УДК 517.958

О МОДЕЛИ ОНЗАГЕРА В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Л.У. Бахтиева

Аннотация

В малой окрестности критической точки изучается решение нелинейного интегрального уравнения Онзагера, описывающего ориентационный фазовый переход из изотропной в анизотропную (нематическую) фазу в системе сильно вытянутых немагнитных стержней. Исследуется термодинамическое состояние системы в указанной окрестности.

1. Введение

Термодинамические свойства системы сильно вытянутых цилиндрических стержней ($\delta = d/l << 1$, d – диаметр, l – длина стержня) с парным взаимодействием типа стерического отталкивания исследовались Онзагером в 1949 году (модель Онзагера исключенного объема). Результаты этих исследований подробно изложены в монографии [?]. Было показано, что в системе, ориентационно разупорядоченной (изотропной) при низких концентрациях, с увеличением концентрации происходит фазовый переход первого рода (со скачком концентрации) в ориентационно упорядоченную (анизотропную) фазу, трактуемую как жидкокристаллический нематик. Все термодинамические свойства изотропной фазы описываются равномерной функцией распределения ориентаций осей частиц ОФР $f(\mathbf{n}) = 1$ ($\mathbf{n}$ - орт оси стержня). Термодинамические свойства нематической фазы описываются отличной от единицы ОФР, имеющей единственный максимум в направлении директора (направлении преимущественной ориентации осей частиц) и инвариантной относительно поворотов вокруг этого направления и замены $\mathbf{n} \to -\mathbf{n}$. Для ОФР $f(\mathbf{n})$ Онзагер из условия минимума свободной энергии системы, вычисленной в приближении второго вириального коэффициента, получил нелинейное интегральное уравнение

$$\nu + ln f(\mathbf{n}') + \lambda \int B(\mathbf{n}, \mathbf{n}') f(\mathbf{n})\, d\mathbf{n} = 0, \tag{1}$$

где ядро $B(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \sqrt{1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2}$, $\mathbf{n}\mathbf{n}'$ – скалярное произведение ортов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$, $\lambda = 8\eta/(\pi\delta)$ – функция объемной концентрации $\eta = V_0\rho$, $V_0 = \pi d^2 l/4$ – объем частицы, $\rho = N/V$ – плотность системы. Интегрирование в (1) производится по поверхности сферы с элементом поверхности $d\mathbf{n}$, который в сферической системе координат с полярной осью, совпадающей с директором нематика, задается соотношением

$$d\mathbf{n} = (4\pi)^{-1} \sin\theta d\varphi d\theta.$$

Неизвестная постоянная ν определяется условием нормировки для $f(\mathbf{n})$

$$\int f(\mathbf{n})\, d\mathbf{n} = 1. \tag{2}$$

Поскольку ОФР $f(\mathbf{n})$ описывает нематик, она должна быть решением уравнения (1), удовлетворяющим, кроме условия нормировки (2), еще и следующим условиям:

a) $f(\mathbf{n}) = f(\theta) \quad (f(\mathbf{n})$ не зависит от угла $\varphi)$,

b) $f(\theta) = f(\pi - \theta)$,

c) $f(0) = f(\pi) = max$, других максимумов $f(\mathbf{n})$ не имеет.

Заметим, что в силу условия b) $f(\mathbf{n})$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра с четными индексами $P_{2s}(\mathbf{n}) = P_{2s}(\cos\theta)$), причем условию c) удовлетворяет лишь полином P_2.

Введем для удобства функцию $h(\mathbf{n}) = f(\mathbf{n}) - 1$. Потенцируя в обех частях уравнения (1), получим с условием нормировки (2) уравнение

$$h(\mathbf{n}) = -1 + \frac{\exp(-\lambda \int B(\mathbf{n}, \mathbf{n}')\, h(\mathbf{n})\, d\mathbf{n})}{\int \exp\left(-\lambda \int B(\mathbf{n}, \mathbf{n}')\, h(\mathbf{n})\, d\mathbf{n}\right) d\mathbf{n}} \tag{3}$$

