ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н.
Казань

Аннотация. В цилиндрической системе координат построено точное решение уравнений трехмерной задачи теории упругости для кругового цилиндра с учетом температурных членов. Уравнения построены с помощью соотношений Дюгамеля-Неймана. Задачу удалось свести к решению пяти отдельных уравнений относительно температуры, объемной деформации и комбинации перемещений. Решение представляет комбинацию тригонометрических, степенных и бесселевых функций.

В безразмерной системе координат α , β , γ (α - координата вдоль радиуса цилиндра, отнесенная к его внешнему радиусу *R*, β – угловая координата, γ - координата вдоль оси, отнесенная к высоте цилиндра *H*) строится точное решение системы уравнений трехмерной задачи теории упругости с учетом температурных членов.

Первые точные решения краевых задач трехмерной теории упругости без учета температурных членов построены в монографии [1]. Разрешающие уравнения задачи термоупругости приведены в работе [2], но до настоящего времени не удавалось построить их интегрируемых комбинаций, следовательно, получить их точное решение.

В данной работе построено общее решение этих уравнений для произвольного по высоте цилиндра распределения перемещений. Решение, как и в работе [1], удалось получить, введя дополнительное уравнение относительно объемной деформации цилиндра, известное ранее, но не использовавшееся при решении всей системы уравнений.

Систему разрешающих уравнений несвязанной задачи термоупругости при отсутствии массовых сил представим следующим образом

$$\left(\Delta+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)T=0\,,\qquad \left(\Delta+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\theta=0\,,\qquad \left(\Delta+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)w=-\frac{R}{(1-2\upsilon)}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\theta-2(1+\upsilon)\alpha_T T\right],$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)u-\frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial v}{\partial\beta}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\theta-2(1+\upsilon)\alpha_T T\right], \tag{1}$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)v+\frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial\beta}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\theta-2(1+\upsilon)\alpha_T T\right],$$

где r – внутренний радиус цилиндра, E , υ – модуль упругости и коэффициент Пуассона, T – температура, u , v , w – перемещения точек цилиндра, θ – объемная деформация, α_T – коэффициент линейного расширения, $\varepsilon=\dfrac{H}{R}$, $t=\dfrac{r}{R}$, $\Delta\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2}$,

$$\theta=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{\alpha}u+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right). \tag{2}$$

Отметим, что второе уравнение системы (1) имеет достаточно простой вид только при учете первого уравнения - уравнения теплопроводности. В противном случае в него входят температурные члены.

Как будет показано ниже, система (1) интегрируется. Уравнение (2) используется в качестве дополнительного условия, позволяющего определить «лишние» постоянные интегрирования, появляющиеся в результате повышения порядка системы после добавления уравнения относительно θ .

Периодическое в окружном направлении решение уравнения системы (1) ищется в виде

$$T(\alpha\,,\beta\,,\gamma)=T_n(\alpha\,,\gamma)\cos(n\beta),\qquad \theta(\alpha\,,\beta\,,\gamma)=\theta_n(\alpha\,,\gamma)\cos(n\beta), \tag{3}$$

$$w(\alpha\,,\beta\,,\gamma)=w_n(\alpha\,,\gamma)\cos(n\beta),\qquad u(\alpha\,,\beta\,,\gamma)=u_n(\alpha\,,\gamma)\cos(n\beta),\qquad v(\alpha\,,\beta\,,\gamma)=v_n(\alpha\,,\gamma)\sin(n\beta),$$

где n – любое натуральное число, либо нуль.

Замечание. С таким же успехом в соотношениях (3) можно поменять местами $\cos(n\beta)$ и $\sin(n\beta)$, а также представить решение в виде линейной комбинации этих функций, в том числе конечных или бесконечных сумм. Выбор одного из этих вариантов решения зависит только от вида краевых условий.

