УДК 519.7, 621.372

М. Ю. Васильева, Ф. В. Коннов, И. И. Исмагилов

ИССЛЕДОВАНИЕ НОВЫХ УПОРЯДОЧЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ УОЛША И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Ключевые слова: дискретные функций Уолша, разностно-упорядоченная система, обработка и передача данных, автоматизированные системы управления.

Предлагается новый метод упорядочения систем дискретных функций Уолша, представлены свойства новых упорядочений, рассмотрена возможность применения синтезированных упорядочений дискретных функций Уолша в автоматизированных системах управления.

Keywords: discrete Walsh functions, difference-ordered system, processing and transfer data, automated control systems.

A new method of ordering systems of discrete Walsh functions, shows the properties of new orderings, possibility of application of the synthesized discrete orderings of Walsh functions in automatic control systems.

Введение

Повсеместное развитие информационных сетей и систем, включая автоматизированные системы управления (АСУ) различных уровней, вычислительные сети, системы автоматизированного проектирования, сбора и обработки данных, автоматизации эксперимента, массового обслуживания, телеметрические комплексы, информационно-справочные системы, сети связи и др., привело к существенному росту информационных потоков между территориально распределенными источниками и получателями сообщений и хранению все возрастающих объемов информации различного вида в базах данных [1-4]. Для повышения эффективности использования коммуникационных и информационно-вычислительных ресурсов указанных систем применяются различные методы и средства [5].

Среди них весьма важную роль играют методы сокращения избыточности данных, обеспечивающие сжатие объемов передаваемой или запоминаемой информации. Это позволяет значительно разгрузить каналы связи и системы обработки и хранения данных за счет исключения ненужных или дублирующихся сведений, что эквивалентно повышению пропускных способностей систем сбора, передачи и обработки данных или увеличению емкости запоминающих устройств.

Среди существующих методов сокращения избыточности данных особое место занимают методы сжатия, применяющие различные математические преобразования. Наиболее часто применяемыми при сокращении и передаче данных в автоматизированных системах управления производством и технологическими процессами являются преобразования Фурье, Уолша и Хаара [6, 7]. Каждое из которых обладает рядом преимуществ, например, применение преобразований Уолша и Хаара позволяет значительно упростить и ускорить обработку информации.

Широкое использование ряда преобразований в прикладных задачах, заключается в возможности их вычисления посредством быстрых алгоритмов, которые обладают существенно меньшей вычислительной сложностью по сравнению с классическими алгоритмами преобразований [8].

В статье рассматривается комплекс вопросов, связанных с применением преобразований Уолша: приводится построение новых упорядочений функций Уолша, исследование их свойств, рассматривается применение функций Уолша при выполнении преобразований.

Краткий обзор дискретных функций Уолша и их упорядочений

Ортонормированная, полная система прямоугольных функций была введена Уолшом. В отличие от тригонометрических гармоник, по которым функция раскладывается в классический ряд Фурье, функции Уолша представляют собой прямоугольные волны, которые во многих задачах обработки сигналов предпочтительнее синусоидальных волн. В большей степени это связано с простым видом функций Уолша, каждая из которых принимает всего два значения (+1 и -1), что намного упрощает их реализации на ЭВМ.

Дискретные преобразования Уолша (ДПУ) основываются на дискретных функциях Уолша (ДФУ), которые образуются равномерными выборками непрерывных функций Уолша. Общее количество отчетов в ДФУ должно быть $N = 2^n$, где n – любое целое положительное число.

В цифровой обработке сигналов используются преобразования в различных упорядочениях систем ДФУ. К наиболее известным упорядочениям в практике обработки сигналов ДФУ в системе относятся следующие: секвентивное упорядочение (Уолша-Качмажа); диадическое упорядочение (Уолша-Пэли); упорядочение в соответствии с расположением строк в матрице Адамара (Уолша-Адамара).

