

## **ПРОБЛЕМА РЕДУКЦИИ УГЛОВ ВРАЩЕНИЯ ЛУНЫ, ПОЛУЧЕННЫХ В РАЗНЫХ ТЕОРИЯХ ЛУННОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛИБРАЦИИ**

**Загидуллин А.А.<sup>1</sup>, Усанин В.С.<sup>1</sup>, Петрова Н.К.<sup>1,2</sup>, Нефедьев Ю.А.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Казанский федеральный университет, Казань, Россия

<sup>2</sup>Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия

*В свете планируемого освоения Луны налунными аппаратами проблема изучения вращения нашего спутника актуальна. В Казанском федеральном университете ведётся разработка численной теории физической либрации Луны (ФЛЛ), построенной в самолётных углах. На данном этапе наша численная теория построена на основе эфемериды, извлечённой из DE421. Для анализа точности полученного решения проведено сравнение с углами Эйлера, также извлечёнными из DE421. Нами получены редуцированные формулы, позволяющие реализовать корректный переход от эйлеровых углов к самолётным, а также от угловых скоростей к каноническим импульсам.*

### **1. Введение**

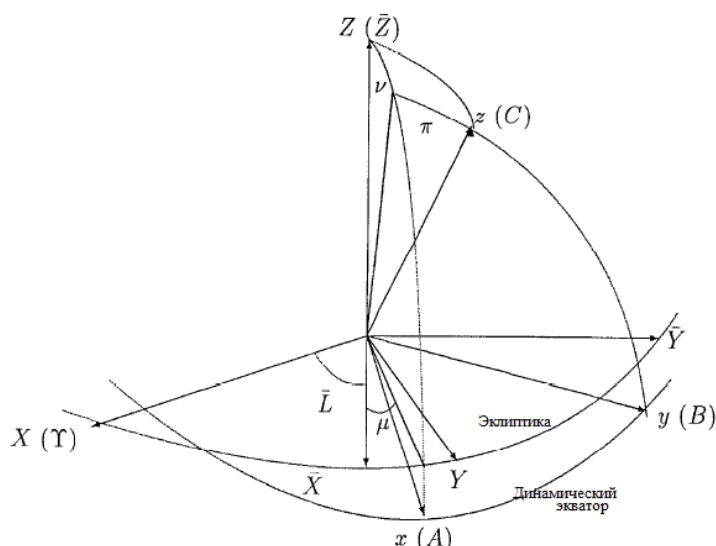
Одна из проблем, возникающих при сравнении различных численных и аналитических теорий вращения Луны состоит в том, что эти теории построены в различных системах переменных, в различных системах координат и с применением разных по значению астрономических постоянных. Так, современные численные эфемериды серии DE [1] представляют вращение Луны углами Эйлера относительно средней экваториальной системы координат эпохи J2000 (ICRF). В аналитических теориях ФЛЛ (например, [2]) обычно используются углы либрации относительно эклиптической системы координат. Хабибуллиным [3] было предложено применение самолётных углов. В самолётных углах, для которых основной плоскостью является эклиптика и система координат вращается с угловой скоростью среднего движения Луны, построена аналитическая теория ФЛЛ Петровой [4]. Аналитические теории не учитывают изменение геоцентрической орбиты Солнца (то есть смещение плоскости эклиптики в результате прецессии от планет). Поскольку динамические уравнения записаны в инерциальной системе координат, декларируется, что основной плоскостью является фиксированная эклиптика эпохи J2000. Но при частотном анализе эфемериды DE421 Рамбо и Вильямс [5] использовали углы либрации относительно средней эклиптики текущей даты, что в аналитическом представлении углов либрации существенно уменьшило пуассоновские члены, ответственные за долговременные эффекты.

Для изучения особенностей современных систем координат и редуцированных постоянных, мы предварительно воспроизвели переход от углов Эйлера из DE421 к углам либрации из [5]. В настоящей работе с целью сохранения преемственности разрабатываемой нами численной теории ФЛЛ с аналитической теорией Петровой, рассматривается переход от экваториальных углов Эйлера из DE421 к эклиптическим самолётным углам, а также соответственно от угловых скоростей к каноническим импульсам.

### **2. Системы переменных и системы координат**

Для углов Эйлера из DE421 мы придерживаемся обозначений, принятых в [6] и отличающихся от [2, 5].  $\varphi$  – угол вдоль экватора ICRF от точки весеннего равноденствия до восходящего узла лунного экватора.  $\theta$  – наклон лунного экватора к экватору ICRF.  $\psi$  – угол вдоль лунного экватора от восходящего узла до лунного нулевого меридиана (направления наименьшего момента инерции). Также в эфемериде содержатся соответствующие угловые скорости  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$ .

