§3. Образ оператора. Ядро оператора. Ранг матрицы

Пусть $A: X \to Y$ – лин. оп-р. Мн-во всех в-в y из пр-ва Y таких, что $y = Ax$ для некоторого $x \in X$ называется областью значений или образом оп-ра и обозначается через $Im(A)$. Мн-во $Im(A)$ – лин. подпр-во пр-ва Y. Разм-ть под-ва $Im(A)$ называется рангом оп-ра A и обозначается $rank(A)$.

Мн-во всех в-в $x \in X$ таких, что $Ax = 0$, наз-ся ядром оп-ра A и обозначается через $Ker(A)$. Это множество – лин. подпр-во пр-ва X. Разм-ть подпр-ва $Ker(A)$ называется дефектом оператора A и обозначается через $def(A)$.

Для любого лин. оп-ра $A: X_n \to Y_m$

$$rank(A) + def(A) = n \qquad (1)$$

Пусть в пр-ве X дана некоторая система в-в $\{a^i\}_{i=1}^m$. Будем считать, что не все векторы этой системы нулевые. Тогда указанная система обязат. содержит линейно независимую подсистему векторов. В частности, она сама может быть линейно независимой.

Подсистема в-в $\{a^{i_k}\}_{i=1}^m \subset \{a^i\}_{i=1}^m$, состоящая из лин. независимых в-в, называется максимальной, если добавление к ней любого нового вектора из $\{a^i\}_{i=1}^m$ приводит к лин. зависимой системе.

Любые две максимальные лин. незав. подсис-ы данной системы содержат одно и тоже кол-во в-в. Рангом системы в-в называется количество в-в ее максимальной линейно независимой подсистемы.

Пусть $A(m,n)$ — произвольная прямоуг-я матрица. Будем трактовать её столбцы как систему в-в пр-ва $\mathbb{C}^m$. Ранг этой системы в-в назовём рангом матрицы $A(m,n)$.
Ранг м-цы A будем обозначать через $\mathrm{rank}(A)$.

Матрицу $A(m,n)$ можно трактовать и как систему строк из пр-ва $\mathbb{C}^n$. Для любой м-цы $A(m,n)$ ранг этой системы строк равен рангу системы её столбцов.

Пусть $A: X_n \to Y_m$, A_{eq} — матр. оп-ра A относительно произвольным образом фиксированных базисов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset X_n$ и $\{q_k\}_{k=1}^m \subset Y_m$. Тогда $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_{eq})$.

Ранг м-цы оп-ра инвариантен по отношению к выбору базисов, выбираемых при ее построении, и можно было бы дать эквивалентное определение ранга оп-ра как ранга его м-цы

Упражнения.

Упр ①. Доказать, что $\mathrm{Ker}(A)$ — лин. подпр-во пр-ва X для любого лин. оператора $A: X \to Y$.

Согласно определению $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$.
Пусть x, y — произвольные векторы из $\mathrm{Ker}(A)$, α, β — любые числа. Тогда $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$, т.е. лин. комбинация $\alpha x + \beta y$ принадлежит мн-ву $\mathrm{Ker}(A)$.

Упр ②. Доказать, что для любых допуст-х умножение прямоуг-х м-ц A, B справедливо нерав-во

$$\mathrm{rank}(AB) \le \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}.$$

Обозначим $C=AB$. Столбцы м-цы C лин. выр-ся через столбцы м-цы A, которые в свою очередь лин.-но выр.-ся через макс.-ю подсистему линейно независимых столбцов м-цы A. Число столбцов в этой подсистеме равно $\operatorname{rank}(A)$. Назовем столбцы этой подсистемы базисными. Можно сказать, что столбцы м-цы C принадлежат подпр-ву, натянутому на базисные столбцы м-цы A. След-но, число линейно незав-х столбцов матрицы C не может превышать $\operatorname{rank}(A)$. С др. стороны, строки м-цы C лин. выражаются через строки м-цы B. Проводя аналогичные рассуждения, заключаем, что $\operatorname{rank}(C) \le \operatorname{rank}(B)$.