Исследования [?] показали, что глобальное решение $h(\mathbf{n})$ уравнения (3) имеет три ветви. Изотропная фаза системы описывается ветвью $h_0(\mathbf{n}) = 0$. Ветвь $h_1(\mathbf{n}) \neq 0$, описывает анизотропную фазу и ответвляется от изотропной ветви в точке бифуркации $\rho = \rho_b$ влево. В окрестности точки бифуркации она разлагается в сходящийся ряд по целым степеням $\alpha = \rho - \rho_b$, это разложение вычислено в [?] с точностью до членов порядка $O(\alpha^{40})$ включительно. Анизотропная ветвь $h_2(\mathbf{n})$ ответвляется от ветви $h_1(\mathbf{n})$ вправо (вторичная бифуркация) в критической точке (точке фазового перехода) $\rho = \rho_* < \rho_b$. Для вычисления ветви $h_2(\mathbf{n})$ в [?] была предложена итерационная процедура, которая оказалась эффективной вне малой окрестности критической точки ρ_*. На рисунке 1 представлен график зависимости функций $h_i(\mathbf{n})$, $(i = 0, 1, 2)$ от плотности ρ, полученный в [1] при $V_0/\delta = 1$. Здесь $\|h_i\| = \sqrt{\int h_i^2(\mathbf{n})\, d\mathbf{n}}$ – нормы функций h_i.

Рис. 1. Зависимость $\|h_i\|$ от плотности ρ

В окрестности точки ρ_* значения норм $\|h_1\|$ и $\|h_2\|$ меняются очень быстро, поэтому в этой окрестности необходимо иметь асимптотику обеих анизотропных ветвей при $\rho \to \rho_* + 0$.

В настоящей работе развит алгоритм вычисления критической точки ρ_*, построены асимптотики ветвей $h_1(\mathbf{n})$, $h_2(\mathbf{n})$ и исследовано термодинамическое состояние системы в окрестности этой точки. Указанный алгоритм предложен Л.Д.Эскиным и был ранее применен при исследовании термодинамических свойств системы немагнитных эллипсоидальных частиц (модель Парсонса, [?]). Эффективность алгоритма была показана также в случае модели ориентационного фазового перехода в системе магнитных стержней [?]. В обоих случаях задача решалась в приближении P_2P_4. Численный эксперимент, проведенный в настоящей работе, показал, что удержание в ядре $B(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ интегрального уравнения (1) слагаемых с $P_6, P_8, \ldots$ не приводит к существенному повышению точности расчетов. Статья является продолжением серии работ по исследованию фазовых переходов в системах осесимметричных частиц, написанных в соавторстве с Л.Д.Эскиным.

2. Вычисление критической точки фазового перехода

Ядро $B(\mathbf{n},\mathbf{n}')$ интегрального уравнения (1) может быть разложено в ряд Фурье по полиномам Лежандра ([?])

$$B(\mathbf{n},\mathbf{n}') = \sum_{k=1}^{\infty} b_k P_{2k}(\mathbf{n}\mathbf{n}').$$

Полагая

$$f(\mathbf{n}) = 1 + h(\mathbf{n}) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s P_{2s}(\mathbf{n}), \tag{4}$$

найдем с учетом соотношений ортогональности и теоремы сложения для полиномов Лежандра

$$\int B(\mathbf{n},\mathbf{n}')h(\mathbf{n})\,d\mathbf{n} = \frac{\pi}{2}\sum_{s=1}^{\infty} C_s a_s P_{2s}(\mathbf{n}'),$$

$$C_1 = -\frac{1}{16}, \quad C_s = -\frac{(2s-3)!!(2s-1)!!}{2^{2s+1}s!(s+1)!}, \quad s > 1.$$

Потенцируя в обеих частях равенства (1), умножая затем полученное равенство на $P_{2s}(\mathbf{n}')$ $(s = 0,1,2,...)$ и интегрируя по $\mathbf{n}'$, получим бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов a_s Фурье-Лежандра ОФР $f(\mathbf{n})$

$$a_s = (4s+1)\exp(\nu+\lambda)\int \exp(-\lambda A)P_{2s}(\mathbf{n}')\,d\mathbf{n}', \;\; s = 0,1,2,\ldots, \tag{5}$$