Самолётные углы использовались Петровой [4] следующим образом (рис. 1).  $\mu$  – угол вдоль эклиптики эпохи J2000 от среднего направления на Землю до круга широты направления наименьшего момента инерции (рыскание).  $\nu$  – угол вдоль круга широты от эклиптики эпохи J2000 до направления наименьшего момента инерции (крен).  $\pi$  – угол вдоль лунного меридиана от направления среднего из главных моментов инерции до эклиптики эпохи J2000 (тангаж). Теория построена в рамках гамильтонова подхода, поэтому с обобщёнными координатами  $q_1 = \mu$ ,  $q_2 = \nu$ ,  $q_3 = \pi$  сопряжены обобщённые импульсы  $p_1, p_2, p_3$ .



**Рис. 1.** Селеноцентрическая система координат.  $XYZ$  – эклиптическая система координат, ось  $X$  направлена в точку весеннего равноденствия,  $Z$  – к полюсу эклиптики.  $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  – равномерно вращающаяся эклиптическая система координат.  $xyz$  – динамическая система координат: ось  $x$  направлена в направлении наименьшего момента инерции  $A$ ,  $z$  – в направлении наибольшего момента инерции  $C$ .

### 3. Преобразование углов

Вначале необходимо перейти от углов Эйлера главных моментов инерции, отнесённых к экватору ICRF, к углам Эйлера, отнесённым к эклиптике эпохи J2000. Это преобразование содержится в [6] как часть перехода от вектора в системе координат, определяемой средним направлением на Землю, к углам либрации относительно эклиптики даты. Обозначим матрицы поворота:

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, переход от вектора  $\vec{r}_1$  в системе координат главных моментов инерции к вектору  $\vec{r}_2$  в системе координат экватора ICRF и к вектору  $\vec{r}_{2000}$  в системе координат эклиптики эпохи J2000 будет:

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= R_3(-\varphi) R_1(-\theta) R_3(-\psi) \vec{r}_1, \\ \vec{r}_{2000} &= R_1(\varepsilon_0) \vec{r}_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon_0 = 84381.406''$  – наклон эклиптики к экватору в эпоху J2000 [7]. Применим повороты (2) к  $\vec{r}_1 = (1\ 0\ 0)^T$  и  $\vec{r}_1 = (0\ 0\ 1)^T$  (Т обозначает транспонирование) и назовём полученные векторы соответственно  $\vec{x}_{2000}$  и  $\vec{z}_{2000}$ . Пусть  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы в системе координат эклиптики эпохи J2000 вдоль осей  $X, Y, Z$ . Определим единичный вектор в направлении к нисходящему узлу лунного экватора на эклиптике эпохи J2000:

$$\vec{\omega} = [\vec{z}_{2000} \times \vec{k}] / |[\vec{z}_{2000} \times \vec{k}]|. \quad (3)$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \cos \varphi_C &= (\vec{i} \cdot \vec{\omega}), \\ \sin \varphi_C &= (\vec{j} \cdot \vec{\omega}), \\ \cos \theta_C &= (\vec{k} \cdot \vec{z}_{2000}), \\ \cos \psi_C &= (\vec{\omega} \cdot \vec{x}_{2000}), \\ \sin \psi_C &= ([\vec{z}_{2000} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{x}_{2000}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varphi_C$  – угол от точки весеннего равноденствия эпохи J2000 до нисходящего узла лунного экватора на эклиптике эпохи J2000,  $\theta_C$  – наклон лунного экватора к эклиптике эпохи J2000,  $\psi_C$  – угол вдоль лунного экватора от его нисходящего узла на эклиптике эпохи J2000 до направления наименьшего момента инерции.