Относительно коэффициентов соотношений (3) получена система пяти отдельных уравнений

$$\nabla_n^2 T_n = 0, \qquad \nabla_n^2 \theta_n = 0, \qquad \nabla_n^2 w_n = -\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\theta_n - 2(1+\upsilon)\alpha_T T_n\right],$$

$$\nabla_{n+1}^2(u_n + v_n) = -\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{n}{\alpha}\right)\left[\theta_n - 2(1+\upsilon)\alpha_T T_n\right], \tag{4}$$

$$\nabla_{n-1}^2(u_n - v_n) = -\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{n}{\alpha}\right)\left[\theta_n - 2(1+\upsilon)\alpha_T T_n\right], \qquad \left(\nabla_n^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)$$

при дополнительном условии

$$\theta_n = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial u_n}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha}u_n + \frac{n}{\alpha}v_n + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w_n}{\partial\gamma}\right]. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что общими решениями первых двух уравнений системы (4) являются

$$T_n(\alpha, \gamma) = T_{mn}(\alpha)\cos(m\pi\gamma), \qquad \theta_n(\alpha, \gamma) = \theta_{mn}(\alpha)\cos(m\pi\gamma), \qquad \left(g_m = \frac{m\pi}{\varepsilon}\right),$$

$$T_{00}(\alpha) = B_{00}^1 + B_{00}^2 \ln\alpha, \quad T_{0n}(\alpha) = B_{0n}^1 \alpha^n + B_{0n}^2 \alpha^{-n}, \quad \theta_{00}(\alpha) = A_{00}^1 + A_{00}^2 \ln\alpha, \quad \theta_{0n}(\alpha) = A_{0n}^1 \alpha^n + A_{0n}^2 \alpha^{-n},$$

$$T_{mn}(\alpha) = B_{mn}^1 I_n(g_m\alpha) + B_{mn}^2 K_n(g_m\alpha), \qquad \theta_{mn}(\alpha) = A_{mn}^1 I_n(g_m\alpha) + A_{mn}^2 K_n(g_m\alpha), \quad (m \ge 0). \tag{6}$$

где A_{mn}^k , .B_{mn}^k – постоянные интегрирования, $I_n(g_m\alpha)$, $K_n(g_m\alpha)$ – модифицированные функции Бесселя [3]. Аналогично может быть построено решение, если поменять местами $\cos(m\pi\gamma)$ и $\sin(m\pi\gamma)$, или взять комбинацию этих функций.

Решение третьего уравнения системы (4) с учетом соотношений (6) представимо следующим образом

$$w_n = w_{mn}\sin(m\pi\gamma), \tag{7}$$

$$w_{mn} = \frac{R}{2(1-2\upsilon)g_m}\left[C_{mn}^1 I_n(g_m\alpha) + L_{mn}^1 \alpha\frac{dI_n(g_m\alpha)}{d\alpha} + + C_{mn}^2 K_n(g_m\alpha) + L_{mn}^2 \alpha\frac{dK_n(g_m\alpha)}{d\alpha}\right], \qquad (m > 0; \quad n \ge 0),$$

C_{mn}^k – постоянные интегрирования, $L_{mn}^k = A_{mn}^k - 2(1+\upsilon)\alpha_T B_{mn}^k$.

Пусть решение последней пары уравнений системы (4)

$$u_n = u_{mn}\cos(m\pi\gamma), \qquad v_n = v_{mn}\cos(m\pi\gamma). \tag{8}$$

При $m \ge 0$ $n = 0$, имеем $v_0 \equiv 0$, уравнения системы совпадают, а их общее решение

$$u_{00} = -\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{00}^1\alpha + D_{00}^2\alpha^{-1} + L_{00}^2\alpha\ln\alpha\right]. \tag{9}$$

$$u_{m0} = -\frac{R}{2(1-2\upsilon)g_m}\left[D_{m0}^1 I_1(g_m\alpha) + D_{m0}^2 K_1(g_m\alpha) + L_{m0}^1\alpha\frac{dI_1(g_m\alpha)}{d\alpha} - L_{m0}^2\alpha\frac{dK_1(g_m\alpha)}{d\alpha}\right], \quad (m > 0).$$

При $n \ge 1$ решение имеет вид

$$u_{01} + v_{01} = \frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{01}^1\alpha^2 + D_{01}^2\alpha^{-2} - L_{01}^2\right], \; u_{01} - v_{01} = \frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{03}^3 + D_{01}^4\ln\alpha - L_{01}^1\alpha^2\right], (m = 0, \; n = 1),$$

$$u_{0n}+v_{0n}=\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{0n}^{1}\alpha^{n+1}+D_{0n}^{2}\alpha^{-(n+1)}-L_{0n}^{2}\alpha^{-(n-1)}\right],$$

$$u_{0n}-v_{0n}=\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{0n}^{3}\alpha^{n-1}+D_{0n}^{4}\alpha^{-(n-1)}-L_{0n}^{1}\alpha^{n+1}\right],\quad (m=0\,,\;n>1)\,, \tag{10}$$