Упр 3. Найти макс. лин-незав. подсистему следующей системы в-в пр-ва $\mathbb{R}^3$.

$$a^1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad a^2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \quad a^3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad a^4=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Векторы a^1, a^2 лин. независимы. Они образуют максим. лин. незав. подсистему, т.к. определители, сост-е из компонент в-в a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 соотв-но, равны нулю.

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&1\\3&1&1\end{vmatrix} = 2+2+9-6-1-6=0. \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix}1&3&-1\\2&2&0\\3&1&1\end{vmatrix} = 2-2+0+6-0-6=0. \qquad (3)$$

следовательно, в-ры a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 линейно зависимы. Это не единственная максим. лин. незав. подсистема.

Таким же св-ом обладают пары в-в a^1, a^3 и a^1, a^4. Любая из указ-х пар лин. независимых в-в образует базис подпр-ва, натянутого на векторы a^1, a^2, a^3, a^4. Ранг этой системы в-в равен двум.

Упр 4. Пусть $A: X_n \to Y_m$ - лин. оператор, $e^1 \dots e^n$ - базис пр-ва X_n. Доказать, что $Im(A) = L(Ae^1 \dots Ae^n)$, где $L(Ae^1 \dots Ae^n)$ - подпр-во пр-ва Y_m, натянутое на векторы $Ae^1 \dots Ae^n$.

Пусть $y \in Im(A)$. Тогда $y = Ax$ для некоторого вектора $x \in X_n$, т.е.

$$y = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) \in L(Ae^1 \dots Ae^n).$$

С др. стороны, если $y \in L(Ae^1 \dots Ae^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = Ax,$$

где $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т.е. $y \in Im(A)$. Значит,

$$Im(A) = L(Ae^1, \dots Ae^n).$$

Упр 5. Для след-х лин. преобразований ~~[illegible]~~ арифм. пр-ва R^3 построить базис образа, найти ранг и дефект.

Указание. Построить (Упр 4) векторы $A_2^{-1}, A_2^{2}, A_2^{3}$ + макс под.

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2+x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1-x_2-x_3,\ x_1-2x_2+x_3,\ x_1+x_2-2x_3)$

с) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1+x_2+x_3,\ x_1-x_2+x_3,\ x_1+x_2-x_3)$.

а) $\operatorname{rank}(A) = 1$, базис образа – $(1,1,1)$; $\det(A) = 2$.

б) $\operatorname{rank}(A) = 2$, базис образа – $(2,1,1)$, $(-1,-2,1)$;
$\det(A) = 1$.

с) $\operatorname{rank}(A) = 3$, базис образа – $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$;
$\det(A) = 0$.

Упр 6 Описать образ и ядро оп-ра диф-и D в пр-ве P_n полиномов ст. не выше n с вещ. коэф-ми.

Каждому эл-ту пр-ва P_n оп-р D ставит в соотв-е полином из P_{n-1}. Поэтому $Im(D) = P_{n-1}$, и можно считать, что $D: P_n \to P_{n-1}$. Любой полином нулевой степени (вещ-е число) оператор D обращает в ноль. Полиномы более высоких степеней в рез-те диф-я не могут обратиться в ф-ю, тождественно равную нулю. Поэтому $Ker(D) = P_0$.

Упр 7 Описать образ и ядро оп-ра проект-я P пр-ва X на подпр-во L_1 пар-но под-у L_2.

$Im(P) = L_1$, $Ker(P) = L_2$

Упр 8 отражения R пр-ва X относ. под-ва L_1 пар-но под-у L_2.

$Im(R) = X$, $Ker(R) = \{0\}$.

Упр (9) Найти образ и ядро лин. оп-ра A, действующего в геом. пр-ве V_3 по правилу: $Ax = [x, a]$, где a – фиксированный ненулевой вектор.

Образ – плоскость $(x, a) = 0$, ядро – прямая $[x, a] = 0$.

