УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

Л.У. Бахтиева[1], Ф.Х. Тазюков[2]
[1, 2] кандидат физико-математических наук, доцент
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия

Аннотация. *Представлен новый подход к решению нелинейных задач устойчивости пластин и оболочек с учетом динамических факторов, сопровождающих процесс выпучивания. С помощью принципа Остроградского-Гамильтона построена математическая модель, приближающая теоретическую постановку задачи к экспериментальным исследованиям. Устойчивость оболочки исследуется согласно теории А.М. Ляпунова.*

Ключевые слова: *устойчивость, оболочка, критическая нагрузка, прогиб.*

Расчеты оболочечных конструкций на устойчивость под действием различных нагрузок имеют большое значение при проектировании кораблей, самолетов, строительных сооружений и пр. Результаты экспериментальных исследований в этой области характеризуются существенным отличием от имеющихся теоретических данных [4]. Одной из причин такого отличия является, на наш взгляд, тот факт, что авторы известных нам теоретических работ не учитывают в своих расчетах влияние динамических факторов.

Как показывают эксперименты, потеря устойчивости оболочек сопровождается резким хлопком и появлением вмятин, глубина которых уже в начальный момент сравнима с толщиной оболочки, поэтому строгие математические расчеты на устойчивость требуют привлечения нелинейных уравнений относительно функции прогиба w и функции напряжений Φ.

Следуя работам А.С. Вольмира [3], запишем уравнение неразрывности деформаций в виде

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi + \frac{1}{2}L(w,w) + k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

где k_x, k_y – кривизны срединной поверхности оболочки; $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$; $L(w,w) = 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$.

Будем решать задачу с помощью энергетического метода Ритца. Выберем аппроксимирующую функцию прогиба в виде

$$w(x,y) = f_1\varphi_1(x,y) + f_2\varphi_2(x,y), \tag{2}$$

где функции $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ удовлетворяют граничным условиям задачи.

Подставляя выражение (2) в уравнение (1) и интегрируя его, найдем функцию напряжений Φ и вычислим потенциальную энергию деформации по формуле $U = U_c + U_и$, где введены обозначения

$U_c = \frac{h}{2E}\iint\left((\nabla^2\Phi)^2 - (1+\nu)L(\Phi,\Phi)\right)dxdy$ – энергия деформации срединной поверхности; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина оболочки;

$U_и = \frac{D}{2}\iint\left((\nabla^2 w)^2 - (1-\nu)L(w,w)\right)dxdy$ – энергия изгиба; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – изгибная жесткость.

Для полной потенциальной энергии $Э = U - A$ получаем выражение

$$Э = Э\,(p, f_1, f_2), \tag{3}$$

где p – параметр нагрузки; A – работа внешних сил, определяемая конкретным видом нагружения.

Метод Ритца приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial Э}{\partial f_1} = 0, \quad \frac{\partial Э}{\partial f_2} = 0. \tag{4}$$

Решая систему (4), находим значения амплитуд $f_1 u$ f_2, а также критическую нагрузку и параметры волнообразования. Результаты расчетов (статический подход) для круговой цилиндрической оболочки в случаях внешнего давления и кручения совпадают с имеющимися в литературе данными и приведены в работах [1], [2]. Отмечается, что описанная выше математическая модель, не учитывающая динамику хлопка, приводит к значениям критических нагрузок, существенно отличающимся от результатов эксперимента.

Предложим новую постановку рассматриваемой задачи с учетом динамических факторов. Чтобы получить уравнения движения оболочки, используем принцип Остроградского-Гамильтона [5]

$$\delta \int_0^t L dt = 0, \tag{5}$$

где функция Лагранжа $L = K - Э$, K – кинетическая энергия, Э – потенциальная энергия, для которой получено выражение (3), t – время.

Величину K найдем по формуле

$$K = \frac{\rho h}{2} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx dy,$$

$\rho = E/V^2$ – плотность, V– скорость звука в материале оболочки.

