§14. ПРИМЕРЫ БАЗИСОВ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Примеры ортогональных базисов в пространстве $\mathbf{P}_n$ полиномов с вещественными коэффициентами

.

Рассматривается множество всех полиномов вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где

$\underline{a_0,\ a_0,\ \ldots,\ a_n}$ — произвольные вещественные числа,

$\underline{x}$ может принимать произвольные вещественные значения,

$\underline{n \geqslant 0}$ — фиксированное целое число.

.

Ясно, что указанное множество полиномов есть вещественное линейное пространство, если понимать операции сложения двух полиномов и умножения полинома на число обычным образом.

Полиномы Лежандра

.

Полиномы Лежандра вычисляются по ***формуле Родрига***:

$$P_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\,\frac{1}{k!2^k}\,\frac{d^k}{dx^k}\,(x^2-1)^k, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots$$

Бенжамен Оленд Родриг (Benjamin Olinde Rodrigues; 1794 — 1851) — французский математик.

Определим в пространстве $\mathbf{P}_n$ скалярное произведение:

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \quad \forall\, f, g \in \mathbf{P}_n.$$

Тогда полиномы Лежандра P_0, P_1, $\ldots$, P_n образуют ортогональный базис в пространстве $\mathbf{P}_n$.

.

<u>Упражнение.</u> **Используя формулу Родрига и формулу интегрирования по частям, показать, что**

$$\int\limits_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)dx = 0 \quad \textbf{при} \quad k \neq l, \quad k,\, l = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

.

<u>Решение.</u> Заметим, прежде всего, что при $k = l$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} P_k^2(x)dx \neq 0,$$

т. к. полином $P_k(x)$ не равен нулю.

Напомним *формулу интегрирования по частям*. Пусть

$$u,\ v \in C^1[a,b].$$

Тогда

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Фиксируем степень k полинома Лежандра:

$$P_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \frac{1}{k!2^k} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k.$$

Обозначим произвольный ненулевой полином степени

$$l < k$$

через

$$R_l(x) = a_l x^l + a_{l-1} x^{l-1} + \ \ldots \ + a_0.$$

Достаточно показать, что следующий интеграл равен нулю:

$$\int\limits_{-1}^{1} R_l(x)\,\frac{d^k}{dx^k}\,(x^2-1)^k dx = \left\langle \begin{array}{ll} u = R_l(x), & u' = R_l^{(1)}(x) \\ v = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\,(x^2-1)^k & \end{array} \right\rangle =$$

$$= R_l(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\,(x^2-1)^k \Bigg|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} R_l^{(1)}(x)\,\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\,(x^2-1)^k dx =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{1} R_l^{(1)}(x)\,\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\,(x^2-1)^k dx.$$

.

Продолжим вычисления:

$$-\int\limits_{-1}^{1} R_l^{(1)}(x)\,\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\,(x^2-1)^k dx = \left\langle \begin{array}{ll} u = R_l^{(1)}(x), & u' = R_l^{(2)}(x) \\ v = \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\,(x^2-1)^k & \end{array} \right\rangle =$$

$$= -R_l^{(1)}(x)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\,(x^2-1)^k\Bigg|_{-1}^{1} + \int\limits_{-1}^{1} R_l^{(2)}(x)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\,(x^2-1)^k dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} R_l^{(2)}(x)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\,(x^2-1)^k dx = \ldots = 0,$$

т. к.

$$k \geqslant l+1, \quad R_l^{(l+1)}(x) \equiv 0.$$

Полиномы Чебышева

Пафнутий Львович Чебышев (произносится как «Чебышёв»; 1821 — 1894) — русский математик и механик.

.

Определим теперь скалярное произведение в пространстве $\mathbf{P}_n$ при помощи соотношения

$$(f,g)=\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \forall\, f,g\in\mathbf{P}_n.$$

.

Введем в рассмотрение ***полиномы Чебышева***. Так называют полиномы, вычисляемые по следующим рекуррентным формулам:

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Здесь k — степень полинома.

Нам потребуется явная формула для полиномов Чебышева.

Будем разыскивать значение $T_k(x)$ в виде

$$T_k(x) = \lambda^k.$$

Используя это представление в рекуррентной формуле

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,$$

получим

$$\lambda^{k+1} = 2x\lambda^k - \lambda^{k-1}.$$

Из уравнения

$$\lambda^{k+1} - 2x\lambda^k + \lambda^{k-1} = 0,$$

предполагая, что

$$\lambda \neq 0,$$

приходим к квадратному уравнению для определения λ:

$$\lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0.$$

.