Далее, самолётные углы  $\nu, \pi$  определяем из соотношений [4,5]:

$$\begin{aligned} \sin \nu &= -P_1 = \sin \psi_C \sin \theta_C, \\ \sin \pi \cos \nu &= -P_2 = \cos \psi_C \sin \theta_C, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $P_1, P_2$  – направляющие косинусы полюса эклиптики эпохи J2000 в системе координат главных моментов инерции. Из сферических треугольников, либо матричных соотношений имеем также:

$$\begin{aligned} \cos M \cos \nu &= \cos \psi_C \cos \varphi_C - \sin \psi_C \cos \theta_C \sin \varphi_C, \\ \sin M \cos \nu &= \cos \psi_C \sin \varphi_C + \sin \psi_C \cos \theta_C \cos \varphi_C, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$M = \mu + \bar{L} = \mu + F + W_3 + 180^\circ, \quad (7)$$

$\bar{L}$  – селеноцентрическая средняя долгота Земли относительно точки весеннего равноденствия эпохи J2000,  $F$  – средний аргумент широты Луны (из аргументов Делоне),  $W_3$  – средняя долгота восходящего узла орбиты Луны на эклиптике эпохи J2000. По [8],

$$\begin{aligned} F &= 93^\circ 16' 19.5517'' + 1739527263.2179'' t - 13.2293'' t^2 - \\ &- 0.001021'' t^3 + 0.00000417'' t^4, \\ W_3 &= 125^\circ 02' 40.3265'' - 6967919.8851'' t + 6.3593'' t^2 + \\ &+ 0.007625'' t^3 - 0.00003586'' t^4, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $t$  – время в юлианских столетиях от эпохи J2000.

Разности в  $\mu, \nu, \pi$  между аналитической теорией Петровой с параметрами LURE2 и численной теорией DE421 показаны на рис. 2. Сравнивая таблицы [4] и [5], находим, что уточнение коэффициентов Стокса лунного гравитационного потенциала вызвало постоянное смещение  $146.599''$  в  $\mu$  и колебания с периодом 27.212 суток и амплитудами  $4.071''$  и  $4.088''$  в  $\nu, \pi$ . Вследствие изменения геоцентрической орбиты Солнца, возникают колебания в  $\nu, \pi$  с периодом 27.322 суток и амплитудой, возрастающей на  $46.999''$  в столетие [7]. Другие заметные колебания отождествляются в [5] как не связанные с «главной проблемой». В  $\mu$ : косвенные возмущения от Венеры с периодом  $99858.686$  суток и амплитудой  $14.605''$ , косвенные возмущения от формы Земли с периодом  $6798.526$  суток и амплитудой  $7.761''$ , свободная либрация и косвенные возмущения от Венеры с периодом  $1056.210$  суток и амплитудой  $1.809''$ . В  $\nu, \pi$ : косвенные возмущения от формы Земли и движущейся плоскости эклиптики с периодом 27.322 суток

и амплитудой 11.862", свободные чандлероподобные колебания с периодом 27257.273 суток и амплитудами 3.306" и 8.183".

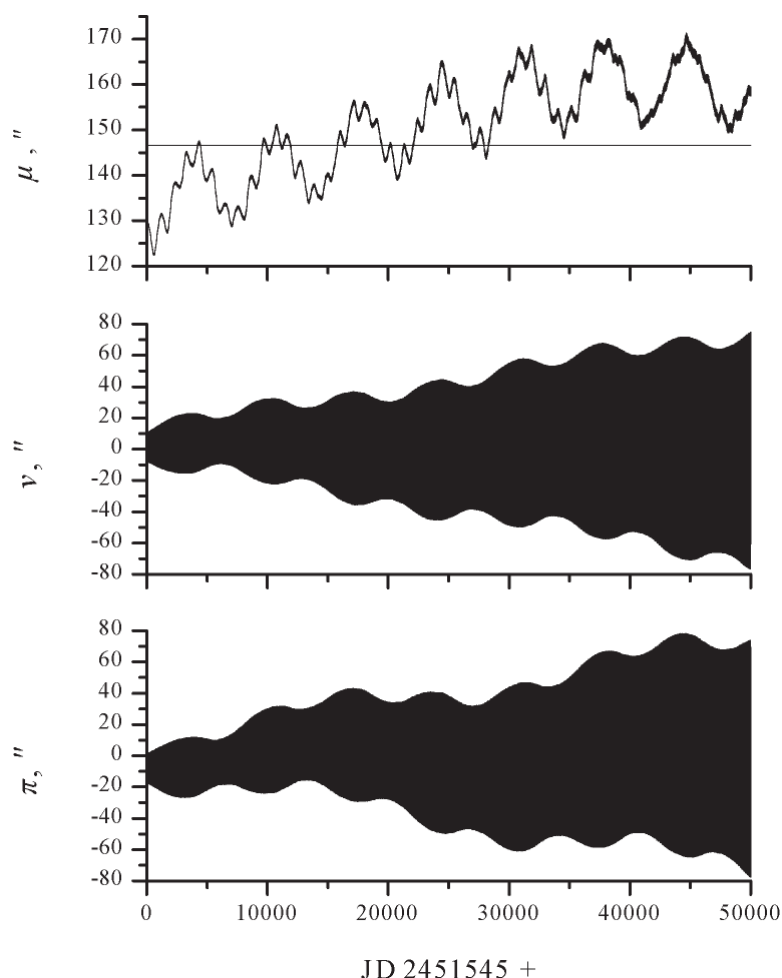


Рис. 2. Разности между аналитической теорией Петровой с параметрами LURE2 и численной теорией DE421.