Беря за основу системы непрерывных функций Уолша с различным порядком следования функции, получаем соответственно матрицы ДПУК (дискретные преобразования Уолша-Качмажа), ДПУП (дискретные преобразования Уолша-Пэли) и ДПУА (дискретные преобразования Уолша-Адамара).

ДФУ можно описать аналитически, выразив их через дискретные функции Радемахера. Пусть $j=\sum_{k=0}^{n} j_k 2^k$ – номер функции в системе, а $i=\sum_{k=0}^{n} i_k 2^k$ – номер отсчета, тогда упомянутые выше матрицы преобразований имеют вид:

- матрица ДПУК

$$WAL_N=\frac{1}{\sqrt{N}}\left((-1)^{\sum_{k=0}^{n} i_k q_k(j)}\right)_{j,i=0}^{N-1}, \quad (1)$$

- матрица ДПУП

$$PAL_N=\frac{1}{\sqrt{N}}\left((-1)^{\sum_{k=0}^{n} i_k j_{n-k}}\right)_{j,i=0}^{N-1}, \quad (2)$$

- матрица ДПУА

$$HAD_N=\frac{1}{\sqrt{N}}\left((-1)^{\sum_{k=0}^{n} i_k j_k}\right)_{j,i=0}^{N-1}. \quad (3)$$

где $\frac{1}{\sqrt{N}}$ – нормировочный коэффициент;

$$q_0(j)=j_n, \quad q_k(j)=j_{n-k+1}\oplus j_{n-k}, \quad k=1,2,\ldots,n,$$

где $\oplus$ – знак сложения по модулю 2.

Отметим, что двоичные комбинации вида $q_0(j),q_1(j),\ldots,q_n(j)$ или $q_n(j),q_{n-1}(j),\ldots,q_0(j)$ называют соответственно кодом Грея, или инверсным кодом Грея числа j.

Для матриц Уолша-Адамара справедливо следующее разбиение на подматрицы вид

$$HAD_{2^k}=\begin{vmatrix} HAD_{2^{k-1}} & HAD_{2^{k-1}} \\ HAD_{2^{k-1}} & -HAD_{2^{k-1}} \end{vmatrix}, \; k=\overline{2,n}, \quad (4)$$

где $HAD_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Реккурентную формулу (4) можно также выразить в виде кронекеровского произведения матриц:

$$HAD_{2^k}=HAD_2\otimes HAD_{2^{k-1}}. \quad (5)$$

Матрицы (1–2) можно получить переупорядочением строк матрицы Уолша-Адамара, так как между упорядочениями дискретной системы Уолша размерности N существуют определенные зависимости, которые в матричной форме имеют следующий вид:

$$PAL_N=S_N^{inv}HAD_N, \quad (6)$$

$$WAL_N=S_N^{iG}PAL_N. \quad (7)$$

где S_N^{inv} – матрица двоично-инверсных перестановок; S_N^{iG} – матрица перестановки по обратному двоичному коду Грея.

Приведем в краткой форме основные свойства ДФУ. Для ДФУ справедливы следующие свойства, присущие непрерывным функциям Уолша:

1. Ортогональность. Функции Уолша ортогональны на интервале $[0,N)$.
2. Нормированность. Функции Уолша нормированы при любом номере функции j.
3. Периодичность. Любая функция Уолша есть периодическая функция с периодом, равным N.
4. Модуль и среднее функций Уолша. Так как функции Уолша принимают только значение +/– 1, модуль функции Уолша равен единице, а среднее значение функции Уолша для всех $j\neq 0$ равно нулю соответственно.
5. Симметрия (двойственность). Любые выводы относительно переменной i справедливы для переменной j, и наоборот.
6. Мультипликативность. Произведение двух функций Уолша равно новой функции Уолша из этой же системы.
7. Порядок и ранг функций Уолша. Функции Уолша удобно характеризовать двумя параметрами, связанными с двоичным представлением их номеров. Первый из них определяет максимальный номер ненулевого двоичного разряда числа j и называется порядком p; второй – ранг функции Уолша r – показывает число двоичных разрядов, в которых число j имеет единицы. Номер функции Уолша r-го ранга условно обозначают в виде $j(r)$ и записывают в десятичной системе счисления:

$$j(r)=2^{\mu_1}+2^{\mu_2}+\ldots+2^{\mu_r}, \quad (8)$$

где $\mu_K(\kappa=1,2,\ldots,r)$ – номер разряда двоичного кода j, содержащий единицу. Область изменения всех μ_K в (8) должна удовлетворять следующей системе равенств:

