УДК 512.58+512.572+512.552.51

С. Н. Тронин

Произведения в категориях частных и универсальное обращение гомоморфизмов

Основной результат: если в категории $\mathfrak{K}$ существуют конечные прямые произведения, класс морфизмов Σ таков, что категория частных $\mathfrak{K}[\Sigma^{-1}]$ существует, причем из того, что $\sigma \in \Sigma$ следует $\sigma \times 1_X \in \Sigma$ и $1_X \times \sigma \in \Sigma$ для любых объектов X, то в категории $\mathfrak{K}[\Sigma^{-1}]$ также существуют конечные прямые произведения, и канонический функтор $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}[\Sigma^{-1}]$ сохраняет эти произведения. С помощью этой теоремы построены аналоги теории матричной локализации колец для произвольных многообразий универсальных алгебр и для предаддитивных категорий.

Библиография: 22 названия.

Введение

Основная цель данной работы – показать, как известная техника матричной локализации (или универсального обращения матриц и гомоморфизмов) из теории ассоциативных колец (см., например, [1]–[4]) может быть перенесена на случаи предаддитивных категорий и даже произвольных многообразий универсальных (мультиоператорных) алгебр.

Отправным пунктом всех рассуждений является доказанная в § 1 теорема, дающая достаточное условие существования декартовых произведений в категориях частных, в некотором смысле близкое и к необходимому. Особенностью рассматриваемых в данной работе категорий частных является отсутствие чего-либо похожего на исчисление частных в обращаемых классах морфизмов, так что нет возможности пользоваться классическими результатами из [5]–[7], кроме самых общих и простых. В § 2 полученный критерий применяется для построения по данной финитарной алгебраической теории в смысле Ловера (см. [8], [7]) некоторой новой алгебраической теории, которую естественно будет называть *алгебраической теорией частных* данной теории, так как ее свойства аналогичны свойствам колец частных в смысле Кона [1] или Бергмана [2]. Так как ловеровские алгебраические теории есть категории, двойственные к категориям свободных алгебр с конечными базисами многообразий универсальных алгебр (а категории модулей тоже можно рассматривать как многообразия), то тем самым фактически строятся категории свободных алгебр некоторых новых многообразий, которые получаются из исходных путем присоединения новых операций и тождеств таким образом, чтобы все гомоморфизмы свободных или проективных алгебр из данного множества становились в новом многообразии обратимыми (конечно, имеется в виду, что к ним применяется операция типа замены колец, построенная в [8]). В работах автора [9]–[11] содержится предварительная версия некоторых результатов данной статьи. Целью этих работ было построение по данному многообразию некоторого нового многообразия, в котором некоторые (или все) проективные алгебры исходного многообразия становились бы свободными, и, в конечном итоге, построение новых примеров многообразий, где все конечно порожденные проективные алгебры свободны. Обращению же подвергались гомоморфизмы $\varphi(\pi,\theta)$, $\psi(\pi,\theta)$ (см. [12]), которыми, как оказалось, исчерпываются претенденты на роли изоморфизмов между свободными и проективными алгебрами.

В последнем параграфе данной работы разработанная техника применяется для построения различных обобщений матричной локализации колец на случай предаддитивных категорий. Как частные случаи, разумеется, получаются и кольцевые конструкции. Анонсы некоторых результатов этого параграфа содержатся в заметках [13], [14] (без доказательств).

Сделаем несколько замечаний об обозначениях. Композицию морфизмов $\alpha\colon X \to Y$ и $\beta\colon Y \to Z$ мы будем записывать как $\beta\alpha$ и аналогично для композиции функторов. Если X – объект некоторой категории, то его тождественный (или единичный) морфизм X обозначается через 1_X или через id_X. Множество всех морфизмов категории $\mathfrak{K}$ из объекта X в объект Y обозначается через $\mathfrak{K}(X,Y)$. Если даны два функтора $F, G\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$, то для компонент естественного преобразования (функторного морфизма) $\xi\colon F \to G$ используется обозначение $\xi_X\colon F(X) \to G(X)$. Категория всех функторов из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{C}$ обозначается через $\mathrm{Fun}(\mathfrak{K},\mathfrak{C})$. Наконец, выражения вида $F(G(X))$ там, где это возможно, будут записываться в виде $FG(X)$.

§ 1. Произведения в категориях частных

Напомним некоторые простейшие факты, касающиеся категорий частных. Пусть $\mathfrak{R}$ – некоторая категория, Σ – класс морфизмов $\mathfrak{R}$. *Категория частных* $\mathfrak{R}$ *относительно* Σ – это пара, состоящая из категории $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ и функтора $P_\Sigma\colon \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$, обращающего морфизмы из Σ, и такого, что любой функтор, также обращающий эти морфизмы, единственным образом пропускается через P_Σ. В [5] приведена конструкция категории частных, из которой следует, что объекты $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ взаимно однозначно соответствуют объектам $\mathfrak{R}$ (так что можно обозначать их одними и теми же буквами, если смысл понятен из контекста). Морфизмы $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ согласно этой же конструкции имеют вид $P_\Sigma(\alpha_1)P_\Sigma(\sigma_1)^{-1}P_\Sigma(\alpha_2)\cdots P_\Sigma(\sigma_n)^{-1}P_\Sigma(\alpha_{n+1})$, что для краткости иногда будет записываться как $\alpha_1\sigma_1^{-1}\alpha_2\cdots\sigma_n^{-1}\alpha_{n+1}$. Необходимо отметить, что если категория $\mathfrak{R}$ не является малой, то существование $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ с указанными свойствами требует дополнительных предположений, даже если Σ допускает исчисление частных. Одно такое условие рассмотрено в работе [6]. Мы будем, не оговаривая это каждый раз, предполагать, что во всех необходимых нам случаях категории частных существуют и устроены описанным выше образом.

Лемма 1.1. *Рассмотрим диаграмму функторов*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}' \arrow[r, "F'"] & \mathfrak{B}' \arrow[r, "G'"] & \mathfrak{A}' \\
\mathfrak{A} \arrow[r, "F"] \arrow[u, "P_1"] & \mathfrak{B} \arrow[r, "G"] \arrow[u, "P_2"] & \mathfrak{A} \arrow[u, "P_1"]
\end{tikzcd}$$

коммутативную с точностью до естественных изоморфизмов. Предположим, что $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$ суть категории частных $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, соответственно, P_1 и P_2 – канонические функторы, и функтор F сопряжен слева к функтору G. Тогда F' сопряжен слева к G'.

Доказательство. Условия леммы означают, что существуют естественные изоморфизмы

$$\xi\colon F'P_1 \to P_2F, \qquad \zeta\colon G'P_2 \to P_1G$$

и морфизмы сопряжения

$$\eta\colon FG \to \mathrm{Id}, \qquad \mu\colon \mathrm{Id} \to GF$$

такие, что композиции

$$\begin{aligned} F(X) &\xrightarrow{F(\mu_X)} FGF(X) \xrightarrow{\eta_{F(X)}} F(X),\\ C(Y) &\xrightarrow{\mu_{G(Y)}} GFG(Y) \xrightarrow{G(\eta_Y)} G(Y) \end{aligned}$$

равны, соответственно, $1_{F(X)}$ и $1_{G(Y)}$. Каждый объект в $\mathfrak{A}'$ имеет вид $P_1(Y)$, а в $\mathfrak{B}'$ – $P_2(X)$. Определим морфизмы

$$\begin{aligned} \eta'_{P_2(Y)}&\colon F'G'(P_2(Y)) \to P_2(Y),\\ \mu'_{P_1(X)}&\colon P_1(X) \to G'F'(P_1(X)) \end{aligned}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta'_{P_2(Y)} &= P_2(\eta_Y)\xi_{G(Y)}F'(\zeta_Y),\\ \mu'_{P_1(X)} &= G'(\xi_X^{-1})\zeta_{F(X)}^{-1}P_1(\mu_X). \end{aligned}$$

Покажем, что η' и μ' – естественные преобразования. Пусть, например, $\alpha\colon P_2(Y) \to P_2(Z)$ есть морфизм из $\mathfrak{B}$. Так как это категория частных, то $\alpha' = \alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_r$, где каждый α'_i есть либо морфизм вида $P_2(\alpha_i)$, либо морфизм вида $P_2(\alpha_i)^{-1}$. Следовательно, достаточно рассмотреть только эти два случая. Пусть, например, $\alpha' = P_2(\alpha)$. Тогда вопрос о естественности решается коммутативностью диаграммы:

$$\begin{tikzcd} F'G'P_2(Y) \arrow[r, "F'(\zeta_Y)"] \arrow[d, "F'G'P_2(\alpha)"] & F'P_1G(Y) \arrow[r, "\xi_{G(Y)}"] \arrow[d, "F'P_1G(\alpha)"] & P_2FG(Y) \arrow[r, "P_2(\eta_Y)"] \arrow[d, "P_2FG(\alpha)"] & P_2(Y) \arrow[d, "P_2(\alpha)"] \\ F'G'P_2(Z) \arrow[r, "F'(\zeta_Z)"] & F'P_1G(Z) \arrow[r, "\xi_{G(Z)}"] & P_2FG(Z) \arrow[r, "P_2(\eta_Z)"] & P_2(Z) \end{tikzcd}$$