где для краткости обозначено

$$A(\mathbf{n}', a_1, a_2, ...) = \frac{\pi}{2}(-\frac{a_1}{16}P_2(\mathbf{n}') - \frac{a_2}{128}P_4(\mathbf{n}') - ...) = \sum_{s=1}^{\infty} C_s a_s P_{2s}(\mathbf{n}').$$

Величина $A(\mathbf{n}', a_1, a_2, ...)$ не зависит от φ'. Проинтегрировав в правой части (5) по φ' и обозначив $\cos\theta' = u$, найдем

$$a_s = (4s+1)\exp(\nu+\lambda)\int_0^1 \exp(-\lambda A)P_{2s}(u)\,du, \quad s = 0,1,2,\ldots.$$

Положив $s = 0 \quad (a_0 = 1, P_0 = 1)$, получим

$$\exp(\nu+\lambda) = (\int_0^1 \exp(-\lambda A)\,du)^{-1}.$$

Уравнения для неизвестных a_1, $a_2, ..., a_m$ $(m > 1)$ примут вид

$$\sigma_s = -a_s + (4s+1)\frac{\int_0^1 \exp(-\lambda A)\,P_{2s}(u)\,du}{\int_0^1 \exp(-\lambda A)\,du} = 0, \quad s = 1,...,m. \tag{6}$$

При $\lambda < \lambda_*$ $(\lambda_* = 8V_0\rho_*/(\pi\delta), \rho_*$ - подлежащая определению критическая плотность - точка фазового перехода) система уравнений (6) имеет единственное вещественное решение $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$, приводящее к изотропной ветви ОФР

$f_0(\mathbf{n}) = 1$, так что при $\lambda < \lambda_*$ интегральное уравнение (1) не имеет анизотропных вещественных решений. При $\lambda > \lambda_*$ существуют, кроме изотропной ветви $f_0(\mathbf{n}) = 1$, еще две анизотропные ветви $f_1(\mathbf{n})$ и $f_2(\mathbf{n})$. Это означает, что в точке $a_1 = a_1(\lambda_*)$, $a_2 = a_2(\lambda_*)$, ..., $a_m = a_m(\lambda_*)$, удовлетворяющей системе (6) при $\lambda = \lambda_*$, не выполняются условия теоремы о неявной функции. В результате для определения неизвестных $a_1, a_2, ..., a_m$ и λ_* получаем систему из (m+1) уравнений

$$\sigma_s = 0, \quad D(a_1, a_2, ..., a_m, \lambda_*) = 0, \quad s = 1, 2, ..., m, \tag{7}$$

где $D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_m} \\ --- & & --- \\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial \sigma_m}{\partial a_m} \end{vmatrix}$ - якобиан.

Систему (7) необходимо решать численно. Расчеты, проведенные методом итераций для значений $m = 2, 3, 4, 5$, привели при $V_0/\delta = 1$ к результату $\lambda_* = 9.45$ ($\rho_* = 3.71$). Разница между значениями λ_* при $m = 2$ и $m = 5$ не превысила 0.4 процента. Коэффициенты a_s в точке $\lambda = \lambda_*$ также практически не изменялись с ростом числа уравнений m. Таким образом, приближение P_2P_4 для ядра $B(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ (случай $m = 2$) приводит к достаточно точным результатам, позволяя избежать громоздких вычислений.

3. Построение решений f_1 и f_2

Система уравнений (6) в случае $m = 2$ имеет вид

$$\sigma_1 = \frac{\int_0^1 F\, P_2(u)\, du}{\int_0^1 F\, du} - \frac{x}{\lambda_1} = 0, \quad \sigma_2 = \frac{\int_0^1 F\, P_4(u)\, du}{\int_0^1 F\, du} - \frac{ky}{\lambda_1} = 0, \tag{8}$$

$x = a_1\lambda/16$, $y = a_2\lambda/128$, $F = \exp(xP_2 + yP_4)$, $\lambda_1 = 5\lambda/16$, $k = 40/9$.