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1=0,1,\ldots,\; n-r-1; \\ \mu_2=\mu_1+1,\ldots,\; n-r; \\ \ldots\ldots \\ \mu_r=\mu_{r-1}+1,\ldots,\; n-1. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Для ранга и порядка функций Уолша справедливо следующее свойство: ранг произведения функций Уолша не превосходит суммы их рангов; порядок произведения не превышает максимальный из порядков сомножителей. Справедливость этого свойства следует из свойств суммирования по модулю 2.

В [9] системы ДФУ отнесены к классу моноразностных дискретных ортогональных базисов. При изучении ряда свойств базисов этого класса весьма полезны их параметры и характеристики, подробно рассмотренные в данной работе. Подход к их введению основан на том, что любой коэффициент преобразования в рассматриваемом классе базисов может быть представлен в виде взвешенной суммы конечных разностей соответствующих порядков преобразуемого вектора f:

$$F(i)=\sum_{j=0}^{N-1-d_i}\omega(i,j)\Delta^{d_i}f(j), \quad i=\overline{0,N-1}, \quad (10)$$

где $F(i)$ – i-ый коэффициент преобразования; Δ^K – оператор конечной разности k-го порядка;

$\omega(i,j)=\omega(i,N-1-d_i-j)$ – i-я весовая функция; d_i – некоторое целое число.

В этом случае базисные векторы моноразностных дискретных базисов формируются последовательностями операторов конечной разности соответствующих порядков. В дальнейшем в работе будем оперировать параметром, названным дифференциальным порядком базисной функции d_i, под которым будем подразумевать порядок операторов конечной разности, формирующих эту функцию.

Отметим, что дифференциальный порядок конкретной функции Уолша связан с ее структурными свойствами и не зависит от места расположения в системе, то есть от упорядочения базисных функций.

Важными являются также следующие свойства:

8. Для систем ДФУ, упорядоченных по Адамару и Пэли, дифференциальные порядки функций равны их рангам: $d_i = rk_i$, $i=\overline{0,N-1}$. Следовательно, количество функций k-го ($k=\overline{0,n}$) дифференциального порядка равно величине C_n^k – числу сочетаний из n по k.

9. Известное свойство разложений дискретных степенных полиномов по системе Уолша-Пэли [6], которое можно переформулировать следующим образом: спектр дискретного полинома k-ой ($k=\overline{0,n}$) степени содержит компоненты, соответствующие базисным функциям не выше k-ого дифференциального порядка. Отметим, что аналогичное утверждение будет справедливо и для разложений по системе Уолша-Адамара.

10. Спектральные коэффициенты сигналов, достаточно хорошо описываемых дискретными степенными полиномами невысоких порядков, в пределах групп, соответствующих базисным функциям Уолша-Пэли одного дифференциального порядка, убывают по абсолютной величине с ростом их порядковых номеров.