Каждый из трех квадратов коммутативен ввиду естественности ζ, ξ, η, соответственно. Случай $\alpha' = P(\alpha)^{-1}$ доказывается с помощью аналогичной диаграммы, где обращены вертикальные стрелки. При этом надо принять во внимание, что из обратимости $P_2(\alpha)$ следует обратимость $G'P_2(\alpha)$, что влечет обратимость $P_1G(\alpha)$

и ввиду обратимости ξ – обратимость $P_2FG(\alpha)$. Таким образом, показано, что для любого $\alpha'\colon P_2(Y)\to P_2(Z)$ имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} F'G'P_2(Y) & \xrightarrow{\eta'_{P_2(Y)}} & P_2(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F'G'(\alpha')} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha'} \\ F'G'P_2(Z) & \xrightarrow{\eta'_{P_2(Z)}} & P_2(Z) \end{array}$$

Полагая $\alpha'=\mathrm{id}$, видим, что η' не зависит от представления объекта категории $\mathfrak{B}'$ в виде $P_2(Y)$. Следовательно, необходимое нам естественное преобразование существует.

Аналогично доказывается естественность μ'.

Рассмотрим теперь композицию

$$F'P_1(X)\xrightarrow{F'(\mu_{P_1(X)})}F'G'F'P_1(X)\xrightarrow{\eta_{F'P_1(X)}}F'P_1(X).$$

Чтобы показать, что она равна тождественному морфизму, достаточно установить, что выражение

$$\xi_X\eta'_{F'P_1(X)}F'(\mu'_{P_1(X)})$$

равно ξ_X, и вспомнить, что это изоморфизм. Используя естественность η', получаем

$$\xi_X\eta'_{F'P_1(X)}F'(\mu'_{P_1(X)})=\eta'_{P_2F(X)}F'G'(\xi_X)F'(\mu'_{P_1(X)}).$$

Подставив в последнее выражение явную запись η' и μ', получим

$$\begin{aligned} &P_2(\eta_{F(X)})\xi_{GF(X)}F'(\zeta_{F(X)})F'G'(\xi_X)F'G'(\xi_X^{-1})F'(\zeta^{-1}_{F(X)})F'P_1(\mu_X)\\ &\quad=P_2(\eta_{F(X)})\xi_{GF(X)}F'P_1(\mu_X). \end{aligned}$$

Из естественности ξ следует соотношение

$$\xi_{GF(X)}F'P_1(\mu_X)=P_2F(\mu_X)\xi_X.$$

Наконец,

$$P_2(\eta_{F(X)})\xi_{GF(X)}F'P_1(\mu_X)=P_2(\eta_{F(X)})P_2F(\mu_X)\xi_X=\xi_X$$

ввиду того, что μ и η – морфизм сопряжения. Аналогично устанавливается второе соотношение для η' и μ', что и заканчивает доказательство.

Теорема 1.2. *Пусть даны категории $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, Σ и Θ – классы морфизмов в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, соответственно. Тогда имеет место изоморфизм категорий, естественный по всем компонентам,*

$$(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})\big[(\Sigma\times 1)^{-1},(1\times\Theta)^{-1}\big]\cong\mathfrak{A}[\Sigma^{-1}]\times\mathfrak{B}[\Theta^{-1}].$$

Здесь $\Sigma\times 1$ обозначает класс морфизмов произведения категорий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, состоящий из всех пар вида (α,id), где $\sigma\in\Sigma$, а id – всевозможные тождественные морфизмы $\mathfrak{B}$. Аналогичный смысл имеет $1\times\Theta$.

Доказательство. Покажем, что функтор

$$P_\Sigma \times P_\Theta \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}[\Sigma^{-1}] \times \mathfrak{B}[\Theta^{-1}]$$

обладает тем же универсальным свойством, что и

$$P_{\{(\Sigma\times 1),(1\times\Theta)\}} \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})\big[(\Sigma \times 1)^{-1}, (1 \times \Theta)^{-1}\big].$$

Используем для этого естественный изоморфизм категорий

$$\mathrm{Fun}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{R}, \mathfrak{K}) \cong \mathrm{Fun}\big(\mathfrak{X}, \mathrm{Fun}(\mathfrak{R}, \mathfrak{K})\big),$$

имеющий следующий вид: функтору $G\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{R} \to \mathfrak{K}$ сопоставляется функтор $G^\star \colon \mathfrak{X} \to \mathrm{Fun}(\mathfrak{R}, \mathfrak{K})$, $G^\star(X) = G(X, -)$. Если обозначать категорию функторов из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{R}$, обращающих класс морфизмов Γ, через $\mathrm{Fun}_\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{R})$, то фактически необходимо доказать изоморфизм категорий

$$\mathrm{Fun}_{\{(\Sigma\times 1),(1\times\Theta)\}}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{K}) \cong \mathrm{Fun}_\Sigma\big(\mathfrak{A}, \mathrm{Fun}_\Theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{K})\big),$$

который получается как ограничение на соответствующие подкатегории описанного выше изоморфизма

$$\mathrm{Fun}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{R}, \mathfrak{K}) \cong \mathrm{Fun}\big(\mathfrak{X}, \mathrm{Fun}(\mathfrak{R}, \mathfrak{K})\big).$$

Рассмотрим произвольный функтор, обращающий $\Sigma \times 1$ и $1 \times \Theta$:

$$G \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{K}.$$

Тогда так как обратимы все $G^\star(X)(\theta) = G(1_X, \theta)$, $\theta \in \Theta$, то функтор $G^\star$ представим в виде композиции

$$G^\star \colon \mathfrak{A} \xrightarrow{G_1^\star} \mathrm{Fun}\big(\mathfrak{B}[\Theta^{-1}], \mathfrak{K}\big) \xrightarrow{G_2^\star} \mathrm{Fun}(\mathfrak{B}, \mathfrak{K}),$$

где $G_2^\star = \mathrm{Fun}(P_\Theta, \mathrm{id})$ – мономорфизм в категории категорий. Отсюда следует, что $G_1^\star$ обращает Σ, так что имеет место коммутативная диаграмма, в которой функтор $F_1^\star$ однозначно строится по G и взаимно однозначно соответствует некоторому функтору $F_1 \colon \mathfrak{A}[\Sigma^{-1}] \times \mathfrak{B}[\Theta^{-1}] \to \mathfrak{K}$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, "G_1^\star"] \arrow[dr, "P_\Sigma"'] & \mathrm{Fun}\big(\mathfrak{B}[\Theta^{-1}], \mathfrak{K}\big) \\ & \mathfrak{A}[\Sigma^{-1}] \arrow[u, "F_1^\star"'] \end{tikzcd}$$

Обратное соответствие строится аналогично.

Замечание. Теорема 1.2 есть частный случай значительно более общего и сложнее доказываемого результата о расслоенных (в смысле Гротендика) категориях (см. [15]). Естественная проекция $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$ есть расслоение и корасслоение (opfibration) с рядом дополнительных свойств. Существуют и другие, менее тривиальные примеры таких расслоений. Доказательство общего результата будет опубликовано отдельно.

Напомним, что класс Σ называется *насыщенным*, если канонический функтор $P_\Sigma\colon\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ обращает только морфизмы из Σ.

Теорема 1.3. *Допустим, что в категории $\mathfrak{R}$ существуют конечные декартовы произведения. Предположим, что класс морфизмов Σ обладает следующим свойством (назовем его декартовой мультипликативной замкнутостью Σ) :*

для каждого σ из Σ декартовы произведения морфизмов $\sigma\times 1_K$ и $1_K\times\sigma$ принадлежат Σ для любых тождественных морфизмов 1_K.

Тогда категория $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ также обладает конечными декартовыми произведениями, и канонический функтор P_Σ сохраняет декартовы произведения. Обратно, если категория $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ и функтор P_Σ обладают этими свойствами, то насыщение Σ (т.е. класс всех морфизмов, которые функтор P_Σ переводит в обратимые) является декартово мультипликативно замкнутым.

