Известия вузов. Математика
2010, № 3, с. 72–81

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

С.Н. ТРОНИН

АЛГЕБРЫ НАД ОПЕРАДОЙ СФЕР

Аннотация. Исследована операда, компонентами которой являются многомерные сферы. Получено описание (с точностью до рациональной эквивалентности) многообразия алгебр над этой операдой в терминах символов операций и тождеств.

Ключевые слова: операда, алгебра, многообразие, рациональная эквивалентность, конвексор, симплекс, сфера.

УДК: 512

Abstract. We study an operad whose components are multidimensional spheres. We give a description (up to the rational equivalence) of the variety of algebras over this operad in terms of symbols of operations and identities.

Keywords: operad, algebra, variety, rational equivalence, convexor, simplex, sphere.

В статье [1] было замечено, что семейство многомерных сфер образует операду. В данной работе эта операда исследуется более подробно. Основной результат (теорема 5) состоит в нахождении явного вида (операции и тождества) многообразия алгебр, рационально эквивалентного многообразию алгебр над операдой сфер. Оказалось, что операции и тождества найденного многообразия имеют заметное сходство с операциями и тождествами многообразия конвексоров (см. [2], [3]). Почему это так, объясняет теорема 4. Кроме того, описано большое количество примеров операд, похожих на операду сфер по способу своего определения.

Многомерные сферы являются достаточно важным объектом, и поэтому наличие ранее не изучавшейся алгебраической структуры на семействе всех многомерных сфер, по нашему мнению, представляет определенный интерес. Заметим, что в [1] отмечено также существование структуры операды на семействе всех многомерных (полых) кубов, центры которых находятся в начале координат, грани параллельны осям координат, а ребра имеют длину 2.

Отметим, что операда многомерных сфер (как и все другие встречающиеся в данной работе операды) является одним из примеров коммутативных операд, введенных в [4].

Обозначения и терминология здесь соответствуют [1]. По поводу общей теории операд см. книги [5]–[7], а также работу [8].

1. Операда сфер и близкие ей операды

Основой дальнейших построений является следующая операда, изученная в [9]. Пусть G — полугруппа с единицей 1. Рассмотрим семейство множеств $\{G(n) \mid n \geq 1\}$, где $G(n) = G^n$. Элементы $G(n)$ — это последовательности (строки) $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ элементов $x_i \in G$.

Поступила 11.12.2007

Умножение элемента $g \in G$ на строку $\overline{x}$ определяется по правилу $g\overline{x} = (gx_1, \dots, gx_n)$. Определим операции композиции для всех $n_1, \dots, n_m$ как отображения вида

$$G(m) \times G(n_1) \times \dots \times G(n_m) \to G(n_1 + \dots + n_m), \quad (\overline{x}, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_m) \mapsto \overline{x}\,\overline{y}_1 \dots \overline{y}_m, \tag{1}$$

где $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in G(m)$, $\overline{y}_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i}) \in G(n_i)$ для всех $1 \le i \le m$, и $\overline{x}\,\overline{y}_1 \dots \overline{y}_m = (x_1\overline{y}_1, \dots, x_m\overline{y}_m)$. Предполагается, что в последнем выражении последовательности $x_i\overline{y}_i$ записываются без скобок.

Зададим также для всех n действие группы подстановок n-й степени Σ_n на множестве $G(n)$, полагая $\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$ при $\sigma \in \Sigma_n$, $(x_1, \dots, x_n) \in G(n)$.

Известно (см. [9]), что семейство $\{G(n) \mid n \ge 1\}$ с определенными только что операциями композиции и действия групп подстановок образует операду. Эту операду для краткости будем обозначать так же, как и исходную полугруппу, через G.

Везде далее будем рассматривать случай $G = \mathbb{R}$ — поле действительных чисел, как полугруппа по умножению. В статье [1] была введена следующая подоперада операды $\mathbb{R}$. Это семейство множеств $S = \{S(n) \mid n \ge 1\}$, где $S(n) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n,\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. Заметим, что в [1] для этой операды было использовано обозначение **Sph**, в данной же работе за основу принимается стандартное обозначение многомерных сфер (см., например, [10]) со сдвигом размерностей: $S(n) = S^{n-1}$.

Определим для каждого действительного ненулевого числа k следующие семейства множеств: $S_k = \{S_k(n) \mid n \ge 1\}$, где $S_k(n)$ есть множество всех $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих соотношению $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k = 1$, и также $D_k = \{D_k(n) \mid n \ge 1\}$, где $D_k(n) = \Big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k \le 1\Big\}$, $O_k = \{O_k(n) | n \ge 1\}$, где $O_k(n) = \Big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k \ge 1\Big\}$. При этом ввиду произвольности числа $k \ne 0$ везде необходимо предполагать, что значение $x_i^k \in \mathbb{R}$ определено для каждого x_i.

Таким образом, $S = S_2$. Аналогично этому положим $D = D_2$ и $O = O_2$. Обозначение D соответствует принятому в топологии обозначению для дисков ($D(n) = D^{n-1}$).

Рассмотрим также семейства $\overline{S}_k$, $\overline{D}_k$, $\overline{O}_k$, определяемые следующим образом: $\overline{S}_k(n) = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^k = 1\Big\}$, $\overline{D}_k(n) = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^k \le 1\Big\}$, $\overline{O}_k(n) = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^k \ge 1\Big\}$.