$$u_{mn}+v_{mn}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)g_m}\left\{D_{mn}^{1}I_{n+1}(g_m\alpha)+L_{mn}^{1}\alpha\frac{dI_{n+1}(g_m\alpha)}{d\alpha}+\right.$$
$$\left.+D_{mn}^{2}K_{n+1}(g_m\alpha)-L_{mn}^{2}\alpha\frac{dK_{n+1}(g_m\alpha)}{d\alpha}\right\},$$
$$u_{mn}-v_{mn}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)g_m}\left\{D_{mn}^{3}I_{n-1}(g_m\alpha)+L_{mn}^{1}\alpha\frac{dI_{n-1}(g_m\alpha)}{d\alpha}+\right.$$
$$\left.+D_{mn}^{4}K_{n-1}(g_m\alpha)-L_{mn}^{2}\alpha\frac{dK_{n-1}(g_m\alpha)}{d\alpha}\right\},\quad (m>0\,,\;n\geq 1).$$

Здесь D_{mn}^{k} – постоянные интегрирования. Справедливость полученных формул легко проверяется непосредственной подстановкой в уравнения с использованием любой компьютерной программы.

В результате выполнения дополнительного условия (5) получаем следующие соотношения

$$A_{00}^{1}=\frac{1}{2(1-2\upsilon)}\left[\frac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{(1-\upsilon)}\alpha_T B_{00}^{2}-2D_{00}^{1}\right],\qquad A_{00}^{2}=\frac{(1+\upsilon)}{(1-\upsilon)}\alpha_T B_{00}^{2}\,,$$

$$A_{m0}^{1}=\frac{1}{(3-4\upsilon)}\left[2(1+\upsilon)\alpha_T B_{m0}^{1}+C_{m0}^{1}-D_{m0}^{1}\right],\qquad A_{m0}^{2}=\frac{1}{(3-4\upsilon)}\left[2(1+\upsilon)\alpha_T B_{m0}^{2}+C_{m0}^{2}+D_{m0}^{2}\right],$$

$$A_{01}^{1}=\frac{2}{(3-2\upsilon)}\left[D_{01}^{1}+(1+\upsilon)\alpha_T B_{01}^{1}\right],\qquad A_{01}^{2}=\frac{1}{2(3-2\upsilon)}\left[D_{01}^{4}+4(1+\upsilon)\alpha_T B_{01}^{2}\right], \tag{11}$$

$$A_{0n}^{1}=\frac{1}{(3-4\upsilon)}\left[(n+1)D_{0n}^{1}+2(1+\upsilon)\alpha_T B_{0n}^{1}\right],\qquad A_{0n}^{2}=\frac{1}{(3-4\upsilon)}\left[2(1+\upsilon)\alpha_T B_{0n}^{2}-(n-1)D_{0n}^{4}\right],$$

Значения постоянных B_{mn}^{k}, C_{mn}^{k}, D_{mn}^{k} – определяются из граничных условий температурной и упругой задач. Параметры *m* и *n* определяются формой принятых краевых условий. Если граничные условия выражаются с помощью одной пары параметров, решение задачи имеет тот же вид. Когда краевые условия представляют конечную или бесконечную суммы, решение аналогичное. Отметим, что сходимость получившихся в ходе решения рядов следует из сходимости рядов для краевых условий.

В качестве примера рассмотрим осесимметричную деформацию цилиндрического резервуара $R=10$ м., $r=9.95$ м., $H=40$ м., под действием внутреннего давления $p=10$ атм. Его внешняя боковая поверхность имеет температуру $T(1\,,\gamma)=60-25\cos(\pi\gamma)$, торцы резервуара и его внутренняя поверхность термоизолированы, $E=7.4\cdot10^{4}$ *МПа*, $\upsilon=0.34$, $\alpha_T=23\cdot10^{-6}$ 1/*град.*. Торцы резервуара защемлены.

Установлено, что на перемещения больше влияет температурное поле, на напряжения - давление. Максимальные перемещения при этом не превышают 0.8 толщины резервуара. Максимальные напряжения $\sigma_{\gamma\gamma}/E$ на порядок выше остальных и реализуются в окрестности защемленных торцов, принимая значение $1.4\,10^{-4}$.

Литература

1. *Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра – Казань, изд-во Казанского ун-та, 2008, 207 с.*

2. *Коваленко А.Д. Избранные труды – Киев, Наукова думка – 1976 – 762 с.*

3. *Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 2-х т. М.: Наука 1973. Т 1. 294 с.*