Доказательство. Используем характеризацию декартовых произведений с помощью сопряженных функторов: если

$$\Delta\colon\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}\times\mathfrak{R},\qquad \Delta(X)=(X,X),$$

– диагональный функтор, то функтор декартова произведения

$$\Pi\colon\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$$

– это функтор, сопряженный к Δ справа. Первая часть теоремы будет доказана, как только будет построен функтор Π', который делает следующую диаграмму коммутативной с точностью до естественной эквивалентности:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{R}\times\mathfrak{R} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "P_\Sigma\times P_\Sigma"'] & \mathfrak{R} \arrow[d, "P_\Sigma"] \\
\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]\times\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}] \arrow[r, "\Pi'"] & \mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]
\end{tikzcd}$$

и, кроме того, сопряжен справа к диагональному функтору

$$\Delta'\colon\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]\to\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]\times\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}].$$

Согласно предыдущей теореме можно заменить категорию $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]\times\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ на $(\mathfrak{R}\times\mathfrak{R})\big[(\Sigma\times 1)^{-1},(1\times\Sigma)^{-1}\big]$ с очевидной заменой соответствующих функторов, обозначения которых останутся прежними. Из условия декартовой мультипликативной замкнутости следует, что функтор $P_\Sigma\Pi$ обращает все морфизмы из классов

$\Sigma \times 1$ и $1 \times \Sigma$. Таким образом, функтор Π', который делает диаграмму коммутативной с точностью до естественного изоморфизма, существует. Сопряженность следует из леммы 1.1.

Необходимость условия декартовой мультипликативной замкнутости очевидна.

Основные приложения этой теоремы будут рассмотрены в следующих параграфах. Здесь же мы приведем один сходный результат, касающийся моноидальных замкнутых категорий (см. [16, гл. 7]). Если $\mathfrak{C}$ – симметрическая моноидальная замкнутая категория, то будем обозначать "внутренний hom-функтор" через $[A,B]$, т.е. имеет место естественный изоморфизм

$$\mathfrak{C}(A\otimes B, C) \cong \mathfrak{C}\big(A, [B,C]\big).$$

Теорема 1.4. *Пусть $\mathfrak{C}$ – симметрическая моноидальная замкнутая категория, Σ – класс морфизмов, удовлетворяющий следующему свойству: для каждого σ из Σ морфизмы $\sigma\otimes 1_K$, $1_K\otimes\sigma$ и $[\sigma, 1_K]$ принадлежат Σ для любых тождественных морфизмов 1_K.*

Тогда категория $\mathfrak{C}[\Sigma^{-1}]$ также является симметрической моноидальной категорией такой, что функтор P_Σ – моноидален. Точнее, имеет место равенство

$$P_\Sigma(X\otimes Y) = P_\Sigma(X)\otimes P_\Sigma(Y).$$

Справедливо также обратное утверждение (*аналогично теореме* 1.2), *и, кроме того, можно избавиться от условия симметричности.*

Доказательство. Для каждого $X\in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ рассмотрим функтор $\_\otimes X\colon \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$, отображающий Z в $Z\otimes X$. Он имеет сопряженный справа $[X, \_]$, а его композиция с P_Σ обращает Σ. Поэтому существует однозначно определенный функтор T_X, который делает коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}[\Sigma^{-1}] \arrow[r, "T_X"] & \mathfrak{C}[\Sigma^{-1}] \\ \mathfrak{C} \arrow[u, "P_\Sigma"] \arrow[r, "\_\otimes X"] & \mathfrak{C} \arrow[u, "P_\Sigma"'] \end{tikzcd}$$

Таким образом, $P_\Sigma(Z\otimes X) = T_X(P_\Sigma(Z))$, $P_\Sigma(\gamma\otimes 1_X) = T_X(P_\Sigma(\gamma))$. Так как $P_\Sigma[X, \_]$ также обращает морфизмы из Σ, то T_X обладает правым сопряженным по лемме 1.1. Для любого $\alpha\colon X\to Y$ имеется морфизм функторов $\_\otimes\alpha\colon \_\otimes X\to \_\otimes Y$. Определим естественное преобразование $T_\alpha\colon T_X\to T_Y$, полагая

$$(T_\alpha)_{P_\Sigma(Z)} = P_\Sigma(1_Z\otimes\alpha)\colon T_X(P_\Sigma(Z)) \to T_Y(P_\Sigma(Z)).$$

Покажем, что для любого $\beta\colon P_\Sigma(Z)\to P_\Sigma(W)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} T_X P_\Sigma(Z) \arrow[r, "(T_\alpha)_{P_\Sigma(Z)}"] \arrow[d, "T_X(\beta)"'] & T_Y P_\Sigma(Z) \arrow[d, "T_Y(\beta)"] \\ T_X P_\Sigma(W) \arrow[r, "(T_\alpha)_{P_\Sigma(W)}"] & T_Y P_\Sigma(W) \end{tikzcd}$$

Это делается примерно так же, как и при доказательстве леммы 1.1, т.е. достаточно рассмотреть случаи $\beta = P_\Sigma(\gamma)$ и $\beta = P_\Sigma(\gamma)^{-1}$. В частности, если $\beta = \mathrm{id}$, то приходим к выводу, что определение T_α не зависит от способа представления объекта $\mathfrak{C}[\Sigma^{-1}]$ в виде $P_\Sigma(Z)$. Из определения ясно также, что $T_{\alpha\gamma} = T_\alpha T_\gamma$, $T_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$.

Это означает, что определен функтор

$$T\colon \mathfrak{C}[\Sigma^{-1}] \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\Sigma^{-1}], \qquad T(A, X) = T_X(A).$$

Используя обозначение, введенное выше при доказательстве теоремы 1.2, перейдем от функтора T к функтору

$$T^\star\colon \mathfrak{C} \to \mathrm{Fun}\big(\mathfrak{C}[\Sigma^{-1}], \mathfrak{C}[\Sigma^{-1}]\big),$$

который обращает морфизмы из Σ, так как переводит $\sigma \in \Sigma$ в T_σ. Таким образом, из функтора T получается искомый функтор тензорного произведения такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{C}[\Sigma^{-1}] \times \mathfrak{C}[\Sigma^{-1}] & \xrightarrow{\ \otimes\ } & \mathfrak{C}[\Sigma^{-1}] \\
{\scriptstyle P_\Sigma \times P_\Sigma}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle P_\Sigma} \\
\mathfrak{C} \times \mathfrak{C} & \xrightarrow{\ \otimes\ } & \mathfrak{C}
\end{array}$$

т.е. $P_\Sigma(Z) \otimes P_\Sigma(X) = P_\Sigma(Z \otimes X)$ или $E \otimes P_\Sigma(X) = T_X(E)$.

Осталось показать, что выполнены свойства моноидальной категории. Практически все они сразу следуют из определений, поэтому достаточно разобраться, например, с естественными изоморфизмами

$$\nu_{A,B,C}\colon (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C),$$

исходя из уже имеющихся в $\mathfrak{C}$ естественных изоморфизмов

$$\lambda_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z).$$

Пусть $A = P_\Sigma(X)$, $B = P_\Sigma(Y)$, $C = P_\Sigma(Z)$. Тогда так как $(A \otimes B) \otimes C = T_Z T_Y(P_\Sigma(X))$, $A \otimes (B \otimes C) = T_{Y \otimes Z}(P_\Sigma(X))$, $P_\Sigma(X) \otimes P_\Sigma(Y) = P_\Sigma(X \otimes Y)$, то мы можем определить $\nu_{A,B,C}$ как $P_\Sigma(\lambda_{X,Y,Z})$, и этим же определяется естественный изоморфизм $T_Z T_Y \to T_{Y \otimes Z}$. Аналогично тому, как это уже делалось выше, показывается, что ν не зависит от способа представления $A, \ldots$ в виде $P_\Sigma(X), \ldots$ и что это – морфизм функторов. Все необходимые свойства ν сразу следуют из соответствующих свойств λ и перестановочности P_Σ с $\otimes$. Примерно так же строятся и другие естественные изоморфизмы, определяющие на $\mathfrak{C}[\Sigma^{-1}]$ структуру моноидальной замкнутой категории. В частности, если I – нейтральный объект в $\mathfrak{C}$ (т.е. $I \otimes X \cong X \otimes I \cong X$), то $P_\Sigma(I)$ – нейтральный объект в $\mathfrak{C}[\Sigma^{-1}]$. Теорема доказана.

Для полноты рассмотрим случай, когда в категориях $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ существуют расслоенные произведения и функтор P_Σ их сохраняет. Посмотрим, что можно сказать в этом случае о Σ. Предположим, что класс Σ является насыщенным. Из этого сразу следует, что

а) Σ содержит все изоморфизмы категории $\mathfrak{R}$;
б) $\sigma \in \Sigma$, $\tau \in \Sigma \Rightarrow \sigma\tau \in \Sigma$;
в) если $\sigma\tau \in \Sigma$, тогда из того, что один из морфизмов σ, τ принадлежит Σ, следует, что другой также содержится в Σ.

В декартовом квадрате

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\beta} & B \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ C & \xrightarrow{\alpha} & D \end{array}$$

из обратимости σ следует обратимость τ, поэтому ввиду насыщенности Σ должно выполняться условие

г) если в приведенном выше декартовом квадрате $\sigma \in \Sigma$, то и $\tau \in \Sigma$.