Операду $\overline{S}_1$ будем обозначать также через $\overline{\Delta}$, так как данная операда является естественной надоперадой операды симплексов Δ, изученной в [1]. Напомним, что $\Delta(n) = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, x_i \ge 0,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\Big\}$. Связь с традиционным обозначением для стандартных симплексов, как и выше: $\Delta(n) = \Delta_{n-1}$.

Кроме того, пусть $\hat{\overline{\Delta}} = \{\hat{\overline{\Delta}}(n) \mid n \ge 1\}$, где $\hat{\overline{\Delta}}(n) = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \le 1\Big\}$, и пусть $\check{\overline{\Delta}} = \{\check{\overline{\Delta}}(n) | n \ge 1\}$, где $\check{\overline{\Delta}}(n) = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \ge 1\Big\}$.

Можно определить еще одно интересное семейство подмножеств пространств $\mathbb{R}^n$, компоненты которого имеют вид $S_{k,*}(n) = \bigcup\limits_{\overline{\nu}} S_{k,\overline{\nu}}(n)$, где $S_{k,\overline{\nu}}(n) = \Big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i x_i^k = 1\Big\}$, причем $\overline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, и $\nu_i = \pm 1$.

В этих определениях также предполагается, что для всех x_i существуют степени $x_i^k \in \mathbb{R}$. Ясно, что $S_2 = S$, $\overline{S}_{2m} = S_{2m}$, $\overline{D}_{2m} = D_{2m}$, $\overline{O}_{2m} = \widehat{O}_{2m}$.

Если $K = \{K(n) \mid n \geq 1\}$ — любое из заданных выше семейств множеств, то через K_+ будет обозначаться семейство, состоящее из множеств $K_+(n)$, где $K_+(n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in K(n) \mid x_i \geq 0\}$. В частности, $\Delta = (S_1)_+$.

Теорема 1. *Семейства S_k, D_k, O_k, $\overline{D}_k$, $\overline{O}_k$, $\widehat{\overline{\Delta}}$, $\check{\overline{\Delta}}$, и $S_{k,*}$ являются подоперадами операды $\mathbb{R}$. Если K — любая из этих операд, то семейство K_+ является подоперадой этой операды.*

Доказательство. Рассуждения во всех случаях проводятся аналогичным образом, поэтому достаточно исследовать случай S_k. Покажем, что семейство S_k замкнуто относительно операции композиции (1). Пусть $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in S_k(m)$, $\overline{y}_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i}) \in S_k(n_i)$, $1 \leq i \leq m$, $\overline{z} = \overline{x}\overline{y}_1 \dots \overline{y}_m = (x_1 y_{1,1}, \dots, x_1 y_{1,n_1}, \dots, x_m y_{m,1}, \dots, x_m y_{m,n_m})$.

Рассмотрим $s = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n_i} x_i^k y_{i,j}^k = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^k \Big(\sum\limits_{j=1}^{n_i} y_{i,j}^k \Big)$. Так как для всех i по условию $\sum\limits_{j=1}^{n_i} y_{i,j}^k = 1$, то $s = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^k = 1$. Следовательно, $\overline{z} \in S_k(n_1 + \dots + n_m)$. Так же легко проверяются и остальные пункты из определения операды. □

Для каждого действительного $k \neq 0$ рассмотрим семейство, возможно, не всюду определенных отображений $\varphi^{(k)} = \{\varphi_n^{(k)} \mid \varphi_n^{(k)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ n \geq 1\}$, где

$$\varphi_n^{(k)}(x_1, \dots, x_n) = (\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^k, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^k, \dots, \operatorname{sgn}(x_n)|x_n|^k).$$

Здесь функция $\operatorname{sgn}(x)$ принимает значение 1 при положительном x, -1 при отрицательном x, и $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Очевидно, $\operatorname{sgn}(ab) = \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$, и $x = \operatorname{sgn}(x)|x|$ для каждого $x \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $\varphi_n^{(1)}$ — тождественные отображения для всех n.

Лемма 1. 1) *Равенство*

$$\varphi_{n_1+\dots+n_m}^{(k)}(\overline{x}\,\overline{y}_1 \dots \overline{x}_m) = \varphi_m^{(k)}(\overline{x})\varphi_{n_1}^{(k)}(\overline{y}_1) \dots \varphi_{n_m}^{(k)}(\overline{y}_m)$$

выполнено, если одновременно определены и левая и правая его части. Здесь $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\overline{y}_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i})$, $1 \leq i \leq m$.

Если значение $\varphi_m^{(k)}(x_1, \dots, x_m)$ определено, то $\varphi_m^{(k)}(\sigma\overline{x}) = \sigma\varphi_m^{(k)}(\overline{x})$ для $\sigma \in \Sigma_m$.