Корни уравнения

$$\lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0$$

есть

$$\lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Действительно,

$$\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)^2 - 2x\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) + 1 =$$

$$= \underline{\underline{x^2}} \pm \underline{\underline{\underline{2x\sqrt{x^2-1}}}} + \underline{\underline{x^2}} - \underline{1} - \underline{\underline{2x^2}} \mp \underline{\underline{\underline{2x\sqrt{x^2-1}}}} + \underline{1} = 0.$$

.

Итак,

$$T_k(x) = \lambda^k, \quad \lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Поэтому функции

$$T_k^{(1)}(x) = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^k, \quad T_k^{(2)}(x) = \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^k,$$

а следовательно, и их произвольные линейные комбинации

$$T_k(x) = c_1 T_k^{(1)}(x) + c_2 T_k^{(2)}(x)$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Выберем в представлении

$$T_0(x) = c_1 T_0^{(1)}(x) + c_2 T_0^{(2)}(x)$$

константы $c_1,\ c_2$ так, чтобы было выполнено условие

$$T_0(x) \equiv 1.$$

Тогда из

$$T_0^{(1)}(x) = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^0 \equiv 1, \quad T_0^{(2)}(x) = \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^0 \equiv 1$$

имеем

$$c_1 + c_2 = 1.$$

Второе условие для определения констант $c_1,\ c_2$ в представлении

$$T_1(x) = c_1 T_1^{(1)}(x) + c_2 T_1^{(2)}(x)$$

выведем с помощью равенства

$$T_1(x) = x.$$

Комбинируя его с

$$T_1^{(1)}(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad T_1^{(2)}(x) = x - \sqrt{x^2 - 1},$$

получим

$$(c_1 + c_2)x + (c_1 - c_2)\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

.

Из равенств

$$c_1 + c_2 = 1,$$

$$(c_1 + c_2)x + (c_1 - c_2)\sqrt{x^2 - 1} = x$$

получаем

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^k + \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^k, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

.

При

$$|x| \leqslant 1$$

полиномам Чебышева

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^k + \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^k, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

можно придать более компактный вид. Положим в этом случае

$$x = \cos\varphi.$$

Тогда

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^k + \frac{1}{2}\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)^k.$$

.

Из представления

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^k + \frac{1}{2}\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)^k,$$

используя формулу Муавра, получим, что

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left(\cos k\varphi + i\sin k\varphi\right) + \frac{1}{2}\left(\cos k\varphi - i\sin k\varphi\right) = \cos k\varphi.$$

.

Окончательно из

$$T_k(x) = \cos k\varphi$$

и

$$x = \cos \varphi$$

имеем

$$\underline{\underline{T_k(x) = \cos(k \arccos x)}}.$$

.

Полиномы Чебышева ортогональны, а именно, при

$$k \neq l$$

равно нулю скалярное произведение

$$(T_k, T_l) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos(k \arccos x) \cos(l \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx.$$

.

Действительно, вычислим при $k \neq l$ это скалярное произведение:

$$(T_k, T_l) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos(k \arccos x)\cos(l \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$\left\langle \begin{array}{lll} x = \cos\varphi, & x = -1,\ \varphi = \pi, & \sqrt{1-x^2} = \sin\varphi \\ dx = -\sin\varphi d\varphi & x = 1, \quad \varphi = 0 & \end{array} \right\rangle$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \cos k\varphi \cos l\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} (\cos(k+l)\varphi + \cos(k-l)\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+l}(\sin(k+l)\pi - \sin 0) + \frac{1}{k-l}(\sin(k-l)\pi - \sin 0)\right) = 0.$$

.