Рассмотрим в $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ морфизм $P_\Sigma(\sigma)^{-1}P_\Sigma(\alpha)$. Используя тот же декартов квадрат, получаем

$$P_\Sigma(\alpha)P_\Sigma(\tau) = P_\Sigma(\sigma)P_\Sigma(\beta), \qquad \tau \in \Sigma,$$

откуда

$$P_\Sigma(\sigma)^{-1}P_\Sigma(\alpha) = P_\Sigma(\beta)P_\Sigma(\tau)^{-1}.$$

Таким образом, произвольный морфизм категории $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ вида

$$P_\Sigma(\alpha_1)P_\Sigma(\sigma_1)^{-1}P_\Sigma(\alpha_2)\cdots P_\Sigma(\sigma_n)^{-1}P_\Sigma(\alpha_{n+1})$$

можно привести к виду $P_\Sigma(\beta)P_\Sigma(\lambda)^{-1}$.

Исходя из этого, рассмотрим обратную задачу. Пусть дана категория $\mathfrak{R}$ с расслоенными произведениями и класс морфизмов Σ, удовлетворяющих приведенным выше условиям а)–г). Будем строить категорию $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ по аналогии со случаем, когда Σ обладает исчислением правых частных. Оказывается, все построение проходит без использования последнего условия в определении исчисления частных: для любых α, β и $\sigma \in \Sigma$ из $\sigma\alpha = \sigma\beta$ следует существование $\tau \in \Sigma$ такого, что $\alpha\tau = \beta\tau$. Итак, объекты строящейся категории $\mathfrak{K}$ по определению те же, что и в $\mathfrak{R}$, а для построения морфизмов из X в Y берется класс всех пар (f, σ), где $\sigma \colon Z \to X$, $f \colon Z \to Y$, $\sigma \in \Sigma$, и факторизуется по отношению эквивалентности

$$(f, \sigma) \sim (g, \tau) \iff \exists\, \lambda, \nu \in \Sigma: \ \sigma\lambda = \tau\nu, \ \ f\lambda = g\nu.$$

В данной работе мы не будем рассматривать вопрос о том, когда соответствующие фактормножества (или классы) существуют. Как уже отмечалось, некоторые достаточные условия этого содержатся в работе [6], а для малых категорий проблемы нет вообще. Композиция морфизмов $\mathfrak{K}$ определяется для представителей классов эквивалентности

$$X \xleftarrow{\sigma} Z \xrightarrow{\alpha} Y, \qquad Y \xleftarrow{\tau} V \xrightarrow{\beta} W$$

следующим образом. Образуем расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\gamma} & V \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ Z & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

где $\lambda \in \Sigma$ по условию, и определим композицию следующим образом: $(\beta, \tau)(\alpha, \sigma) = (\beta\gamma, \sigma\lambda)$. Проверим корректность определения, которая, может быть, не совсем очевидна. Пусть, например, $(\alpha_1, \sigma_1) \sim (\alpha_2, \sigma_2)$ и существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Z_1 \arrow[dl, "\sigma_1"'] \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\ X & Z \arrow[u, "s_1"'] \arrow[d, "s_2"] & Y \\ & Z_2 \arrow[ul, "\sigma_2"] \arrow[ur, "\alpha_2"'] & \end{tikzcd}$$

Для построения композиций с $Y \xleftarrow{\tau} V \xrightarrow{\beta} W$ строим декартовы квадраты

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[d, "\alpha_i"'] & S_i \arrow[l, "\tau_i"'] \arrow[d, "\gamma_i"] \\ Y & V \arrow[l, "\tau"] \end{tikzcd}$$

Полагая $\xi = \alpha_1 s_1 = \alpha_2 s_2$, образуем еще одно расслоенное произведение

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "\xi"'] & H \arrow[l, "\tau'"'] \arrow[d, "\xi'"'] \\ Y & V \arrow[l, "\tau"] \end{tikzcd}$$

Тогда существуют однозначно определенные морфизмы $\mu_i \colon H \to S_i$, $i = 1, 2$, такие, что $\xi' = \gamma_i\mu_i$, $\tau_i\mu_i = s_i\tau'$. По свойству б) отсюда следует, что $\mu_i \in \Sigma$, $i = 1, 2$, и эта пара морфизмов, как легко убедиться, приводит к равенствам $\sigma_1\tau_1\mu_1 = \sigma_2\tau_2\mu_2$, $\beta\gamma_1\mu_1 = \beta\gamma_2\mu_2$. Оставшаяся часть доказательства корректности определения композиции проводится аналогично.

Ассоциативность композиции легко следует из свойств расслоенных произведений. Ясно, что определен функтор $P \colon \mathfrak{R} \to \mathfrak{K}$, тождественный на объектах и отображающий морфизмы $\alpha \colon X \to Y$ в классы пар $X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{\alpha} Y$.

Теперь убедимся, что фактически $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$. Сначала покажем, что Σ все-таки обладает исчислением правых частных. В самом деле, если $\sigma\alpha = \sigma\beta$, $\sigma \in \Sigma$, то, переходя в категорию $\mathfrak{K}$, где $P(\sigma)$ обратим, получаем $P(\alpha) = P(\beta)$, что влечет существование коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ X & Z \arrow[u, "s_1"'] \arrow[d, "s_2"] & Y \\ & X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

откуда получаем $s_1 = s_2 = s \in \Sigma$, $\alpha s = \beta s$. Следовательно, фактически $\mathfrak{K}$ есть $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ ввиду того, что эти категории строятся одним и тем же образом. Значит, по хорошо известному результату в категории $\mathfrak{K}$ существуют все виды конечных пределов, которые существуют в $\mathfrak{R}$, и функтор P сохраняет их. Сформулируем результат этих рассуждений.

Предложение 1.5. *Пусть в категории $\mathfrak{R}$ существуют конечные расслоенные произведения. Если класс морфизмов Σ обладает перечисленными выше свойствами* а)–г), *то он удовлетворяет также исчислению правых частных, и поэтому в $\mathfrak{R}[\Sigma^{-1}]$ существуют все виды конечных пределов, существующие в $\mathfrak{R}$, причем функтор P_Σ сохраняет их. Обратно, если P_Σ сохраняет расслоенные произведения, то насыщение Σ будет удовлетворять свойствам* а)–г).

§ 2. Алгебраические теории

Для произвольной категории $\mathfrak{R}$ определим категорию $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$, объекты которой – идемпотентные морфизмы категории $\mathfrak{R}$, а морфизмы определяются следующим образом. Пусть $e\colon X \to X$, $\varepsilon\colon Y \to Y$, $e^2 = e$, $\varepsilon^2 = \varepsilon$ – объекты категории $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$. Тогда морфизмами $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$ из e в ε будут считаться такие морфизмы $f\colon X \to Y$ категории $\mathfrak{R}$, что $f = fe = \varepsilon f$. В частности, тождественным морфизмом объекта e будет морфизм e. Определим функтор $F\colon \mathfrak{R} \to \mathbf{P}(\mathfrak{R})$, сопоставляющий объекту X объект $1_X\colon X \to X$ категории $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$, а морфизму f – тот же f как морфизм $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$. Каждый объект (морфизм) категории $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$ является ретрактом объекта (морфизма) вида $F(X)$ (соответственно, вида $F(f)$), причем возможен канонический выбор ретракций. Категория $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$ обладает следующим свойством: если $u\colon e \to \varepsilon$ – идемпотентный морфизм, то существуют морфизмы p, j такие, что $u = jp$, $pj = 1_W$, и если $\mathfrak{K}$ – другая категория с аналогичным свойством и дан функтор $G\colon \mathfrak{R} \to \mathfrak{K}$, то существует функтор $\widetilde{G}\colon \mathbf{P}(\mathfrak{R}) \to \mathfrak{K}$ такой, что $G = \widetilde{G}F$, причем функтор $\widetilde{G}$ определен с точностью до естественной эквивалентности. Разумеется, необходимы некоторые теоретико-множественные ограничения, касающиеся выбора проекций p и вложений j. В случае самой категории $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$ существует канонический выбор: если даны $e, \varepsilon\colon X \to X$ – объекты $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$, то полагаем W объектом $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$, представленным морфизмом 1_X, а морфизмы p и j категории $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$ – представленными морфизмом $\mathfrak{R}$ $u\colon X \to X$. Заметим еще, что если $\mathfrak{R}$ – категория с конечными декартовыми произведениями, то этим же свойством обладает и $\mathbf{P}(\mathfrak{R})$. Очевидно, что $\mathbf{P}$ есть функтор из категории категорий в категорию категорий (фактически это монада).