2) *Равенство $\varphi_n^{(k)}(\varphi_n^{(r)}(x_1, \dots, x_n)) = \varphi_n^{(kr)}(x_1, \dots, x_n)$ выполняется, если одновременно определены его левая и правая части.*

Все утверждения леммы доказываются непосредственной проверкой. □

Лемма 2. *Имеются изоморфизмы операд (m, d — целые положительные числа)*

1) *$S_{md} \cong S_m$, $D_{md} \cong D_m$, $O_{md} \cong O_m$ при нечетном d;*

2) *$S_{2^d} \cong S_2$, $D_{2^d} \cong D_2$, $O_{2^d} \cong O_2$;*

3) *$S \cong \overline{\Delta}$, $D \cong \widehat{\overline{\Delta}}$, $O \cong \check{\overline{\Delta}}$.*

Доказательство пп. 1) и 2) основано на том, что отображения из семейств $\varphi^{(k)}$, ограниченные на соответствующие семейства подмножеств $\mathbb{R}^n$, становятся по лемме 1 изоморфизмами операд. В п. 1) изоморфизмом является семейство $\varphi^{(d)} : S_{md} \to S_m$. В доказательстве нуждается только утверждение о том, что $\varphi^{(d)}$ отображает S_{md} в S_m. Рассмотрим n-е компоненты операд. Пусть $(x_1, \dots, x_n) \in S_{md}(n)$, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{md} = 1$. Так как $x_i = \operatorname{sgn}(x_i)|x_i|$, то при нечетном d имеет место равенство $x_i^{md} = (\operatorname{sgn}(x^d)|x|^d)^m = (\operatorname{sgn}(x)|x|^d)^m$. Это означает, что если

$(y_1,\dots,y_n)=\varphi_n^{(d)}(x_1,\dots,x_n)$, т.е. $y_i=\operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^d$, то $\sum\limits_{i=1}^n y_i^m=1$, и $(y_1,\dots,y_n)\in S_m(n)$. Обратным к гомоморфизму операд $\varphi^{(d)}$ (точнее — к ограничению $\varphi^{(d)}$ на S_{md}) является $\varphi^{(1/d)}$. Несложная проверка показывает, что ограничения того же семейства отображения на $\widehat{S}_{md}$ и $\check{S}_{md}$ дают другие изоморфизмы, существование которых утверждается в п. 1). В п. 2) изоморфизм из S_{2d} в S_d — это $\varphi^{(2^{d-1})}$.

Наконец, изоморфизм из $S=S_2$ в $\overline{\Delta}$ — это ограничение на S_2 семейства $\varphi^{(2)}$. □

Теорема 2. *Если m — целое положительное число, то операда S_m изоморфна либо S_1, либо S_2. Операды S_1 и S_2 не изоморфны.*

Доказательство. Представим m в виде $m=2^rd$, где d нечетно. Если $r>0$, то $S_m\cong S_{2^d}\cong S_2$ по лемме 2. Если же $r=0$, то $S_m=S_d\cong S_1$. Наконец, $S_1(1)$ состоит из одного элемента, а $S_2(1)$ — из двух. Более того, для любой операды R на любой ее компоненте $R(n)$ определено левое действие $R(1)$ и правое действие $R(1)^n$. Если существует изоморфизм некоторых операд $R\cong K$, то должны быть изоморфны полугруппы с единицей $R(1)$ и $K(1)$, и для любого n биекция между $R(n)$ и $K(n)$ должна быть согласована с действиями соответствующих полугрупп слева и справа. Для случая $R=S_1$ и $K=S_2$ это условие не выполняется. □

Операда R называется *квадратичной* (см. [8]), если она порождается своими компонентами $R(1)$ и $R(2)$. Как показывает следующая теорема, операды, изучаемые в данной работе, также являются квадратичными.

Теорема 3. *Операды $S=S_2$ и S_1 являются квадратичными. Более того, операда S порождается множествами $S(1)$ и $S_+(2)$.*

Доказательство. Рассмотрим подробно случай $S=S_2$ и покажем, что при $n>2$ компонента $S(n)$ порождается компонентами $S(1)$, $S_+(2)$ и $S(n-1)$. Пусть $(x_1,\dots,x_n)\in S(n)$ так, что $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=1$. Допустим для определенности $x_n\neq 0$. Попытаемся найти $(u_1,u_2)\in S_+(2)$, $(y_1,\dots,y_{n-1})\in S(n-1)$ и $z=\pm1\in S(1)$ такие, что имеет место разложение в операдную композицию $(x_1,\dots,x_n)=(u_1,u_2)(y_1,\dots,y_{n-1})(z)$. Поскольку правая часть этого предполагаемого равенства есть $(u_1y_1,\dots,u_1y_{n-1},u_2z)$, то задача сводится к нахождению действительных чисел со следующими свойствами:

$$x_i=u_1y_i,\quad 1\le i\le n-1,\quad x_n=u_2z,\quad u_1^2+u_2^2=1,\quad \sum_{i=1}^{n-1}y_i^2=1,\quad u_1,u_2\ge 0.$$

Если $x_n>0$, то $z=1$, и тогда $u_2=x_n$, а если $x_n<0$, то $z=-1$, и тогда $u_2=-x_n$. В обоих случаях $u_2>0$. Далее, $u_1^2=1-u_2^2=x_1^2+\dots+x_{n-1}^2$. Если $x_1=x_2=\dots=x_{n-1}=0$, т.е. $x_n=\pm1$, то $u_1=0$, $y_1=1$, $y_2=\dots=y_{n-1}=0$. Если же не все числа $x_1,\dots,x_{n-1}$ равны нулю, то $u_1^2=x_1^2+\dots+x_{n-1}^2>0$, и можно взять $u_1=\sqrt[2]{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2}>0$. Положим в этом случае $y_1=\frac{x_1}{u_1},\dots,y_{n-1}=\frac{x_{n-1}}{u_1}$. Тогда $y_1^2+\dots+y_{n-1}^2=1$, и необходимое разложение построено. Утверждение теоремы получается теперь индукцией по номеру n компоненты $S(n)$ операды S.