Синтез разностно-упорядоченной системы дискретных функций Уолша

Предлагаемый метод упорядочения систем ДФУ размерности $N=2^n$ заключается в следующем. Строится разбиение множества порядковых номеров функций Уолша исходной системы $I=\{0,1,\ldots,N-1\}$ на $(n+1)$ подмножеств, каждое из которых включает номера функций с одинаковыми дифференциальными порядками.

$$\begin{aligned}
&I^{(0)}=\{0\},\ i=0,\\
&I^{(i)}=\{2^{\mu_1}+2^{\mu_2}+\ldots+2^{\mu_i} : \mu_1=\overline{0,n-i},\\
&\mu_2=\overline{\mu_1+1,n-i+1},\ldots \mu_i=\overline{\mu_{i-1}+1,n-1}\},\ i=\overline{1,n-1},\\
&I^{(n)}=\{2^n-1\},\ i=n.
\end{aligned} \tag{11}$$

Затем сформированные подмножества располагают в порядке увеличения дифференциальных порядков соответствующих функций, то есть в итоге получаем множество $J=\{J_0,J_1,\ldots,J_n\}$, для которого справедливы следующие соотношения: $J_i \underset{i\neq j}{\cap} J_j=\emptyset$ и $|J_i|=C_n^i$, $i=\overline{0,n}$.

Очевидно, что множество J определяет перестановку функций Уолша в системе

$$\pi=\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \ldots & N-1 \\ j_0 & j_1 & \cdots & j_{N-1} \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

Полученная в результате этой перестановки система ДФУ будет характеризоваться тем, что функции в ней располагаются группами в порядке возрастания их дифференциальных порядков. По этой причине назовем эту систему ДФУ разностно-упорядоченной.

Для вектора перестановочной последовательности будем придерживаться обозначения $P_n=(p_0,p_1,\ldots,p_{N-1})$, где $p_i=j_i$, $i=\overline{0,N-1}$. Перестановку с использованием этого вектора назовем перестановкой по дифференциальным порядкам базисных функций (кратко D-перестановкой).

Рассмотрим упорядочение системы Уолша-Пэли с использованием предложенного метода. Анализ дифференциальных порядков функций Уолша-Пэли показал, что вектор P_n может быть представлен в виде объединения ряда подвекторов:

$$P_n=(P_n^{(0)},P_n^{(1)},P_n^{(2)},\ldots,P_n^{(n)}), \tag{13}$$

где $P_i^{(0)}=(0)$, $P_i^{(i)}=(2^i-1)$, $i=\overline{1,n}$; $P_n^{(k)}, k=\overline{1,n-1}$, – подвекторы, определяемые рекуррентными соотношениями:

$$P_i^{(k)}=\begin{cases}(2^i-1), & i=k,\\ (P_{i-1}^{(k)},\ 2^{i-1}+P_{i-1}^{(k-1)}), & i=\overline{k+1,n},\end{cases} \tag{14}$$

$$i=\overline{k,n}.$$

Векторы P_n размерности $N=2^n, n=\overline{1,5}$, соответствующие перестановочным последовательностям, представлены в табл. 1.

Сверху подчеркнуты группы коэффициентов четных, а снизу – нечетных дифференциальных порядков.

Таблица 1 - Векторы значений перестановочной последовательности

n	Вектор P_n
1	$\{\overline{0},\underline{1}\}$
2	$\{\overline{0},\underline{1,2},\overline{3}\}$
3	$\{\overline{0},\underline{1,2,4},\overline{3,5,6},\underline{7}\}$
4	$\{\overline{0},\underline{1,2,4,8},\overline{3,5,6,9,10,12},\underline{7,11,13,14},\overline{15}\}$
5	$\{\overline{0},\underline{1,2,4,8,16},\overline{3,5,6,9,10,12,17,18,20,24},$ $\underline{7,11,13,14,19,21,22,25,26,28},\overline{15,23,27,29,30},\underline{31}\}$

С учетом введенного вектора значений перестановочной последовательности разностно-упорядоченную систему ДФУ $\{pld_N(i)\}_{i=0}^{N-1}$ можно описать так:

$$pld_N(i) = pal_N(p_i),\ i = \overline{0, N-1}\ , \qquad (15)$$

где $pal_N(i)$ – i-я функция Уолша-Пэли.

