Известия вузов. Математика
2009, № 7, с. 77–81

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение, представленное членом редколлегии М.М. Арслановым

М.В. ЗУБКОВ

ОДНА ТЕОРЕМА О СИЛЬНО η-ПРЕДСТАВИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

Аннотация. В работе рассматриваются сильно η-представимые множества. Доказывается, что объединение Σ_2^0- и Π_2^0-множеств является сильно η-представимым.

Ключевые слова: вычислимость, линейный порядок, сильная η-представимость.

УДК: 510.53 : 512.562

Abstract. In this paper we consider strongly η-representable sets. We prove that the union of Σ_2^0- and Π_2^0-sets is strongly η-representable.

Keywords: computability, linear order, strong η-representability.

1. Введение. Данная работа находится на стыке теории вычислимости и теории линейных порядков. В определениях и обозначениях теории вычислимости мы придерживаемся книги Р.И. Соара [1]. Обозначим через ω множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \dots\}$, через $X - Y$ — теоретико-множественную разность множеств $X \subseteq \omega$ и $Y \subseteq \omega$; через $\overline{X}$ — дополнение $\omega - X$ множества $X \subseteq \omega$. Если f — некоторая функция, то $\operatorname{rang}(f) = \{y \mid (\exists x)[f(x) = y]\}$ — область ее значений. Пусть $f : A \times \omega \longrightarrow \omega$, тогда $\lim\limits_s f(x,s)$ определен и конечен, если существует такое число a_x, что $(\exists s_0)(\forall s > s_0)[f(x,s) = a_x]$. Нетрудно видеть, что если $f(x,s)$ для некоторого x монотонна по s и ограничена, то существует конечный предел $\lim\limits_s f(x,s)$.

Квантор $\exists!$ является сокращенной записью формулы "существует и единственный", т. е. $(\exists! x)[P(x)] \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\forall z)[P(x) \& ((P(y) \& P(z)) \to y = z)]$ для любого предиката P.

Линейный порядок $\langle |L|, <_L \rangle$ называется вычислимым, если основное множество $|L|$ и отношение порядка $<_L$ являются вычислимыми. Обозначим символом "$<$" стандартное отношение порядка на ω; η — порядковый тип плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего элементов; $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Существует вычислимая биекция из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Q}$. Всюду далее фиксируем такую функцию и ее значение на аргументе i обозначаем q_i.

Определение 1 ([2]). Пусть $\{a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\}$ — перечисление в порядке возрастания множества $A \subseteq \omega$. Тогда порядок L следующего порядкового типа:

$$\eta + a_0 + \eta + a_1 + \eta + a_2 + \eta + \cdots$$

Поступила 09.10.2008

называется сильным η-представлением множества A.

Множество A называется сильно η-представимым, если существует вычислимое сильное η-представление множества A.

Тьюринговая степень называется сильно η-представимой, если она содержит сильно η-представимое множество.

Дж. Розенштейн [3] установил, что каждое сильно η-представимое множество есть Δ^0_3-множество, он же доказал, что все Σ^0_2-множества являются сильно η-представимыми. С. Феллнер [4] доказал, что это верно для Π^0_2-множеств. М. Лерман [5] построил пример Δ^0_3-множества, не являющегося сильно η-представимым.

В работе Р.Г. Доуни [2] был поставлен вопрос об описании сильно η-представимых степеней. В частности, верно ли, что в каждой Δ^0_3-степени содержится сильно η-представимое множество? К. Харрис [6] получил отрицательный ответ на второй вопрос. Однако полного описания сильно η-представимых степеней и, тем более, сильно η-представимых множеств не известно.

В данной работе обобщаются выше упомянутые результаты Розенштейна и Феллнера, что является продвижением в описании сильно η-представимых множеств, следовательно, и степеней. А именно, установлено, что объединие Σ^0_2-множества с Π^0_2-множеством является сильно η-представимым множеством. Заметим, что существуют множества, представимые в виде такого объединения, но сами не принадлежащие ни одному из классов ни Σ^0_2, ни Π^0_2.

Действительно, если $A = B \cup C$, где $B \in \Sigma^0_2$, $C \in \Pi^0_2$, то $\overline{A} = \overline{C} \cap \overline{B} = \overline{C} - B$, т. е. дополнение любого такого множества A можно представить в виде разности двух Σ^0_2-множеств. Как известно [7], существует тьюринговая степень, содержащая разность некоторых Σ^0_1-множеств, но не содержащая ни одного Σ^0_1-множества. Непосредственно релятивизуя этот результат, получаем, что существует разность двух Σ^0_2-множеств, которая не является ни Σ^0_2-, ни Π^0_2-множеством.