Случай операды S_1 разбирается аналогично. □

2. Алгебры над операдой $\overline{\Delta}$

Напомним категорный вариант определения рациональной эквивалентности многообразий ([11], [12]).

Определение. Пусть Set — категория множеств и отображений. Рассмотрим два многообразия универсальных алгебр M_1 и M_2, которые здесь считаются категориями, т. е. вместе с классами алгебр-объектов рассматриваются также все гомоморфизмы. Пусть $U_{M_i} = U_i : M_i \to \mathrm{Set}$, $i = 1, 2,$ — забывающие функторы. Многообразия M_1 и M_2 называются *рационально эквивалентными*, если существует изоморфизм категорий $\Phi : M_1 \to M_2$ такой, что выполнено строгое равенство $\Phi U_1 = U_2$. То, что Φ — изоморфизм, означает существование функтора $\Psi : M_2 \to M_1$ со свойствами $\Phi\Psi = \mathrm{Id}$, $\Psi\Phi = \mathrm{Id}$, причем равенства строгие.

Определим многообразие универсальных алгебр M следующими операциями и тождествами.

a) Задано семейство бинарных операций $\alpha : A \times A \to A$, $A \in M$, определенных для всех чисел α из отрезка $[0, 1]$. Обозначим действие этих операций через $(x, y) \mapsto \alpha(x, y)$. Должны выполняться тождества

1) $\alpha(\beta(x, y), z) = \alpha\beta\big(x, \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}(y, z)\big)$,
2) $\alpha(x, y) = (1 - \alpha)(y, x)$.

Отметим, что такие же тождества имеют место в многообразии конвексоров [2], [3], но в конвексорах еще выполняются тождества $1(x, y) = x$ и $\alpha(x, x) = x$, которые в M отсутствуют.

b) Имеется одна унарная операция $a \mapsto (-1)a$. Если формально ввести вторую операцию $a \mapsto (1)a = a$, то вместе они задают действие группы $\mathbf{U}_2 = \{+1, -1\}$ на множестве A, $\mathbf{U}_2 \times A \to A$, $(\nu, a) \mapsto (\nu)a$, причем в многообразии M должны выполняться тождества

3) $(\nu_1\nu_2)a = (\nu_1)((\nu_2)a)$, $(1)a = a$,
4) $\alpha((\nu)x, (\nu)y) = (\nu)(\alpha(x, y))$,
5) $1(x, y) = 1(x, (-1)y)$.

Теорема 4. *Многообразие* $\mathrm{Alg}(\overline{\Delta})$ *рационально эквивалентно многообразию* M. *Здесь* $\overline{\Delta} = \overline{S}_1$ *— операда, определенная в разделе* 1.

Доказательство. Используем метод, аналогичный примененному в [1] для установления связи между многообразием конвексоров и многообразием $\mathrm{Alg}(\Delta)$. Поскольку $\Delta \subset \overline{\Delta}$, то любая $\overline{\Delta}$-алгебра A будет и Δ-алгеброй. Пусть $\alpha \in [0, 1]$, тогда $(\alpha, 1 - \alpha) \in \Delta(2) \subset \overline{\Delta}(2)$, и операция $\alpha(x, y) = (\alpha, 1 - \alpha)(x, y)$, где $x, y \in A$ и справа записан результат композиции в алгебре над операдой $\overline{\Delta}$, превращает A в алгебру над Δ как над симметрической операдой (заметим, что на Δ можно определить еще структуру $F\,\mathrm{Set}$-операды [1]). Алгебры над операдой Δ описаны в теореме 1 из [1]. Из этой характеризации следует, что в A должны выполняться тождества 1) и 2) из определения многообразия M.

С другой стороны, $\overline{\Delta}(1) = \{\pm 1\} = \mathbf{U}_2$, и композиция $\overline{\Delta}(1) \times A \to A$ является действием группы $\mathbf{U}_2$ на множестве A, которое будет обозначаться через $(\nu, x) \mapsto (\nu)x$. Поэтому $(\nu)x = \nu x$, где справа записан результат композиции в алгебре над операдой $\overline{\Delta}$. Следовательно, тождество 3) вытекает из определения алгебры над операдой. Тождество 4) следует из соотношения $(\nu)(\alpha, 1 - \alpha) = (\nu\alpha, \nu(1 - \alpha)) = (\alpha, 1 - \alpha)(\nu, \nu)$ в операде $\overline{\Delta}$. Слева записан результат композиции $\overline{\Delta}(1) \times \overline{\Delta}(2) \to \overline{\Delta}(2)$, справа — $\overline{\Delta}(2) \times \overline{\Delta}(1) \times \overline{\Delta}(1) \to \overline{\Delta}(2)$. Тождество 5) вытекает из соотношения $(1, 0)(1)(1) = (1, 0)(1)(-1) = (1, 0)$ в $\overline{\Delta}$. Таким образом, по алгебре $A \in \mathrm{Alg}(\overline{\Delta})$ строится алгебра $\Phi(A) \in M$, и легко проверяется, что соответствие $A \mapsto \Phi(A)$ есть функтор из $\mathrm{Alg}(\overline{\Delta})$ в M. По построению $U_M\Phi = U_{\mathrm{Alg}(\overline{\Delta})}$.