Матричная запись для введенной системы ДФУ имеет следующий вид:

$$PLD_N = S_N^D PAL_N\ , \qquad (16)$$

где $S_N^D = \left[s_{ij}\right]_{i,j=\overline{0,N-1}}$ – матрица D-перестановок, элементы которой формируются так:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = p_i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (17)$$

Следует отметить, что представленное выше упорядочение системы ДФУ получено на основе системы Уолша-Пэли. Выбор в качестве базисной системы Уолша-Пэли обусловлен легкостью получения аналитического описания для перестановочной последовательности и матричного соотношения, формирующего предложенное упорядочение системы ДФУ.

Различные варианты разностно-упорядоченных систем могут быть получены при выборе в качестве базисной других систем Уолша. Анализ дифференциальных порядков функций Уолша-Адамара и Уолша-Пэли показал, что вектор значений перестановочной последовательности P_n при выборе в качестве опорных матриц Уолша-Адамара также может быть представлен в виде объединения ряда подвекторов (13–14) – (табл. 2).

На основе полученного вектора значений перестановочной последовательности разностно-упорядоченные системы ДФУ $\left\{hdd_N(i)\right\}_{i=0}^{N-1}$ можно описать так:

$$hdd_N(i) = had_N(p_i), i = \overline{0, N-1}, \qquad (18)$$

где $had_N(i)$ – соответственно i-е функции Уолша-Адамара.

Таблица 2 - Группы дифференциальных порядков систем Уолша-Пэли и Уолша-Адамара при N=8

i	HAD_N, j	PAL_N, j	d_i	p_i	PLD_N, j	d_i
0	000	000	0	0	000	0
1	001	100	1	4	100	1
2	010	010	1	2	010	1
3	011	110	2	1	001	1
4	100	001	1	6	110	2
5	101	101	2	5	101	2
6	110	011	2	3	011	2
7	111	111	3	7	111	3

Матричная запись для введенной системы ДФУ имеет следующий вид:

$$HDD_N = S_N^D HAD_N\ , \qquad (19)$$

Например, явный вид матрицы HDD_N для $N = 2^3$ имеет следующий вид:

$$HDD_N = \begin{array}{c} \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{matrix}\right| \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Справа от матрицы указан дифференциальный порядок базисной функции, расположенной в соответствующей строке матрицы.

Точная оценка M общего числа разностно-упорядоченных систем ДФУ при условии, что группы базисных функций будут располагаться в порядке повышения их дифференциальных порядков, может быть определена по следующей формуле:

$$M = \prod_{i=1}^{n-1} (C_n^i!)\,. \qquad (18)$$

В работе [10] рассмотрена возможность получения матричной записи другого варианта разностно-упорядоченной системы ДФУ. При этом используется послойно-кронекеровское произведение матриц.

Остановимся на вопросе нумерации разностно-упорядоченных ДФУ в системе. Здесь в ряде случаев удобнее оперировать двухзначной индексацией базисных функций. Например, для рассмотренных в работе систем ДФУ она вводится следующим образом:

$$\begin{gathered} pld_{2^n}(i) = pld_{2^n}(l, j),\ i = \overline{0, N-1}, \\ i = b_{n,l-1} + j, \quad l \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad j \in \{0, 1, \ldots, C_n^l - 1\}. \end{gathered} \qquad (19)$$

Очевидно, что индекс l равен дифференциальному порядку базисного вектора, а индекс j – его порядковому номеру в соответствующей группе. Соотношение, описывающее зависимость между двумя видами индексации, не зависит от варианта разностно-упорядоченной системы ДФУ.

Заметим, что матрицы PAL_N, PLD_N и DOW_N совпадают для N=2,4, а $PLD_N = DOW_N$ для N=8.

Свойства разностно-упорядоченных систем дискретных функций Уолша

Рассмотрим отдельные свойства преобразований по введенным упорядочениям систем ДФУ.

1. Для разностно-упорядоченных систем ДФУ справедливы свойства ДФУ 1–7.

