 1. – С. 31–43.

17. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* The conformal radius as a function and its gradient image // Isr. J. Math. – 2005. – V. 145, No 1. – P. 349–374. – doi: 10.1007/BF02786700.

18. *Аксентьев Л.А., Ахметова А.Н.* О градиенте конформного радиуса плоской области // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн 1. – С. 167–178.

19. *Ахметова А.Н.* Свойства конформного радиуса и теоремы единственности для внешних обратных краевых задач: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Казань, 2009. – 105 с.

Поступила в редакцию
02.10.15

Гиниятова Динара Халиловна, соискатель кафедры теории функций и приближений
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *normaliti@gmail.com*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 2, pp. 172–179

Estimates of the Hyperbolic Radius Gradient and Schwarz–Pick Inequalities for the Eccentric Annulus

D.Kh. Giniyatova

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *normaliti@gmail.com*

Received October 2, 2015

Abstract

Let Ω and Π be hyperbolic domains in the complex plane $\mathbb{C}$. By $A(\Omega,\Pi)$ we shall designate the class of functions f which are holomorphic or meromorphic in Ω and such that $f(\Omega)\subset\Pi$. Estimates of the higher derivatives $|f^{(n)}(z)|$ of the analytic functions from the class $A(\Omega,\Pi)$ with the punishing factor $C_n(\Omega,\Pi)$ is one of the main problems of geometric theory of functions. These estimates are commonly referred to as Schwarz–Pick inequalities. Many results concerning this problem have been obtained for simply connected domains. Therefore, the research interest in such problems for finitely connected domains is natural. As known, the constant $C_2(\Omega,\Pi)$ for any pairs of hyperbolic domains depends only on the hyperbolic radius gradient of the corresponding domains. The main result of this paper is estimates of the hyperbolic radius gradient and the punishing factor in the Schwarz–Pick inequality for the eccentric annulus. We also consider the extreme case – the randomly punctured circle.

Keywords: Poincare metrics, Schwarz–Pick inequalities, conformal mapping, punishing factors

Acknowledgments. The author of this paper is grateful to the scientific supervisor, Professor F.G. Avkhadiev, for his careful attention to this study and valuable advice.

References

1. Goluzin G.M. Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow, Nauka, 1966. 628 p. (In Russian)
2. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. Schwarz–Pick Type Inequalities. Boston-Berlin-Bern: Birkhäuser, 2009. 156 p.
3. Ruscheweyh St. Über einige Klassen in Einheitskreis holomorpher Funktionen. *Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszent. Graz.*, 1974, no. 7, pp. 1–12.
4. Ruscheweyh St. Two remarks on bounded analytic functions. *Serdica, Bulg. Math. Publ.*, 1985, vol. 11, no. 2, pp. 200–202.
5. Yamashita S. Higher derivatives of holomorphic function with positive real part. *Hokkaido Math. J.*, 2000, vol. 29, no. 1, pp. 23–36.

6. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. Schwarz–Pick inequalities for derivatives of arbitrary order. *Constr. Approx.*, 2003, vol. 19, no. 1, pp. 265–277. doi: 10.1007/s00365-002-0503-4.

7. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. The punishing factors for convex pairs are 2^{n-1}. *Rev. Math. Iberoam.*, 2007, vol. 23, no. 3, pp. 847–860.

8. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. Estimates of the derivatives of meromorphic maps from convex domains into concave domains. *Comp. Methods Funct. Theory*, 2008, vol. 8, no. 1, pp. 107–119. doi: 10.1007/BF03321674.

9. Li J.-L. Estimates for derivatives of holomorphic functions in a hyperbolic domain. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 329, no. 1, pp. 581–591. doi: 10.1016/j.jmaa.2006.06.090.

10. Chua K.S. Derivatives of univalent functions and the hyperbolic metric. *Rocky Mt. J. Math.*, 1996, vol. 26, no. 1, pp. 63–75. doi: 10.1216/rmjm/1181072103.

11. Giniyatova D.Kh. Generalization of theorems of Szász and Ruscheweyh on exact bounds for derivatives of analytic functions. *Russ. Math.*, 2009, vol. 53, no. 12, pp. 72–76.

12. Abramov D.A., Avkhadiev F.G., Giniyatova D.Kh. Versions of the Schwarz lemma for domain moments and the torsional rigidity. *Lobachevskii J. Math.*, 2011, vol. 32, no. 2, pp. 149–158. doi: 10.1134/S1995080211020028.

13. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. Punishing factors for finitely connected domains. *Monatsh. Math.*, 2006, vol. 147, pp. 103–115. doi: 10.1007/s00605-005-0334-z.

14. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. A Theorem of Teichmüller, Uniformly Perfect Sets and Punishing Factors. Preprint. Braunschweig, Tech. Univ. Braunschweig, 2005, 16 p.

15. Kazantsev A.V. Gakhov set in the Hornich space under the Bloch restriction on pre-Schwarzians. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2013, vol. 155, no. 2, pp. 65–82. (In Russian)

16. Kazantsev A.V.On the exit out of the Gakhov set controlled by the subordination conditions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2014, vol. 156, no. 1, pp. 31–43. (In Russian)

17. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. The conformal radius as a function and its gradient image. *Isr. J. Math.*, 2005, vol. 145, pp. 349–374.

18. Aksentyev L.A., Akhmetova A.N. On the gradient of the conformal radius of a plane domain. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, no. 1, pp. 167–178.

19. Akhmetova A.N. Properties of the conformal radius and the uniqueness theorem for external inverse boundary value problems. *Cand. Phys.-Math. Sci. Diss.* Kazan, 2009.

***Для цитирования*:** *Гиниятова Д.Х.* Оценки градиента гиперболического радиуса и неравенства типа Шварца – Пика для эксцентрического кольца // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 2. – С. 172–179.

***For citation*:** Giniyatova D.Kh. Estimates of the hyperbolic radius gradient and Schwarz–Pick type inequalities for the eccentric annulus. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 2, pp. 172–179. (In Russian)