Обратно, пусть $A \in M$. Первые два тождества M означают, что, как и в [1], на A можно ввести структуру Δ-алгебры, задав отображения $\Delta(n) \times A^n \to A$ по формуле

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Определение "линейной комбинации" в правой части этого равенства можно найти в [2]. Как можно определить искомые отображения $\overline{\Delta}(n) \times A^n \to A$, подсказывает следующее соображение. Пусть на A уже существует структура $\overline{\Delta}$-алгебры, включающая определенную выше структуру Δ-алгебры. Пусть $\widetilde{a} = \operatorname{sgn}(a)$ для $a \neq 0$, $\widetilde{0} = 1$. В операде $\overline{\Delta}$ имеет место тождество

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|)(\widetilde{\alpha_1}) \ldots (\widetilde{\alpha_n}).$$

В правой части этого равенства стоит результат операдной композиции $\overline{\Delta}(n) \times \overline{\Delta}(1) \times \ldots \times \overline{\Delta}(1) \to \overline{\Delta}(n)$. Если $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$, то должно выполняться равенство

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(x_1, \ldots, x_n) = (|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|)(\widetilde{\alpha_1}) \ldots (\widetilde{\alpha_n})(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= (|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|)((\widetilde{\alpha_1})x_1) \ldots ((\widetilde{\alpha_n})x_n) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|((\widetilde{\alpha_i})x_i).$$

Следовательно, возвращаясь к исходному условию $A \in M$, можно определить операции композиции $\overline{\Delta} \times A^n \to A$ по формуле

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|((\widetilde{\alpha_i})x_i). \tag{2}$$

Прежде чем доказывать, что эта формула задает структуру $\overline{\Delta}$-алгебры на A, установим одно вспомогательное утверждение. Пусть $\widetilde{a}' = \widetilde{a}$ при $a \neq 0$, $\widetilde{0}' = -1$. Легко проверить, что $\alpha = |\alpha|\widetilde{\alpha}'$, поэтому в операде $\overline{\Delta}$ имеет место равенство $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|)(\widetilde{\alpha_1}') \ldots (\widetilde{\alpha_n}')$. Исходя из этого, докажем, что в $A \in M$ имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|((\widetilde{\alpha_i})x_i) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|((\widetilde{\alpha_i}')x_i). \tag{3}$$

Проведем индукцию по n. Случай $n = 2$ сводится к тождеству 5) из определения M. В общем случае "линейная комбинация" определяется индуктивно [2]: если $|\alpha_1| \neq 1$, то

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| y_i = \alpha_1 \left(y_1, \sum_{i=2}^{n} \frac{|\alpha_i|}{1 - |\alpha_1|} y_i \right). \tag{4}$$

Без потери общности можно предположить, что $\alpha_1 \neq 0$. Легко видеть, (3) выполняется, если среди α_i нет нулей. Если же $\alpha_i = 0$ для некоторого $i > 1$, то (3) вытекает из предположения индукции и (4).

Теперь проверим тождество ассоциативности для композиции в $\overline{\Delta}$-алгебре:

$$(\overline{\alpha}\overline{\beta}_1 \ldots \overline{\beta}_m)(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m) = \overline{\alpha}(\overline{\beta}_1 \overline{x}_1) \ldots (\overline{\beta}_m \overline{x}_m),$$

где $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \overline{\Delta}(m)$, $\overline{\beta}_i = (\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,n_i}) \in \overline{\Delta}(n_i)$, $\overline{x}_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i}) \in A^{n_i}$, $1 \leq i \leq m$. Левая часть преобразуется к виду

$$(\overline{\alpha}\overline{\beta}_1 \ldots \overline{\beta}_m)(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} |\alpha_i \beta_{i,j}|((\widetilde{\alpha_i \beta_{i,j}})x_{i,j}). \tag{5}$$

Так как $\overline{\beta}_i\overline{x}_i = \sum\limits_{j=1}^{n_i} |\beta_{i,j}|((\widetilde{\beta_{i,j}})x_{i,j})$, то правая часть записывается следующим образом:

$$\overline{\alpha}(\overline{\beta}_1\overline{x}_1)\dots(\overline{\beta}_m\overline{x}_m) = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|\Bigg((\widetilde{\alpha}_i)\Bigg(\sum_{j=1}^{n_i} |\beta_{i,j}|((\widetilde{\beta_{i,j}})x_{ij})\Bigg)\Bigg). \tag{6}$$