Обратимся теперь к финитарным алгебраическим теориям в смысле Ловера (см. [7], [8]), далее называемым алгебраическими теориями или просто теориями. Напомним, что категория T называется *алгебраической теорией*, если ее объекты можно взаимно однозначно перенумеровать натуральными числами (включая 0; чаще всего предполагают сразу, что натуральные числа и есть объекты), если в T существуют конечные декартовы произведения, и если произведением объектов (чисел) n и m будет $n + m$. Примерами алгебраических теорий являются категории, двойственные к категориям свободных алгебр конечного ранга многообразий универсальных (мультиоператорных) алгебр. Обратно, хорошо известно, что категорию, двойственную к алгебраической теории T, всегда можно рассматривать как категорию свободных алгебр некоторого многообразия: свободной алгеброй с базисом из n элементов будет множество $T(n,1)$, и его же можно рассматривать как множество всех n-арных операций. Таким образом, двум многообразиям соответствуют изоморфные теории тогда и только тогда, когда многообразия рационально эквивалентны. Напомним еще, что многообразие, соответствующее теории T, рассматриваемое как категория, эквивалентно категории всех функторов из T в категорию множеств SETS, сохраняющих конечные произведения: алгебре A соответствует функтор, сопоставляющий объекту n множество A^n.

Теперь мы можем определить алгебраические теории частных для произвольных алгебраических теорий, что будет непосредственным обобщением колец частных. Пусть T – алгебраическая теория, Σ – множество морфизмов T, которое является декартово мультипликативно замкнутым (определение дано в теореме 1.3). Тогда категория частных $T[\Sigma^{-1}]$ имеет те же объекты, что и T, т.е. натуральные числа, согласно теореме 1.3 обладает произведениями, и канонический функтор $P_\Sigma\colon T \to T[\Sigma^{-1}]$ сохраняет произведения. Это значит, что $T[\Sigma^{-1}]$ также является алгебраической теорией, а функтор P_Σ – морфизмом алгебраических теорий, и прямо из определения категории частных следует наличие универсального свойства: если $G\colon T \to W$ – морфизм теорий (т.е. функтор, тождественный на объектах и сохраняющий произведения), обращающий морфизмы из Σ, то он однозначно пропускается через P_Σ.

Нам потребуется и несколько более общая конструкция (эквивалентная в соответствующем частном случае приведенной выше). Пусть Σ – декартово мультипликативно замкнутое множество морфизмов категории $\mathbf{P}(T)$. Тогда категория частных $\mathbf{P}(T)[\Sigma^{-1}]$ согласно теореме 1.3 обладает произведениям. Функтор $F\colon T \to \mathbf{P}(T)$ является вполне унивалентным, так что категорию T можно считать полной подкатегорией $\mathbf{P}(T)$. Определим $T[\Sigma^{-1}]$ как полную подкатегорию $\mathbf{P}(T)[\Sigma^{-1}]$, объекты которой – $P_\Sigma(0), P_\Sigma(1), \ldots, P_\Sigma(n), \ldots$ (где $P_\Sigma\colon \mathbf{P}(T) \to \mathbf{P}(T)[\Sigma^{-1}]$). Ясно, что и при таком определении $T[\Sigma^{-1}]$ будет алгебраической теорией, и что естественным образом строится канонический функтор $P_\Sigma\colon T \to T[\Sigma^{-1}]$.

Теорема 2.1. *Пусть $\Sigma \subseteq \mathrm{Mor}(\mathbf{P}(T))$ – декартово мультипликативно замкнутое множество, $G\colon T \to W$ – морфизм теорий такой, что $\mathbf{P}(G)$ обращает Σ. Тогда существует один и только один морфизм алгебраических теорий*

$$G^*\colon T[\Sigma^{-1}] \to W$$

такой, что $G = G^* P_\Sigma$. Отсюда, в частности, следует, что оба определения алгебраических теорий частных эквивалентны для тех случаев, когда они одновременно имеют смысл.

Доказательство. Сначала покажем существование. Из определений и условий следует наличие коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} T & \longrightarrow & \mathbf{P}(T) & \longrightarrow & \mathbf{P}(T)[\Sigma^{-1}] \\ \big\downarrow{\scriptstyle G} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{P}(G)} & \swarrow{\scriptstyle G'} & \\ W & \longrightarrow & \mathbf{P}(W) & & \end{array}$$

Композиция G' с функтором вложения $T[\Sigma^{-1}] \to \mathbf{P}(T)[\Sigma^{-1}]$ есть функтор, отображающий $T[\Sigma^{-1}]$ в полную подкатегорию $\mathbf{P}(W)$, изоморфную W, что нам и требуется.

Чтобы показать единственность, необходима некоторая дополнительная информация о строении $T[\Sigma^{-1}]$. Прежде всего, выпишем явно условия обратимости морфизмов в категории вида $\mathbf{P}(T)$. Если обращается морфизм

$$s\colon (e\colon X \to X) \to (\varepsilon\colon Y \to Y),$$

то это значит, что существует морфизм $u\colon Y \to X$ такой, что $u = eu = u\varepsilon$, $su = \varepsilon$, $us = e$. Легко заметить, что морфизм u определяется по данным s, e, ε однозначно.

Если теперь для каждого $s \in \Sigma \subseteq \mathrm{Mor}(\mathbf{P}(T))$ присоединить к категории T новый морфизм $u = u(s, e, \varepsilon)$, удовлетворяющий приведенным выше соотношениям, то получится новая категория $\mathfrak{T}$ и функтор $Q\colon T \to \mathfrak{T}$ со следующим универсальным свойством: для любого функтора $G\colon T \to \mathfrak{K}$ такого, что $\mathbf{P}(G)$ обращает Σ, существует один и только один функтор $G\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{K}$ такой, что $G = GQ$ ($\mathfrak{T}$ строится стандартным образом как факторкатегория категории путей; заранее не очевидно, что это алгебраическая теория). Покажем, что функтор

$$\mathbf{P}(P_\Sigma)\colon \mathbf{P}(T) \to \mathbf{P}\big(T[\Sigma^{-1}]\big)$$

обращает Σ. Выше уже отмечалось, что если $\sigma\colon A \to B$ – морфизм категории $\mathbf{P}(T)$, то он может быть включен (и даже каноническим образом) в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{p} & A & \xrightarrow{t} & F(X) \\ {\scriptstyle F(s)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F(s)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\pi} & B & \xrightarrow{\theta} & F(Y) \end{array}$$

где $F\colon T \to \mathbf{P}(T)$ – естественное вложение, $pt = 1_A$, $tp = e$, $\pi\theta = 1_B$, $\theta\pi = \varepsilon$. Пусть $\sigma \in \Sigma$. Перейдем в категорию $\mathbf{P}(T)[\Sigma^{-1}]$, где, пользуясь упомянутым во введении соглашением, будем использовать для образов элементов и морфизмов обозначения из $\mathbf{P}(T)$. Тогда

$$u = t\sigma^{-1}\pi\colon F(Y) \to F(X)$$

– морфизм из $T[\Sigma^{-1}]$, причем, как легко убедиться,

$$u = eu = u\varepsilon, \qquad uF(s) = e, \qquad F(s)u = \varepsilon.$$

Это и означает, что в $\mathbf{P}\big(T[\Sigma^{-1}]\big)$ морфизм σ имеет обратный, и, таким образом, существует однозначно определенный функтор

$$\Phi\colon \mathfrak{T} \to T[\Sigma^{-1}]$$

такой, что $P_\Sigma = \Phi Q$. С другой стороны, в диаграмме, использованной при доказательстве существования, вместо категории W можно взять $\mathfrak{T}$, а вместо функтора F – функтор Q, так как специфика алгебраических теорий в ней не существенна. Это приводит к построению функтора

$$\Psi\colon T[\Sigma^{-1}] \to \mathfrak{T}$$

такого, что $\Psi P_\Sigma = Q$. Из универсального свойства функтора Q следует, что $\Psi\Phi = \mathrm{Id}_{\mathfrak{T}}$, что означает полноту Ψ и унивалентность Φ. Но из способов построения $\mathfrak{T}$ и $T[\Sigma^{-1}]$ очевидным образом следует, что Φ является полным. Значит, Φ и Ψ – взаимно обратные изоморфизмы, и единственность в универсальном свойстве $\mathfrak{T}$ влечет единственность в универсальном свойстве $T[\Sigma^{-1}]$. Теорема доказана.

Заметим, что фактически и определение $T[\Sigma^{-1}]$, и теорема 2.1 подходят и для категорий более общего вида, чем ловеровские теории. Например, это могут быть цветные многосортные теории. В данной работе это не столь существенно.

Лемма 2.2. *Пусть теория T обладает следующим свойством: множества $T(0,X)$ состоят из одного элемента для каждого X, и пусть множество морфизмов Σ декартово мультипликативно замкнуто. Тогда множества $T[\Sigma^{-1}](0,X)$ также состоят из одного элемента.*

Смысл этого утверждения в том, что если в исходном многообразии алгебр свободная алгебра с пустым базисом состоит из одного элемента, то этим же свойством обладает и многообразие, полученное после обращения гомоморфизмов.