2. Основной результат.

Определение 2 ([8])**.** Множество $\mathrm{supp}(F) = \{x \in \mathbb{Q} \mid F(x) > 1\}$ называется носителем функции $F : \mathbb{Q} \longrightarrow \omega$.

Определение 3 ([8])**.** Пусть $L = \langle |L|, <_L \rangle$ — линейный порядок и $F : |L| \longrightarrow \omega$ такая функция, что для любого $n > 1$ множество $F^{-1}(n) = \{y \mid F(y) = n\}$ конечно. Тогда функция F называется

1) псевдовозрастающей на L, если $(\forall x, y \in \mathrm{supp}(F))[x <_L y \Rightarrow F(x) < F(y)]$;

2) псевдонеубывающей на L, если $(\forall x, y \in \mathrm{supp}(F))[x <_L y \Rightarrow F(x) \le F(y)]$.

Предложение. *Пусть $f : \mathbb{Q} \times \omega \longrightarrow \omega$ такая, что*

1) *для любого $q \in \mathbb{Q}$ существует конечный предел $\lim\limits_s f(q, s)$;*

2) *множество $\{\lim\limits_s f(q, s) \mid q \in \mathbb{Q}\}$ бесконечно;*

3) $\langle \{q \in \mathbb{Q} \mid \lim\limits_s f(q, s) > 1\}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \cong \langle \omega, < \rangle$*;*

4) *для любого $s \in \omega$ функция $f(\cdot, s)$ псевдовозрастающая (псевдонеубывающая).*

Тогда функция F, определяемая равенством $F(q) = \lim\limits_s f(q, s)$, также псевдовозрастающая (псевдонеубывающая) на $\mathbb{Q}$.

Схема доказательства. Предположим, что $q, p \in \mathrm{supp}(F)$ и $q <_{\mathbb{Q}} p$. По определению F существует шаг s_0 такой, что $(\forall s \ge s_0)[f(q, s) = F(q) \& f(p, s) = F(p)]$. Так как $f(\cdot, s)$ псевдовозрастающая (псевдонеубывающая), то $F(q) = f(q, s) < f(p, s) = F(p)$ ($F(q) = f(q, s) \le f(p, s) = F(p)$ соответственно).

Осталось показать, что $F^{-1}(n)$ конечно для любого $n > 1$, если F — псевдонеубывающая функция (для псевдовозрастающей F утверждение очевидно). Пусть $F^{-1}(n)$ бесконечно для некоторого $n > 1$. В силу п. 3) существует только лишь конечное число отличных от n значений функции F, что противоречит п. 2).

Определение 4. Функция F называется X-предельно монотонной, если существует X-вычислимая функция $f(x, s)$ такая, что
1) $(\forall x)(\forall s_1)(\forall s_2)[s_1 < s_2 \longrightarrow f(x, s_1) \leq f(x, s_2)]$,
2) $(\forall x)[F(x) = \lim\limits_{s} f(x,\, s)]$.

Определение и некоторые свойства предельно монотонных функций можно найти в работах [2] и [8].

Теорема. *Пусть $A = B \cup C$ бесконечно, где $B \in \Sigma^0_2$ и $C \in \Pi^0_2$. Тогда множество A сильно η-представимо.*

Схема доказательства. В работе [8] доказывается, что если $A - \{0, 1\} = \mathrm{rang}(F) - \{0, 1\}$ для некоторой $\emptyset'$-предельно монотонной и псевдовозрастающей на $\mathbb{Q}$ функции F, то A — сильно η-представимое множество. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно построить такую функцию F.

Так как $B \in \Sigma^0_2$, $C \in \Pi^0_2$, то B и $\overline{C}$ вычислимо перечислимы относительно оракула $\emptyset'$. Пусть B_s и $\overline{C}_s$ — перечисления без повторений множеств B и $\overline{C}$, не содержащие 0 и 1. Без ограничения общности можно считать, что

— множество C бесконечно;

— если $x \in B_{k+1} - B_k$ для некоторого k, то существует такой шаг $t < k$, что $x \in \overline{C}_{t+1} - \overline{C}_t$;

— $|\overline{C}_{s+1} - \overline{C}_s| + |B_{s+1} - B_s| = 1$, т. е. за один шаг перечисляется ровно один элемент либо в B, либо в $\overline{C}$.