Докажем, что правая часть (5) равна правой части (6). Предварительно установим некоторые вспомогательные тождества. Сначала напомним ([1], с. 47) тождество

$$\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|\Bigg(\sum_{j=1}^{n_i} |\beta_{ij}|x_{ij}\Bigg) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} |\alpha_i\beta_{ij}|x_{ij}.$$

Далее покажем, что

$$(\nu)\Bigg(\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|z_i\Bigg) = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|((\nu)z_i). \tag{7}$$

Будем доказывать (7) индукцией по k. При $k=2$ это тождество 3) из определения многообразия M. Допустим, что тождество (7) справедливо для $k-1$, $k \geq 3$. Проведем следующие преобразования. Во-первых, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)\Big(\sum\limits_{i=2}^{k} \big(\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1}\big)x_i\Big)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}(\nu)\Bigg(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\Bigg) &= (\nu)\Bigg(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)\Bigg(\sum_{i=2}^{k} \bigg(\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1}\bigg)x_i\Bigg)\Bigg) = \\ &= \alpha_1((\nu)x_1) + (1-\alpha_1)\Bigg((\nu)\Bigg(\sum_{i=2}^{k} \bigg(\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1}\bigg)x_i\Bigg)\Bigg) = \\ &= \alpha_1((\nu)x_1) + (1-\alpha_1)\Bigg(\sum_{i=2}^{k} \bigg(\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1}\bigg)((\nu)x_i)\Bigg).\end{aligned}$$

Таким образом, тождество (7) доказано. Теперь легко преобразовать правую часть (5) в правую часть (6).

Остальные свойства из определения алгебры над операдой (см., например, [1]) проверяются без труда.

Алгебру над операдой $\overline{\Delta}$, построенную таким образом по алгебре A из M, обозначим через $\Psi(A)$. Очевидно, соответствие $A \mapsto \Psi(A)$ есть функтор из M в $\mathrm{Alg}(\overline{\Delta})$. Очевидно также, что это функтор является обратным к Φ, и выполнены условия из определения рациональной эквивалентности. $\square$

Тождества многообразия M, рационально эквивалентного $\mathrm{Alg}(\overline{\Delta})$, получают естественное объяснение из следующей конструкции. Рассмотрим полугруппу $G = \{+1, -1\}$ и обозначим той же буквой G операду, n-я компонента которой равна G^n. Эта операда уже была описана выше. Тогда операда $\overline{\Delta}$ является ретрактом произведения операд $\Delta \times G$. Точнее, существуют гомоморфизмы операд $\vartheta : \overline{\Delta} \to \Delta \times G$, $\pi : \Delta \times G \to \overline{\Delta}$ такие, что $\pi\vartheta = \mathrm{id}$. Явный вид этих гомоморфизмов на n-х компонентах операд таков. Если $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\Delta}(n)$, то $\vartheta(\overline{x}) = ((|x_1|, \dots, |x_n|), (\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n))$. Если же $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \Delta(n)$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in G(n)$, то $\pi((\overline{a}, \overline{\nu})) = (\nu_1 a_1, \dots, \nu_n a_n)$. Непосредственно проверяется, что это гомоморфизмы операд, и что $\pi\vartheta = \mathrm{id}$. Методом, которым была доказана теорема 4, можно показать, что многообразие, задаваемое теми же операциями, что и M, и тождествами вида 1)–4) из определения M, рационально эквивалентно многообразию $\mathrm{Alg}(\Delta \times G)$. Тождество 5) соответствует тому факту, что если $\overline{a}' = (a_1', \dots, a_n') \in \Delta(n)$ и $\overline{\nu}' = (\nu_1', \dots, \nu_n') \in G(n)$, то $\pi((\overline{a}, \overline{\nu})) = \pi((\overline{a}', \overline{\nu}'))$ тогда и только тогда, когда $\overline{a} = \overline{a}'$ и $|\nu_i| = |\nu_i'|$ для всех i.

3. Алгебры над операдой сфер

Для доказательства главного результата данной работы, нам потребуется несколько фактов из теории операд. Будут использоваться обозначения и результаты работы [4].

Пусть $\Omega = \{\Omega_n \mid n \geq 1\}$ — семейство множеств, причем для каждого n элементы множества Ω_n понимаются как символы n-арных операций. Обозначим через FO_Ω свободную (нелинейную) операду с базисом Ω. Это означает, что для каждого n определены отображения $\xi_n : \Omega_n \to FO_\Omega(n)$ (фактически это инъекции) такие, что если дана какая-либо операда R и семейство отображений $\rho = \{\rho_n \mid \rho_n : \Omega_n \to R(n),\ n = 1, 2, \dots\}$, то существует один и только один гомоморфизм операд $h : FO_\Omega \to R$ такой, что для каждой его компоненты $h_n : FO_\Omega(n) \to R(n)$ имеет место равенство $h_n \xi_n = \rho_n$. Рассматривая Ω как сигнатуру, обозначим через $\mathrm{Alg}(\Omega)$ многообразие (точнее, категорию) Ω-алгебр. В [4] было показано, что многообразия $\mathrm{Alg}(\Omega)$ и $\mathrm{Alg}(FO_\Omega)$ рационально эквивалентны. Это означает (см. [12], теорема 1.2.1), что можно отождествлять свободные алгебры этих многообразий.