#### 4. Преобразование угловых скоростей

Для перехода от  $\varphi, \theta, \psi$  к  $M, \nu, \pi$ , продифференцируем по времени соотношения (1–6):

$$\dot{R}_1(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\theta} \sin \theta & \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 & -\dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\dot{R}_3(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & \dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ -\dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dot{r}_2 = (\dot{R}_3(-\varphi, -\dot{\varphi}) R_1(-\theta) R_3(-\psi) + R_3(-\varphi) \dot{R}_1(-\theta, -\dot{\theta}) R_3(-\psi) + R_3(-\varphi) R_1(-\theta) \dot{R}_3(-\psi, -\dot{\psi})) \vec{r}_1, \quad (10)$$

$$\dot{r}_{2000} = R_1(\varepsilon_0) \dot{r}_2,$$

$$\vec{\omega} = \frac{[\dot{\vec{z}}_{2000} \times \vec{k}] |[\vec{z}_{2000} \times \vec{k}]| - \frac{[\vec{z}_{2000} \times \vec{k}]}{|[\vec{z}_{2000} \times \vec{k}]|} ([\vec{z}_{2000} \times \vec{k}] \cdot [\dot{\vec{z}}_{2000} \times \vec{k}])}{|[\vec{z}_{2000} \times \vec{k}]|^2}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -\dot{\varphi}_C \sin \varphi_C &= (\vec{i} \cdot \vec{\omega}), \\ -\dot{\theta}_C \sin \theta_C &= (\vec{k} \cdot \dot{\vec{z}}_{2000}), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -\dot{\psi}_C \sin \psi_C &= (\vec{\omega} \cdot \vec{x}_{2000}) + (\vec{\omega} \cdot \dot{\vec{x}}_{2000}), \\ \dot{v} \cos v &= \dot{\psi}_C \cos \psi_C \sin \theta_C + \dot{\theta}_C \sin \psi_C \cos \theta_C, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi} \cos \pi \cos v - \dot{v} \sin \pi \sin v &= -\dot{\psi}_C \sin \psi_C \sin \theta_C + \dot{\theta}_C \cos \psi_C \cos \theta_C, \\ \dot{M} \cos M \cos v - \dot{v} \sin M \sin v &= -\dot{\psi}_C \sin \psi_C \sin \varphi_C + \\ &+ \dot{\varphi}_C \cos \psi_C \cos \varphi_C + \dot{\psi}_C \cos \psi_C \cos \theta_C \cos \varphi_C - \\ &- \dot{\theta}_C \sin \psi_C \sin \theta_C \cos \varphi_C - \dot{\varphi}_C \sin \psi_C \cos \theta_C \sin \varphi_C. \end{aligned} \quad (14)$$

Кинематические уравнения вращения Луны дают проекции угловой скорости вращения  $\vec{\Omega}$  на оси динамической системы координат:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= -\dot{M} \sin v - \dot{\pi}, \\ \Omega_y &= -\dot{M} \cos v \sin \pi + \dot{v} \cos \pi, \\ \Omega_z &= \dot{M} \cos v \cos \pi + \dot{v} \sin \pi. \end{aligned} \quad (15)$$

Кинетическая энергия лунного вращения может быть записана в виде [4]:

$$T = (A\Omega_x^2 + B\Omega_y^2 + C\Omega_z^2) / 2, \quad (16)$$

где главные моменты инерции Луны  $A, B, C$  выражаются через безразмерные параметры  $\beta, \gamma$  [1,4]:

$$\begin{aligned} A &= (1 - \beta\gamma) / (1 + \beta), \\ B &= (1 + \gamma) / (1 + \beta), \\ C &= 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Импульсы  $\tilde{p}_1, p_2, p_3$  [4], сопряжённые переменным  $M, v, \pi$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{M}} = -A\Omega_x \sin v - B\Omega_y \cos v \sin \pi + C\Omega_z \cos v \cos \pi, \\ p_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} = B\Omega_y \cos \pi + C\Omega_z \sin \pi, \\ p_3 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}} = -A\Omega_x. \end{aligned} \quad (18)$$