Действительно, пусть C конечно, тогда $A \in \Sigma^0_2$, следовательно, A является сильно η-представимым. Выберем бесконечное Δ^0_2 подмножество $C' \subset A$ и положим $B = A - C'$, $C = C'$, что обеспечит выполнение первого условия. Для выполнения второго условия поступаем следующим образом: если на некотором шаге в B должен будет перечислиться элемент, который еще в $\overline{C}$ не перечислился, то его сначала перечисляем в $\overline{C}$, а на следующем шаге — в B. Вообще говоря, при этом вместо дополнения множества C перечислится дополнение некоторого другого множества C', но как легко видеть $A = B \cup C'$. Выполнение третьего условия можно добиться соответствующей организацией процедуры перечисления. Нетрудно видеть, что существует $\emptyset'$-вычислимая последовательность $\{p^0_i\}^{\omega}_{i=1}$ такая, что

1) $p^0_1 <_{\mathbb{Q}} p^0_2 <_{\mathbb{Q}} \cdots <_{\mathbb{Q}} p^0_n <_{\mathbb{Q}} \cdots$

2) последовательность не ограничена сверху в $\mathbb{Q}$, т. е. $(\forall q \in \mathbb{Q})(\exists i)[q <_{\mathbb{Q}} p^0_i]$.

Шаг 0. Для $i \in \omega$ полагаем $f(p^0_i, 0) = i$, для $q \notin \{p^0_i\}^{\omega}_{i=1}$ полагаем $f(q, 0) = 1$.

Шаг $s + 1$. Пусть уже построено множество $P_s = \bigcup\limits_{i=0}^{\omega} \{p^s_i\}$ и определена такая функция $f(q, u)$, где $q \in \mathbb{Q}$ и $u \leq s$, что $\mathrm{supp}(f(\cdot, s)) = P_s$, и если $c \notin \overline{C}_s$, $c > 1$, то для некоторого элемента $p \in P_s$ $f(p, s) = c$.

В силу $|\overline{C}_{s+1} - \overline{C}_s| + |B_{s+1} - B_s| = 1$ возможны два случая.

1) Существует $x \in \overline{C}_{s+1} - \overline{C}_s$. Находим такой i_0, что $f(p_{i_0}, s) = x$. Пусть $(\forall i \in \omega)$ $[p^{s+1}_i = p^s_i]$. Функцию f в данном случае определяем следующим образом:

— для $i < i_0$ полагаем $f(p^{s+1}_i, s + 1) = f(p^s_i, s)$,

— для $i \geq i_0$ полагаем $f(p^{s+1}_i, s + 1) = f(p^s_{i+1}, s)$.

2) Существует $x \in B_{s+1} - B_s$. Находим такой i_0, что $f(p_{i_0}, s) < x < f(p_{i_0+1}, s)$. Так как $\mathbb{Q}$ — плотный линейный порядок, существует наименьший индекс j_0 такой, что $p_{i_0} <_{\mathbb{Q}} q_{j_0} <_{\mathbb{Q}} p_{i_0+1}$. Функцию f в данном случае определяем следующим образом:
— для $i \leq i_0$ полагаем $p_i^{s+1} = p_i^s$ и $f(p_i^{s+1}, s+1) = f(p_i^s, s)$,
— для $i = i_0 + 1$ полагаем $p_i^{s+1} = q_{j_0}$ и $f(p_i^{s+1}, s+1) = x$,
— для $i > i_0 + 1$ полагаем $p_i^{s+1} = p_{i-1}^s$ и $f(p_i^{s+1}, s+1) = f(p_{i-1}^s, s)$.

В обоих случаях положим $P_{s+1} = \bigcup\limits_{i=0}^{\omega} \{p_i^{s+1}\}$ и $f(q, s+1) = 1$ для $q \notin P_{s+1}$.

Из конструкции непосредственно следует, что f вычислима с оракулом $\emptyset'$, для любого $s \in \omega$ функция $f(\cdot, s)$ псевдовозрастающая на $\mathbb{Q}$ и $(\forall q \in \mathbb{Q})(\forall s \in \omega)[f(q,s) \leq f(q, s+1)]$. Кроме того, так как $\mathrm{supp}(f(\cdot, s)) = P_s$ для любого s, то $\mathrm{supp}(f(\cdot, s)) \subset \mathrm{supp}(f(\cdot, s+1)) \subset P = \bigcup\limits_{s \in \omega} P_s$.