Доказательство. Пусть для каждого объекта Y из T $\varepsilon_Y\colon 0 \to Y$ есть единственный морфизм из $T(0,Y)$. Опуская для простоты P_Σ, запишем произвольный морфизм из $T[\Sigma^{-1}](0,X)$ в виде $\alpha_1\sigma_1^{-1}\alpha_2\cdots\sigma_n^{-1}\alpha_{n+1}$ и проведем индукцию по n. Если $n=0$, то $\alpha_{n+1} = \varepsilon_X$. Пусть $n=1$, т.е. имеются следующие морфизмы T:

$$0 \xrightarrow{\alpha_2} Z \xleftarrow{\sigma_1} Y \xrightarrow{\alpha_1} X.$$

Тогда $\alpha_2 = \varepsilon_Z$, и так как $\sigma_1\varepsilon_Y = \varepsilon_Z$, то

$$\alpha_1\sigma_1^{-1}\alpha_2 = \alpha_1\sigma_1^{-1}\sigma_1\varepsilon_Y = \alpha_1\varepsilon_Y = \varepsilon_X.$$

Предполагая, что для $n-1$ все доказано, мы можем заменить $\alpha_2\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_n^{-1}\alpha_{n+1}$ на ε_V для некоторого объекта V. Тогда все сводится к случаю $n=1$.

В связи с теоремой 2.1 естественно возникают вопросы: какие свойства многообразий сохраняются при обращении гомоморфизмов и какие многообразия с новыми свойствами можно получить таким путем. Лемма 2.2 является простейшим вариантом ответа на первый вопрос. Другое столь же простое наблюдение состоит в следующем. Рассмотрим некоторое обобщение линейных (мультиоператорных) алгебр, которое получается путем задания групповой структуры на множествах морфизмов соответствующей алгебраической теории. Точнее, пусть R – ассоциативное кольцо с 1, $\mathbf{M}(R)$ – категория, объекты которой – натуральные числа, а морфизмы из объекта n в объект m – всевозможные $(n\times m)$-матрицы. Это – алгебраическая теория (подробнее о ней – в §3). *R-линейной алгебраической теорией* будем называть теорию T вместе с морфизмом теорий $\mathbf{M}(R)\to T$. Тем самым на множествах $T(n,m)$ заданы структуры правых R-модулей, а композиция морфизмов становится линейной по правому аргументу. Такому условию удовлетворяет, например, и многообразие $\mathfrak{M}$, свободные алгебры которого являются пополнениями (относительно стандартных фильтраций) свободных алгебр некоторого однородного многообразия линейных Ω-алгебр. Само же многообразие $\mathfrak{M}$ может и не быть многообразием линейных алгебр. Ясно, что композиция

$$\mathbf{M}(R)\to T\to T[\Sigma^{-1}]$$

превращает $T[\Sigma^{-1}]$ в R-линейную теорию.

В работах автора [9]–[11] первоначальная версия теоремы 2.1 применялась для обращения гомоморфизмов, которые будут построены ниже. Предположим, что дана R-линейная теория T, причем у морфизма теорий $\mathbf{M}(R)\to T$ имеется (и фиксируется) левый обратный. Начиная с этого места и до конца параграфа будет удобно перейти от языка алгебраических теорий к языку обычных алгебр и многообразий.

Пусть $\mathfrak{P}$ – категория, двойственная к $\mathbf{P}(T)$, т.е. категория конечно порожденных проективных T-алгебр, $\mathfrak{R}$ – категория правых конечно порожденных проективных R-модулей. Через Fr будем обозначать функторы из категории конечных множеств FSETS, сопоставляющие множеству свободную алгебру или модуль. Функторы

$$\mathbf{M}(R)\to T\to \mathbf{M}(R)$$

очевидным образом влекут существование функторов

$$\mathfrak{R}\xrightarrow{U}\mathfrak{P}\xrightarrow{D}\mathfrak{R},\qquad DU\cong \mathrm{Id},$$

которые являются непосредственным обобщением функторов типа замены колец (построение фактически дано в [8]). Имеет место коммутативная с точностью до естественных изоморфизмов диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{R} \arrow[r, "U"] & \mathfrak{P} \arrow[r, "D"] & \mathfrak{R} \\ & \mathrm{FSETS} \arrow[ul, "\mathrm{Fr}"] \arrow[u, "\mathrm{Fr}"] \arrow[ur, "\mathrm{Fr}"'] & \end{tikzcd}$$

Зафиксируем естественный изоморфизм $\alpha\colon \mathrm{UDFr}\xrightarrow{\cong}\mathrm{Fr}$ и для каждой пары гомоморфизмов $\pi\colon \mathrm{Fr}(X)\to A$, $\theta\colon A\to \mathrm{Fr}(X)$ таких, что $\pi\theta=1_A$, образуем гомоморфизмы

$$\varphi(\pi,\theta)\colon A\xrightarrow{\ \theta\ }\mathrm{Fr}(X)\xrightarrow{\alpha_X^{-1}}\mathrm{UDFr}(X)\xrightarrow{UD(\pi)}UD(A),$$

$$\psi(\pi,\theta)\colon UD(A)\xrightarrow{UD(\theta)}\mathrm{UDFr}(X)\xrightarrow{\ \alpha_X\ }\mathrm{Fr}(X)\xrightarrow{\ \pi\ }A.$$

Более конкретную информацию об этих гомоморфизмах можно найти в [11], [12]. В частности, если данное многообразие однородно, то они автоматически оказываются мономорфизмами. Фактически $UD(A)$ является наилучшим возможным приближением проективной алгебры (или модуля; описываемая конструкция подходит и для модулей) к свободной, а гомоморфизмы вида $\varphi(\pi,\theta)$ и $\psi(\pi,\theta)$ – единственно возможными (с точностью до простейших автоморфизмов свободных алгебр) претендентами на роли изоморфизмов между проективными и свободными алгебрами. Как уже было отмечено, первоначальный вариант теоремы 2.1 был получен с целью формально обратить некоторые множества гомоморфизмов вида $\varphi(\pi,\theta)$ или $\psi(\pi,\theta)$ и посмотреть, что из этого получится.

§ 3. Предаддитивные категории

Предаддитивной мы будем называть категорию $\mathfrak{K}$, множества морфизмов $\mathfrak{K}(X,Y)$ которой являются абелевыми группами, причем композиция морфизмов билинейна, а *полупредаддитивной* – категорию, множества морфизмов которой – коммутативные полугруппы с аддитивно записываемой операцией, с нейтральными элементами – нулями, а операция композиции морфизмов также билинейна. Примером полупредаддитивной категории может служить категория, в которой существуют конечные произведения и копроизведения, естественно канонически изоморфные, а также нулевые морфизмы. Под *аддитивным функтором* мы будем понимать функтор между (полу)предаддитивными категориями, переводящий нули в нули и суммы морфизмов в суммы образов слагаемых.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $\mathfrak{K}$ – категория с конечными прямыми произведениями, Σ – декартово мультипликативно замкнутое множество морфизмов $\mathfrak{K}$.*

1) *Если для каждого объекта X функтор $\mathfrak{K}(\_\,,X)$ является функтором в категории абелевых групп (или полугрупп с нулевыми элементами), то таким же свойством обладают и все функторы $\mathfrak{K}[\Sigma^{-1}](\_\,,X)$.*

2) *Если $\mathfrak{K}$ является (полу)предаддитивной категорией с конечными произведениями и копроизведениями, и они естественно канонически изоморфны, то $\mathfrak{K}[\Sigma^{-1}]$ обладает такими же свойствами, т.е. (полу)предаддитивна и имеет естественно канонически изоморфные конечные произведения и копроизведения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Хорошо известно, что свойство $\mathfrak{K}(\_\,,X)$ быть функтором в категорию абелевых (полу)групп равносильно заданию некоторых морфизмов вида $X\times X\to X$, $X\to X$, удовлетворяющих ряду известных свойств. Из теоремы 1.3 следует, что образы этих морфизмов в $\mathfrak{K}[\Sigma^{-1}]$ обладают аналогичными свойствами, откуда и получается заключение пункта 1).

2) Используется пункт 1) и дуальный к нему результат, а также теорема 1.3 и дуальная к ней. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{K}$ – полупредаддитивная категория. Определим категорию $\mathbf{M}(\mathfrak{K})$ следующим образом.

Объекты $\mathbf{M}(\mathfrak{K})$ – конечные упорядоченные последовательности элементов $\mathfrak{K}$. Морфизмами из объекта $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ в объект $(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)$ будут матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

где α_{ij} – морфизм категории $\mathfrak{K}$ из X_j в Y_i. Условия, наложенные на категорию $\mathfrak{K}$, позволяют определить композицию морфизмов как обычное умножение матриц.