2. Известное свойство 8 (разложение дискретных степенных полиномов по системе Уолша-Пэли и Уолша-Адамара) применительно к рассматриваемым разностно-упорядоченным системам ДФУ можно сформулировать следующим образом: спектр дискретного полинома к-ой ($k=\overline{0,n}$) степени разлагается по базисным функциям не выше к-ой группы.

Рассматриваемое свойство в случае упорядочения функций Уолша-Пэли можно записать в виде следующего соотношения:

$$F(l,i)=0, 1>k, \quad (20)$$

где $F(l,i)=\sum_{j=0}^{N-1} f(j)pld_N(l,i,j)$.

3. Немаловажным является свойство 9, которое также справедливо для разностно-упорядоченных систем ДФУ: спектральные коэффициенты сигналов, достаточно хорошо описываемых дискретными степенными полиномами невысоких порядков, в пределах групп, соответствующих базисным функциям одного дифференциального порядка, убывают по абсолютной величине с ростом их порядковых номеров.

Полученные при этих упорядочениях матрицы функций Уолша являются несимметрическими, исключением являются тривиальные случаи матриц для порядков N = 2, 4.

4. Отметим следующее свойство, спектры дискретных степенных полиномов низких порядков в базисах разностно-упорядоченных ДФУ характеризуются большей степенью локализации ненулевых компонент в их начальных участках

Проиллюстрируем характер распределения ненулевых компонент спектров дискретных степенных полиномов $f(i)$ к-ой ($k=1,2$) степени для N=16 в базисах различных систем ДФУ.

Предварительно введем индикаторный вектор спектра $S=(s_0,s_1,...,s_{N-1})$, определяя его элементы так

$$S_i=\begin{cases}1, & F(i)\neq 0,\\ 0, & F(i)=0,\end{cases} \quad (21)$$

где $F(i)$ – i-ый коэффициент преобразования.

Одномерные дискетные степенные полиномы $f(j)$ определяются функциями вида

$$f(j)=\sum_{i=0}^{k-1} a_i j^i, \quad j=\overline{0,N-1}, \quad k\in Z_{N-1}, \quad (22)$$

где $Z_{N-1}=\{0,1, \dots ,N-1\}$.

При выборе моделей сигналов часто ограничиваются полиномиальной моделью малых степеней ($k\in Z_5$). Это обусловлено тем, что ею может быть эффективно описан широкий класс реальных сигналов на конечных интервалах.

Формулы расчета коэффициентов преобразования $F(i)$ одномерного полиномиального сигнала в матричном виде будут иметь следующий вид:

$$F = H_N f, \quad (23)$$

где H_N - матрица ДПУ в используемом упорядочении ДФУ;

$f=\{f(i), i=\overline{0,N-1}\}^T$ - вектор исходных данных;

$F=\{F(i), i=\overline{0,N-1}\}^T$ - вектор спектральных коэффициентов, Т – знак транспонирования.

Индикаторные векторы спектров в базисе Уолша-Адамара, Уолша-Качмажа, Уолша-Пэли и разностно-упорядоченных ДФУ для полиномов степени k=1 и k=2
имеют вид:

1) k = 1:

(1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0) - для базиса Уолша-Адамара;

(1,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1) - для базиса Уолша-Качмажа;

(1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0) - для базиса Уолша-Пэли;

(1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) - для базиса разностно-упорядоченных ДФУ.

2) k = 2:

(1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0) - для базиса Уолша-Адамара;

(1,1,1,1,1,0,1,1,1,0,0,0,1,0,1,1) - для базиса Уолша-Качмажа;

(1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0) - для базиса Уолша-Пэли;

(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0) - для базиса разностно-упорядоченных ДФУ.

Проиллюстрируем характер распределения ненулевых компонент спектров дискретных степенных двумерных полиномов $f(i, j)$ к-ой ($k=1,2$) степени для $N1\times N2=8\times 8$ в базисах ДФУ. Двумерные дискретные степенные полиномы, определяют функциями вида

$$f(i,j)=\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{k-1} a_{pq} i^p j^q, \quad (24)$$

где $i=\overline{0,N_1-1}, j=\overline{0,N_2-1}, \; k\in Z_{N-1}$,

$Z_{N-1}=\{0,1, \dots ,N-1\}$.