Выберем в произвольной операде R семейство образующих Ω. Это дает представление R в виде фактор-операды свободной операды FO_Ω по некоторой операдной конгруэнции I. Многообразие $\mathrm{Alg}(R)$ можно рассматривать как подмногообразие $\mathrm{Alg}(FO_\Omega)$, а ввиду отмеченной выше рациональной эквивалентности и как подмногообразие $\mathrm{Alg}(\Omega)$.

Следующие два утверждения являются частными случаями теоремы 5.1 из [4].

Лемма 3. *При сделанных выше предположениях свободная алгебра $Fr_R(X)$ многоообразия $\mathrm{Alg}(R)$ с базисом X изоморфна фактор-алгебре свободной Ω-алгебры $Fr_\Omega(X)$ по конгруэнции $I(X)$, состоящей из всех элементов вида $(w_1\overline{x}, w_2\overline{x})$ таких, что $(w_1, w_2) \in I(n) \subseteq FO_\Omega(n) \times FO_\Omega(n)$ для подходящего n.*

Следствие. В условии леммы 3 многообразие $\mathrm{Alg}(R)$ рационально эквивалентно подмногообразию $\mathrm{Alg}(\Omega)$, определяемому тождествами вида $w_1\overline{x} = w_2\overline{x}$, где пары (w_1, w_2) принадлежат некоторому семейству образующих операдной конгруэнции I.

Пусть $\varphi : R \to K$ — гомоморфизм операд. Тогда определен функтор $\Phi : \mathrm{Alg}(K) \to \mathrm{Alg}(R)$, сопоставляющий K-алгебре A алгебру $\Phi(A)$ над операдой R, которая строится следующим образом. $\Phi(A)$, как множество, совпадает с A. Если $a_1, \dots, a_n \in \Phi(A) = A$, и $r \in R(n)$, то элемент $ra_1 \dots a_n$ по определению равен $\varphi(r)a_1 \dots a_n$. Функтор Φ аналогичен хорошо известному функтору в теории колец и модулей.

Следующие две леммы вытекают из предыдущих утверждений.

Лемма 4. *Пусть $\varphi : R \to K$ — изоморфизм операд, и $\psi = \varphi^{-1}$. Пусть $\Psi : \mathrm{Alg}(R) \to \mathrm{Alg}(K)$ — функтор, который строится, исходя из гомоморфизма ψ, аналогично тому, как функтор Φ строится по φ. Тогда функторы Φ и Ψ являются взаимно обратными изоморфизмами и реализуют рациональную эквивалентность многообразий $\mathrm{Alg}(R)$ и $\mathrm{Alg}(K)$.*

Лемма 5. *Пусть дан изоморфизм операд $\psi : R \to K$, и $\Omega = \{\Omega_n \mid n \geq 0\}$ — некоторая сигнатура, причем $\Omega_n \subseteq R(n)$, семейство Ω порождает операду R, и многообразие $\mathrm{Alg}(R)$ рационально эквивалентно многообразию Ω-алгебр, определяемому тождествами $\Theta_R = \{f_i = g_i \mid i \in I\}$, где f_i, g_i — слова в алфавите $\bigcup\limits_{n \geq 0} \Omega_n \cup X$ (X — счетное множество). Пусть $\Omega_n^\psi = \{\psi(\omega) \in K(n) \mid \omega \in \Omega_n\}$. Тогда многообразие $\mathrm{Alg}(R)$ алгебр над операдой R*

рационально эквивалентно многообразию Ω^ψ-алгебр, определяемому тождествами из семейства $\Theta_K = \{f_i^\psi = g_i^\psi \mid i \in I\}$, где f_i^ψ и g_i^ψ получаются из f_i и g_i заменой символов из Ω на соответствующие символы из Ω^ψ.

Определим многообразие N с помощью следующих операций и тождеств. Множество операций состоит, во-первых, из унарной операции $a \mapsto (-1)a$ такой, что если формально определить операцию $a \mapsto (1)a = a$, то тем самым на алгебре A из M определено действие $\mathbf{U}_2 \times A \to A$ (обозначение: $(\nu, x) \mapsto (\nu)x$). Во-вторых, имеет место семейство бинарных операций вида $[\alpha] : A \times A \to A$, где $\alpha \in [0,1]$, действие которых обозначается $(x,y) \mapsto [\alpha](x,y)$. При этом должны выполняться тождества:

1) $[\alpha]([\beta](x,y),z) = [\alpha\beta]\Big(x, \Big[\frac{\alpha\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-(\alpha\beta)^2}}\Big](y,z)\Big)$,
2) $[\alpha](x,y) = [\sqrt{1-\alpha^2}](y,x)$,
3) $(\alpha\beta)x = (\alpha)((\beta)x)$,
4) $[\alpha]((\nu)x,(\nu)y) = (\nu)([\alpha](x,y))$, $(1)x = x$,
5) $[1](x,y) = [1](x,(-1)y)$.

Теперь можно доказать основной результат работы.

Теорема 5. *Многообразие* $\mathrm{Alg}(S)$ *рационально эквивалентно многообразию* N.