Лемма 1. *Для любого i найдется такое число c, что $f(p_i^0, s) \leq c$ для всех s.*

Поскольку C бесконечно, то $C - \{0,1\} = \{c_0 < \cdots < c_n < \cdots\}$ и $c_j \notin \overline{C}_s$ для любого шага s.

Покажем, что $(\forall i > 0)(\forall s)[f(p_i^0, s) \leq c_i]$. Имеем $(\forall j)(\forall s)(\exists k = k(s))[f(p_{k(s)}^s, s) = c_j]$, например, на шаге 0 выполняется $f(p_{c_i}^0, 0) = c_i$. Причем, если для некоторого s имеем $p_{k(s+1)}^{s+1} \neq p_{k(s)}^s$, то на шаге $s+1$ в $\overline{C}$ перечисляется элемент меньший c_j, следовательно, существует не более чем $c_j - j$ таких шагов. Обозначим их соответственно $s_0 < s_1 < \cdots < s_m$, где $m \leq c_j - j$. Отметим, что $p_{k(s_i+1)}^{s_i+1} <_{\mathbb{Q}} p_{k(s_i)}^{s_i}$. Так как $p_{k(s_i)}^{s_i} = p_{k(s_i+1)+1}^{s_i+1}$, то $p_{k(s_i+1)}^{s_i+1} \geq_{\mathbb{Q}} p_{c_j - i}^0$, т. е. $p_{k(s_m+1)}^{s_m+1} \geq_{\mathbb{Q}} p_j^0$. В силу выбора шага s_m имеем $(\forall s > s_m)[f(p_{k(s_m+1)}^{s_m+1}, s) = c_j]$. Так как $f(\cdot, s)$ псевдовозрастающая, то $c_j = f(p_{k(s_m+1)}^{s_m+1}, s) \geq f(p_j^0, s)$.

Лемма 2. $\langle P, <_{\mathbb{Q}} \rangle \cong \langle \omega, < \rangle$.

Согласно второму случаю конструкции, если в множество B перечисляется какой-либо элемент x, то в множество P добавляется ровно один элемент. Других случаев добавления элементов в P нет. Следовательно, конструкция определяет взаимно однозначное соответствие между B и $P - \bigcup\limits_{i=1}^{\omega} \{p_i^0\}$, обозначим его через φ. Кроме того, если элемент x перечисляется в B на шаге s и для некоторого $q \in \mathbb{Q}$ выполняется $f(q,s) < x$, то $q <_{\mathbb{Q}} \varphi(x)$. В силу леммы 1 имеем $(\forall i)(\exists c)(\forall s)[f(p_i^0, s) \leq c]$, в силу сказанного выше из последнего утверждения следует $(\forall i)(\exists c)[|\{p \leq p_i^0 \mid p \in P\}| \leq c + i]$ и с учетом выбора последовательности $\{p_i^0\}_{i=1}^{\omega}$ получаем $\langle P, <_{\mathbb{Q}} \rangle \cong \langle \omega, < \rangle$.

В силу леммы 2 множество P можно записать в виде $P = \{p_0 <_{\mathbb{Q}} \cdots <_{\mathbb{Q}} p_n <_{\mathbb{Q}} \dots\}$.

Лемма 3. *Для любого $q \in \mathbb{Q}$ предел $\lim\limits_s f(q,s)$ определен и конечен.*

Пусть $q \in \mathbb{Q} - P$. Тогда на любом шаге s справедливо равенство $f(q,s) = 1$, и утверждение леммы выполняется тривиальным образом.

Пусть теперь $q = p_i$ для некоторого i. Тогда $(\exists j)[p_i \leq_{\mathbb{Q}} p_j^0]$. По лемме 1 $(\exists c)(\forall s)$ $[f(p_j^0, s) \leq c]$. Так как для любого s функция псевдонеубывающая, то имеем $(\forall s)[f(p_i, s) \leq f(p_j^0, s) \leq c]$.

Итак, для любого x функция $f(x, s)$ ограничена сверху и неубывает по s, следовательно, имеет конечный предел.