При этом ограничимся двумерными полиномиальными моделями низких степеней ввиду того, что они являются основой ряда алгоритмов цифровой обработки сигналов.

Приведем формулы прямого преобразования двумерного полиномиального сигнала в векторно-матричной форме:

$$F=H_N{}^T f H_N, \quad (25)$$

где $f=\{f(i,j), i=\overline{0,N_1-1}, j=\overline{0,N_2-1}\}$ - матрица исходных данных;

$F=\{F(i,j), i=\overline{0,N_1-1}, j=\overline{0,N_2-1}\}$ - матрица спектральных коэффициентов.

Индикаторные векторы спектров для рассматриваемых случаев при k=1 показаны на рис. 1, 2.

1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 1 - Индикаторные векторы спектров при k=1 в базисе: Уолша-Адамара, Уолша-Качмажа

1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 2 - Индикаторные векторы спектров при k=1 в базисе: Уолша-Пэли, разностно-упорядоченных ДФУ

Индикаторные векторы спектров для рассматриваемых случаев при k=2 показаны на рис. 3, 4.

1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1

Рис. 3 - Индикаторные векторы спектров при k=2 в базисе: Уолша-Адамара, Уолша-Качмажа

1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 4 - Индикаторные векторы спектров при k=2 в базисе: Уолша-Пэли, разностно-упорядоченных ДФУ

Из этих примеров видно, что спектры дискретных степенных полиномов низких порядков в базисах разностно-упорядоченных ДФУ характеризуются большей степенью локализации ненулевых компонент в их начальных участках.

Полученные свойства преобразований по разностно-упорядоченным системам ДФУ имеют важное значение для их приложений в системах управления и системах связи.

Применение синтезированных упорядочений дискретных функций Уолша в АСУ

Успешному использованию преобразований Уолша в области управления и связи способствовало изучение следующих вопросов: свойства функций Уолша; свойства спектров Уолша; общие вопросы применения функций Уолша при выполнении преобразований; алгоритмы быстрого преобразования Уолша; вычисление корреляционных функций и выполнение сверток на базе функций Уолша; применение функций Уолша для исследования случайных процессов; использование функций Уолша при построении цифровых фильтров.

Благодаря общим свойствам 1-7 с известными ДФУ (в упорядочениях Уолша-Качмажа, Уолша-Пэли, Уолща-Адамара) синтезированные разностно-упорядоченные системы ДФУ могут найти эффективное применение в области автоматического управления технологическими процессами. Например, является актуальным применение преобразований Уолша при анализе динамики линейных и нелинейных систем, разработке систем оптимального управления, моделировании процессов, идентификации объектов, разработке ряда специальных устройств автоматики [5].

Практически важным для АСУ является предоженное Х. Хармутом использование функций Уолша для формирования сигналов, передаваемых по линиям радиосвязи [5]. Функции Уолша применены при разработке многоканальных систем связи, в которых одновременно передаются различные сигналы по каждому каналу связи. Использование разностно-упорядоченных систем ДФУ (свойство 2) позволит обеспечить многопотоковую обработку данных, при этом каждый поток будет включать элементы группы трансформант соответствующего дифференциального порядка, что значительно ускорить обработку данных.

В настоящее время для решения многих задач в АСУ технологическими процессами и производством применяется вейвлет-преобразование. Например, в ОАО "Татнефть" вейвлет-преобразование используется для подавления шумов и сжатия массивов данных с глубинных манометров [1], или при передаче динамограмм полученных с датчиков динамометрирования на диспетчерский пункт [3]. Во многих случаях недостаточная степень сжатия данных при выполнении ДПУ сдерживает широкое применение данных преобразований. Свойство 2 полученное для разностно-упорядоченных систем ДФУ позволит значительно увеличить степень сжатия данных и способствует применению в перечисленных выше задачах.