Таким образом, полиномы Чебышева

$$T_0,\ T_1,\ \ldots,\ T_n$$

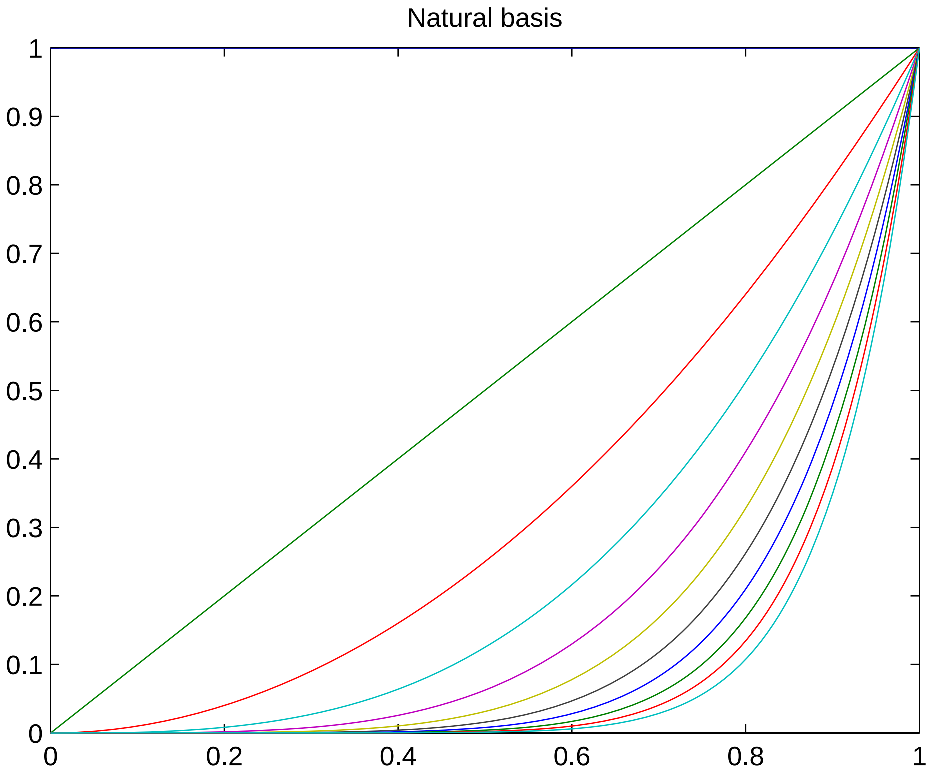
образуют ортогональный базис в смысле скалярного произведения

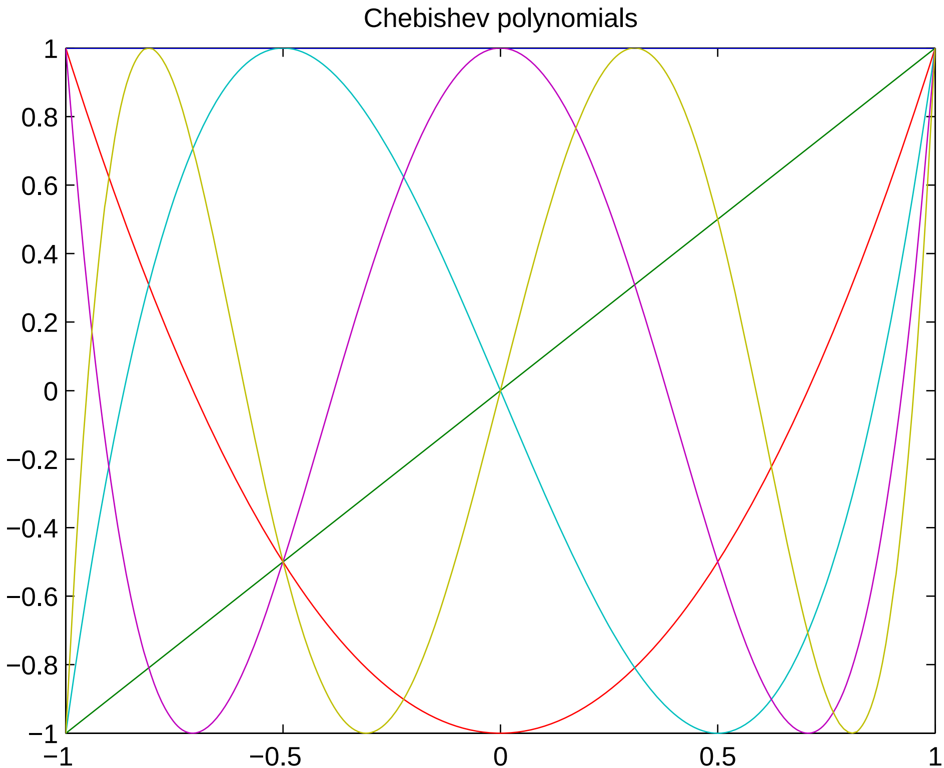
$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \forall\, f, g \in \mathbf{P}_n.$$

в пространстве $\mathbf{P}_n$ полиномов с вещественными коэффициентами.