Указание. Для опр-я образа восп. упр 4. Постройте базис пр-ва V_3: в качестве первого вектора выберите a, второго – любой вектор e^1, ортогональный a, третьего – вектор $e^2 = [e^1, a]$. Найдите векторы $[e^1, a]$ и $[e^2, a]$, убедитесь что они ортог-ны, и проведите через начало координат натянутую на них плоскость.

Упр (10) Последние $n-r$ столбцов м-цы A ненулевые, в то время как первые r – линейно независимые.

Упр (11) Опишем метод окаймляющих миноров, кот можно применить для вычисления ранга матрицы.

1. Просм-м эл-ты матрицы. Если все они – нули, полагаем ранг равным нулю и останавливаем процесс.

2. Если найдем эл-т м-цы, отличный от нуля, то окаймляем его, т.е. составляем опр-ли 2го порядка, присоединяя к нему эл-ты др. строк и столбцов. Если все эти опр-ли второго порядка – нули, то, очевидно, у м-цы только один лин. незав. столбец (и 1 лин. нез. строка). Значит ранг матрицы равен единице.

3. Если обнаружен ненулевой опр-ль 2го порядка, то путем окаймления строим опр-ли 3го порядка, пока не получим среди них опр-ль, отличный от нуля и т.д. Если на k-ом шаге описанного алгоритма получен определитель, не равный нулю, а все опр-ли порядка k+1, построенные его окай-ем, — нули, то это означает, что ранг м-цы равен k.

М-ца $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ составлена из столбцов a^1, a^2, a^3, a^4 (упр 3, с 61). Следовательно, ее ранг равен двум. Покажем на примере этой м-цы, как работает метод окайм-х миноров. Заметим, что в матрице A содержится минор

$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, не равный нулю. Оба минора 3го порядка (2) и (3) окайм-е минор d, равны нулю. След-но, и этим методом мы получили $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Упр 12 Иногда при вычислении ранга матрицы бывает удобно предварительно выполнить элемент-е преобразования над ее строками, или столбцами (см [4], с 126, 134). Такие преобразования не нарушают лин. зав-ти и лин. независ-ти систем векторов. Найдем ранг м-цы

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

Сразу искать ранг этой м-цы методом окайм-х миноров дост. трудно, поэтому сначала упростим м-цу. Вычислим след-е преобразования:

1) из 2 строки вычтем первую, умноженную на 2;

г) из 3 строки м-цы вычтем 1ю, умноженную на 3;

д) из последней строки м-цы вычтем первую, умноженную на 2.

Получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -10 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Далее вычтем 2ю строку из 3й строки, и прибавим 2ю строку к четвертой строке,

получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в получившейся м-це минор 3го порядка $d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix}$ отличен от нуля.

Оба окаймляющих его минора 4го порядка равны нулю, т.к. 4я строка преобр-й м-цы состоит из нулей. Таким образом, ранг м-цы A равен трём.

Упр 13

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad d = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 2.$

в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $d = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ rank(A) = 2

Упр 14 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

При $\lambda = 0$ ранг м-цы равен 2, при $\lambda \neq 0$ ранг равен 3.

Упр 15 а) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$d = \begin{vmatrix} 31 & 17 & 43 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ rank (A) = 3 в) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 15 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 0 & \frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{86}{17} \\ 0 & \frac{581}{17} & -\frac{581}{17} & -\frac{581}{17} & -\frac{1162}{17} \\ 0 & \frac{1072}{17} & -\frac{1072}{17} & -\frac{1072}{17} & -\frac{2144}{17} \\ 0 & \frac{1397}{17} & -\frac{1397}{17} & -\frac{1397}{17} & -\frac{2794}{17} \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 0 & \frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{86}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$d=0$

rank(A) = 3.

Упр 17 $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

При $\lambda = 3$ ранг матрицы равен 2, при $\lambda \neq 3$ ранг равен 3.

Упр 18 $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 0 & \frac{6348}{47} & \frac{171}{47} & -\frac{19044}{47} & \frac{12}{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ rank (A) = 3.