Элементы якобиана $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ вычисляются по формулам

$$\alpha_1 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{I_{20}I_{00} - I_{10}^2}{I_{00}^2} - \frac{1}{\lambda_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} = \frac{I_{11}I_{00} - I_{01}I_{10}}{I_{00}^2},$$

$$\beta_1 = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = \frac{I_{11}I_{00} - I_{01}I_{10}}{I_{00}^2}, \quad \beta_2 = \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = \frac{I_{02}I_{00} - I_{01}^2}{I_{00}^2} - \frac{k}{\lambda_1},$$

где обозначено $I_{ij} = \int_0^1 P_2^i\, P_4^j\, F\, du$.

В силу равенства $D = 0$ в критической точке $\lambda_1 = \lambda_1^*$, $x_0 = x(\lambda_1^*)$, $y_0 = y(\lambda_1^*)$ строки определителя пропорциональны

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \mu. \tag{9}$$

Уравнения

$$I_{10}/I_{00} = x/\lambda_1, \quad I_{01}/I_{00} = ky/\lambda_1, \tag{10}$$

получающиеся из уравнений (8), дают совместно с уравнением (9) систему трех трансцендентных уравнений относительно неизвестных x_0, y_0, λ_1^*. Решая систему численно, получаем коэффициенты $a_1 = \frac{x_0}{\lambda_1^*}$, $a_2 = \frac{ky_0}{\lambda_1^*}$, а затем из системы (6) и остальные коэффициенты разложения (4) в критической точке $\lambda_1 = \lambda_1^*$, что позволяет вычислить нормы $\|h_i\|$ в этой точке: $\|h_1\| = \|h_2\| = 1.7$ ($\lambda_1^* = 2.95$).

Положим теперь

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + \Delta\lambda, \quad x = x_0 + \Delta x, \quad y(\lambda) = y_0 + \Delta y \tag{11}$$

и построим асимптотики решения $x(\lambda_1), y(\lambda_1)$ системы уравнений (8) при $\lambda_1 \to \lambda_1^* + 0$, что позволит найти коэффициенты a_s в разложении (4) для верхней и нижней анизотропных ветвей решения $f(\mathbf{n})$ в окрестности критической точки.

При $\Delta\lambda \to 0$ будем иметь $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Подставим равенства (11) в уравнения (8) и разложим обе части полученных равенств по степеням $\Delta\lambda, \Delta x, \Delta y$. В результате достаточно громоздких выкладок, которые опустим, придем с учетом уравнений (10) к следующей системе уравнений для Δx, Δy

$$\frac{1}{\lambda_1^*}(\Delta x - \frac{x_0\Delta\lambda}{\lambda_1^*})\psi = (\alpha_1 + \frac{1}{\lambda_1^*})\Delta x + \beta_1\Delta y + \sum_{i=2}^{\infty}\xi_i(\Delta x, \Delta y), \tag{12}$$

$$\frac{k}{\lambda_1^*}(\Delta y - \frac{y_0\Delta\lambda}{\lambda_1^*})\psi = \alpha_2\Delta x + (\beta_2 + \frac{k}{\lambda_1^*})\Delta y + \sum_{i=2}^{\infty}\nu_i(\Delta x, \Delta y),$$

$\psi = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^*})^k$, ξ_i, ν_i - формы i-ой степени относительно Δx, Δy.

С помощью тождества $\psi = 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^*}\psi$ перепишем систему (12) в виде

$$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^{*2}}\psi(x_0 + \Delta x) = \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta y + \sum_{i=2}^{\infty}\xi_i(\Delta x, \Delta y), \tag{13}$$

$$-\frac{k\Delta\lambda}{\lambda_1^{*2}}\psi(y_0 + \Delta y) = \mu(\alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta y) + \sum_{i=2}^{\infty}\nu_i(\Delta x, \Delta y).$$

В дальнейшем нам понадобятся квадратичные формы ξ_2, ν_2, для которых получаем представления

$$\xi_2 = a_{11}(\Delta x)^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}(\Delta y)^2,$$

$$\nu_2 = b_{11}(\Delta x)^2 + 2b_{12}\Delta x\Delta y + b_{22}(\Delta y)^2,$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{2}\sigma_{00}^{-1}(\sigma_{30} - 3\frac{x_0}{\lambda_1^*}\sigma_{20} + 2(\frac{x_0}{\lambda_1^*})^2\sigma_{10}),$$