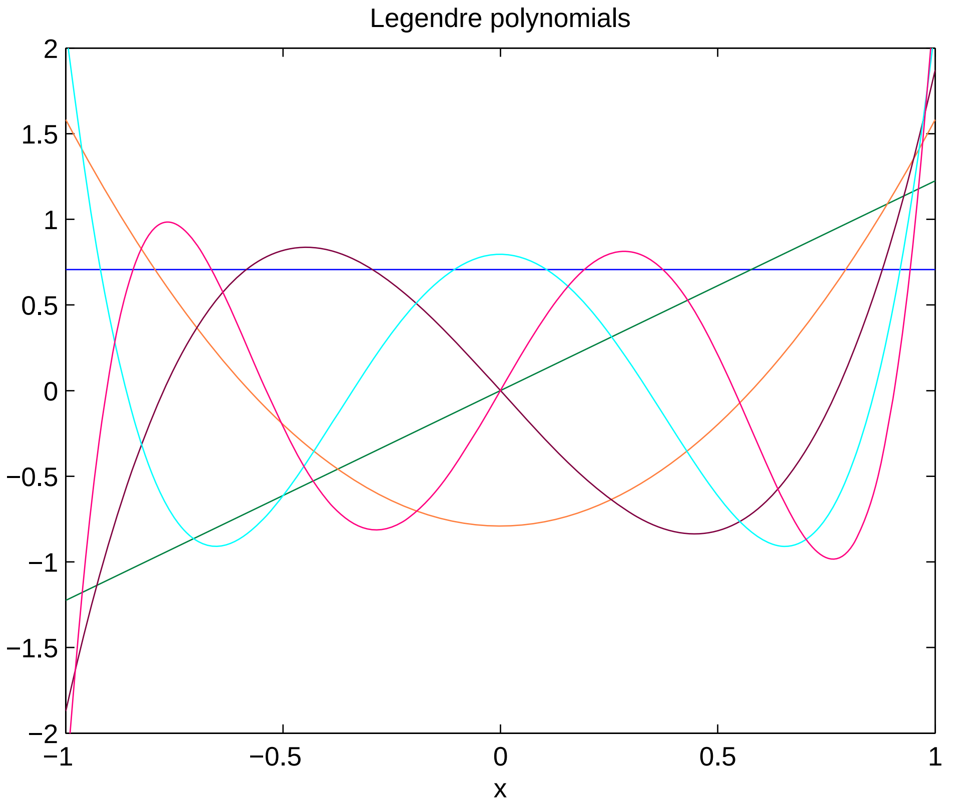
.

Упражнение. Построить графики функций естественного базиса в пространстве P_n, полиномов Чебышева и полиномов Лежандра.


Natural basis
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



Chebishev polynomials
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1



Legendre polynomials
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−1
−0.5
0
0.5
1
x

```
function z=phi_basis(k,x)
z=x.^k;
```

```
clear
clc
x=0:0.01:1;
y0=phi_basis(0,x);
y1=phi_basis(1,x);
y2=phi_basis(2,x);
y3=phi_basis(3,x);
y4=phi_basis(4,x);
y5=phi_basis(5,x);
y6=phi_basis(6,x);
y7=phi_basis(7,x);
y8=phi_basis(8,x);
y9=phi_basis(9,x);
y10=phi_basis(10,x);
plot(x,y0,x,y1,x,y2,x,y3,x,y4,x,y5,x,y6,x,y7,x,y8,x,y9,x,y10)
title 'Natural basis'
```

```
function z=T_basis(k,x)
z=cos(k*acos(x));
```

```
clc
clear
x=-1:0.01:1;
y0=T_basis(0,x);
y1=T_basis(1,x);
y2=T_basis(2,x);
y3=T_basis(3,x);
y4=T_basis(4,x);
y5=T_basis(5,x);
plot(x,y0,x,y1,x,y2,x,y3,x,y4,x,y5)
title 'Chebishev polynomials'
```

```
clc
clear
syms x
ezplot('1/sqrt(2)',-1,1)
hold on
ezplot('x*sqrt(3/2)',-1,1)
hold on
ezplot(sqrt((2*2+1)/2)*(1/(2*2^2))*diff(diff((x^2-1)^2)),-1,1)
hold on
ezplot(sqrt((2*3+1)/2)*(1/(3*2*2^3))*diff(diff(diff((x^2-1)^3))),-1,1)
hold on
ezplot(sqrt((2*4+1)/2)*(1/(4*3*2*2^4))*diff(diff(diff(diff((x^2-1)^4)))),-1,1)
hold on
ezplot(sqrt((2*5+1)/2)*(1/(5*4*3*2*2^5))*diff(diff(diff(diff(diff((x^2-1)^5))))),-1,1)
axis([-1 1 -2 2])
title 'Legendre polynomials'
```