Таким образом, в силу предложения F является $\emptyset'$-предельно монотонной и псевдовозрастающей на $\mathbb{Q}$ функцией и следующая лемма завершает доказательство теоремы.

Лемма 4. $\mathrm{rang}(F) - \{0,1\} = A - \{0,1\}$.

Пусть $x \notin A$. Тогда существует такой шаг s_0, что $x \in \overline{C}_{s_0+1} - \overline{C}_{s_0}$, следовательно, $x \notin \mathrm{rang}(f(\cdot, s_0+1))$, а так как $(\forall s)[x \notin B_{s+1} - B_s]$, то и $(\forall s > s_0+1)[x \notin \mathrm{rang}(f(\cdot, s_0+1))]$. Предположим, что $x \in \mathrm{rang}(F)$. Согласно определению F найдется такой элемент $q \in \mathbb{Q}$, что $\lim\limits_s f(q,s) = x$, т. е. $(\exists s_0)(\forall s > s_0)[f(q,s) = x]$, что противоречит доказанному выше. Следовательно, $x \notin \mathrm{rang}(F)$.

Пусть $x \in A$. Тогда либо $(\forall s)[x \notin \overline{C}_{s+1} - \overline{C}_s]$, либо $(\exists s_1)(\exists s_2 > s_1)[(x \in \overline{C}_{s_1+1} - \overline{C}_{s_1})\&(x \in B_{s_2+1} - B_{s_2})]$. В обоих случаях по конструкции $(\exists s_0)(\forall s > s_0)(\exists! i)[f(p_i, s) = x]$ в первом случае $s_0 = 0$, во втором $s_0 = s_2$. Так как i единственный для каждой пары элементов x и s, то для $s > s_0$ корректно определена функция $i(x,s)$, принимающая на паре аргументов x и s соответствующее им значение i. Предположим, что для некоторого s выполняется $i(x,s) > i(x,s+1)$. Тогда $f(p_{i(x,s+1)}, s+1) = x = f(p_{i(x,s)}, s) < f(p_{i(x,s)}, s+1)$. Это противоречит тому, что $f(\cdot, s+1)$ псевдовозрастающая функция. Таким образом, $i(x,s)$ не возрастает по s, следовательно, у нее существует предел $\lim\limits_s i(x,s) = i_x$. Тогда $(\exists s')(\forall s > s')[f(p_{i_x}, s) = x]$, т. е. $\lim\limits_s f(p_{i_x}, s) = x$, следовательно, $x \in \mathrm{rang}(F)$.

Следствие. Если $A = A_1 - A_2$, где $A_i \in \Sigma^0_2$ $(i \in \{1,2\})$, то существует сильно η-представимое множество $B \equiv_T A$.

Пусть $A = A_1 - A_2$. Тогда $A = A_1 \cap \overline{A}_2$, и $\overline{A} = \overline{A}_1 \cup A_2$. Так как $\overline{A} \in \Pi^0_2$, то по теореме $\overline{A}$ есть сильно η-представимое множество.

Литература

[1] Соар Р.И. *Вычислимо перечислимые множества и степени.* – Казань: Казанск. матем. о-во, 2000. – 576 с.

[2] Downey R.G. *Computability theory and linear orderings* // Handbook of computable algebra. – Amsterdam: Elsevier, 1998. – V. 2. – P. 823–976.

[3] Rosenstein J. *Linear orderings.* – New York: Academic Press, 1982. – 487 p.

[4] Fellner S. *Recursive and finite axiomatizability of linear orderings* // Ph. D. Thesis, Rutgers. Univ., 1976.

[5] Lerman M. *On recursive linear orderings* // Lect. Notes Math. – 1981. – V. 859. – P. 132–142.

[6] Harris K. *η-representation of sets and degrees* // J. Symbolic Logic. – 2008. – V. 73. – P. 1097–1121.

[7] Арсланов М.М. *Иерархия Ершова.* – Казань: Изд-во КГУ, 2007. – 86 с.

[8] Kach A.M and Turetsky D. *Limitwise monotonic functions, sets and degrees on computable domaine* // submission (http://www.math.uconn.edu/~kach/mathematics/mymathematics.html).

М.В. Зубков

аспирант, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань ул. Кремлевская, д. 18,

`e-mail:` Maxim.Zubkov@ksu.ru

M.V. Zubkov

Postgraduate, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Maxim.Zubkov@ksu.ru