Импульс  $p_1$ , сопряжённый переменной  $\mu$ , находим, делая каноническое преобразование [4]:

$$p_1 = \tilde{p}_1 - Cn = \tilde{p}_1 - C\dot{L} = \tilde{p}_1 - C(\dot{F} + \dot{W}_3), \quad (19)$$

где  $n$  – среднее движение Луны. Дифференцируя (8), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{F} &= (1739527263.2179'' - 2 \cdot 13.2293'' t - 3 \cdot 0.001021'' t^2 + \\ &+ 4 \cdot 0.00000417'' t^3) / \text{юлианское столетие}, \\ \dot{W}_3 &= (-6967919.8851'' + 2 \cdot 6.3593'' t + 3 \cdot 0.007625'' t^2 - \\ &- 4 \cdot 0.00003586'' t^3) / \text{юлианское столетие}. \end{aligned} \quad (20)$$

## 5. Заключение

В настоящей работе приведён алгоритм перехода от углов Эйлера и угловых скоростей, применяемых в современных численных эфемеридах серии DE, к самолётным

углам и каноническим импульсам, применяемым в аналитической теории ФЛЛ Петровой. Разности между теорией Петровой и DE421 объясняются уточнением параметров гравитационного поля Луны и эффектами, не учитываемыми в «главной проблеме» ФЛЛ, в рамках которой построена теория Петровой. Таким образом, мы получили начальные данные и основу для контроля разрабатываемой нами численной теории ФЛЛ, сохраняющей преемственность с аналитической теорией Петровой.

#### **Литература**

1. *Williams J.G., Boggs D.H., Folkner W.M.* DE421 Lunar Orbit, Physical Librations, and Surface Coordinates (Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology Interoffice memorandum IOM 335-JW,DB,WF-20080314-001), 2008, [ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de421\\_moon\\_coord\\_iom.pdf](ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de421_moon_coord_iom.pdf).
2. *Eckhardt D.H.* Theory of the libration of the Moon // *The Moon and the planets*, 1981, V. 25, No. 1, 3-49.
3. *Habibullin Š.T.* The Motion of the Momentary Poles of the Moon // *Acta Astronomica*, 1968, V. 18, No. 2, 207-220.
4. *Petrova N.* Analytical extension of lunar libration tables // *Earth, Moon and Planets*, 1996, V. 73, No. 1, 71-99.
5. *Rambaux N., Williams J.G.* The Moon's physical librations and determination of their free modes // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2011, V. 109, Issue 1, 85-100.
6. *Taylor D.B., Bell S.A., Hilton J.L., Sinclair A.T.* Computation of the Quantities Describing the Lunar Librations in the Astronomical Almanac (NAO Technical Note No. 74), 2010, <http://astro.ukho.gov.uk/data/tn/naotn74.pdf>.
7. *Hilton J.L., Capitaine N., Chapront J. et al.* Report of the International Astronomical Union Division I Working Group on Precession and the Ecliptic // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2006, V. 94, Issue 3, 351-367.
8. *Chapront J., Chapront-Touzé M., Francou G.* A new determination of lunar orbital parameters, precession constant and tidal acceleration from LLR measurements // *Astronomy & Astrophysics*, 2002, V. 387, No. 2, 700-709.

#### **A PROBLEM OF THE REDUCTION OF ROTATION ANGLES OF THE MOON OBTAINED IN DIFFERENT LUNAR PHYSICAL LIBRATION THEORIES**

**Zagidullin A.A.<sup>1</sup>, Usanin V.S.<sup>1</sup>, Petrova N.K.<sup>1,2</sup>, Nefedyev Y.A.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

<sup>2</sup>*Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russia*

In the light of the planned exploration of the Moon by landers, the problem of studying the rotation of the Earth's natural satellite is relevant. A numerical theory of the lunar physical librations (LPL) in nautical angles is developing at the Kazan Federal University. At the current stage, our numerical theory is based on the ephemeris derived from DE421. A comparison is made with the Euler angles also derived from DE421 to analyze the accuracy of the obtained solution. We have obtained the reduction formulae, which allow realizing the correct transformation from the Euler angles to the nautical angles and from the angular velocities to the generalized momenta.