$$b_{11} = \frac{1}{2}\sigma_{00}^{-1}(\sigma_{21} - \frac{ky_0}{\lambda_1^*}\sigma_{20} + 2(\frac{x_0}{\lambda_1^*})^2\sigma_{01} - 2\frac{x_0}{\lambda_1^*}\sigma_{11}),$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}\sigma_{00}^{-1}(\sigma_{21} - 2\frac{x_0}{\lambda_1^*}\sigma_{11} + 2\frac{kx_0y_0}{(\lambda_1^*)^2}\sigma_{10} - \frac{ky_0}{\lambda_1^*}\sigma_{20}),$$

$$b_{12} = \frac{1}{2}\sigma_{00}^{-1}(\sigma_{12} - 2\frac{ky_0}{\lambda_1^*}\sigma_{11} + 2(\frac{ky_0}{\lambda_1^*})^2\sigma_{01} - \frac{x_0}{\lambda_1^*}\sigma_{02}),$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}\sigma_{00}^{-1}(\sigma_{12} - \frac{x_0}{\lambda_1^*}\sigma_{02} + 2\frac{ky_0x_0}{(\lambda_1^*)^2}\sigma_{01} - 2\frac{ky_0}{\lambda_1^*}\sigma_{11}),$$

$$b_{22} = \frac{1}{2}\sigma_{00}^{-1}(\sigma_{03} - 3\frac{ky_0}{\lambda_1^*}\sigma_{02} + 2(\frac{ky_0}{\lambda_1^*})^2\sigma_{01}).$$

Нетрудно заметить,что ненулевое решение системы уравнений (13) следует искать в виде ряда по целым степеням $(\Delta\lambda)^{1/2}$, то есть в виде

$$\Delta x = \sum_{k=1}^{\infty} l_k (\Delta\lambda)^{k/2}, \quad \Delta y = \sum_{k=1}^{\infty} m_k (\Delta\lambda)^{k/2}. \tag{14}$$

Подставляя ряды (14) в систему уравнений (13) и сравнивая в обеих частях равенств (13) коэффициенты при $(\Delta\lambda)^{1/2}$, получим для коэффициентов l_1, m_1 одно уравнение $\alpha_1 l_1 + \beta_1 m_1 = 0$, откуда $l_1 = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} m_1$, m_1 пока остается неопределенным.

Сравнивая в обеих частях равенств (13) коэффициенты при первой степени $\Delta\lambda$, получим неоднородную систему нелинейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов l_2, m_2 разложений (14)

$$\alpha_1 l_2 + \beta_1 m_2 = -\frac{x_0}{(\lambda_1^*)^2} - (a_{11}(\frac{\beta_1}{\alpha_1})^2 - 2a_{12}\frac{\beta_1}{\alpha_1} + a_{22}) m_1^2, \tag{15}$$

$$\mu\alpha_1 l_2 + \mu\beta_1 m_2 = -\frac{k y_0}{(\lambda_1^*)^2} - (b_{11}(\frac{\beta_1}{\alpha_1})^2 - 2b_{12}\frac{\beta_1}{\alpha_1} + b_{22}) m_1^2. \tag{16}$$

Отношение левых частей в (15) и (16) равно μ, следовательно равно μ и отношение правых частей, а это позволяет определить m_1. Можно показать, что $\beta_1 = \alpha_2$. В результате найдем

$$m_1 = \pm\frac{1}{\lambda_1^*}\sqrt{\frac{k y_0 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_0}{(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_{11} - b_{11})(\frac{\alpha_2}{\alpha_1})^2 - 2(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_{12} - b_{12})\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_{22} - b_{22}}}, \tag{17}$$

$l_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} m_1$.

Таким образом, построен старший член асимптотики Δx и Δy при $\lambda_1 \to \lambda_1^*$.

Система (15)-(16) после определения m_1 сводится лишь к одному неоднородному уравнению и позволяет выразить l_2 через m_2. Чтобы определить m_2, надо сравнить в обеих частях равенств (13) коэффициенты при $(\Delta\lambda)^{3/2}$, для чего понадобятся явные выражения для форм ξ_3, ν_3, и выписать аналогичную (15)-(16) неоднородную систему для коэффициентов l_3, m_3. Условие разрешимости этой системы снова сводится к требованию, чтобы отношение правой части второго уравнения к правой части первого уравнения равнялось μ, это условие и дает необходимое уравнение для определения коэффициента m_2, а вместе с ним и l_2 во втором члене асимптотики Δx, Δy. Этот процесс может быть аналогично продолжен и далее.