Определен функтор вложения $\mathrm{In}\colon \mathfrak{K} \to \mathbf{M}(\mathfrak{K})$, вполне унивалентный и отображающий объект X в последовательность (X), а морфизм α в матрицу (α). Сопоставление категории $\mathfrak{K}$ категории $\mathbf{M}(\mathfrak{K})$, очевидно, есть функтор между подходящими категориями категорий. Свойства категории $\mathbf{M}(\mathfrak{K})$ приведены в следующей лемме.

Лемма 3.2. 1) $\mathbf{M}(\mathfrak{K})$ *есть полупредаддитивная категория* (*если* $\mathfrak{K}$ *предаддитивна, то предаддитивна и* $\mathbf{M}(\mathfrak{K})$), *в которой существуют конечные произведения, тождественно совпадающие с соответствующими копроизведениями. Функтор* In *является аддитивным.*

2) *Для каждого аддитивного функтора* G *из* $\mathfrak{K}$ *в категорию* $\mathfrak{L}$, *в которой произведения канонически изоморфны копроизведениям и существуют нулевые морфизмы* (*что автоматически делает* $\mathfrak{L}$ *полупредаддитивной*), *существует сохраняющий произведения и нулевые морфизмы* (*в частности, аддитивный*) *функтор* $G^+\colon \mathbf{M}(\mathfrak{K}) \to \mathfrak{L}$ *такой, что* $G = G^+ \,\mathrm{In}$. *Функтор* G^+ *определен однозначно с точностью до естественной эквивалентности.*

3) *Если в категории* $\mathfrak{K}$ *существуют конечные произведения, совпадающие с копроизведениями, то функтор* In *является эквивалентностью категорий.*

4) *Функтор* $\mathbf{M}$ *есть идемпотентная монада, т.е. естественные преобразования, задающие структуру монады, являются взаимно обратными изоморфизмами*:

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\mathfrak{K})) \cong \mathbf{M}(\mathfrak{K}).$$

Доказательство. Большая часть утверждений очевидна. Например, функтор G^+ сопоставляет объекту $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ категории $\mathbf{M}(\mathfrak{K})$ объект $G(X_1) \times G(X_2) \times \dots \times G(X_n)$. Чтобы определение было корректно, необходимо зафиксировать в $\mathfrak{L}$ некоторые естественные изоморфизмы. Их вариация приводит к эквивалентным функторам G^+. Что касается структуры монады, то для наших целей она не является существенной, и доказательство пункта 4) (также несложное) опускается.

Рассмотрим (полу)предаддитивную категорию $\mathfrak{K}$ и класс морфизмов $\Sigma \subseteq \mathrm{Mor}(\mathbf{M}(\mathfrak{K}))$, являющийся декартово мультипликативно замкнутым. По теореме 3.1 категория $\mathbf{M}(\mathfrak{K})[\Sigma^{-1}]$ будет (полу)предаддитивной. Обозначим через $\mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}]$ полную подкатегорию $\mathbf{M}(\mathfrak{K})[\Sigma^{-1}]$, объекты которой – образы объектов $\mathfrak{K}$ относительно композиции функторов P_Σ и In (говоря неформально, объекты "те же самые", что и в $\mathfrak{K}$). Очевидно, что она (полу)предаддитивна, и что определен аддитивный функтор из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}]$, который мы также будем обозначать через P_Σ.

Теорема 3.3. *Имеет место естественный изоморфизм категорий*

$$\mathbf{M}(\mathfrak{K})[\Sigma^{-1}] \cong \mathbf{M}\big(\mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}]\big).$$

Доказательство. Выясним, как устроена категория $\mathbf{M}(\mathfrak{K})[\Sigma^{-1}]$. Класс объектов – тот же, что и у $\mathbf{M}(\mathfrak{K})$, а значит, – и у $\mathbf{M}\big(\mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}]\big)$. Категория $\mathbf{M}(\mathfrak{K})[\Sigma^{-1}]$ (полу)предаддитивна и обладает канонически изоморфными конечными произведениями и копроизведениями. Следовательно, морфизмы этой категории можно естественным образом отождествить с матрицами, элементы которых есть морфизмы между объектами – образами объектов $\mathfrak{K}$, т.е. это морфизмы из $\mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}]$. Чтобы формальным образом указать функтор, устанавливающий изоморфизм категорий, заметим, что компоненты матриц, представляющих морфизмы, обратные к морфизмам из Σ, принадлежат $\mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}]$. Поэтому однозначно определен функтор из $\mathbf{M}(\mathfrak{K})[\Sigma^{-1}]$ в $\mathbf{M}\big(\mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}]\big)$, который делает коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{K} \arrow[r] \arrow[d, "P_\Sigma"'] & \mathbf{M}(\mathfrak{K}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{M}(P_\Sigma)"'] & \mathbf{M}(\mathfrak{K})[\Sigma^{-1}] \arrow[dl] \\
\mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}] \arrow[r] & \mathbf{M}\big(\mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}]\big) &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, что это и есть искомый изоморфизм.

Теорема 3.4. *Для каждого аддитивного функтора G из $\mathfrak{K}$ в (полу)предаддитивную категорию $\mathfrak{L}$ такого, что $\mathbf{M}(G)$ обращает морфизмы из декартово мультипликативного класса $\Sigma \subseteq \mathbf{M}(G)$, существует аддитивный функтор $G^\star_a\colon \mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}] \to \mathfrak{L}$ такой, что*

$$G = G^\star_a P_\Sigma.$$

Функтор $G^\star_a$ определен однозначно.

Доказательство. Существование функтора $G^\star_a$ следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}] \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
\mathfrak{K} \arrow[urr] \arrow[r] \arrow[d, "G"] & \mathbf{M}(\mathfrak{K}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{M}(G)"] & \mathbf{M}(\mathfrak{K})[\Sigma^{-1}] \arrow[dl] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathbf{M}\big(\mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}]\big) \\
\mathfrak{L} \arrow[r, "\mathrm{In}"] & \mathbf{M}(\mathfrak{L}) & &
\end{tikzcd}$$

в которой все не обозначенные стрелки однозначно определяются из контекста. Так как функтор In есть полное вложение, то по функтору $\mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}] \to \mathbf{M}(\mathfrak{L})$ однозначно строится искомый функтор. Легко заметить, что эта последовательность рассуждений обратима. А именно, по данной коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{K} \arrow[r, "G"] \arrow[d] & \mathfrak{L} \\ \mathfrak{K}_a[\Sigma^{-1}] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

однозначно восстанавливается и диаграмма, приведенная выше.

С помощью этой теоремы можно строить предаддитивные категории частных, т.е. универсальные Σ-обращающие объекты в категории предаддитивных категорий (в том же смысле, в каком обычные категории частных являются универсальными в категории всех категорий). Это делается следующим образом. Пусть $\mathfrak{A}$ – предаддитивная категория, Σ – произвольный класс морфизмов категории $\mathfrak{A}$. Рассматривая $\mathfrak{A}$ как полную подкатегорию $\mathbf{M}(\mathfrak{A})$, расширим Σ до минимального декартово мультипликативно замкнутого множества Σ_m, содержащего Σ. Теперь можно определить $\mathfrak{A}_a[\Sigma^{-1}]$ как полную подкатегорию $\mathbf{M}(\mathfrak{A})[\Sigma_m^{-1}]$, объекты которой – образы объектов $\mathfrak{A}$. Очевидно, что определен функтор из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}_a[\Sigma^{-1}]$, обладающий требуемым универсальным свойством.

Заметим, что этот результат был анонсирован в заметках [13], [14]. Как следствие получаются кольца частных. Возьмем предаддитивную категорию $\mathfrak{R}$ с одним объектом X, тогда центральную роль будет играть кольцо $R = \mathfrak{R}(X, X)$, категория $\mathbf{M}(\mathfrak{R})$ будет категорией свободных R-модулей конечного ранга с фиксированными базисами, морфизмы которой – матрицы с элементами из R. Условие декартовой мультипликативной замкнутости переформулируется так: если матрица A принадлежит Σ, то таковы же и блочные матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем называть это свойство *матричной мультипликативной замкнутостью.* (В русском переводе первого издания книги [1] множество Σ с несколько более сильным условием называлось мультипликативным.)

Теорема 3.5. *Если R – ассоциативное кольцо с единицей, Σ – множество матриц над R, которое матрично мультипликативно замкнуто, то существует кольцо $R[\Sigma^{-1}]$ и универсальный Σ-обращающий гомоморфизм колец $R \to R[\Sigma^{-1}]$, причем имеет место изоморфизм категорий*

$$\mathbf{M}(R)[\Sigma^{-1}] \cong \mathbf{M}\big(R[\Sigma^{-1}]\big).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теорем 3.3 и 3.4.