С учетом выражения (2) можно получить

$$K = K\,(f_1, f_2, \dot{f}_1, \dot{f}_2).$$

Из равенства (5) получаем систему уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{f}_1}\right) - \frac{\partial K}{\partial f_1} + \frac{\partial Э}{\partial f_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{f}_2}\right) - \frac{\partial K}{\partial f_2} + \frac{\partial Э}{\partial f_2} = 0, \tag{6}$$

а также условия в начальный момент времени

$$f_1(0) = f_{10}, \quad f_2(0) = f_{20}, \dot{f}_1(0) = \dot{f}_2(0) = 0 \tag{7}$$

и в момент потери устойчивости $t = t_k$

$$\dot{f}_1(t_k) = \dot{f}_2(t_k) = 0. \tag{8}$$

Условия (8) соответствуют динамическому критерию устойчивости, предложенному А.В. Саченковым.

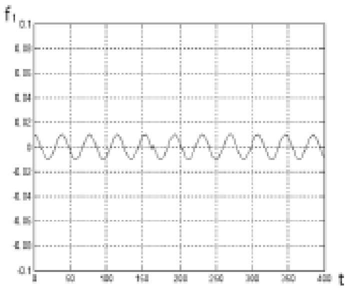

Рисунок 1.

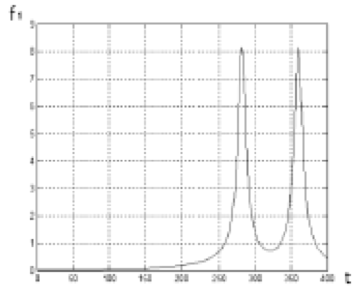

Рисунок 2.

Численное решение системы уравнений (6) при условиях (7) показывает, что при небольших значениях нагрузки оболочка колеблется около исходного положения равновесия с малой амплитудой порядка f_{10} (рисунок 1). При увеличении нагрузки до значения, равного критическому, наблюдается резкое возрастание амплитуды прогиба, т.е. происходит потеря устойчивости движения по А.М. Ляпунову (рисунок 2).

Расчеты ([1], [2]) показывают, что учет динамики хлопка приводит к результатам, лежащим между значениями, полученными с помощью линейных и нелинейных уравнений статики. В тех же диапазонах находятся экспериментальные данные [3; 4]. Таким образом, предложенный подход к решению задач устойчивости оболочек позволяет получить теоретические результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтиева, Л.У., Тазюков, Ф.Х. К постановке задачи устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем давлении // Материалы IIмеждународной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные науки сегодня» – М. : НИЦ «Академический», 2013. – с. 164-167.
2. Бахтиева, Л.У., Тазюков, Ф.Х. К постановке задачи устойчивости цилиндрической оболочки при кручении // Сб. научных статей по итогам международной научно-практической конференции «Институты и механизмы инновационного развития в экономике, …, химии, математике, технике, физике» – СПб. : изд-во «КультИнформПресс», 2013. – с. 13-16.
3. Вольмир. А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М. : Наука, 1967. – 985 с.
4. Григолюк, Э.И., Кабанов, В.В. Устойчивость оболочек. – М. : Наука, 1978. – 360 с.
5. Коноплев, Ю.Г., Тазюков, Ф.Х. Устойчивость упругих пластин и оболочек при нестационарных воздействиях. – Казань : КГУ, 1994. – 124 с.
6. Саченков, А.В., Бахтиева, Л.У. Об одном подходе к решению динамических задач устойчивости тонких оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. – вып.13. – 1978. – с. 137-152.

Материал поступил в редакцию 26.02.14.

ON ONE APPROACH TO SOLVING THE TASKS OF SHELLS STABILITY

L.U. Bakhtiyeva[1], **F.Kh. Tazyukov**[2]
[1, 2] Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Kazan (Volga) Federal University, Russia

Abstract. *New approach to solving nonlinear tasks of stability of plates and covers shells taking into account the dynamic factors succeeding the process of buckling is presented. By means of the Ostrogradskii-Hamilton principle the mathematical model bringing a theoretical setting of the problem to pilot studies is developed. The stability of a shell is investigated according to A.M. Lyapunov theory.*

Keywords*: stability, shell, buckling load, deflection.*