Подставляя полученные значения Δx, Δy в (11) и вычисляя соответствующие коэффициенты a_1, a_2 в разложении (4), найдем решения h_1 и h_2 (знак «+» в (17) соответствует решению h_2, а знак «-» – решению h_1 с меньшей нормой). Результаты вычислений с точностью до двух слагаемых в разложениях (14) представлены на рис. 2.

Рис. 2. Зависимость $\|h\|$ от плотности ρ в окрестности критической точки

Использование полученных в настоящей работе результатов построения асимптотик Δx, Δy позволило значительно точнее определить $\|h_1\|$, $\|h_2\|$ вблизи ρ_*, чем это удавалось сделать ранее [?].

4. Уравнение состояния системы в окрестности критической точки

Полученные в пунктах 2 и 3 результаты позволяют исследовать термодинамические свойства рассматриваемой системы в окрестности критической точки фазового перехода.

Свободная энергия системы (с точностью до слагаемого, содержащего неизвестную функцию температуры и не влияющего на дальнейшие выкладки) выражается формулой [?]

$$F = NkT(\ln\eta + \int f(\mathbf{n})\ln f(\mathbf{n})\,d\mathbf{n} + \frac{\lambda}{4}\int B(\mathbf{n},\mathbf{n}')f(\mathbf{n})f(\mathbf{n}')\,d\mathbf{n}\,d\mathbf{n}'). \tag{18}$$

Воспользовавшись формулой $P = -\frac{\partial F}{\partial V}$, из (18) получаем соотношение, определяющее давление в системе

$$\overline{P} = \beta P = \rho(1 + \frac{2V_0\rho}{\pi\delta}I), \tag{19}$$

где $\overline{P}$ - безразмерное давление, $\beta = 1/kT$, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура, через I обозначен интеграл

$$I = \int B(\mathbf{n},\mathbf{n}')f(\mathbf{n})f(\mathbf{n}')\,d\mathbf{n}\,d\mathbf{n}' = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{a_1^2}{80} - \frac{a_2^2}{1152} - ...) = \frac{\pi}{2}(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_s a_s^2}{4s+1})$$

Результаты расчетов по формуле (19) до слагаемых $s = 10$ включительно представлены на рисунке 3 в виде графика зависимости безразмерного давления $\overline{P}$ от обратной плотности $1/\rho$ (уравнение состояния) в окрестности критической точки фазового перехода. Давление $\overline{P_0}$ соответствует решению f_0, давления $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ - решениям f_1 и f_2.

Рис. 3. График давления в окрестности критической точки ρ^*

Summary

A.A. Author1, B.B. Author2 (Фамилии авторов на английском языке). Название статьи на английском языке.

Литература

1. *R.F. Kayser, H.J. Raveche.* Bifurcation in Onsager's model of the isotropic-nematic transition //Phys. Rev. – 1978. –V. A17. – № 6.– P. 2067-72.

2. *Эскин Л.Д.* Уравнение Онзагера как уравнение Ляпунова-Шмидта // Известия вузов.Матем. – 1998. – N 8. – С. 71–78.

3. *Бахтиева Л.У., Эскин Л.Д.* О модели Парсонса в окрестности критической точки ориентационного фазового перехода в системе эллипсоидальных частиц // Исследования по прикладной математике. – 2004. – вып. 25. – С. 48–54.

4. *Бахтиева Л.У., Эскин Л.Д.* Приближение P_2, P_4 в теории ориентационных фазовых переходов в системе магнитных стержней // Исследования по прикладной математике. – 2006. – вып. 26. – С. 51–59.

5. *Эскин Л.Д.* Об интегральном уравнении теории фазовых переходов в системе магнитных стержней // ТМФ. – 1996. – Т 109.– N 3. – С. 427–440.

6. *Де Жен П.Ж.* Физика жидких кристаллов. – М.: Мир, 1977. – 400 с.