Доказательство состоит в применении теоремы 4 и леммы 5 к операдам $\overline{\Delta}$ и S. Рассмотрим изоморфизм операд $\varphi : \overline{\Delta} \to S$, для произвольного n задаваемый на n-й компоненте формулой $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = (\mathrm{sgn}(x_1)\sqrt{|x_1|},\ldots,\mathrm{sgn}(x_n)\sqrt{|x_n|})$. (Фактически это $\varphi^{(1/2)}$ из леммы 1.) Далее рассмотрим множество Ω, порождающее операду $\overline{\Delta}$: $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2\}$, $\Omega_1 = \{\pm 1\}$, $\Omega_2 = \{(\alpha_1,\alpha_2) | \alpha \in [0,1] \subset \mathbb{R}, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$. Тогда $\Omega_1^\varphi = \{1,-1\}$, $\Omega_2^\varphi = \{(\alpha_1,\alpha_2) | \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \alpha_1,\alpha_2 \geq 0\}$.

Если $\nu \in \{\pm 1\}$, то через $a \mapsto (\nu)a$ будем обозначать как операцию в алгебрах из многообразия, рационально эквивалентного $\mathrm{Alg}(\overline{\Delta})$, так и в алгебре из многообразия, рационально эквивалентного $\mathrm{Alg}(S)$. Тождества в обоих случаях выглядят одинаково.

Продолжая применять лемму 5, рассмотрим $\alpha \in [0,1]$. Тогда операции $\alpha(a_1,a_2) = (\alpha, 1-\alpha)(a_1,a_2)$ на алгебре A из $\mathrm{Alg}(\overline{\Delta})$ будет соответствовать операция $[\alpha](a_1,a_2) = (\sqrt{\alpha}, \sqrt{1-\alpha}) \times (a_1,a_2)$.

Тождество $\alpha(\beta(x,y),z) = \alpha\beta\big(x, \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}(y,z)\big)$ многообразия, рационально эквивалентного $\mathrm{Alg}(\overline{\Delta})$, переходит в тождество $[\sqrt{\alpha}]([\sqrt{\beta}](x,y),z) = [\sqrt{\alpha\beta}]\Big(x, \Big[\sqrt{\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}}\Big](y,z)\Big)$ многообразия, рационально эквивалентного $\mathrm{Alg}(S)$. Положим $\lambda = \sqrt{\alpha}$, $\nu = \sqrt{\beta}$. Тогда $\sqrt{\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}} = \frac{\lambda\sqrt{(1-\nu^2)}}{\sqrt{1-\lambda^2\nu^2}}$. Таким образом, тождество 1) из теоремы 4 переходит в первое тождество из формулировки теоремы 5, т. е. в тождество $[\lambda]([\nu](x,y),z) = [\lambda\nu]\Big(x, \Big[\frac{\lambda\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{1-(\lambda\nu)^2}}\Big](y,z)\Big)$.

Аналогично, тождество $\alpha(x,y) = (1-\alpha)(y,x)$ переходит в тождество $[\sqrt{\alpha}](x,y) = [\sqrt{(1-\alpha)}](y,x)$, что записывается в виде $[\lambda](x,y) = [\sqrt{1-\lambda^2}](y,x)$. Тождество $\alpha((\nu)x,(\nu)y) = (\nu)(\alpha(x,y))$ переходит в $[\sqrt{\alpha}]((\nu)x,(\nu)y) = (\nu)([\sqrt{\alpha}](x,y))$, которое записывается в виде $[\lambda]((\nu)x,(\nu)y) = (\nu)([\lambda](x,y))$. Наконец, тождество 5) многообразия M переходит в тождество 5) многообразия N. Таким образом, теорема 5 следует из теоремы 4 и леммы 5. $\square$

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

Литература

[1] Тронин С.Н. *Операды в категории конвексоров.* I // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 3. – С. 42–50.
[2] Скорняков Л.А. *Алгебра стохастических распределений* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 11. – С. 59–67.
[3] Скорняков Л.А. *Стохастическая алгебра* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 7. – С. 3–11.
[4] Тронин С.Н. *Операды и многообразия, определяемые полилинейными тождествами* // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47. – № 3. – С. 670–694.
[5] Бордман Дж., Фогт Р. *Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах.* – М.: Мир, 1977. – 408 с.
[6] Смирнов В.А. *Симплициальные и операдные методы в теории гомотопий.* – М.: Изд-во "Факториал Пресс", 2002. – 272 с.
[7] Markl M., Shnider S., Stasheff J. *Operads in algebra, topology and physics.* – AMS, Math. Surveys and Monographs, V. 96, 2002. – 349 p.
[8] Ginzburg V., Kapranov M. *Koszul duality for operads* // Duke Math. J. – 1994. – V. 76. – № 1. – P. 203–272.
[9] Тронин С.Н., Копп О.А. *Матричные линейные операды* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 53–62.
[10] Свитцер Р.М. *Алгебраическая топология. Гомотопии и гомологии.* – М.: Наука, 1985. – 608 с.
[11] Мальцев А.И. *Структурная характеристика некоторых классов алгебр* // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120. – № 1. – С. 29–32.
[12] Пинус А.Г. *Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений.* – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 239 с.

С.Н. Тронин

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

`e-mail:` serge.tronin@ksu.ru

S.N. Tronin

Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logics,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` serge.tronin@ksu.ru