Одной из важных задач в АСУ является задача передачи данных по каналам связи. При этом широкое распространение получили SCADA-системы. Известны также решения, в которых функции SCADA-системы реализованы с помощью интернет-программирования, в ОАО «Газ-Сервис» (Республика Башкортостан) внедрены в эксплуатацию несколько автоматизированных систем дистанционного мониторинга оборудования газораспределительной сети [4]. Для передачи данных по сети эффективное применение могут найти разностно-упорядоченные системы ДФУ (свойство 4).

В работе [11] авторами были предложены алгоритмы с использованием преобразований Уолша и сравнительный анализ их эффективности. Использование в представленных алгоритмах для передачи данных разностно-упорядоченных систем ДФУ позволит обеспечить последовательную передачу потоков выходных данных при высокой скорости обработки и передачи данных по сети.

Выводы

Полученные свойства новых упорядоченний дискретных функций Уолша имеют важное значение для их приложений в системах управления и системах связи. Синтезированные разностно-упорядоченные системы ДФУ могут найти применение для повышения эффективности использования коммуникационных и информационно-вычислительных ресурсов автоматизированных систем управления производством и технологическими процессами.

Литература

1. Шипилова, К.Ф.. Применение вейвлет-преобразований в нефтепромысловой практике / К.Ф. Шипилова, А.В. Байгушев // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. – Москва, 2011. – № 7. – С. 45-61.
2. Ахметшин, Д.А. Концепция использования промежуточных сетей передачи данных при организации публичного доступа в сеть Интернет / Д.А. Ахметшин, Д.Р. Курмангалиев, 2011 - №24. Вестник КГТУ. – С. 56-78.
3. Кузьмин, С. Упаковка динамограммы в 50 байт / С. Кузьмин // Современные технологии автоматизации. – 2004. – Режим доступа: http://www.cta.ru/online/online_progr-digital.htm.
4. Юнусов, А.Р. Автоматизация технологических процессов без использования классических scada-пакетов / А.Р. Юнусов // журнал «ИСУП». - № 6(30) - 2010. – С. 34-76.
5. Залманзон, Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / Л.А. Залманзон. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
6. Смирнов, Ю.М. Проектирование специализированных информационно-вычислительных систем: учеб. пособие по спец. ЭВМ и АСУ / Ю.М. Смирнов, Г.Н. Воробьев, Е.С. Потапов, В.В. Сюзев. – М.: Высшая школа, 1984. – 359 с.
7. Ахмед, Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К.Р. Рао. – М.: Связь, 1980. – 248 с.
8. Дагман, Э.Е. Быстрые дискретные ортогональные преобразования / Э.Е. Дагман, Г.А. Кухарев. – Новосибирск: Наука, 1983. – 230 с.
9. Исмагилов, И.И. Дискретные преобразования в базисах Уолша-подобных функций: Основы теории и применения в цифровой обработке сигналов / И.И. Исмагилов. – Казань: Отечество, 2003. – 130 с.
10. Исмагилов, И.И. Об одном подходе к упорядочению систем дискретных функций Уолша / И.И. Исмагилов // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2006. – Т. 49, N 1. – С. 65–72.
11. Исмагилов, И.И. Сжатие цифровых изображений с использованием преобразований Уолша: алгоритмы и сравнительный анализ их эффективности / И.И. Исмагилов, М.Ю. Васильева // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. – Казань, 2008. – № 9-10. – С. 91–99.

© **М. Ю. Васильева –** канд. техн. наук, доц. каф. САУТП КНИТУ, marinav@inbox.ru; **Ф. В. Коннов –** магистр КНИТУ; **И. И. Исмагилов –** д-р техн. наук, проф., зав. каф. статистики, эконометрики и естествознания ПФУ, iiismag@mail.ru.