Кольца частных в смысле Бергмана [2] также допускают обобщение на случай предаддитивных категорий. Рассматривается предаддитивная категория $\mathfrak{A}$ и декартово мультипликативно замкнутое множество Σ морфизмов категории $\mathbf{P}\big(\mathbf{M}(\mathfrak{A})\big)$. Заметим, что эта категория предаддитивна и обладает произведениями, которые одновременно являются копроизведениями. Следовательно, категория частных $\mathbf{P}\big(\mathbf{M}(\mathfrak{A})\big)[\Sigma^{-1}]$ будет предаддитивной, и можно определить предаддитивную категорию $\mathbf{M}(\mathfrak{A})[\Sigma^{-1}]$ как полную подкатегорию $\mathbf{P}\big(\mathbf{M}(\mathfrak{A})\big)[\Sigma^{-1}]$ с теми же объектами, что и в $\mathbf{M}(\mathfrak{A})$, и предаддитивную категорию $\mathfrak{A}_a[\Sigma^{-1}]$ как полную подкатегорию $\mathbf{M}(\mathfrak{A})[\Sigma^{-1}]$ с теми же объектами, что и в $\mathfrak{A}$. Примерно так же, как делалось выше, проверяются универсальные свойства этих категорий, а также изоморфизм

$$\mathbf{M}(\mathfrak{A})[\Sigma^{-1}] \cong \mathbf{M}\big(\mathfrak{A}_a[\Sigma^{-1}]\big).$$

Наконец, рассмотрим конструкцию матричной локализации, принадлежащую Герасимову [3] и Малколмсону [4] (в [1] воспроизведен вариант, принадлежащий Герасимову, обозначения которого будут использоваться и в данной работе). Очевидно, что все построения почти дословно можно воспроизвести, заменяя кольцо R на предаддитивную категорию $\mathfrak{R}$, а элементы кольца – на морфизмы.

Таким образом, для данного класса морфизмов $\Sigma \subseteq \mathbf{M}(\mathfrak{R})$ такого, что вместе с морфизмами σ, τ в нем содержится и любой морфизм вида

$$\begin{pmatrix} \sigma & \delta \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$$

для любого подходящего δ и, кроме того, $1 \in \Sigma$, строится категория $\mathbf{BM}(\mathfrak{R}, \Sigma)$, объекты которой – пары объектов из $\mathbf{M}(\mathfrak{R})$, а морфизмы – блочные матрицы вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha' & \widetilde{\alpha} \\ \alpha^0 & {}'\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha^0 \in \Sigma.$$

Предполагается, что в $\mathbf{M}(\mathfrak{R})$ среди объектов есть и последовательность нулевой длины, так что некоторые из блоков могут быть пустыми. Композиция морфизмов определяется равенством

$$\alpha\beta = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha' & \widetilde{\alpha}\beta' & \widetilde{\alpha}\widetilde{\beta} \\ \alpha^0 & {}'\alpha\beta' & {}'\alpha\widetilde{\beta} \\ 0 & \beta^0 & {}'\beta \end{array}\right)$$

и, кроме того, определяется еще операция, похожая на сложение морфизмов

$$\alpha \oplus \beta = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha' & \beta' & \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} \\ \alpha^0 & 0 & {}'\alpha \\ 0 & \beta^0 & {}'\beta \end{array}\right).$$

Категория $\mathbf{BM}(\mathfrak{R}, \Sigma)$ факторизуется по следующей конгруэнции: блочные матрицы α и β эквивалентны тогда и только тогда, когда их компоненты в $\mathbf{M}(\Sigma)$ можно включить в соотношение вида

$$\begin{pmatrix} \alpha' & * & * & * \\ \alpha^0 & * & * & * \\ 0 & \sigma & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \tau & * & * \\ 0 & \beta^0 & {}'\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta' & \widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta} \\ 0 & 0 & {}'\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в котором $\sigma, \tau \in \Sigma$, а вместо звездочек могут находиться произвольные морфизмы.

Дословно воспроизводя доказательства работы [3], получаем в результате, что факторкатегория изоморфна категории $\mathbf{M}(\mathfrak{R}_a[\Sigma^{-1}])$. В частности, любой морфизм $\mathfrak{R}_a[\Sigma^{-1}]$ имеет вид $\alpha - \beta\sigma^{-1}\gamma$, где α – морфизм $\mathfrak{R}$, β, γ – морфизмы из $\mathbf{M}(\mathfrak{R})$, $\sigma \in \Sigma$.

В заключение упомянем работу [17], где рассматривается некоторое обобщение категорий частных, в котором, например, может увеличиваться класс объектов по сравнению с исходной категорией. По-видимому, по аналогии с некоторыми из доказанных в настоящей работе фактов можно сформулировать соответствующие вопросы и для обобщенных категорий частных в смысле [17]. Эти вопросы, однако, требуют отдельного изучения.

Замечание. Основные результаты данной работы анонсированы в [18]. Анонс предполагаемой второй части дан в [19] (фактически обе части делались параллельно и этим объясняются даты). После завершения данной статьи автору стали известны некоторые близкие по теме работы. В [20] доказана теорема, похожая на нашу теорему 1.4. В препринте [21, § 3, 4] дано явное описание обобщения конструкции Герасимова из [22] на случай предаддитивных категорий.

Список литературы

1. *Cohn P.* Free rings and their relations. London: Academic Press, 1985.
2. *Bergman G.* Coproducts and some universal ring constructions // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 200. P. 33–88.
3. *Герасимов В. Н.* Локализация в ассоциативных кольцах // Сиб. матем. журн. 1982. Т. 23. №6. С. 36–54.
4. *Malcolmson P.* Construction of universal matrix localizations // Lecture Notes in Math. 1982. V. 951. P. 117–131.
5. *Габриэль П., Цисман М.* Категории частных и теория гомотопий. М.: Мир, 1971.
6. *Almkvist G.* Fractional categories // Ark. Mat. 1968. V. 7. №5. P. 449–476.
7. *Shubert H.* Kategorien II. Berlin: Academie-Verlag, 1970.
8. *Lawvere F. W.* Functorial semantics of algebraic theoreies // Proc. Nat. Acad. Sci. USA 1963. V. 50. №5. P. 869–872.
9. *Тронин С. Н.* О некоторых свойствах алгебраических теорий многообразий линейных алгебр II. Универсальное обращение гомоморфизмов и расслоенные произведения теорий. // Деп. в ВИНИТИ 11.08.88, № 6510-В88.
10. *Тронин С. Н.* О некоторых свойствах финитарных алгебраических теорий // Тез. сообщ. V Сибирской школы по многообразиям алгебр. систем, 1–5 июля 1988 г. Барнаул, 1988. С. 68–70.
11. *Тронин С. Н.* О ретракциях свободных алгебр и модулей. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Кишинев: Институт математики с ВЦ АН Молдавской ССР, 1989.
12. *Тронин С. Н.* О коммутативных ассоциативных проективных алгебрах ранга 2 над совершенным полем // Матем. заметки. 1987. Т. 41. №6. С. 776–780.
13. *Герасимов В. Н.* О локализации полугрупп, категорий и колец // Пятый всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей (Новосибирск, 21–23 сентября 1982 г.). Новосибирск, 1982. С. 34–35.
14. *Фомина Н. В.* Категория частных и кольца частных // XVIII Всесоюзная алгебр. конференция. Кишинев, 11–18 сентября 1985 г. Тезисы сообщ. Часть 2. Кишинев, 1988. С. 240.

15. *Grothendieck A.* Categories fibrees et descente // Lecture Notes in Math. 1971. V. 224. P. 145–194.
16. *Maclane S.* Categories for the working mathematicians. New York: Springer-Verlag, 1971.
17. *Яковлев А.В.* Категория частных относительно функтора // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. Матем., мех., астрон. 1988. №1. С. 24–28.
18. *Tronin S. N.* On the universal inverting of matrices over preadditive category // Алгебра и анализ. Тезисы докладов междунар. научн. конференции, посвящ. 100-летию со дня рожд. Н.Г. Чеботарева (5–11 июня 1994 г., Казань). Часть 1. Изд-во Казанск. ун-та, 1994. P. 150–151.
19. *Тронин С.Н.* О категориях частных расслоенных категорий // 3 междунар. конф. по алгебре памяти М.И. Каргаполова (1928–1976), Красноярск, 23–28 авг. 1993: Тез. докл. Красноярск, 1993. С. 333.
20. *Day B.* Note on monoidal localization // Bull. Austral. Math. Soc. 1973. V. 8. №1. P. 1–16.
21. *Фаизов С.К.* Свободные произведения категорий и обращающие функторы // Препринт. Киев: Институт матем. АН УССР, 1982.
22. *Герасимов В.Н.* Обращающиеся гомоморфизмы колец // Алгебра и логика. 1979. Т. 18. №6. С. 648–663.

Казанский государственный университет

Поступила в редакцию
28.07.1994 и 28.06.1997